МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ №10 (768)
ИЗДАЕТСЯ С 1992 г.
mat.1september.ru

издательский дом
1september.ru
Первое сентября
октябрь 2015
МАТЕМАТИКА Подписка на сайте www.1september.ru или по каталогу «Почта России»: 79073 (бумажная версия); 12717 (CD-версия)

В НОМЕРЕ

К материалам, обозначенным этим символом, есть дополнительные материалы в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru

УВАЖАЕМЫЕ ЧИТАТЕЛИ!

Все подписчики журнала имеют возможность получать электронную версию журнала.

Для получения электронной версии:

1. Откройте Личный кабинет на портале «Первое сентября» (www.1september.ru).
2. В разделе «Газеты и журналы/Получение» выберите свой журнал и кликните на кнопку «Я – подписчик бумажной версии».
3. Появится форма, посредством которой вы сможете отправить нам копию подписной квитанции. После этого в течение одного рабочего дня будет активирована электронная подписка на весь период действия бумажной.

МАТЕМАТИКА. ПЕРВОЕ СЕНТЯБРЯ

Методический журнал для учителей математики

Издается с 1992 г. Выходит один раз в месяц

РЕДАКЦИЯ:

Главный редактор: Л. Рослова
Отв. секретарь: Т. Черкавская
Редакторы: П. Камаев, О. Макарова, И. Коган
Дизайн макета: И. Лукьянов. Дизайн обложки: Э. Лурье
Корректор: Л. Громова. Верстка: Л. Кукушкина

Распространяется по подписке

Цена свободная
Тираж 22 000 экз.

Тел. редакции: **(499) 249-3460**
E-mail: **mat@1september.ru**
Сайт: **mat.1september.ru**

ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ДОМ «ПЕРВОЕ СЕНТЯБРЯ»
Главный редактор:
Артем Соловейчик (генеральный директор)
Коммерческая деятельность:
Константин Шмарковский (финансовый директор)
Развитие, IT и координация проектов:
Сергей Островский (исполнительный директор)
Реклама, конференции и техническое обеспечение Издательского дома:
Павел Кузнецов
Производство:
Станислав Савельев
Административно-хозяйственное обеспечение: Андрей Ушков
Педагогический университет:
Валерия Арсланьян (ректор)

ЖУРНАЛЫ ИЗДАТЕЛЬСКОГО ДОМА:
Английский язык – Е. Богданова,
Библиотека в школе – О. Громова,
Биология – Н. Иванова,
География – А. Митрофанов, и.о.
Дошкольное образование – Д. Тюттерин,
Здоровье детей – Н. Сёмина,
Информатика – С. Островский,
Искусство – О. Волкова,
История – А. Савельев,
Классное руководство и воспитание школьников –М. Битянова,
Литература – С. Волков,
Математика – Л. Рослова,
Начальная школа – М. Соловейчик,
Немецкий язык – М. Бузоева,
ОБЖ – А. Митрофанов,
Русский язык – Л. Гончар,
Спорт в школе – О. Леонтьева,
Технология – А. Митрофанов,
Управление школой – Е. Рачевский,
Физика – Н. Козлова,
Французский язык – Г. Чесновицкая,
Химия – О. Блохина,
Школа для родителей – Л. Печатникова,
Школьный психолог – М. Чибисова.

Иллюстрации: фотобанк Shutterstock
На с. 1 и с. 64 — коллажи из иллюстраций, взятых с сайтов: https://www.flickr.com; toqow.uhostfull.com: иллюстрации из книги «A summer's day at Hampton Court, being a guide to the palace and gardens; with an illustrative catalogue of the pictures». Jesse, Edward, 1780-1868; https://farm3.staticflickr.com; http://worlds.travel

УЧРЕДИТЕЛЬ:
ООО «ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ДОМ «ПЕРВОЕ СЕНТЯБРЯ»
Зарегистрировано ПИ №ФС77-58424 от 25.06.14 в Роскомнадзоре
Подписано в печать: по графику 27.06.15, фактически 27.06.15 Заказ №______
Отпечатано в ОАО «Первая Образцовая типография» филиал «Чеховский печатный двор» ул. Полиграфистов, д. 1, Московская область, г. Чехов, 142300; Сайт: www.chpd.ru; E-mail: sales@chpk.ru; факс: 8(496)726-54-10, 8(495)988-63-76

АДРЕС РЕДАКЦИИ И ИЗДАТЕЛЯ:
ул. Киевская, д. 24, Москва, 121165
Телефон/ факс: **(499) 249-3138**
Отдел рекламы: **(499) 249-9870**
Сайт: **1september.ru**
facebook.com/School.of.Digital.Age

ИЗДАТЕЛЬСКАЯ ПОДПИСКА:
Телефон: **(499) 249-4758**

ПОДПИСНЫЕ ИНДЕКСЫ:
Почта России: бумажная версия – **79073**; CD-версия – **12717**

ПРОБЛЕМ НЕ СТАНОВИТСЯ МЕНЬШЕ

Л. РОСЛОВА

Вот уже как несколько десятилетий прошло с тех пор, как был провозглашен лозунг «Математика для всех, математика для каждого». За этим последовали попытки создать учебник по математике для гуманитариев, усилить практико-ориентированную направленность курса математики, понизить уровень требований к выпускникам; последняя — создать экзамен базового уровня. Потребность понятна. Но в очередной раз думается о том, что у прекрасной идеи могут быть такие реализации, которые эту идею и похоронят.

Я вспоминаю, как мы радовались, придя в старшую школу и не обнаружив в классе всех наших двоечников и хулиганов. Они тоже пошли учиться, но в различные училища. И навещая нас, учителей и школу, они с восторгом рассказывали, как им интересно осваивать свои профессии, а также о том, каких успехов они достигают в освоении школьных предметов. Они все выросли в прекрасных специалистов, хороших людей. Они не хуже, просто все мы разные и у каждого свой путь. А школа была «заточена» не на их интересы, которые лежали в практической сфере, а на наши, лежавшие в сфере познавательной.

Недавно коллеги посетовали на то, что сейчас частенько в сельских школах остаются в старших классах только те, кто не хочет учиться, кому все равно, сдаст он ЕГЭ или не сдаст, у кого нет никаких целей в жизни, никаких потребностей. И тем не менее мы снизили уровень требований для получения аттестата практически до нуля, только для того, чтобы эти аттестаты им выдать.

Получается, что, с одной стороны, мы говорим об инклюзии — включении детей с особенностями развития в процесс обучения в школе, с другой — мы стараемся не замечать, что в школе остаются только те, кто не хочет учиться. Это прекрасно, что мы пытаемся поменять наше сознание и уйти от ярлыков — «троечник», «инвалид», «хулиган». Что пытаемся увидеть друг друга такими, какие мы есть, и принять. Боюсь только, что, не научившись понимать тех, кого не можем дотянуть до ЕГЭ, не научившись соответствовать их образовательным потребностям, а они ведь есть у любого ребенка (достаточно вспомнить горящие взоры первоклассников), мы не имеем шансов понять и вновь прибывших, куда более сложных для общения и обучения. Потому что одного человеколюбия здесь не достаточно. Нужны научно обоснованное понимание проблем и соответствующие каждой проблеме методики обучения и воспитания. И надо бы еще определиться с тем, единые ли требования мы будем предъявлять ко всем выпускникам школы. Готовы ли мы?

В общем, мне кажется, что настало время разобраться в проблеме. Вопрос только в том, кто может это сделать.

Г. ЛЕВИТАС,
г. Москва

ЭТИ ВЕЧНЫЕ ТАБЛИЦЫ

Вот это новость! Настенным таблицам по математике 310 лет. Мы как-то всегда считали, что учебно-наглядные пособия стали появляться в школах в конце XIX – начале XX веков. А тут 1705 год! И что особенно интересно, что этот вид средств обучения по-прежнему жив и востребован в наше время — время электронных средств обучения.

Настенная таблица нужна по крайней мере в двух педагогических ситуациях.

Ситуация первая. Ученику срочно понадобилась некоторая справка. Если мы можем предвидеть, какая это справка, и если эта справка может понадобиться многим ученикам, то ей место в ***справочной настенной таблице***. Такой справкой может быть формула, текст теоремы да и просто таблица квадратов чисел первой сотни. Разумеется, весь этот материал имеется в Интернете и ученик может получить его через сотовый телефон. Но пока он будет искать его, он может отвлечься на другой материал в том же Интернете, да и сам поиск занимает вполне ощутимое время урока.

Ситуация вторая. Учителю срочно понадобился опорный материал для постановки задания перед классом. Если мы можем предвидеть, какой это материал и если этот материал может понадобиться сколько-нибудь часто, то ему место в ***рабочей настенной таблице***. Такой справкой может быть чертеж опорной задачи, незаконченный текст и т.д. Разумеется, весь этот материал можно разместить в интерактивной доске. Но хорош он и в настенной таблице, висящей на боковой стене и не занимающей места на передней стене класса.

Воспользуемся случаем, чтобы напомнить, какие таблицы особенно нужны в преподавании математики.

Таблица «Основные свойства арифметических действий» содержит девять аксиом поля и уже поэтому может быть полезной не только в начальной школе, но и в профильных старших классах (рис. 1).

Основные свойства

сложения	**умножения**
1. $a + b = b + a$.	**2.** $ab = ba$.
3. $a + (b + c) = (a + b) + c$.	**4.** $a(bc) = (ab)c$.
5. $a(b + c) = ab + ac$.	
6. $a + 0 = a$.	**7.** $a \cdot 1 = a$.
8. $a + (-a) = 0$.	**9.** $a \cdot \frac{1}{a} = 1$, если $a \neq 0$.

Рис. 1

Таблицы «Действия с дробями» и «Действия с десятичными дробями» нужны в 5-х и в 6-х классах (рис. 2 и 3). Всякий раз, когда ученик затрудняется в действиях с дробями, учитель может обратить его внимание на эти таблицы. Постепенно ученики приучатся обращаться к ним за помощью. Кроме таблицы квадратов чисел первой сотни (рис. 4), нужна и настенная таблица простых чисел (рис. 5).

Обыкновенные дроби

1) $\frac{2}{3}=\frac{2\cdot 5}{3\cdot 5}=\frac{10}{15}$;

2) $\frac{3}{7}+\frac{2}{7}=\frac{5}{7}$, $\frac{2^{\backslash 8}}{3}+\frac{1^{\backslash 3}}{8}=\frac{19}{24}$, $\frac{5^{\backslash 2}}{6}+\frac{1^{\backslash 1}}{12}=\frac{11}{12}$, $\frac{3^{\backslash 3}}{8}+\frac{1^{\backslash 4}}{6}=\frac{13}{24}$;

3) $\frac{3}{7}-\frac{2}{7}=\frac{1}{7}$, $\frac{2^{\backslash 8}}{3}-\frac{1^{\backslash 3}}{8}=\frac{13}{24}$, $\frac{5^{\backslash 2}}{6}-\frac{1^{\backslash 1}}{12}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$, $\frac{3^{\backslash 3}}{8}-\frac{1^{\backslash 4}}{6}=\frac{5}{24}$;

4) $\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{7}=\frac{3\cdot 2}{5\cdot 7}=\frac{6}{35}$;

5) $\frac{3}{5}:\frac{2}{7}=\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{2}=\frac{3\cdot 7}{5\cdot 2}=\frac{21}{10}$;

6) $2\frac{1}{7}=\frac{2\cdot 7+1}{7}=\frac{15}{7}$.

Рис. 2

Десятичные дроби

1)

+		0,	3	4	5
	1	2,	4		
	1	2,	7	4	5

2)

–	1	2,	7	4	5
		0,	3	4	5
	1	2,	4		

3)

×	0,	5	6	(2)
		2,	4	(1)
1,	3	4	4	(3)

4) $9{,}99 : 3{,}7 = 99{,}9 : 37 = 2{,}7$

×10 ×10

Рис. 3

Квадраты натуральных чисел от 10 до 99

Единицы

Десятки

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

Рис. 4

Простые числа первой тысячи

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37
41	43	47	53	59	61	67	71	73	79	83	89
97	101	103	107	109	113	127	131	137	139	149	151
157	163	167	173	179	181	191	193	197	199	211	223
227	229	233	239	241	251	257	263	269	271	277	281
283	293	307	311	313	317	331	337	347	349	353	359
367	373	379	383	389	397	401	409	419	421	431	433
439	443	449	457	461	463	467	479	487	491	499	503
509	521	523	541	547	557	563	569	571	577	587	593
599	601	607	613	617	619	631	641	643	647	653	659
751	757	761	769	773	787	797	809	811	821	823	827
829	839	853	857	859	863	877	881	883	887	907	911
919	929	937	941	947	953	967	971	977	983	991	997

Рис. 5

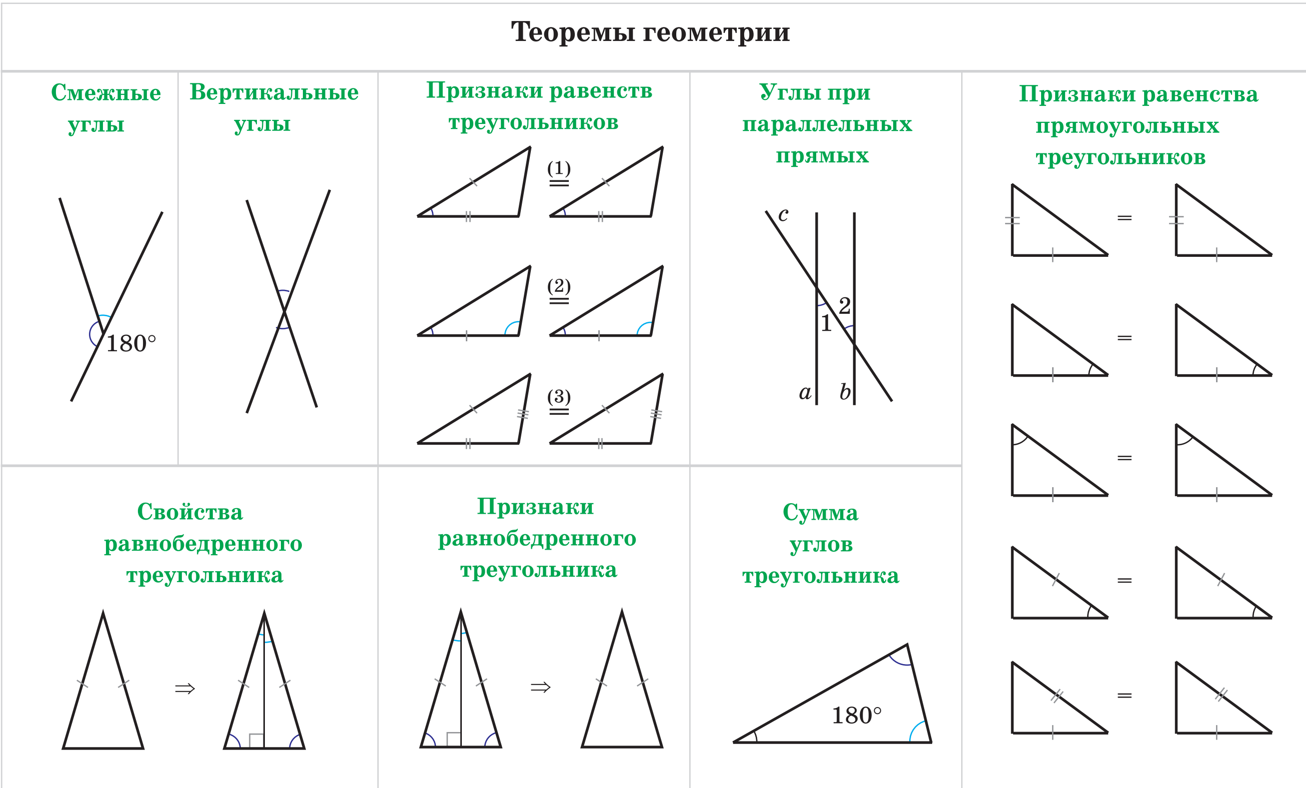


Рис. 6

Настоятельно рекомендую иметь таблицы с теоремами геометрии (рис. 6).

На них помещены чертежи, позволяющие быстро вспомнить ту или иную теорему.

Нужны для курса геометрии и рабочие таблицы. Представляется весьма полезным создание таблиц по материалам книг Е.М. Рабиновича «Задачи и упражнения на готовых чертежах».

Что касается курса алгебры, то здесь желательно иметь таблицы с графиками функций. На рисунке 7 показана таблица «График линейной фукции $y = ax + b$». Она содержит справочную часть и рабочую часть. По справочной части можно восстановить содержание теоремы о графике линейной функции (графиком функции $y = ax + b$ является прямая, проходящая через точки $(0; b)$ и $(1; a + b)$. Остальная часть этой таблицы — справочная. Имеющиеся в ней три чертежа содержат все девять видов графиков линейной функции (при трех различных по знаку коэффициентах a и трех различных по знаку коэффициентах b). Выполнить эту таблицу нужно в цвете, чтобы графики на каждом чертеже отличались друг от друга. Тогда по таблице можно ставить такие вопросы: «На каком графике a положительно, b отрицательно?» Ответ: рисунок a зеленого цвета. И наоборот: «Какой знак имеют коэффициенты на синем графике третьего рисунка?»

Аналогичные таблицы с графиками квадратичной функции, степенных функций, показательной и логарифмической функций даны на рисунках 8 и 9.

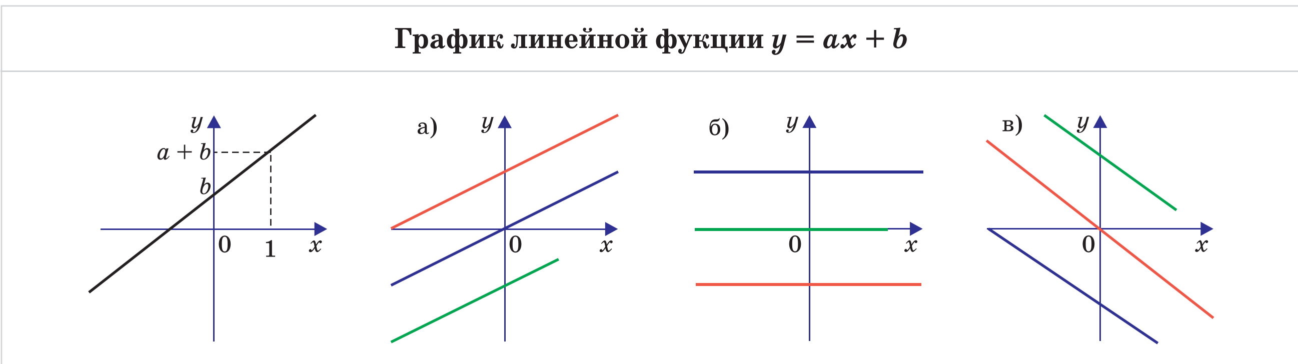


Рис. 7

Квадратичные функции

$y = ax^2 + bx + c \qquad D = b^2 - 4ac$

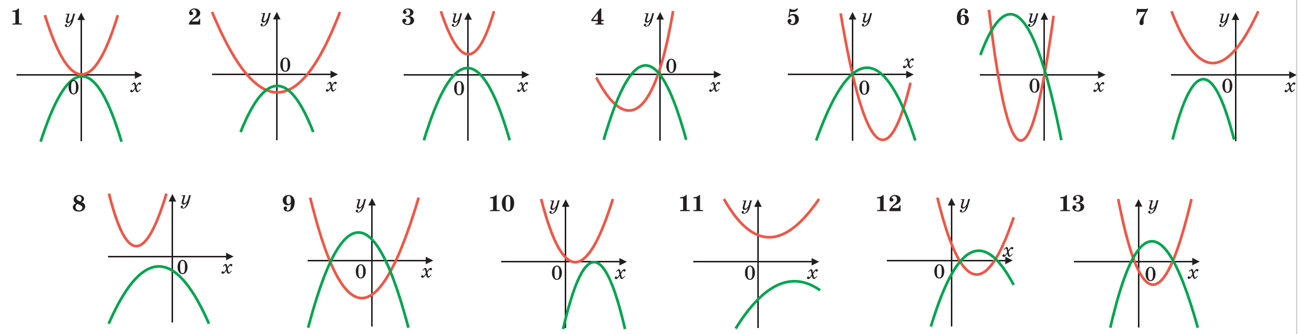
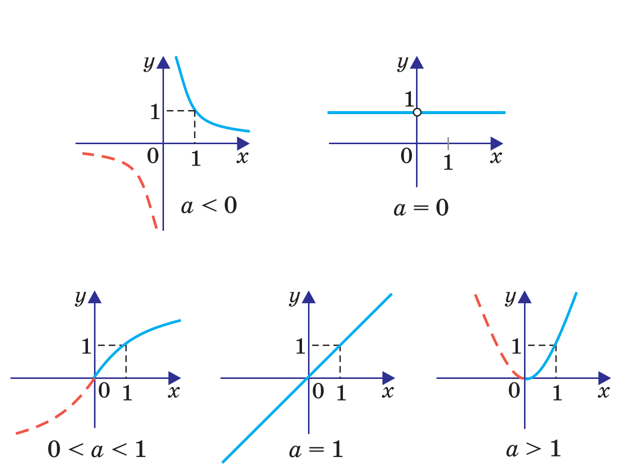


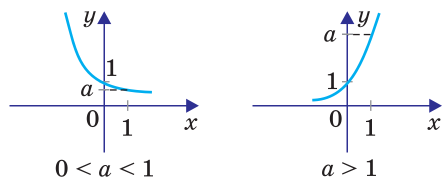
Рис. 8

Графики функций

Графики степенных функций $y = x^a$



Показательная функция $y = a^x$



Логарифмическая функция $y = \log_a x$

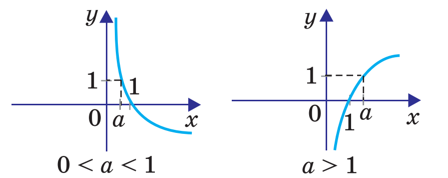


Рис. 9

Синусы

Десятки градусов	Градусы											Десятки градусов	Минуты								
	0°	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°		1′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′
0°	0,000	018	035	052	070	087	104	122	139	156	174	80°	2	4	5	7	9	11	12	14	16
10°	174	191	208	225	242	259	276	292	309	326	342	70°	2	3	5	7	8	10	12	13	15
20°	342	358	375	391	407	423	438	454	470	485	500	60°	1	3	5	8	8	9	11	13	14
30°	500	515	530	545	559	574	588	602	616	629	643	50°	1	3	4	6	7	8	10	11	13
40°	643	656	669	682	695	707	719	731	743	755	766	40°	1	3	4	5	6	8	9	10	11
50°	766	777	788	799	809	819	829	839	848	857	866	30°	1	2	3	4	5	6	7	8	9
60°	866	875	883	891	899	906	914	920	927	934	940	20°	1	1	2	3	3	4	5	5	6
70°	940	946	951	956	961	966	970	974	978	982	985	10°	0	1	1	2	3	3	4	5	5
80°	985	988	990	992	994	996	998	999	999			0°	0	1	1	1	1	1	1	1	1
										1,000	1,000	0°	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	10°	9°	8°	7°	6°	5°	4°	3°	2°	1°	0°		1′	12′	18′	24′	30′	36′	7′	8′	9′

Косинусы

Рис. 10

Значения тригонометрических функций некоторых углов

	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\text{tg}\,\alpha$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

Рис. 11

Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника

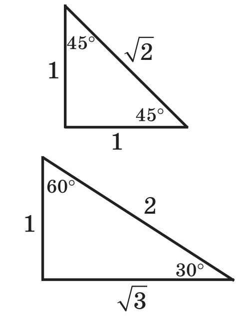


Рис. 12

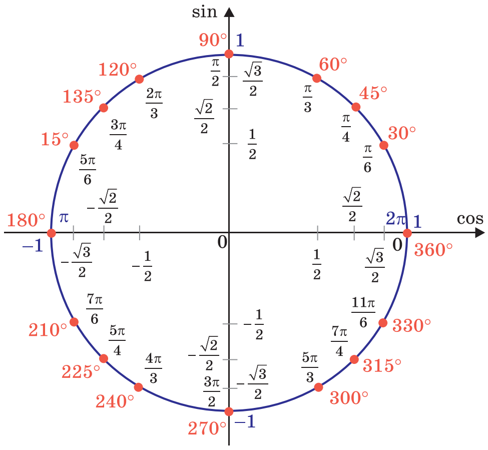


Рис. 13

Велико значение настенных таблиц в преподавании тригонометрии. При этом я не согласен с учителями, пользующимися таблицей, показанной на рисунке 11.

По этой таблице можно только списывать значения тригонометрических функций углов в 30° 45° и 60°. Значительно полезнее таблица на рисунке 12, работая с нею приходится вспомнить, что называется синусом, косинусом или тангенсом. Так постепенно дети запоминают эти треугольники и более не нуждаются в подсказках.

С переходом к тригонометрии любого угла становится необходимой таблица, показанная на рисунке 13. По ней можно переводить градусную меру в радианную и обратно, можно иллюстрировать знак функций, их четность и периодичность.

Полезны и трехзначные таблицы значений синуса и косинуса или тригонометрических функций острых углов (рис. 10, 14), аналогичные четырехзначным таблицам В.М. Брадиса. С их помощью можно наладить вычислительную работу по решению треугольников.

В хорошо организованном математическом кабинете нужно так организовать крепления по стенам, что любую таблицу можно будет быстро повесить на стену и быстро снять.

Таблица значений тригонометрических функций

°	sin	cos	tg	ctg	°	sin	cos	tg	ctg
0	0,000	1,000	0,000	не существует	23	0,391	0,921	0,424	2,356
1	0,017	0,9998	0,017	57,290	24	0,407	0,914	0,445	2,246
2	0,035	0,9994	0,035	28,636	25	0,423	0,906	0,466	2,145
3	0,052	0,9986	0,052	19,081	26	0,438	0,899	0,488	2,050
4	0,070	0,998	0,070	14,301	27	0,454	0,891	0,510	1,963
5	0,087	0,996	0,087	11,430	28	0,469	0,883	0,532	1,881
6	0,105	0,995	0,105	9,514	29	0,485	0,875	0,554	1,804
7	0,122	0,993	0,123	8,144	30	0,500	0,866	0,577	1,732
8	0,139	0,990	0,141	7,115	31	0,515	0,857	0,601	1,664
9	0,156	0,988	0,158	6,314	32	0,530	0,848	0,625	1,600
10	0,174	0,985	0,176	5,671	33	0,545	0,839	0,649	1,540
11	0,191	0,982	0,194	5,145	34	0,559	0,829	0,675	1,483
12	0,208	0,978	0,213	4,705	35	0,574	0,819	0,700	1,428
13	0,225	0,974	0,231	4,331	36	0,588	0,809	0,727	1,376
14	0,242	0,970	0,249	4,011	37	0,602	0,799	0,754	1,327
15	0,259	0,966	0,268	3,732	38	0,616	0,788	0,781	1,280
16	0,276	0,961	0,287	3,487	39	0,629	0,777	0,810	1,235
17	0,292	0,956	0,306	3,271	40	0,643	0,766	0,839	1,192
18	0,309	0,951	0,325	3,078	41	0,656	0,755	0,869	1,150
19	0,326	0,946	0,344	2,904	42	0,669	0,743	0,900	1,111
20	0,342	0,940	0,364	2,747	43	0,682	0,731	0,933	1,072
21	0,358	0,934	0,384	2,605	44	0,695	0,719	0,966	1,036
22	0,375	0,927	0,404	2,475	45	0,707	0,707	1,000	1,000

Рис. 14

С. ДВОРЯНИНОВ,
г. Москва

ПЛАНИМЕТРИЯ В КАРТИНКАХ

Каждый ученик сталкивается с необходимостью повторить курс планиметрии — в 9-м классе накануне ОГЭ и еще, возможно, по окончании средней школы при подготовке к ЕГЭ. Как это сделать — повторить всю геометрию 7–9-го классов? Снова прочитать учебник [1], в котором три сотни страниц?!

Один из вариантов решения проблемы таков. Известно, что информация в графической форме воспринимается особенно легко и эффективно: например, вместо плаката со словами «Поворот запрещен» на дорогах используют специальный знак. Недавно появилась новая схеме московского метро. К такой схеме обращаются сотни тысяч людей. Для облегчения понимания схемы линии подземки обозначены разными цветами. Точно так же при решении геометрической задачи каждые новые фрагменты чертежа удобно представлять разными цветами. Опрометчиво, пожалуй, поступают те учителя геометрии, которые запрещают своим питомцам использовать цветные карандаши или фломастеры. Ущемляя порой наших учеников в использовании цветных карандашей, мы словно покрываем прекрасный цветущий сад геометрии придорожной пылью.

Основываясь на содержании учебника [1], мы поставили себе задачу представить в краткой графической форме его теоретическое содержание. Разумеется, у каждого свое понимание краткости. У нас получился набор из пятидесяти картинок. В основном это иллюстрации теорем, но есть и определения биссектрисы угла, медианы и высоты треугольника.

В иллюстрациях использованы два цвета. Синим цветом показаны условия каждой теоремы, красным — ее заключение. Длины отрезков обозначены малыми буквами. Так, в теореме о секущей и касательной, которые проведены из одной точки, s — длина секущей, v — длина ее внешней части, k — длина секущей. Утверждение теоремы записано в виде

$$s \cdot v = k^2.$$

Теорема о произведении отрезков пересекающихся хорд дана в виде

$$a \cdot b = c \cdot d.$$

Такую запись мы предпочитаем традиционной формуле из учебника

$$AE \cdot BE = CE \cdot DE.$$

Если учитель поручит каждому ученику в классе сделать на двух листах формата А4 копии двух рисунков, то на следующий день в его распоряжении окажется комплект из 50 картинок, использовать которые можно многими способами.

Например, можно попросить учеников «составить рассказ по картинке». Ученик должен рассказать, что дано в условии соответствующей теоремы, каково заключение теоремы. Разумеется, возможны разные варианты: дано — требуется доказать; если — то;

К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru (Таблицы 8-й класс) из того, что выполняется A, следует B; A достаточно для B; A необходимо для B и т.д. Можно попросить указать те картинки, на которых указаны свойства, и те, на которых представлены признаки.

Решая геометрическую задачу, ученик может находить на построенном им чертеже фрагменты, отвечающие той или иной картинке из представленного перечня, и делать соответствующие выводы. Последовательность таких шагов может привести к ответу. Рассмотрим примеры.

Задача 1. Основание равнобедренного треугольника равно $18\sqrt{3}$, противолежащий угол равен 120°. Найти площадь треугольника.

Решение. 1. Находим рисунок, относящийся к равнобедренному треугольнику, и отмечаем равные углы при основании как α (рис. 1).

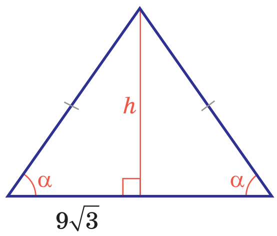


Рис. 1

2. Составляем уравнение α + α + 120° = 180°, откуда α = 30°.

3. Исходя из формулы $S=\frac{1}{2}\cdot a\cdot h$, проводим высоту к основанию и обозначаем ее h.

4. Учитывая надписи с картинки, относящейся к прямоугольному треугольнику с углом 30°, делаем вывод, что боковая сторона треугольника равна $2h$.

5. Высота является медианой.

6. По теореме Пифагора

$$(2h)^2=\left(9\sqrt{3}\right)^2+h^2,$$

отсюда находим $h^2 = 81$, $h = 9$.

7. Теперь по формуле $S=\frac{1}{2}\cdot a\cdot h$ находим площадь треугольника:

$$S=9\sqrt{3}\cdot 9=81\sqrt{3}.$$

Задача 2. В трапеции $ABCD$ с основаниями $AB = 7$ и $CD = 5$ углы A и D прямые. Окружность касается боковой стороны AD в точке E и проходит через точки B и C. Найти расстояние от точки E до прямой BC.

Способ I. Прямая AD — касательная к окружности. Есть теорема о касательной и секущей, проведенных из одной точки, *поэтому* продолжим отрезок BC до пересечения с прямой AD в точке P (рис. 2) Получим равенство

$$s\cdot v=k^2. \qquad (1)$$

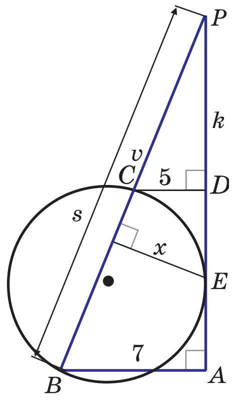


Рис. 2

Одновременно мы получаем три прямоугольных треугольника, у которых общий острый угол P. Выражая синус этого угла из трех треугольников, приходим к двойному равенству

$$\frac{7}{s}=\frac{5}{v}=\frac{x}{k}.$$

Произведение первой и второй дробей равно квадрату третьей дроби:

$$\frac{7\cdot 5}{s\cdot v}=\frac{x^2}{k^2}.$$

С учетом равенства (1) $x^2 = 35$, $x=\sqrt{35}$.

Способ II. В нашем перечне теорем есть теорема об измерении угла, образованного касательной и секущей. Касательная в точке E нам дана по условию, *поэтому* дополнительно рассмотрим секущие BE и CE (рис. 3).

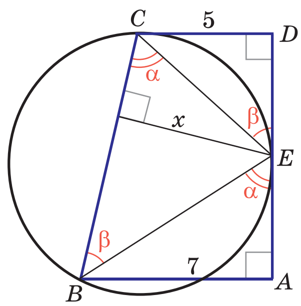


Рис. 3

Они образуют с касательной углы α и β соответственно. Эти углы стягивают дуги окружности, на которые опираются равные им вписанные углы.

В прямоугольном треугольнике CDE с катетом 5 и углом β гипотенуза

$$CE=\frac{5}{\sin\beta},$$

тогда

$$x=\frac{5}{\sin\beta}\cdot\sin\alpha.$$

Аналогично, в треугольнике ABE

$$BE=\frac{7}{\sin\alpha}.$$

Применим теорему синусов к треугольнику BCE:

$$\frac{5}{\sin\beta}:\sin\beta=\frac{7}{\sin\alpha}:\sin\alpha.$$

Отсюда находим, что

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\sqrt{\frac{7}{5}},$$

следовательно,

$$x=\frac{5}{\sin\beta}\cdot\sin\alpha=5\cdot\sqrt{\frac{7}{5}}=\sqrt{35}.$$

Задача 3. Диагонали трапеции равны 7 и 15, средняя линия равна 10. Найти площадь трапеции.

Способ I. Средняя линия трапеции соединяет середины боковых сторон. Среди нашего перечня картинок не так уж много тех, на которых имеются середины отрезков. В частности, такие точки — концы средней линии треугольника. Поэтому дополнительно рассмотрим и середины оснований трапеции (рис. 4).

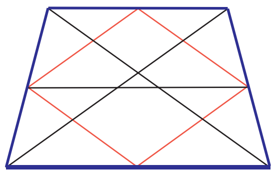


Рис. 4

Замечаем, что четыре середины — это вершины параллелограмма (в учебнике [1] об этом сказано в задаче 567). Затем доказываем, что площадь трапеции в два раза больше площади параллелограмма с красными сторонами (согласитесь, что без использования разных цветов рассматривать чертеж весьма затруднительно!). Половина параллелограмма — это треугольник со сторонами 10, 3,5, 7,5. Площадь этого треугольника находим по формуле Герона, полупериметр треугольника $p = 10{,}5$:

$$S=\sqrt{10{,}5\cdot 0{,}5\cdot 7\cdot 3}=\sqrt{10{,}5\cdot 10{,}5}=10{,}5.$$

Площадь трапеции S в четыре раза больше и равна 42.

Способ II. Продолжим нижнее основание трапеции на длину верхнего основания a. Получим четырехугольник, в котором две противоположные стороны равны и параллельны. Следовательно, это параллелограмм, и мы можем отметить еще один отрезок длины 7 (рис. 5).

Мы получим треугольник, основание которого равно сумме оснований трапеции и высота которого равна высоте трапеции. Отсюда следует, что этот треугольник и трапеция равновелики, то есть их площади равны. Длины сторон треугольника равны 20, 7, 15. Его площадь находим по формуле Герона, полупериметр треугольника $p = 21$:

$$S=\sqrt{21\cdot 1\cdot 14\cdot 6}=\sqrt{3\cdot 7\cdot 2\cdot 7\cdot 6}=7\cdot 6=42.$$

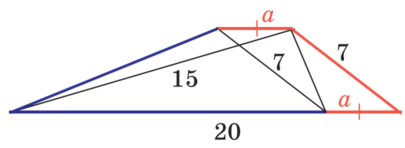


Рис. 5

Конечно, выстраивание логической цепочки при решении геометрической задачи не есть единственный способ ее решения. Метод координат единообразно и мгновенно превращает геометрическую задачу в алгебраическую (которая может оказаться трудной).

Способ III. Введем прямоугольную систему координат, запишем условие задачи в координатах (в учебнике [1] имеется подобная задача 953).

Пусть координаты вершин трапеции таковы:

$A(0; 0)$, $B(b; h)$, $C(20 - a + b; h)$, $D(a; 0)$.

Мы уже учли, что основания трапеции параллельны и что сумма их длин равна 20 (рис. 6).

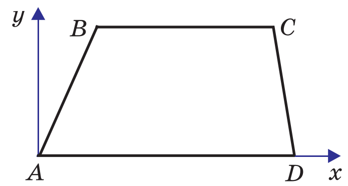


Рис. 6

Известные длины диагоналей приводят к системе уравнений

$$\begin{cases}(a-b)^2+h^2=225,\\(20-a+b)^2+h^2=49,\end{cases}$$

из которой нам необходимо найти значение h. Замена $a - b = t$ приводит к системе

$$\begin{cases}t^2+h^2=225,\\(20-t)^2+h^2=49.\end{cases}$$

Вычитая теперь из второго уравнения первое, получим уравнение относительно t:

$$40t - 400 = 176,\ \ t = 17{,}4.$$

Затем из первого уравнения последней системы находим:

$$h^2 = 225 - 17{,}4^2,\ \ h = 4{,}2.$$

Умножая длину средней линии на высоту трапеции, находим площадь трапеции

$$S = 10\cdot 42.$$

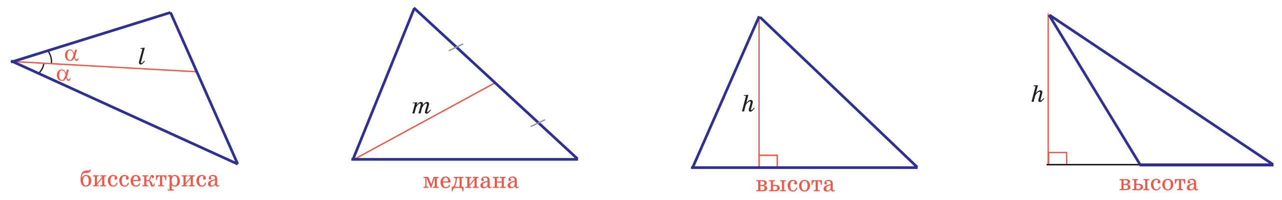
Литература

1. *Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б.* и др. Геометрия: Учеб. для 7–9 кл. сред. шк. — М.: Просвещение, 1990.

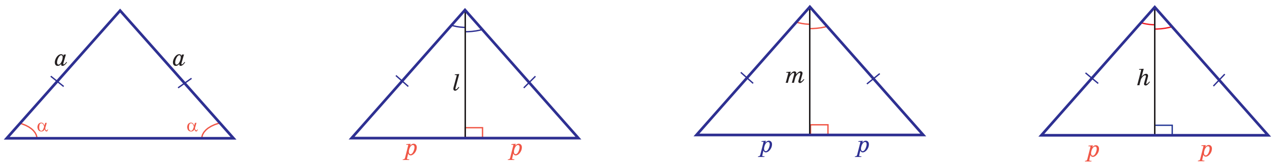
ПЛАНИМЕТРИЯ

7 класс

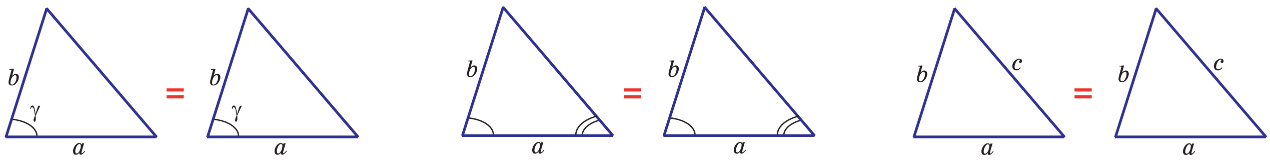
Элементы треугольника



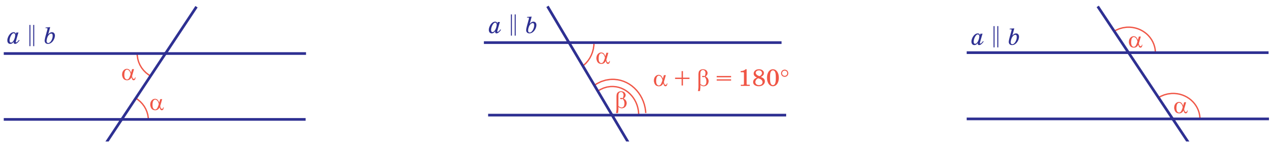
Равнобедренный треугольник



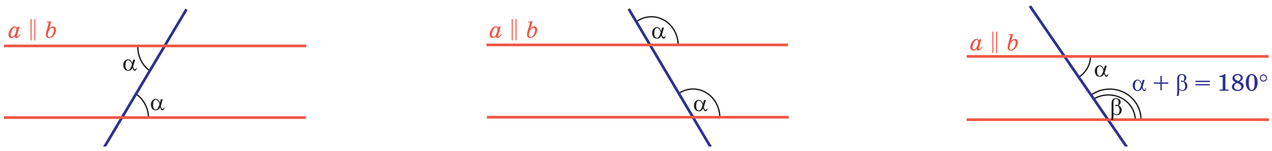
Признаки равенства треугольников



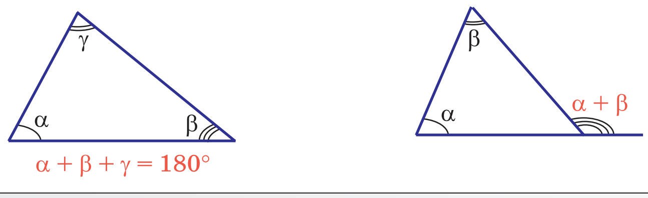
Свойства углов при параллельных прямых



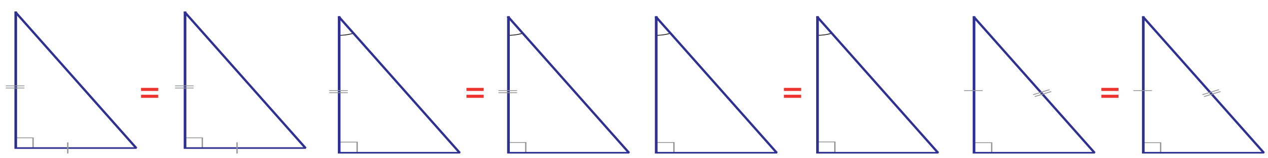
Признаки параллельности прямых



Свойства углов треугольника

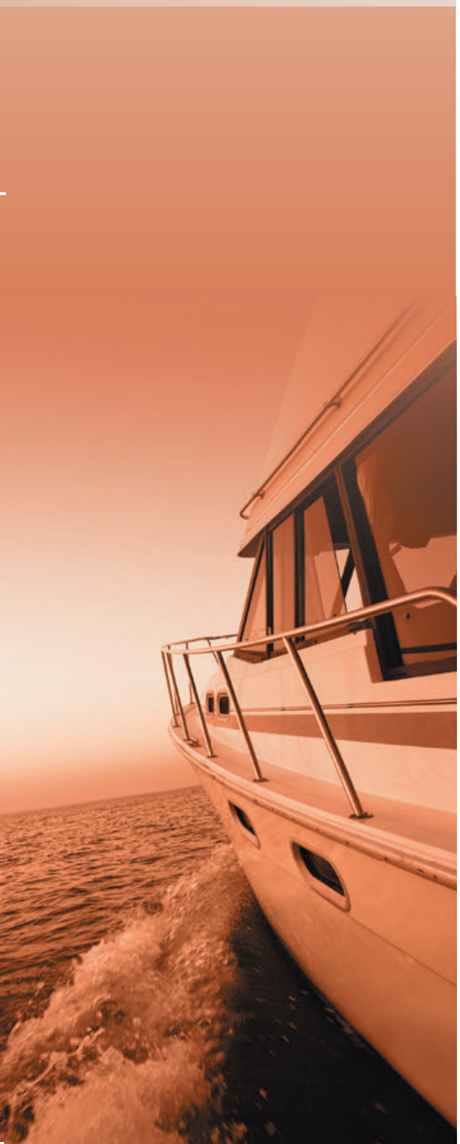


Признаки равенства прямоугольных треугольников



В. КРАСНОВА,
г. Олекминск

ЗАДАЧИ НА ДВИЖЕНИЕ ПО ВОДЕ



Урок «Решение задач на движение по воде» — один из уроков блока «Решение текстовых задач». Проводится урок в конце года, когда все темы изучены.

Тем самым урок завершает этап изучения текстовых задач; в течение предыдущих уроков учащиеся должны освоить принцип составления задач, научиться анализировать текст готовых задач, понять роль схемы и уравнения как средства анализа задачи.

Цели урока:

– формирование умения решать задачи на движение по воде;
– активизация мыслительной деятельности учащихся;
– развитие навыков самостоятельной работы.

Ход урока

Организационный момент

Проверка готовности учащихся к работе. На экране проектора появляется тема урока и эпиграф к нему. Появление на экране слайдов, содержащих информацию о плане урока, его целях и задачах, позволяет быстро настроить учащихся на работу на уроке.

Учитель. Мы продолжаем изучать большую тему «Решение текстовых задач». Сегодня мы рассмотрим раздел «Решение задач на движение по воде». Эпиграфом к уроку будут слова Д. Пойа: «Умение решать задачи — практическое искусство, подобное плаванию, или катанию на лыжах, или игре на фортепиано: научиться этому можно, лишь подражая избранным образцам и постоянно тренируясь». На этом уроке мы будем заниматься практическим искусством — учиться решать задачи на движение по воде. Прежде чем приступить к практической части урока, повторим некоторые математические действия и понятия.

Устная работа

Задание 1. Из формулы движения $s = vt$ выразите:
а) время t; б) скорость v.

Задание 2. Ответьте на вопросы.

1. Саша и Маша отправились летом в отпуск по реке Лене. В одно и то же время два парохода отплыли из г. Олекминска. Саша отплыл в сторону г. Якутска, а Маша — в сторону г. Ленска. Скорости теплоходов одинаковы. Кто из них будет находиться дальше от города Олекминска через сутки? Почему?

2. Вы смастерили кораблик и отправили его в плавание по реке. Что позволяет двигаться вашему кораблику? Какова скорость кораблика и от чего она зависит?

3. Аналогичная ситуация, но вы отправили кораблик в плавание по озеру. Какую ситуацию вы будете наблюдать и почему?

4. Что необходимо учитывать при решении задач на движение по воде?

Изучение новой темы

На экране появляются формулы и пояснения к ним: v — скорость, t — время, s — путь.

Сейчас проверим и разберем каждую формулу. Данные формулы помогут вам решать задачи на движение по воде, поэтому их необходимо записать в тетрадь, а дома переписать в свою «математическую копилку».

Решение задач

На экране появляются тексты задач.

1. Скорость лодки в стоячей воде 8,5 км/ч, а скорость течения реки 3,2 км/ч. С какой скоростью будет двигаться лодка по течению и против течения реки?

2. Катер по течению реки за 1 час прошел 24,7 км. С какой скоростью он будет идти по озеру, если скорость течения реки равна 2,5 км/ч?

3. Дано: $v_{\text{собств}} = 75$ км/ч, $v_{\text{течения}} = 3$ км/ч, $t = 5$ ч. Решите задачу по данному условию. Каких данных не достает для решения задачи? Дополните своими данными задачу и решите ее.

У доски рассматриваем сразу несколько вариантов условия задачи.

Самостоятельная работа

Цель: выработать навыки при работе с формулами.

Работа по учебнику: № 663, 670, 729.

По окончании работы проводится проверка правильности решения задач, обсуждается ход решения и ответы.

Задание на дом

Каждый ученик получат карточку с данными. Необходимо придумать задачу, записать ее и решить в тетради.

Подведение итогов урока

На экране, если это возможно, весь урок отображается слайд с формулами.

Учитель. Еще раз обратимся к формулам. Повторим те, с которыми мы сегодня работали на уроке. Сегодня на уроке мы применяли все вышеперечисленные формулы. Умение решать задачи и правильно использовать формулы — это большая сила человечества. Урок закончу отрывком из стихотворения.

Ракета небо прочеркнула,
Ей в космос путь давно не нов.
Не слышно рокота и гула
Уж из-под облачных ковров...
И прежде чем, заметьте, кстати,
Ракете той был дан прицел,
Ее маршрутом математик
На крыльях формул пролетел...

Литература

1. *Алимов Ш.А., Колягин Ю.М., Сидоров Ю.В.* и др. Алгебра: учеб. для 7 кл. общеобразоват. учреждений. — 15-е изд. — М.: Просвещение, 2007. 2. *Шустеф Ф.М.* Материал для внеклассной работы по математике: Кн. для учителя. — 2-е изд., перераб. — Минск: Народная Асвета. 3. *Микиша А.М.* Математика. Основные термины: Толковый словарь: Более 3000 терминов. —М.: Астрель; АСТ, 2003.

$$v_{\text{течения}},\ v_{\text{собственная}}$$

$$v_{\text{по течению}} = v_{\text{собственная}} + v_{\text{течения}}$$

$$v_{\text{против течения}} = v_{\text{собственная}} - v_{\text{течения}}$$

$$v_{\text{собственная}} = v_{\text{по течению}} - v_{\text{течения}}$$

$$v_{\text{собственная}} = v_{\text{против течения}} + v_{\text{течения}}$$

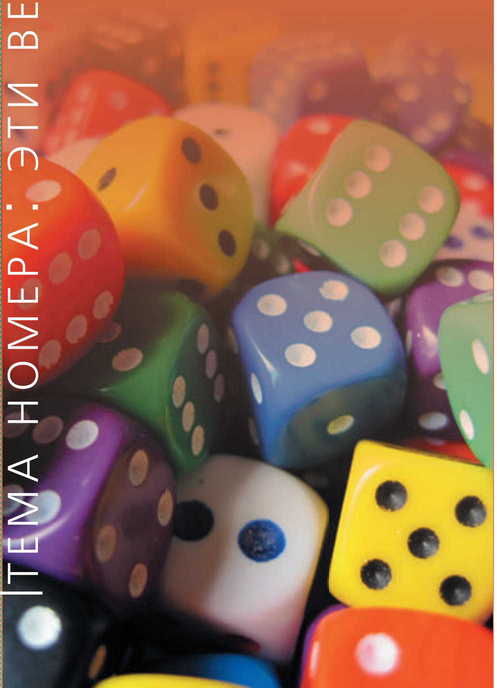
$$s_{\text{по течению}} = v_{\text{по течению}} \cdot t_{\text{по течению}}$$

$$s_{\text{против течения}} = v_{\text{против течения}} \cdot t_{\text{против течения}}$$

$$t_{\text{по течению}} = \frac{s_{\text{по течению}}}{v_{\text{по течению}}},\quad t_{\text{против течения}} = \frac{s_{\text{против течения}}}{v_{\text{против течения}}}$$

Л. ГОРИНА,
г. Михайловск, Свердловская обл.

РЕАЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА: ВЕРОЯТНОСТЬ СЛУЧАЙНОГО СОБЫТИЯ



Для подготовки учащихся 9-го класса к итоговой аттестации по теме «Нахождение вероятности события» я использую листы с опорными конспектами. Их два. На листе 1 записано классическое определение вероятности и приведены примеры невозможного, случайного и достоверного событий. На листе 2 также дано классическое определение вероятности и приведены образцы решения задач на вычисление вероятности некоторых событий и есть простейшие задачи для самостоятельного решения. После знакомства с этим материалом эти листы я помещаю на стенд «Готовимся к экзамену». Для закрепления и выработки навыка решения задач по этой теме я использую подборку из 60 задач из открытых банков заданий ГИА и ЕГЭ. Эту подборку задач я выдаю каждому ученику и использую ее для работы на уроке и для домашней работы.

Классическая вероятность — Лист 1

Определение. Вероятность события — это отношение числа благоприятствующих для этого события исходов к числу всех возможных исходов

$$P(A)=\frac{m}{n}$$

A — событие,
$P(A)$ — вероятность события,
m — число благоприятствующих исходов,
n — число всех возможных исходов

Событие (A) — это то, что происходит, случается

Невозможное событие — это то, которое никогда не может произойти	***Случайное событие*** — это то, которое может произойти, а может и не произойти	***Достоверное событие*** — это то, которое обязательно произойдет
$P(A)=0$	$0\le P(A)\le 1$	$P(A)=1$
Вероятность того, что при бросании кубика выпадет 8 очков $P=0$	Вероятность того, что при бросании кубика выпадет 5 очков $P=\frac{1}{6}$	Вероятность того, что при бросании кубика выпадет менее 7 очков $P=1$
Вероятность того, что корова начнет летать, равна 0  	Вероятность того, что завтра будет солнечная погода равна... 	Вероятность того, что следующая дата в календаре — 26 января, равна 1 

К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru (Лист 2; подборка задач)

ПЛАКАТ–КОНСПЕКТ К УРОКУ

К. БОХОНОВА,
г. Москва

Почему-то многие из нас перестали уделять внимание теоретической подкованности наших воспитанников, и наблюдается такая картина; закупили многочисленные брошюры с аббревиатурами ГИА и ЕГЭ — и пошла гонка решения задач из этих сборников. Даешь количество в ущерб качеству! Сведены на нет работа с учебником, теоретическая подготовка, устная работа, не практикуем комментирование учеником выполнения математических операций на пути к ответу. А потом удивляемся, что ученики на экзамене не справились даже с самыми простыми заданиями.

Предлагаю вашему вниманию слайд-конспекта с помощью которого мы с ребятами проговариваем и закрепляем очень важные для осмысленного усвоения математики теоретические положения: определение квадратного уравнения, понятие равносильного перехода при решении уравнения, понятие действительного числа, арифметического квадратного корня. Более того, в начале следующего урока я попрошу всех воспроизвести этот конспект по памяти. (Для ускорения процесса можно распечатать его в виде задания с пропусками ключевых слов и некоторых строк преобразований. Для сильных учащихся можно поменять обозначения коэффициентов: вместо a, b и c написать, например, m, n и k). Скажете: «А не проще ли дать готовые формулы? И пусть решают, как орешки щелкают». Учитель, не навреди! Не упусти возможности уложить в сознании школьников фундаментальные основы предмета.

Создание таких конспектов полезно и для организации проектной деятельности. Предложите детям разработать аналогичный слайд-конспект для решения полного квадратного уравнения с четным вторым коэффициентом. Продвинутым ученикам будет интересно дополнить это справочное пособие решением квадратного уравнения с отрицательным дискриминантом, но уже в области комплексных чисел.

Вывод формулы корней квадратного уравнения

Общий вид любого квадратного уравнения

$$\boldsymbol{ax^2+bx+c=0},$$

где $\boldsymbol{a}$ — любое число, кроме нуля, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ — любые числа.

Умножим обе части уравнения на $\boldsymbol{4a}$:

$$ax^2+bx+c=0\,\big|\cdot 4a \text{ (нам известно, что } \boldsymbol{a} \text{ не равно нулю!)},$$

$$ax^2\cdot 4a+bx\cdot 4a+c\cdot 4a=0\cdot 4a,\qquad 4a^2x^2+4abx+4ac=0.$$

Прибавив к обеим частям уравнения число $\boldsymbol{b^2}$, получим:

$$4a^2x^2+4abx+4ac+b^2=b^2.$$

Перенесем $\boldsymbol{4ac}$ в правую часть:

$$4a^2x^2+4abx+b^2=b^2-4ac.$$

Назовем выражение b^2-4ac ***дискриминантом**** и обозначим его буквой $\boldsymbol{D}$:

$$4a^2x^2+4abx+b^2=D,\qquad (2ax+b)^2=D.$$

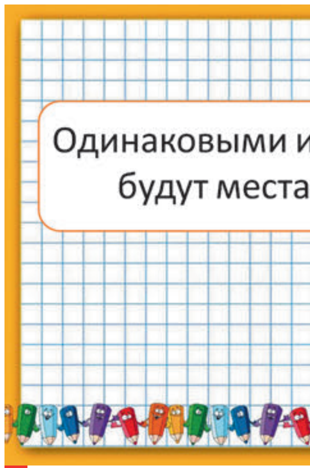
Теперь достаточно решить это уравнение, поскольку оно равносильно исходному.

$D=0$	$D<0$	$D>0$
$(2ax+b)^2=0,$ $2ax+b=0,$ $2ax=-b,$ $x=-\dfrac{b}{2a}.$ *Вывод.* Если $D=0$, то квадратное уравнение имеет один корень.	$(2ax+b)^2=D.$ Но квадрат любого действительного числа неотрицателен. Не существует такого действительного значения x, при подстановке которого в это уравнение получилось бы верное числовое равенство. *Вывод.* Если $D<0$, то квадратное уравнение не имеет действительных корней.	$(2ax+b)^2=D.$ $2ax+b=-\sqrt{D}$ или $2ax+b=\sqrt{D};$ $2ax=-b-\sqrt{D}$ или $2ax=-b+\sqrt{D};$ $x=\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ или $x=\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}.$ *Вывод.* Если $D>0$, то квадратное уравнение имеет два действительных различных корня.

* ***Дискриминант*** — в переводе на русский язык — ***различитель***. От ***дискриминанта*** зависит, быть или не быть действительным корням квадратного уравнения.

2

3



4

Фрагменты презентации публикуются в авторской редакции

Сегодня в рубрике «Разбор урока» мы обсуждаем урок в 6-м классе, проведенный студентом 3-го курса Института математики, информатики и естественных наук МГПУ Александром ЖДАНОВЫМ. Обсуждают урок его сокурсницы Екатерина ГУЩИНА, Виктория ОСИПОВА, Таисия ТЕРЕНТЬЕВА и профессор кафедры высшей математики и методики преподавания математики Лариса Олеговна ДЕНИЩЕВА.

Пример «билета» на урок математики

6 класс

ТЕМА УРОКА: «КООРДИНАТНАЯ ПЛОСКОСТЬ»

Тип урока: урок изучения нового материала

Учебник: *Виленкин Н.Я.* и др. Математика. 6 класс. Учебник. — М.: Мнемозина, 2013.

Цели урока:

образовательные: сформировать умение строить точки на координатной плоскости по их координатам; научить определять координаты точек на координатной плоскости; применять полученные знания при решении задач;

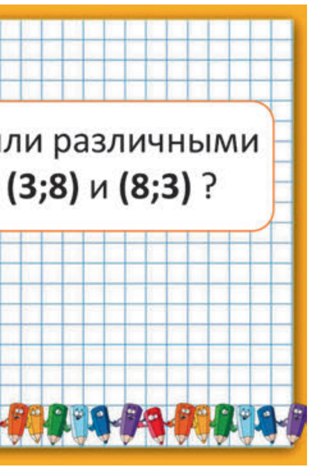
развивающие: развитие памяти, внимания, мыслительной деятельности, математической речи учащихся, развитие коммуникативных навыков;

воспитательные: воспитание математической культуры, аккуратности, умения самостоятельного выполнения и проверки работы, усидчивости.

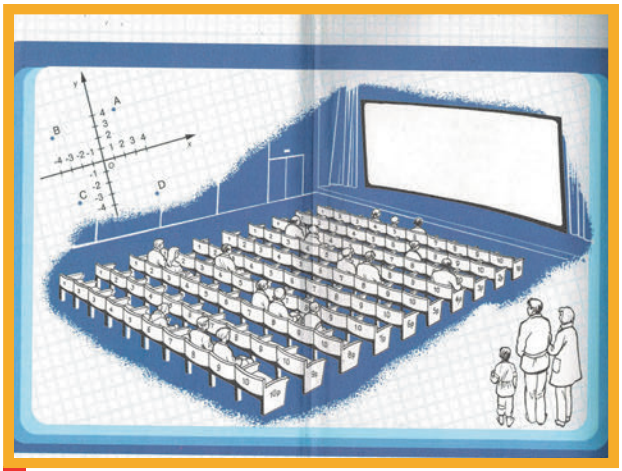
Оборудование: раздаточный материал, сопроводительная мультимедийная презентация, созданная в программе Microsoft Office PowerPoint 2007.

Примечание. Учитель заранее готовит классную комнату к уроку: обозначает цифрами ряды (парты) и места в классе (стулья) (как в театре). При входе в класс ученики вытягивают «билет на урок математики» (указаны ряд и место), согласно которым они занимают места.

К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru (Авторская презентация)



5



6

Ход урока

I. Организационный момент (2 мин.)

Проверка готовности класса к уроку, приветствие. Ученики готовятся к уроку. У каждого на парте должен быть учебник, тетрадь и письменные принадлежности.

Откройте тетради, запишите сегодняшнее число и «Классная работа».

II. Актуализация знаний (6 мин., устная фронтальная работа)

– Определите (на глаз), какие прямые являются перпендикулярными, а какие — параллельными (рис. 1). 2

– Какие прямые называют перпендикулярными?

– Какие прямые называются параллельными?

– По рисунку определите, сколько клеток надо пройти слева направо и сколько — снизу вверх, чтобы попасть из точки O в точку: а) K; б) M; в) N; г) P. 3

[Чтобы попасть из точки O в точку K, необходимо пройти 4 клетки вправо и 1 вверх; в точку M — 3 вправо и 5 вверх; в точку N — 5 вправо и 4 вверх; в точку P — 1 вправо и 3 вверх.]

– Ребята, а как вы нашли то место, которое вам было необходимо занять в классе согласно билету?

[Посмотрели в билете ряд и место.]

– Верно. Когда мы с вами ходим в кинотеатр, то точно так же находим место в зале. Места в зрительном зале задают двумя числами: первым числом обозначают номер ряда, а вторым — номер кресла в этом ряду. Как вы думаете, одинаковыми или различными будут места (3; 8) и (8; 3)? 4

[Это разные места. Первое — 3-й ряд, 8-е место, а второе — 8-й ряд, 3-е место.]

III. Объяснение нового материала (10 мин., самостоятельная работа с учебником, устная фронтальная работа)

Работа с учебником

– Откройте учебники на странице 243. Прочитайте пункт 45 (на работу отводится 1,5 мин.; развитие умения работать с источником и находить в нем необходимую информацию). 5

Устная фронтальная работа

– Назовите координаты местоположения в зрительном зале бабушки в последнем ряду и девочки с бантом в первом ряду. 6

[Бабушка — (10; 6) (десятый ряд, шестое место); девочка с бантом — (1; 4) (первый ряд, четвертое место).]

– Как вы понимаете выражение: «Оставьте мне ваши координаты»?

[Один человек просит у другого адрес или номер телефона, по этим данным можно найти конкретного человека; в этом случае они считаются его координатами.]

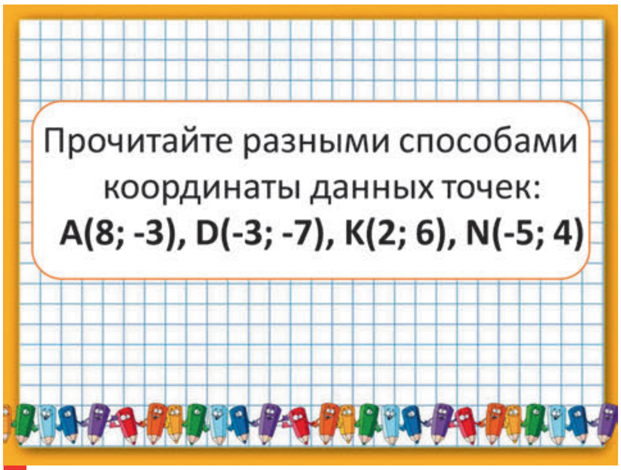
– В этом и заключается суть координат или, как говорят, системы координат: это правило, по которому определяется положение того или иного объекта. Системы координат встречаются в нашей жизни достаточно часто. Приведите свои примеры.

[Игра «Морской бой», посадочные места в самолете, шахматы и т.д.]

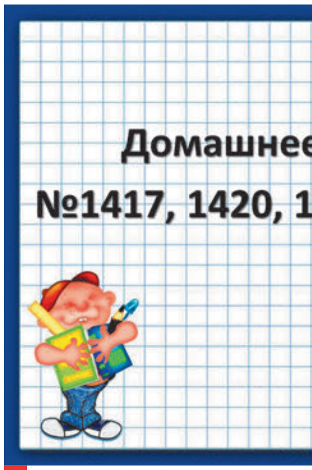
– Итак, что такое «система координат на плоскости»?

[Две перпендикулярные прямые x и y с выбранными на них началом отсчета, единичными отрезками и направлением.]

8



9



10

– Начертите систему координат в тетради (*учитель выполняет построение на доске*). Подскажите мне, что необходимо отметить?

[Начало отсчета, на осях выбрать единичные отрезки.]

– Как называют плоскость, на которой выбрана система координат?

[Координатная плоскость.]

– Отметьте в построенной вами системе координат произвольную точку K. Определите ее координаты. Что называют координатами точки K?

[Пару чисел, показывающих положение точки, называют координатами точки K. Обозначают: $K(x; y)$.]

– Что является абсциссой? Ординатой? (*Учитель просит повторить формулировку определения.*) [Пусть дана точка $M(x; y)$. Число x называют абсциссой точки M, а число y называют ординатой точки M.]

– Какую прямую называют осью абсцисс? Осью ординат?

[Координатную прямую x называют осью абсцисс, а координатную прямую y — осью ординат].

– Итак, назовите тему нашего урока.

[«Координатная плоскость» (*записывают тему урока в тетради*).]

Историческая справка. Прямоугольную систему координат называют еще декартовой системой координат — по имени французского математика и философа Рене Декарта, который ввел это понятие в математике и первым применил ее для решения геометрических задач. 8

IV. Первичное закрепление (15 мин., фронтальная работа, работа с консультантами, индивидуальная и парная работа)

Самостоятельное выполнение задания № 1394 из учебника.

– Прочитайте в учебнике на с. 245 текст в рубрике «Говори правильно». Прочитайте разными способами координаты данных точек: $A(8; -3)$, $D(-3; -7)$, $K(2; 6)$, $N(-5; 4)$. 9

[Точка A с абсциссой 8 и ординатой -3; точка A с координатами 8 и -3; координаты точки A — пара чисел 8 и -3 (*несколько учеников читают координаты всех точек*).]

– Начертите в тетради координатную плоскость и отметьте эти точки. (*Учитель проверяет правильность построения и назначает консультантов для помощи в проверке работ учащихся.*)

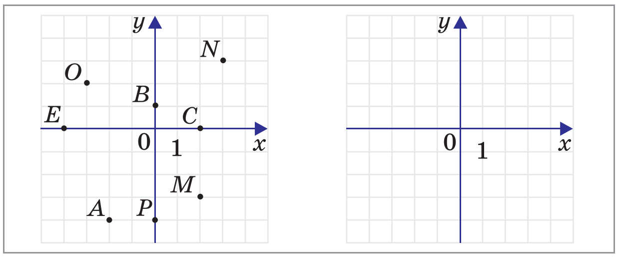
Индивидуальная работа с раздаточным материалом

Форма проверки — устно, фронтально. Если у некоторых учеников возникают затруднения при выполнении задания, учитель назначает консультантов.

Задание 1. Выпишите координаты следующих точек.

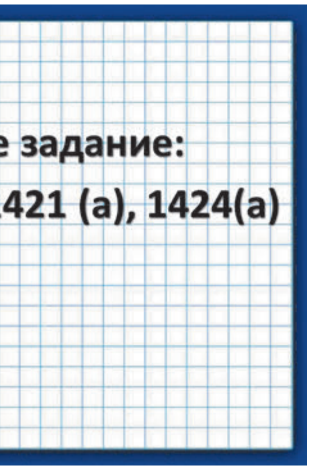
Задание 2. Отметьте на координатной плоскости следующие точки:

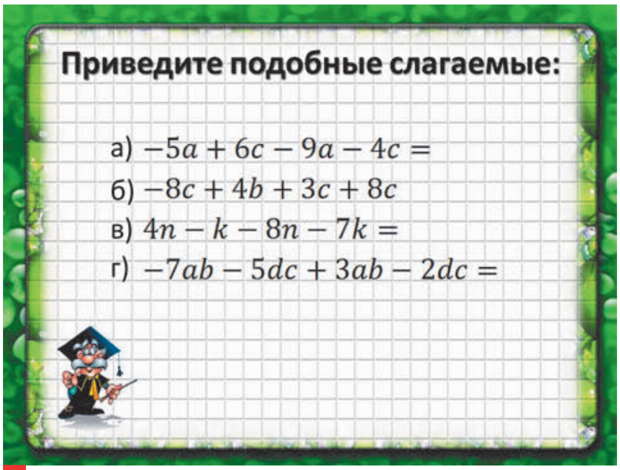
$(3; 3), (0; 3), (0; 0), (3; 0), (3; -3), (0; -3)$.



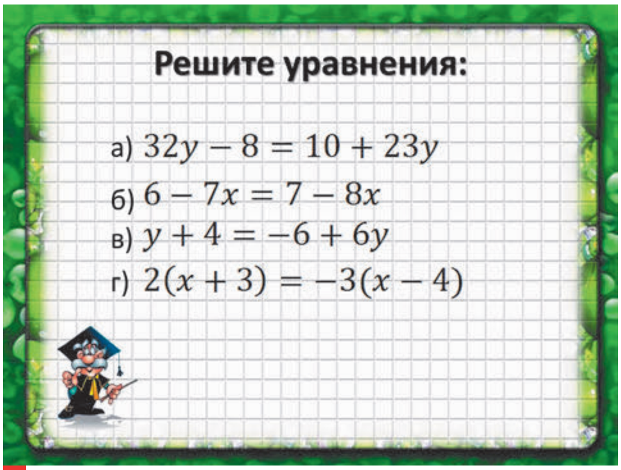
Парная работа с раздаточным материалом

Первые шесть точек на координатной плоскости отмечает один человек, остальные шесть — его сосед по парте. После чего проверяют правильность расстановки точек, последовательно





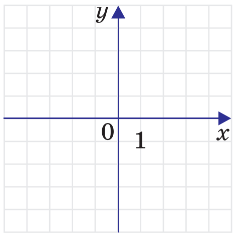
11



12

их соединяют и получают рисунок в виде сердца.

Задание 3. Постройте точки и последовательно соедините их: (0; 3), (1; 4), (3; 4), (3,5; 3), (3; 1), (2,5; 0), (0; –2), (–2,5; 0), (–3; 1), (–3,5; 3), (–3; 4), (–1; 4), (0; 3).



V. Практическая работа (5 мин., парная работа)

Каждая пара получает карточку с заданием, всего 11 карточек, на каждой из которых будет изображено созвездие. Цель данной работы — собрать на координатной плоскости мозаику звездного неба.

– По расположению Солнца, Луны и звезд на небосводе люди ориентировались на местности, в пути, определяли время. Каждой команде необходимо отметить точки на координатной плоскости. В результате у вас получится одно из 11 созвездий. По окончании работы мы сможем собрать на координатной плоскости мозаику звездного неба.

Ученики отмечают на координатной плоскости данные точки, последовательно соединяют их и некоторые из указанных.

Карточка 1. Созвездие Лев. В этом созвездии запечатлен Немейский Лев, над которым одержал победу Геракл. A(7,6; 0,7); B(8,2; 0,6); C(8,6; 1,2); D(8,6; 1,7); E(8; 2,5); F(10,4; 2,8); (11,5; 2,4); L(10,5; 2,4) (соединить точки L и D).

Карточка 2. Созвездие Близнецы. Названо в честь двух неразлучных братьев, сыновей Елены Прекрасной — Кастора и Полидевка. A(4,1; 1,3); B(4,8; 2,2); C(6,3; 3,1); D(6,7; 2,4); E(5,4; 1,3); F(5; 0,7) (соединить точки F и A).

Карточка 3. Большая Медведица. Согласно греческому мифу это созвездие олицетворяет прекрасную нимфу Каллисто, превращенную Зевсом в медведицу, чтобы спасти ее от мести Геры. A(1; 1); B(0,8; 1,7); C(1,7; 2,2); D(2,1; 1,7); E(2,8; 1,8); F(3,4; 1,7); K(4; 2,2) (соединить точки D и A).

Карточка 4. Малая Медведица. Созвездие известно как Малый Ковш, последняя звезда в «ручке» которого — Полярная. A(2; 0,2); B(2,4; 0,6); C(3; 0,7); D(3,2; 1,1); E(3,2; 1,7); F(3,7; 1,7); K(3,7; 1) (соединить точки K и D).

Карточка 5. Созвездие Телец. Названо в честь быка, на котором Европа переплыла море и попала к Зевсу на Крит. A(1,5; 3); B(2,8; 2,8); C(1,6; 1); D(1,7; 0,5); E(1,8; 0,3); F(2,1; 0,6); K(2,2; 0,8) (соединить точки B и C).

Карточка 6. Созвездие Возничий. В мифологии Возничим, имя которого носит созвездие, считается бог моря Посейдон. A(0; 0); B(0; 1,7); C(1; 1,8); D(1,3; 0,8); E(0,8; 0,3) (соединить точки E и A).

Карточка 7. Созвездие Персей. Персей — сын Зевса и Данаи, спас Андромеду от чудовища. A(0,8; 0,4); B(1; 1); C(1,5; 1,3); D(2,5; 1,6); E(3; 1,4); F(3,6; 1,4); K(4,2; 1,5); L(2,4; 0,5) (соединить точки E и L, не соединять точки K и L).

Карточка 8. Созвездие Кассиопея. Кассиопея была женой царя Цефея и матерью Андромеды. A(0; 2,5); B(0,3; 1,8); C(0,7; 2); D(0,8; 1,3); E(1,4; 1,5).

Карточка 9. Созвездие Цефей. Цефей — мифический эфиопский царь, супруг Кассиопеи, отец Андромеды. A(0; 2); B(1,3; 2); C(2,1; 1,4); D(1,5; 0,4); E(0,5; 1) (соединить точки E и A).

Карточка 10. Созвездие Треугольник. По преданию, образовано тремя крупнейшими городами, которые богиня Деметра попросила Зевса перенести на небо. $A(8{,}3;\ 1{,}3)$; $B(9;\ 1{,}5)$; $C(9{,}8;\ 0{,}9)$.

Карточка 11. Созвездие Ящерица занимает очень мало места на небе, как и настоящая ящерица. $A(0{,}3;\ 0{,}6)$; $B(0{,}6;\ 1)$; $C(0.8;\ 1{,}5)$; $D(0{,}8;\ 2)$; $E(0{,}9;\ 2{,}5)$; $F(1;\ 3)$; $K(1{,}5;\ 3{,}2)$.

VI. Повторение (5 мин., дифференцированная работа)

– Решим несколько задач за повторение.

Сильные ученики получают карточки с заданиями разной степени сложности.

Вариант 1

Решите уравнение **(1–4)**.

1. $6x + 12 = 4x - 45$.

2. $3x - 5 = -4x - 6$.

3. $2(x + 3) = -3(x - 4)$.

4. $(4x - 5)(2x + 9) = 0$.

Вариант 2

Решите уравнение **(1–4)**.

1. $5x + 22 = 3x - 45$. **2.** $3x + 6 = -7 - 4$.

3. $-3(x + 6) = 4(x - 2)$. **4.** $(2x - 5)(3x + 7) = 0$.

Вариант 3

Решите уравнение **(1–4)**.

1. $-4x + 5x - (-15) = 4x + 12 - 4$.

2. $-2(x + 3) - (-x - 2) = 3(-x + 4) + 3(x - 5)$.

3. $5(x - 2) - 3(x + 4) = -2(x + 2) - (x + 3)$.

Вариант 4

Решите уравнение **(1–4)**.

1. $-3x + 6x - (-4) - 2 = -4x - 8$.

2. $-3(-x - 5) - 5(x + 4) = -4(x - 6) - (-x + 3)$.

3. $6(-x + 2) - (x - 5) = 2(x - 3) + 3(-x - 4)$.

4. $\dfrac{2x-3}{4} = \dfrac{x+3}{3}$.

С остальными учитель выполняет задания в определенном порядке, согласно таблицы.

VII. Итог урока (3 мин.)

Рефлексия

– С каким понятием мы познакомились сегодня на уроке?

– Что является абсциссой точки? Ординатой?

– Какую прямую называют осью абсцисс? Осью ординат?

– Как отметить точку на координатной плоскости, зная ее координаты?

– Поднимите руку те, кто все понял и может помочь товарищу.

– Поднимите руку те, кто понял материал, но нужно еще повторить материал к контрольной работе.

– Поднимите руку те, у кого остались вопросы.

Последних учитель приглашает на дополнительные занятия.

Домашнее задание: с. 100–101 учебника, № 1417, 1420, 1421(а), 1424(а).

Таблица

Задание	Формы работы / ответы
1. Приведите подобные слагаемые: 11 а) $-5a + 6c - 9a - 4c$; б) $-8c + 4b + 3c + 8c$; в) $4n - k - 8n - 7k$; г) $-7ab - 5dc + 3ab - 2dc$	а) Показ образца учителем; б) решение с параллельным комментированием; в) самостоятельное решение примера (устная проверка); г) решение с оттянутым контролем (один ученик за доской)
Ответы: а) $-14a + 2c$; б) $4b + 3c$; в) $-8k - 4n$; г) $-4ab - 7dc$	
2. Решите уравнение: 12 а) $32y - 8 = 10 + 23y$; б) $6 - 7x = 7 - 8x$; в) $y + 4 = -6 + 6y$; г) $2(x + 3) = -3(x - 4)$	а) Составление плана решения совместно с учениками; решение записывает учитель; б) с параллельным комментированием; в) самостоятельное выполнение; г) решение с оттянутым контролем (один ученик решает за доской)
Ответы: а) $y = 2$; б) $x = 1$; в) $y = 2$; г) $x = 1{,}2$	

В беседах с учителями часто можно услышать мнение о том, что стандарты второго поколения практически ничем не отличаются от стандартов, по которым работали ранее. Действительно, в целях изучения нас ориентируют на необходимость обучения предмету, важного с точки зрения понимая и описания реальной действительности, важного для применения в практической деятельности, необходимого для получения профессии и продолжения образования. Так было и ранее. Схожи содержание обучения и предметные требования к его результатам. Но внимательный читатель ФГОС заметит, что ранее не говорилось о метапредметных умениях, не формулировались требования к овладению универсальными учебными действиями. Но это общие соображения, которые трудно применить к каждому конкретному уроку. Это общая концепция построения образования. Для учителя же важно увидеть требования к каждому уроку, который он готовит и проводит. И здесь нам видны отличия новых стандартов, состоящие в том, что четко зафиксированы требования к организации обучения. Эти требования ориентируют учителя на построение такого урока, на котором преобладает самостоятельная работа учеников, состоящая из «открытия» новых знаний, их закрепления при постоянной обратной связи с учителем. При этом учитель должен положительно мотивировать учеников на необходимость овладения предметом.

40–50 лет назад психологи, работавшие над концепцией развивающего обучения, говорили именно о такой организации обучения — которая формирует и развивает интеллект ученика. И этот подход внедрялся в отдельных образовательных учреждениях, реализующих данные концепции. *Т*еперь можно говорить, что он вошел (или должен, наконец, войти) в любую нашу школу. В связи со сказанным хотелось посмотреть, как понимают организацию урока по новым стандартам те, кто завтра придет в школу, те, у кого нет опыта работы по старым стандартам. Поэтому сегодня мы обсуждаем урок в 6-м классе, проведенный во время педагогической практики.

Л.Д. Уважаемые коллеги, сегодня мы обсуждаем урок, проведенный в 6-м классе. Прошу обратить основное внимание на выбор учителем методов **обучения**, направленных на организацию самостоятельной (индивидуальной или групповой) работы учеников. Проанализируйте, как была устроена «обратная связь», с помощью которой учитель на каждом этапе обучения имел информацию об уровне усвоения учебного материала. Подумайте, были ли мотивированы ученики на изучение нового материала.

В.О. Лично мне урок понравился и своим содержанием, и насыщенностью проблем. Видна структура урока, обозначено время, отведенное на каждый этап, и урок шел по заданному расписанию. Темп урока высок, но ученики его приняли и работали спокойно, без спешки. Ученики сами сформулировали тему урока и самостоятельно познакомились с основными понятиями, к овладению которыми были подведены и актуализацией знаний, и самим началом урока (билетами на урок).

Л.Д. А удалось ли учителю работать в духе стандарта?

Т.Т. Думаю, да. Стандарты второго поколения предполагают переход на деятельностный метод обучения, в основе которого лежит рефлексия самоорганизации, и Саша в полной мере обеспечил этот переход. Он провел урок открытия новых знаний, которые учителем не даются в готовом виде; он лишь обобщал ответы учащихся и направлял их деятельность. Урока был нацелен на формирование таких умений: как определять тему урока и ставить цели с помощью учителя и самостоятельно; организовывать свое рабочее место; осуществлять рефлексию; работать самостоятельно; участвовать в обсуждении, слушать и понимать других, доказывать свою точку зрения; отвечать на вопросы и задавать вопросы; анализировать, делать выводы.

Е.Г. Действительно, урок был насыщенным и интересным, в нем задействуются различные формы работы: фронтальный опрос, работа с учебником, индивидуальная работа, работа в парах, работа консультантов, а также практическая работа. Такая смена деятельности помогает избежать быстрой утомляемости детей и удерживает их внимание.

Т.Т. Цель урока, а также указанные обучающие, развивающие и воспитательные задачи были, на мой взгляд, достигнуты. Мне понравилось, что на каждом этапе урока были указаны виды формируемых УУД и созданы условия для самостоятельной работы учащихся.

Л.Д. А какая деятельность учащихся работала на достижение развивающих целей?

А.Ж. Ну, например, попытка формулирования определений (это первый опыт) способствует развитию мышления; в парной и практической работах развиваются коммуникативные навыки; работа с учебником, выполнение заданий на повторение способствовали развитию памяти.

В.О. Мне показалось интересным, что каждый этап урока в презентации имел свой фон. И еще одна интересная и полезная особенность презентации: Саша поместил на слайд таймер (gif-анимация) при работе с учебником и часть ребят посматривала на время до окончания работы.

Е.Г. Мне тоже понравилась идея с таймером, хотя, по мнению доцента кафедры психологии развития и инноваций МГПУ (ИПССО) Елены Владимировны Губиной, таймер может создать стрессовую ситуацию, негативно влияющую на психику учащихся. Но в данном случае я считаю использование таймера целесообразным и полезным, так как это позволяет и ученикам, и учителю четко рассчитать время для конкретного вида работы. Думаю, применение таймера было бы полезно и при проведении самостоятельной работы.

Т.Т. Говоря о презентации, я бы отметила отсутствие в оформлении отвлекающих элементов, так что внимание ребят концентрировалось именно на информативной части слайдов. При этом был продуман и цвет фона, и размер шрифта, и расположение текста. Презентация помогла и ученикам, и учителю. Учитель сэкономил время урока, поместив часть заданий в слайды презентации, чтобы не выполнять все необходимые построения на доске. А ученики лучше воспринимают информацию, представленную наглядно.

Е.Г. Для повышения интереса к уроку Саша использовал групповую форму работы. Это повышает учебную и познавательную мотивацию учащихся и снижает уровень тревожности у детей, страх оказаться неуспешным. Закрепляя новую тему, Саша использовал работу в парах и привлекал консультантов, то есть организовал взаимообучение. Думаю, именно эта форма работы позволила в течение всего урока поддерживать активность и внимание учащихся. Рефлексивно-оценочный этап урока определил степень затруднения учащихся на уроке, что дало возможность и ученикам, и учителю оценить, насколько успешно прошло ознакомление с новой темой.

В.О. Я хочу отметить, что на уроке учитывались индивидуальные особенности учащихся. Варианты работ были дифференцированы по уровню сложности. И еще Саша подобрал необычные задания, ученики не просто отмечали точки на координатной плоскости, а получили в результате некие изображения. Это повысило интерес ребят к уроку.

Л.Д. Конечно, хорошо, что ученики проявляют интерес к работе, тем самым мотивированы на ее выполнение. Но к какому уровню мотивации (примитивный, средний и теоретический) вы можете отнести указанные Викторией задания?

А.Ж. Вероятнее всего, в представленном виде задания соответствуют примитивному уровню мотивации.

Е.Г. Мне очень понравилось начало урока, когда дети проходят и рассаживаются в классе по билетам. Это сразу задает настроение и указывает на связь темы урока с жизненными ситуациями. Еще интересно реализована межпредметная связь математики и астрономии в практической работе. С ее помощью дети узнают о том, как выглядят 11 созвездий, и получают небольшую справку о каждом.

Л.Д. Я бы не стала говорить о связи математики и астрономии: астрономию в школе не изучают, координаты в астрономии не декартовы. Здесь скорее связь с историей древнего мира.

В.О. Я хотела бы сказать несколько слов о практической работе. Идея интересна, но не до конца продумана. Даны «неудобные» координаты в виде десятичных дробей, все рисунки лежат в первой координатной четверти. А ведь самое трудное отметить точку, одна из координат которой равна нулю. А также искажены изображения некоторых созвездий, например, Большая Медведица изображена ковшом вниз.

А.Ж. Вика, задание я взял из журнала «Математика в школе», № 1 за 2007 год (Е.А. Добрина, О.А. Савина. Практическая работа «Карта звездного неба»). Основные цели — научить отмечать точки на координатной плоскости, познакомить ребят с очертаниями некоторых созвездий и указать, откуда пошли их имена. Да, некоторые очертания искажены, но чуть-чуть, а координаты будут удобны, если выбрать масштаб в две клетки. Если говорить о координатных четвертях, то с данным понятием ученики познакомятся только на следующем уроке, поэтому на данном уроке «работа» в первой координатной четверти отчасти оправдана.

Л.Д. Мне кажется, что Вика права, работать надо было с точками всей координатной плоскости, а термин ввести потом.

Заканчивая обсуждение, я бы хотела ответить на вопрос о реализации идей, заложенных в стандартах второго поколения. На каждом этапе урока была организована самостоятельная деятельность учащихся, которая мотивировалась различными стимулирующими воздействиями учителя и способствовала развитию познавательных и регулятивных УУД. Использование различных форм обучения (индивидуальные, фронтальные, в малых группах) способствовало развитию коммуникативных УУД. На каждом этапе урока учитель получал информацию о степени усвоения материала, корректировал работу, выстраивал личностно ориентированный вектор обучения. А помогают учителю ИКТ-технологии.

Благодарю всех за проделанную работу.

Э. БЕЛЯНОВА, И. БЛУДОВА,
elv-bel@mail.ru,
г. Москва

НЕМНОГО О ПЛОЩАДИ ФИГУР В ЗАДАЧАХ С ПАРАМЕТРАМИ

Задачи с параметрами, которые обязательно присутствуют в вариантах ЕГЭ, ОГЭ и различных олимпиад, являются хорошим инструментом для выявления школьников, которые не просто уверенно владеют основными приемами и методами решения различных уравнений и неравенств, но и имеют хорошо развитое логическое мышление. Но в то же время именно решение задач с параметрами и способствует развитию логического мышления и математической культуры. Обучающую и развивающую роль таких задач трудно переоценить. Каждая задача с параметром — это небольшое творческое исследование. Существует много критериев, по которым можно систематизировать эти задачи. Провести четкую границу между задачами разных типов, конечно, непросто. Но классификация задач по какому-либо признаку может быть весьма полезной, так как выявление группы, к которой относится данная задача, уже предопределяет некоторый метод решения. В данной статье мы не предполагаем исследовать вопрос о классификации задач с параметрами и методы их решения. Мы лишь предлагаем класс задач, объединенных связью с площадями некоторых плоских фигур. В основе задач этого класса лежат свойства каких-либо функций, входящих в условие. Все эти задачи допускают наглядную графическую интерпретацию, состоящую в построении графического образа на плоскости $(x; y)$. Поэтому идея решения этих задач основана на свойствах некоторых конкретных геометрических фигур.

Задача 1. Найти все значения параметра a, при которых площадь четырехугольника, ограниченного на координатной плоскости осью абсцисс и прямыми $x = a + 5$, $x = a + 1$, $y = (a - 3)x$, равна 28.

Решение. Прямые $x = a + 5$, $x = a + 1$ вертикальные, при любом значении параметра a расстояние между ними равно 4. Прямая $y = (a - 3)x$ проходит через начало координат. Данные прямые и ось абсцисс ограничивают на координатной плоскости четырехугольник, если либо $a + 1 > 0$, либо $a + 5 < 0$.

Четырехугольник, ограниченный осью абсцисс и указанными прямыми, является прямоугольной трапецией, высота которой равна 4 (рис. 1).

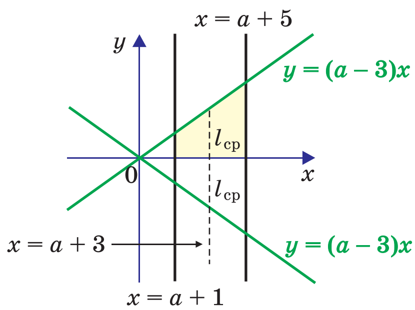


Рис. 1

К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru

Площадь трапеции $S_{\text{трап}} = l_{\text{ср}} \cdot h$ есть произведение средней линии на высоту. При любом значении параметра a средней линией трапеции является отрезок прямой $x = a + 3$, заключенный между осью абсцисс и прямой $y = (a - 3)x$. Следовательно, длина средней линии трапеции равна модулю значения функции $y = (a - 3)x$ в точке $x = a + 3$. Таким образом,

$$\begin{cases} S = |(a-3)(a+3)| \cdot 4 = 28, \\ \left[\begin{array}{l} a < -5 \\ a > -1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |a^2 - 9| = 7, \\ \left[\begin{array}{l} a < -5 \\ a > -1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 4 \\ a = \sqrt{2}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\sqrt{2}$; 4.

Задача 2. Найти все значения параметра a, при которых площадь фигуры, ограниченной на координатной плоскости прямыми

$$y = -a^2x + 3a^2 + 2,$$
$$y = -a^2x + 2a^2 + 1$$

и осями координат, равна 8.

Решение. Угловые коэффициенты прямых не равны нулю, иначе не будет ограниченной на плоскости фигуры. При любом значении параметра a данные прямые параллельны и имеют отрицательный угловой коэффициент. Так как $3a^2 + 2 > 2a^2 + 1$ при любых значениях параметра a, то первая прямая расположена выше второй и заданная фигура является трапецией, расположенной в первой четверти. Найдем площадь трапеции как разность площадей треугольников, образованных осями координат и данными прямыми. Прямые пересекают ось Ox в точках, абсциссы которых равны $\frac{3a^2+2}{a^2}$ и $\frac{2a^2+1}{a^2}$ соответственно (рис. 2).

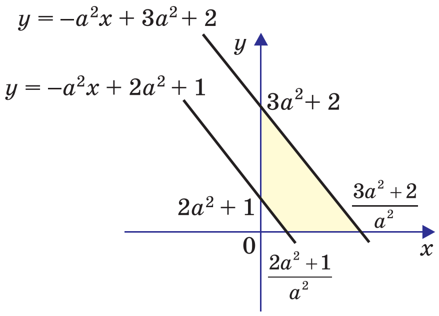


Рис. 2

Тогда

$$S = \frac{(3a^2+2)^2}{2a^2} - \frac{(2a^2+1)^2}{2a^2} = 8,$$

откуда получаем уравнение

$$5a^4 - 8a^2 + 3 = 0.$$

Решая его, находим, что

$$a = \pm 1, \quad a = \pm\sqrt{\frac{3}{5}}.$$

Ответ: ± 1; $\pm\sqrt{\frac{3}{5}}$.

Задача 3. График квадратичной функции

$$y = x^2 - 2(b + 2)x + b^2 + 3$$

с вершиной в точке A пересекает ось Ox в точках C и B, причем площадь треугольника ABC равна 125. Найти b.

Решение. Высота треугольника ABC равна $|y_{\text{в}}| = \frac{D}{4}$, основание $CB = x_2 - x_1 = \sqrt{D}$ (рис. 3).

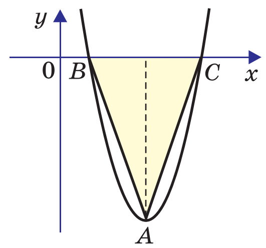


Рис. 3

Площадь треугольника ABC равна $S = \frac{D\sqrt{D}}{8}$. Для данной квадратичной функции

$$D = 4(b + 2)^2 - 4(b^2 + 3) = 16b + 4.$$

Имеем:

$$\frac{\sqrt{(16b+4)^3}}{8} = 125, \quad b = 6.$$

Ответ: 6.

Задача 4. Известно, что график функции

$$y = (x - 2)(x^2 - 3a^2x - 2x + 2a^4 + 3a^2 + 1)$$

пересекает оси координат ровно в трех точках. Найти площадь треугольника с вершинами в этих точках.

Решение. Для данной функции имеем:

$$y(0) = -2(2a^4 + 3a^2 + 1).$$

Найдем нули функции:

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x^2 - 3a^2x - 2x + 2a^4 + 3a^2 + 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = 2a^2 + 1 \\ x_3 = a^2 + 1. \end{array}\right.$$

График функции пересекает оси координат ровно в трех точках, следовательно, должны совпадать два из трех нулей функции. Получаем три случая:

1) $x_1 = x_2 = 2$, тогда

$$2 = 2a^2 + 1 \Leftrightarrow a^2 = \frac{1}{2},$$

значит,

$$x_3 = \frac{3}{2}, \quad y(0) = -6,$$

следовательно (рис. 4),

$$S=\frac{1}{2}(x_1-x_3)\cdot|\,y(0)\,|=\frac{3}{2};$$

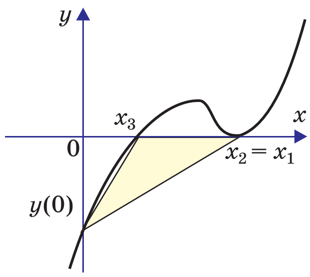


Рис. 4

2) $x_1=x_3=2$, тогда

$$2=a^2+1\Leftrightarrow a^2=1,$$

значит,

$$x_2=3,\ y(0)=-12,$$

следовательно (рис. 5),

$$S=\frac{1}{2}(x_2-x_1)\cdot|\,y(0)\,|=6;$$

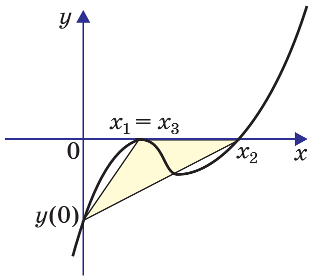


Рис. 5

3) $x_2=x_3$, тогда

$$a^2+1=2a^2+1\Leftrightarrow a=0,$$

значит,

$$x_{2,\,3}=1,\ y(0)=-2,$$

следовательно (рис. 6),

$$S=\frac{1}{2}(x_1-x_2)\cdot|\,y(0)\,|=1.$$

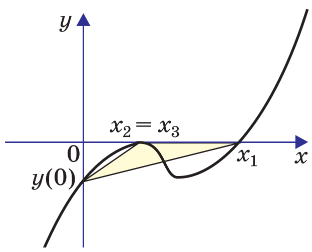


Рис. 6

Ответ: 1, или 1,5, или 6.

Задача 5. Найти все значения параметра a, при которых площадь фигуры, удовлетворяющей на плоскости $(x;\,y)$ системе неравенств

$$\begin{cases}(y+2)^2\le 36,\\ y^2+x^2-2ay\le 36-a^2,\end{cases}$$

больше или равна 18π.

Решение. Поскольку

$$(y+2)^2\le 36\Leftrightarrow (y-4)(y+8)\le 0,$$

то первому неравенству системы удовлетворяют точки плоскости, представляющие собой полосу, ограниченную прямыми $y=4$ и $y=-8$.

Так как

$$y^2+x^2-2ay\le 36-a^2\Leftrightarrow x^2+(y-a)^2\le 36,$$

то второму неравенству системы удовлетворяют все точки круга радиуса 6 с центром в точке $(0;\,a)$. При изменении параметра a центр данного круга движется по оси y.

Решением системы неравенств является пересечение найденных множеств, поэтому вычислим, какую часть площади круга составляет 18π. Радиус круга равен 6, площадь равна 36π, следовательно, искомое множество занимает не менее половины круга.

Это условие выполняется тогда и только тогда, когда ордината центра круга принимает значения от -8 до 4 включительно (рис. 7), то есть $a\in[-8;\,4]$.

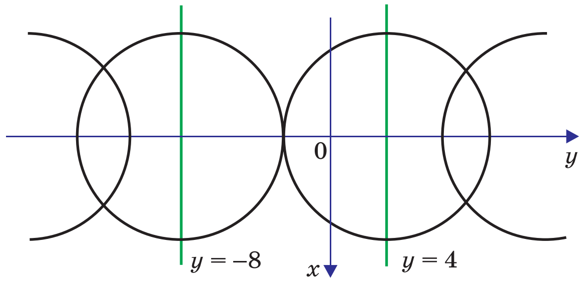


Рис. 7

Ответ: $[-8;\,4]$

Задача 6. Найти все значения параметра a, при которых площадь фигуры, удовлетворяющей на плоскости $(x;\,y)$ системе неравенств

$$\begin{cases}x^2+2x+y^2-6y-6\le 0,\\ y\ge|\,x-a\,|+2-a\end{cases}$$

больше 4π.

Решение. Поскольку

$$x^2+2x+y^2-6y-6\le 0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x+1)^2+(y-3)^2\le 16,$$

то множество точек плоскости, удовлетворяющих первому неравенству системы, представляет собой круг радиуса 4 с центром в точке с координатами $(-1;\,3)$.

Второму неравенству системы удовлетворяют все точки плоскости, расположенные не ниже графика функции

$$y=|\,x-a\,|+2-a.$$

Графиком этой функции является «уголок» модуля, вершина которого имеет координаты $(a;\,2-a)$, следовательно, вершина лежит на прямой $y=2-x$. Заметим, что прямая $y=2-x$ проходит через центр найденного выше круга.

Поскольку решением системы неравенств является пересечение множеств, найдем, какую часть круга составляет 4π. Радиус круга равен 4, площадь равна 16π, значит, искомое множество занимает более четверти круга (рис. 8).

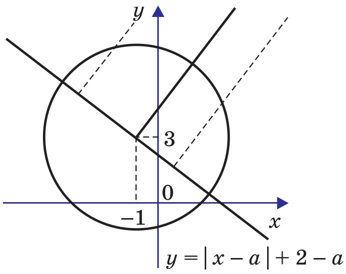


Рис. 8

Это условие выполняется тогда и только тогда, когда абсцисса вершины графика модуля больше -1, то есть $a > -1$.

Ответ: $(-1; +\infty)$.

Следующие **задачи** могут быть предложены **для домашнего задания.**

1. Найдите все значения параметра a, при которых площадь фигуры, ограниченной на координатной плоскости прямыми

$$y = -a^2x + 2a^2 + 3,\ y = -a^2x + a^2 + 1$$

и осями координат, равна 12.

2. График квадратичной функции

$$y = x^2 - 2(b + 3)x + b^2 + 5$$

с вершиной в точке K пересекает ось Ox в точках M и N, причем площадь треугольника KMN равна 64. Найдите b.

3. Известно, что график функции

$$y = (x - 4)(x^2 - 3a^2x - 3x + 2a^4 + 5a^2 + 2)$$

пересекает оси координат ровно в трех точках. Найдите площадь треугольника с вершинами в этих точках.

4. Найдите все значения параметра a, при которых площадь фигуры, удовлетворяющей на плоскости $(x; y)$ системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq |x - a| + a - 1, \\ x^2 - 4x + y^2 - 2y + 1 \leq 0, \end{cases}$$

больше или равна π.

5. Найдите все значения параметра a, при которых площадь фигуры, удовлетворяющей на плоскости $(x; y)$ системе неравенств

$$\begin{cases} y^2 + x^2 - 2ax \leq 4 - a^2, \\ (x + 1)^2 \leq 25, \end{cases}$$

больше 2π.

Ответы: **1.** $\pm 2;\ \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$. **2.** 2. **3.** 14, или 18, или 40. **4.** $(-\infty; 2]$. **5.** $(-6; 4)$.

Электронные формы учебников издательства «ДРОФА»

drofa.ru

Что такое электронный учебник | Преимущества | Демоверсия | Поддержка | Купить | Акция

Электронные формы учебников (ЭФУ) — важная составляющая обучения современных школьников

Формат: ePUB 3.0

Поддерживает: Mac OS

Акция
«Новые возможности – каждой школе»

В рамках акции в 2015/16 учебном году издательство «ДРОФА» предоставляет всем образовательным организациям бесплатный доступ к электронным учебникам (ЭФУ)

Подробную информацию об условиях участия в акции «Новые возможности – каждой школе» можно получить на сайте efu.drofa.ru в разделе «Акции»

Электронные учебники издательства «ДРОФА» созданы в полном соответствии с требованиями приказа Минобрнауки России № 1559. Разнообразие методически обоснованных электронных образовательных ресурсов в сочетании с интуитивно понятным интерфейсом, удобной навигацией и встроенными возможностями автоматической адаптации к различным размерам экранов делает ЭФУ издательства «ДРОФА» уникальным образовательным продуктом, использование которого будет способствовать достижению лучших образовательных результатов.

По книге:
ДАНИЛЕВСКИЙ В.В.
Русская техническая литература первой четверти XVIII века. – М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1954.

310 ЛЕТ РОССИЙСКОЙ НАСТЕННОЙ ТАБЛИЦЕ

Настенная таблица «Новый способ арифметики теоретики или зрительныя», составленная Василием Ануфриевичем Киприановым и гравированная Федором Никитиным с Марком Петровым, была издана в «великом граде Москве» в 1705 году. Она хорошо продумана и весьма интересна. Многочисленные тексты удачно расположены среди художественного оформления. В центре основной текст — определение содержания арифметики, «сиречь числителницы», и общие сведения о ней, расположенные в виде горизонтальной полосы, которую подпирают пять вертикальных текстовых полос. Первая из них содержит общие сведения о числах, а каждая из остальных — одно из основных арифметических правил. Тексты таблицы написаны на основе «Арифметики» Л.Ф. Магницкого. Кроме того, много отдельных текстов расположено в виде медальонов. Среди них тексты, прославляющие Петра I и его победы, что дает основание рассматривать эту настенную таблицу и как своеобразное политическое издание.

Оформление таблицы показывает, что при ее составлении В.А. Киприанов исходил из тех же замыслов, что и при оформлении «Арифметики» Л.Ф. Магницкого. Здесь же изображена арифметика в виде символической женской фигуры, сидящей на троне, к которому ведут ступени с теми же надписями, что и на фронтисписе книги Л.Ф. Магницкого. Аналогичны надписи на колоннах, расположенных по обеим ее сторонам. Однако имеется и новое. У основания восьми колонн помещены рисунки, раскрывающие содержание геометрии, стереометрии, астрономии, оптики, меркатории (навигации), географии, фортификации и архитектуры. Над колоннами, прилегающими к трону, имеются изображения: над одной из них показан шар с десятью цифрами и с надписью «Сим возлетают», а над второй — шар с циркулем и надписью вверху «До звезд достигают».

Также на таблицу помещен государственный герб и некоторые другие рисунки. На одном из них изображен Московский Кремль, на втором — Петербург в виде крепости с надписью «С. Петрополис, 1703». Это изображение можно считать первым гравированным чертежом Петербурга.

Представляют интерес и восемь медальонов с портретами по бокам таблицы. Слева в этих медальонах изображены, как показывают надписи под ними, Пифагор, Гиппарх, Птолемей, Коперник; справа — Архимед, «Царь Алфонский», «Тихо Брахий», «Фоцилид». Особенно важно, что тут мы видим изображение Коперника, знаменитого автора гелиоцентрической теории строения Вселенной, против которой много веков тщетно боролась церковь.

Так в 1705 году В.А. Киприанов создал научно-технический настенный плакат, содержание которого не ограничивается областью одной математики. Наряду с наглядным показом элементов математики он раскрыл в нем также содержание мореходной науки, астрономии, оптики, географии, фортификации и архитектуры, в понимание которой тогда входила и строительная техника.

Один из экземпляров таблицы хранится в Государственном Эрмитаже.

К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru (Таблица)


АРИѲМЕТИКА
НОВЫЙ СПОСОБЪ АРИѲМЕТИКИ ѲЕОРИКИ ИЛИ ЗРИТЕЛНЫѦ
ПРЕДѢЛЕНІЕ ПЕРВОЕ
НОМЕРАЦІО
ПРЕДѢЛЕНІЕ ВТОРОЕ
АДДИЦІО
ПРЕДѢЛЕНІЕ ТРЕТІЕ
СОБТРАКЦІО
ПРЕДѢЛЕНІЕ ЧЕТВЕРТОЕ
МОЛТИПЛИКАЦІО
ПРЕДѢЛЕНІЕ ПѦТОЕ
ДИВИЗІО

ПРЕДѢЛЕНІЕ ПЕРВОЕ

Ѡ числахъ частныхъ десатичныхъ и недесатичныхъ.

NÕМЕРАЦІО:

или численіе, значитса сице

ПРЕДѢЛЕНІЕ ВТОРОЕ

Ѡ десатичныхъ, и недесатичныхъ числахъ.

АДДИЦІО

или сложеніе слагаетса сице

ПРИМѢРЪ:

ПРЕДѢЛЕНІЕ ТРЕТІЕ

Ѡ долахъ десатичныхъ и недесатичныхъ

СÕБТРАКЦІО:

или вычитаніе, вычитаетса сице

ПРИМѢРЪ:

ПРЕДѢЛЕНІЕ ЧЕТВЕРТОЕ

Ѡ вышеѡбявленныхъ же частныхъ числахъ.

МÕЛТИПЛИКАЦІО:

или множеніе, оумножаетса сице.

ПРИМѢРЪ:

ПРЕДѢЛЕНІЕ ПАТОЕ.

Ѡ предложенныхъ десатичныхъ же и недесатичныхъ числахъ.

ДИВИЗІО:

или дѣленіе разделаетса сице

ПРИМѢРЪ

Числа цѣлаа, и частными счинилисѧ, оныа всѣхъ предѣлахъ и кончилисѧ.

Слаганіа предѣлы и валиком, в цѣлыхъ и частныхъ числахъ ѡкончихом.

Здѣ нинѣ кончаетса тектрикціе изцѣлыхъ и частныхъ числъ изъятие.

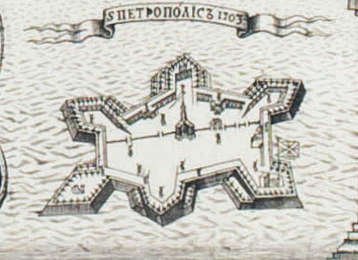
Ѡ семъ довлѣетъ что оумножати разумѣхъ тѣ предѣлы ѡкончати.

Раздѣленіе вкупное кончисѧ, ѿ сегѡ и прочимъ внашно оучисѧ.

1 Тѣмже молю ѿ самодержче, нчести Бгу ревный радѣтче:
2 Даны трудъ сей вчтѣ Бгу прїимах, и пользу людемъ ланирь издаемъ:
3 Тѣмъ оубѡ тержащаса оугорй, подлагаю главу подноги:
4 Ижидаю да вѣдетъ сей трудъ, добрѣ позвати рѡскій весь людъ.

Непобѣдимѣйшимъ наавгустѣйшему царю гдрю и великому кнзю
ПЕТРУ АЛЕѮІЕВИЧЮ
всеа великїа и малыа и бѣлыа россїи самодержцу, и благородному гдрю царевичю и великому кнзю
АЛЕѮІЮ ПЕТРОВИЧЮ
на величайшую славу и честь предстоящаго царскаго величества.

5 Нинѣ же и всѣмъ лучшій вонихъ, ѡни знать наоуки достойнѣ:
6 Иже да поетъ Бгу славу, и величитъ твою державу:
7 За толикую пользу и даръ, иже во весь миръ нинѣ издалъ.
8 Мнимъ мать твоа да прїиметъ, и матинно трудъ сей прїиметъ.



Сочинисѧ въ царствующемъ великомъ градѣ Москвѣ ... лѣта 1705 ... Василїа Кипріанова.

Одно из первых изданий трактата Непера

Так выглядит набор палочек Непера

На этом рисунке указатель строк нанесен на подставку, на которую выкладывают палочки для чисел 7 и 6.

КОНКУРС «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ»

Организация конкурса. В сентябре – декабре 2015 года проходит второй тур конкурса «Математический потенциал». В туре четыре этапа, на каждом этапе — одно задание.

Участники конкурса. В конкурсе могут принять участие, начиная с любого этапа, коллективы учащихся (класс, кружок), группы учащихся разного возраста или отдельные ученики 5–10-х классов. Все участники, как коллективные, так и индивидуальные, должны иметь руководителя из числа учителей математики или преподавателей кружка. Задача руководителя: оказывать участнику организационную помощь в работе, в оформлении и отправке ее результатов.

Лауреаты и победитель конкурса. Участник, выполнивший хотя бы одно задание, будет объявлен лауреатом конкурса, а участник, выполнивший наибольшее число заданий, — победителем.

Тематика тура. В этом туре предлагается выполнение проекта под названием «Оформляем кабинет математики». Как можно узнать, что ты входишь в кабинет математики? По таблицам с математическими формулами на стене, по моделям многогранников в шкафу, по чертежным инструментам у доски. Но со временем все это требует обновления и нового взгляда. Это и есть цель проекта.

Куда отправлять работы. Почтовое отправление с пометкой на конверте «Математический потенциал» следует выслать по адресу: редакция журнала «Математика», Издательский дом «Первое сентября», ул. Киевская, д. 24, Москва, 121165.

Электронное письмо направляйте на электронный адрес: mat@1september.ru, написав «Математический потенциал. Задание: Приспособления для счета» в поле «Тема».

Сроки. Продолжительность тура: с 1 сентября по 31 декабря 2015 года.

Последний срок отправки работ любого этапа — до 1 февраля 2016 года (по почтовому штемпелю).

Заявка участника конкурса

Форма участия: индивидуальная / коллективная (*нужное подчеркнуть*) Название команды (*если есть*)	
Фамилия, имя (каждого участника)	
Школа, класс	
ФИО руководителя	
Контакты (адрес и телефон руководителя)	

К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru (Заявка участника.)

Задание 2. Приспособления для счета. Развитие математики на протяжении веков было связано с вычислениями, которые часто относили даже к искусству. Считать приходилось очень многим людям: торговцам, чиновникам, собирающим налоги, землемерам и т.д. Отсюда и желание создать приспособления, которые упростили бы вычислительные процедуры и сделали их доступными более широкому кругу лиц. И было бы интересно создать в классном мини-музее раздел, посвященный развитию того, что сейчас мы называем вычислительной техникой. Одним из экспонатов должны стать счеты (см. статью М. Цайгера в этом номере журнала), их можно поискать «в сундуках» и «на чердаках», другим — палочки Непера, их можно сделать своими руками. Нам же присылайте фотографии того, что у вас получилось.

Палочки Непера

В 1617 году Непер опубликовал трактат под названием «Рабдология, или искусство счета с помощью палочек». В нем он описал способ, благодаря которому можно было без труда умножать числа. Сегодня никто не задумывается о сложности этого арифметического действия, даже словосочетание «способ умножения» звучит как-то странно, ведь единственный известный большинству алгоритм умножения «в столбик» проходят в третьем классе. А в те далекие времена умножение было наукой, которой посвящали целые трактаты.

В набор для вычислений, описанный Непером, входили: одна палочка с цифрами от 1 до 9 (это указатель строк) и палочки с таблицей умножения всех чисел от 1 до 9 (разряды множимого). Сверху каждой палочки были нанесены числа от 1 до 9, а по всей длине — результаты умножения этого числа на числа от 1 до 9, причем для записи результата ячейка разделена по диагонали на две части: в верхней записан разряд десятков, а в нижней — единиц.

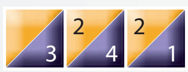
Палочки внешне были похожи на кости домино, кроме того, для их изготовления нередко использовалась слоновая кость.

Для умножения выбирались палочки, соответствующие значениям разряда множимого, и выкладывались в ряд так, чтобы цифры сверху каждой палочки составляли множимое. Слева прикладывали указатель строк — по нему выбирали строки, соответствующие разрядам множителя. Затем числа суммировались вдоль диагональной линии. Суммирование проводилось поразрядно с переносом переполнения в старший разряд.

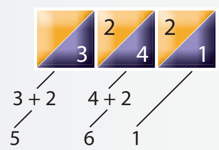
Например, чтобы умножить 187 на 3, необходимо выбрать три палочки, соответствующие числам 1, 8 и 7, и выстроить их как на рисунке 1.

Рис. 1

Третья строка показывает следующее:



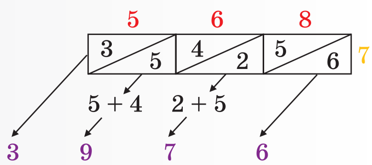
Суммируем два числа, одно из которых находится под диагональю, а другое над диагональю, но не этого квадрата, а соседнего справа. Вот так:



Эти суммы и дают нам разряды произведения: 561.

В основу своего счетного устройства Непер положил принцип умножения решеткой, широко распространенный в его время. Для умножения решеткой рисовали таблицу, содержащую столько столбцов, сколько разрядов у множимого, и столько строк, сколько разрядов у множителя. Над столбцами таблицы записывали множимое так, чтобы разряды числа находились каждый над своим столбцом. Справа от таблицы записывали множитель.

Затем заполняли клетки таблицы результатами умножения разряда множимого, находящегося над этой клеткой, и разряда множителя, находящегося справа от этой клетки. Именно эти действия Непер и упростил, нанеся таблицу умножения на палочки. Далее произведения суммировались, как и в случае с палочками.



Умножение решеткой
$568 \cdot 7 = 3976$

Рис. 2

Текст из «Метапредметные результаты: Стандартизированные материалы для промежуточной аттестации / под ред. Г.В. Ковалевой. – М. Просвещение, 2014» по мотивам: http://all-ht.ru/inf/history/p_0_12.html.

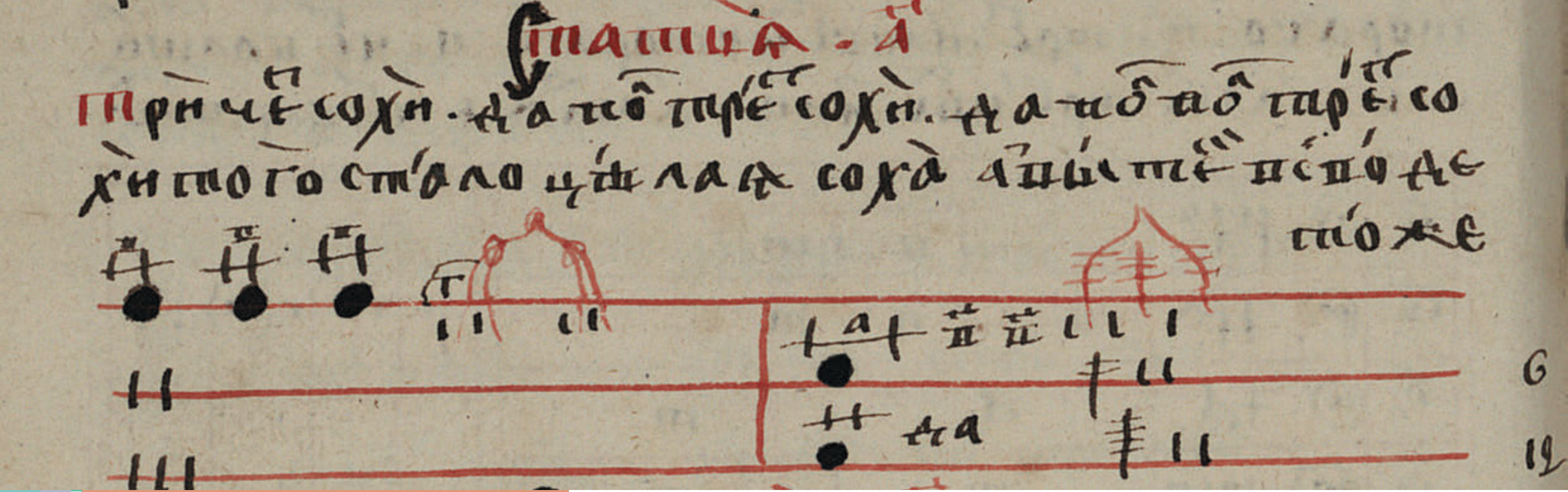


Рис. 1. Фрагмент рукописи XVII века

М. ЦАЙГЕР,
Израиль

ЭКСКУРСИЯ В РУССКУЮ АРИФМЕТИКУ

Дорогой любознательный читатель, сейчас мы совершим краткую экскурсию в русскую арифметику XVII века. Наша экскурсия будет несколько своеобразной — мы внимательно просмотрим и разберем кусочек рукописи этого времени. Рукопись называется «Арифметика», правда, в самой рукописи это слово записано как «арехметика», так считалось правильным в то время. Вот как выглядит кусочек рукописи, который мы будем просматривать (рис. 1).

Попробуем прочесть, что здесь написано. Этот шрифт называется скорописью XVII века, многие буквы в нем понятны.

Первое слово: «Статия».

Буква «я» имеет непривычный вид ѧ, эта буква во время ее употребления называлась «юс малый». Затем следует буква «а» с какой-то короной. Эта корона называется ти́тло (я специально выделил букву «и», поскольку на ней ударение). Титло означает, что буква под ним является числом. Не все буквы были числами, например, буква «б» (буки) не являлась числом. Буква «а» (аз) означает число 1, то есть заголовок этого отрывка переводится как «Статья 1».

Рис. 2. Счеты XVI–XVII веков

Идем дальше. Следующие три слова: «Три чети сохи».

Слово «чети» записано по скорописной традиции того времени с выносом вверх последней буквы «т». Кроме того, писцы того времени иногда не дописывали слово, это считалось нормальным. В данном случае писец не дописал букву «и». Над вынесенной буквой отрисовывалась горизонтальная скобка, в данном случае скобка получилась слева и почти вертикальной.

Что же означает слово «чет»? Оно означает четь, то есть четверть. А слово «соха»? Хотя всем известно, что соха — это деревянный плуг, который тащила лошадь, а землепашец шел следом, вжимая ручки сохи вниз, чтобы глубже вспахивать землю, в данном случае соха означает другое — это территория поля определенной площади, подлежащей налогообложению. Еще во времена татаро-монгольского завоевания русские князья собирали налоги с населения, так называемый ясак, причем величина налога определялась количеством «сох». За соху принимался размер пашни одного хозяйства, имеющего двух-трех мужиков, лошадь и соху. К семнадцатому веку татар изгнали, размеры сохи изменились, но слово «соха» приросло к этой мере налогообложения. Кстати, другая мера налогообложения называлась «выть», мы увидим это слово чуть дальше.

Читаем дальше, после точки: «да пол трети сохи».

Обратите внимание, что в слове «пол» буква «л» вынесена вверх, над ней показана горизонтальная скобка, которая говорит читателю, что эта буква — выносная. В слове «трети» буква «т» также вынесена, слева от нее почти вертикально начертана выносная скобка, а о самой последней букве, «и», мы с вами догадываемся по падежу.

Читаем дальше: «да пол-пол трети сохи того стало целая соха».

Здесь мы видим вынесенные вверх буквы «л», знак переноса на другую строку отсутствует.

Дальше без точки следует продолжение предложения: «а выть в своде тоже».

Дело в том, что буква «в» в те времена рисовалась прямоугольником, она была как бы положена на «спину», таковы были правила того времени.

Все предложение выглядит так: «Три чети сохи да пол трети сохи да пол-пол трети сохи итого стала целая соха, а выть в своде — тоже».

Это было очень важное положение. Дело в том, что царским служилым людям того времени (дьякам, подьячим) приходилось складывать территории тягловых участков (тягло — земельное налогообложение), эти территории определялись тем или иным числом сох, включающих целые и дробные части: четверти, трети, а также двоичные доли третей и четвертей.

Двоичные доли определялись количеством частиц «пол». «Пол чети» означает полчетверти, то есть $\frac{1}{8}$. Пол-пол трети равно $\frac{1}{12}$.

Сложить пол-пол чети и пол-пол чети легко — получаем пол чети. А вот как сложить пол чети и пол трети? Что получится? Это было нелегкой проблемой для служилых людей. Но они эту проблему успешно решали. Нам с вами известно, что четверть можно выразить как сумму третных дробей:

$$\frac{3}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=1.$$

Служилые люди того времени тоже это понимали, но по-своему. Во-первых, существовали писаные правила, в которых рассматривались разные вариации такого перевода. И эта «статья 1» является одним из таких правил. Ведь если изложить идею этой статьи на современном языке, то мы получим следующее равенство:

$$\frac{3}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=1.$$

Вы спросите, а причем здесь соха? В те времена все числа рассматривались как именованные. Хотя было понятно, что если заменить в рассматриваемой статье слово «соха» на слово «выть» (соха была больше выти), то выражение останется справедливым. Поэтому в статье и добавлено примечание: «а выть в своде тоже». В своде — значит, при суммировании.

При обучении детей арифметике ученики знакомились с массой подобных частных правил и выучивали их чуть ли не наизусть, кроме того, у служилых людей в рабочем обиходе были специальные рукописи, содержащие эти правила. Одна из таких рукописей называлась «Роспись сошному письму десятинной и четвертинной пашни дворцовых сел, поместных и монастырских волостей, добрых и средних и худых земель, выраженных с точностью до мелких дробей».

Но можно было проверять правильность сложения третных и четвертных дробей иначе, с помощью счетов того времени (рис. 2).

На этих счетах имеется верхняя зона для целых чисел, где на проволоках нанизано по десять костей, и нижняя зона для подсчета четвертей (четей) и третей. Эта зона разделена на левую и правую части: левая часть для четей, правая — для третей.

Зоны целых чисел — десятичные, то есть там слева не может быть больше девяти костей. Как только оказалась десятая кость, все кости сбрасываются направо, а на вышележащей проволоке откладывается одна кость.

Зоны дробей двоичные, за исключением верхней проволоки зоны, где справа могут оказаться три или четыре кости. (На рисунке 2 правая сторона счетов была отклонена, в результате чего все кости оказались слева, но это не рабочее состояние.) Так вот, в зонах дробей слева на всех, кроме верхней, проволоках может быть не больше одной кости, если оказалось две, то обе кости сбрасываются направо, а на вышележащей проволоке влево добавляется одна кость.

И как же на таких счетах осуществляется сложение третных и четвертных дробей? Это показано на рисунке 3. Рассмотрим рисунок 3.2. Здесь верхняя проволока в правой части имеет кости ценностью $\frac{1}{4}$. Слева записано число 4 буквой $\overline{\text{Д}}$, это число показано на рисунке 1 индо-арабской цифрой, привычной нам. Это — *дробное число*, оно показывает ценность кости на этой проволоке: число 4 означает, что 4 кости на этой проволоке составят целую единицу. В правой части рисунка 3.2 кость на этой проволоке имеет ценность $\frac{1}{3}$, это показано дробным числом Г҃, означающим 3 в старорусской алфавитной числовой системе. И вот мы видим на рисунке 3.2, что две четвертные кости можно заменить двумя третными костями $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)$. А на рисунке 3.1 показан общий случай.

И вот на рисунке 1 ниже текста показан график, иллюстрирующий расположение костей в рассмотренном текстовом правиле. Мы видим, что на рисунке счетов показаны три четвертные кости в левой четвертной зоне (каждая кость имеет ценность $\frac{1}{4}$) и в третной зоне кости с ценностью $\frac{1}{6}$ и $\frac{1}{12}$. И если мы согласно схеме, показанной на рисунке 3.1, преобразуем третные кости в четвертные, то мы получим одну кость ценностью $\frac{1}{4}$ и, добавив ее к трем другим костям на четвертной проволоке, получим четыре кости, которые тут же обязаны превратить в кость, означающую целую единицу. То есть на счетах мы подтвердили правило, изложенное в тексте.

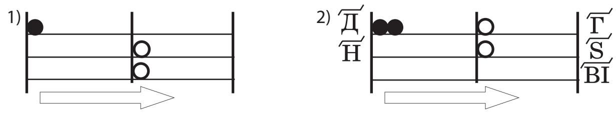


Рис. 3. Прямое преобразование четвертной кости в третные: 1 — общий случай; 2 — две четвертные кости на верхней строке с дробным числом Д҃ (4)

На рисунке 1 мы видим вспомогательные надписи и схемки. Это элементы записей ценности костей с помощью чисел в решетках. Я могу об этом рассказать подробно, но не буду это делать, чтобы не перегружать нашу экскурсию. Об этом можно прочитать в моей книге.

Мы с вами побывали в русской допетровской арифметике XVI–XVII века, увидели, как в то время писали и считали. Должен сказать, что русские служилые люди обладали немалыми знаниями. Когда, например, к ним из Европы пришла прогрессивная для Европы техника счета на линиях, изобретенная (повторно, после древних греков. — ***М.Ц.***) в конце XV века, то русские специалисты, ознакомившись с ней, нашли ее менее удобной, чем уже использовавшаяся ими техника счета костьми. Порождением этой техники стали наши русские счеты, которые дожили до XX века.

Д. ЗЛАТОПОЛЬСКИЙ,
г. Москва

В статье М.А. Цайгера впервые в отечественной литературе (без учета [1]) описаны методы вычислений на старинных счетах с использованием неполных рядов для третных и четвертных дробей.

На «современных» счетах тоже имеется неполный ряд с четырьмя костяшками (рис. 1). Под ним находились 2 или 3 полных ряда. Последние использовались для откладывания копеек (при денежных расчетах) или десятых, сотых и тысячных долей чисел (в общем случае), то есть неполный ряд являлся, так сказать, «разделителем целой и дробной частей». Скорее всего, четыре костяшки — это «отголосок» четырех костей на старинных русских счетах.

Рис. 1

Рис. 2

В музее истории вычислительной техники гимназии № 1530 г. Москвы [2] представлены счеты, на которых имеются *два* неполных ряда (рис. 2).

Почему самый нижний ряд неполный, ведь он ничего не «разделяет»? Дело в том, что такие счеты использовались для расчетов не только с рублями и копейками, но и с «полу́шками». Полу́шки появились в результате денежной реформы Петра I как номинал, эквивалентный $\frac{1}{4}$ медной копейки [3]. С 1700 по 1810 гг. и в 1850–1866 гг. номинал на монетах обозначался словом «полушка», с 1839 по 1846 гг. и с 1867 по 1916 гг. — в виде «$\frac{1}{4}$ копейки». Для полушек и был предназначен второй неполный ряд, на котором можно было отложить 1, 2 или 3 полушки (если получалось 4, то они сбрасывались, а в вышерасположенном ряду добавлялась 1 копейка). Например, на счетах можно было отложить число 12 рублей 58 копеек и 2 полушки.

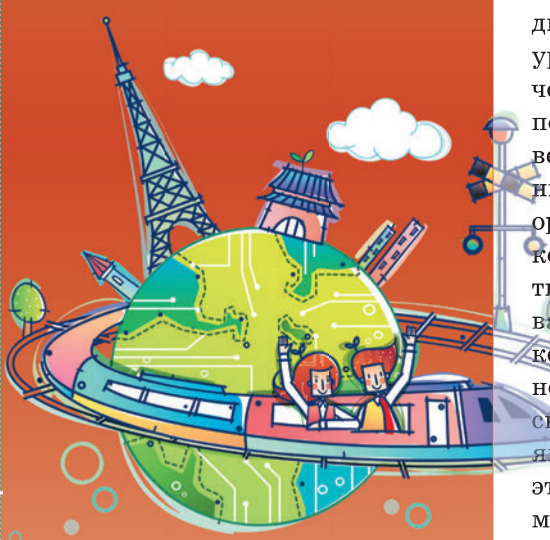
После революции 1917 года полушка из обращения исчезла, а счеты — остались...

Литература

1. *Цайгер М.А.* Арифметика в Московском государстве XVI века. — Беэр-Шева, 2010. 2. www.museum.ru/m2744. 3. http://ru.wikipedia.org/wiki/Полушка

Н. ПОДХОДОВА, О. ИВАНОВА,
г. Санкт-Петербург

О ФОРМИРОВАНИИ МЕЖПРЕДМЕТНЫХ ПОНЯТИЙ



■ Почему школьники путают круг и окружность, почему для некоторых учеников числа по оси координат левее (или ниже) нуля возрастают, почему большинство школьников так и не усваивают одно из основных понятий математики — понятие функции? Почему знания, полученные на одном предмете, ученики не переносят на другой учебный предмет, не применяют в повседневной жизни? Попробуем ответить на эти вопросы.

Освоение учащимися межпредметных понятий — одно из основных направлений достижения метапредметных образовательных результатов, выделенных в Федеральных государственных образовательных стандартах второго поколения. Реализация этого направления является не только условием формирования целостной системы знаний, целостного мировоззрения, но и позволит избежать фрагментарности знаний, ошибок, допускаемых учениками в силу овладения знаниями об определенных свойствах понятий на одном учебном предмете и переноса их на понятия другого предмета, имеющие такой же термин или часть термина. Например, координаты изучаются и в математике, и в географии, и в истории. На уроках географии с координатами учащиеся знакомятся раньше, чем на уроках математики. В географической системе координат положение точки определяется долготой и широтой. Счет широт ведется от экватора к полюсам от 0° до 90°. Таким образом, чем ниже или левее точка относительно начала координат, тем ее ордината больше. Это свойство, специфичное для географических координат, дети, усвоив, могут перенести на декартовы координаты в математике. Тем более что учителя для краткости не называют термин полностью (декартовы координаты, географические координаты), а говорят просто о координатах. Ввиду обособленности учебных предметов в традиционной системе образования, связь между этими понятиями не устанавливается, специфика явно не выделяется, связь с жизненными представлениями об этих понятиях не выявляется. Отсюда затруднения в понимании материала у некоторых детей. Например, термин «круг» встречается повсюду. Трамвай может двигаться по кругу. В сказках дети встречались с заколдованным кругом, учась плавать, использовали спасательный круг, а победив, они могли совершать круг почета. Круглой, а не шарообразной называют Луну. Большинство этих объектов в геометрическом смысле кругом не являются. Но на уроках эти различия не выявляются и учащиеся, в силу определяющей роли *субъектного опыта* в процессе понимания, часто путают круг с окружностью (например, при определении длины или площади) и даже шаром. Поэтому такие понятия можно отнести к «ошибкоопасной», как мы назвали, группе, естественно, они требуют специальной работы. Одинаковые слова в терминах таких

К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru

понятий, кажется, дают основание отнести их к межпредметным. Но вряд ли это так. В школе на уроках математики не изучают координаты вообще, а рассматривают декартовы координаты, но последних не изучают на уроках географии или истории, хотя на разных учебных предметах учителя преимущественно используют термин «координаты», не уточняя какие. Все эти три группы понятий, рассматриваемые в географии, математике, истории, имеют общие свойства, которыми обладают координаты в разных учебных предметах и в повседневной жизни. Совокупность этих общих свойств представляет с логической точки зрения понятие, и его целесообразно назвать межпредметным. В глоссарии ФГОС методической, философской литературе нет четкого определения межпредметных понятий, поэтому надо договориться, что мы будем понимать под межпредметным понятием. В школьной математике преимущественно используется логический подход к трактовке понятия. Поэтому и межпредметное понятие целесообразно описать в рамках этого подхода. С точки зрения логики [8] любое понятие характеризуется именем, смыслом и значением. *Имя* (*термин*) — это языковое выражение, используемое для обозначения конкретных вещей (предметов, свойств, отношений, процессов, явлений и т.д.). Предметы могут быть как материальными, так и идеальными. Предмет, который обозначен термином, является значением имени. *Смысл имени* — это способ, с помощью которого термин обозначает предмет. Именами математических понятий мы обозначаем математические объекты, которые изучает математика; значениями понятий являются идеальные объекты; смысл понятий может быть передан определением, системой аксиом, признаком, описанием свойств объектов, существенных для понятия, задан аналитически. Один и тот же математический объект может иметь разные имена и смыслы. Например, модуль числа имеет аналитический и геометрический смысл. Объект может иметь смысл (определить можно что угодно), но не иметь значения (может не существовать).

В методике обучения математике рассматривают такие характеристики понятия, как объем и содержание. *Объем* — множество объектов, выделяемых и обобщаемых в понятии. Фактически объем представляет множество значений понятия. *Содержание* — совокупность свойств объектов, существенных для понятия. Фактически содержание отражает смыслы понятия.

Описанные выше понятия, которые мы отнесли к «ошибкоопасной» группе, могут иметь общий термин или часть термина и пересечение смыслов (содержания). А вот значения их не совпадают, то есть объемы этих понятий не пересекаются. Такие понятия в логике определяют как соподчиненные (в рассмотренном выше примере это географические координаты, декартовы координаты, координаты на исторической ленте времени и т.д.). Их общий смысл образует *содержание межпредметного понятия*, а все значения этих понятий образуют *объем межпредметного понятия*. Определенные таким образом межпредметные понятия не являются предметной целью изучения математики, да и большинства учебных предметов. Целью изучения на разных предметах являются понятия, *подчиненные межпредметному* и *соподчиненные* между собой. Поэтому вряд ли целесообразно формировать на уроках математики межпредметное понятие как собственно понятие, да и достаточно сложно в рамках одного предмета, а вот обобщенное представление (предпонятие по Выготскому Л.С. [3], как переходная ступень от мышления в образах к мышлению в понятиях) необходимо. Ведь именно межпредметные понятия в том смысле, что мы определили выше, являются основой интеграции предметных понятий, способствуют формированию целостной системы знаний. Поэтому необходимым условием создания целостной картины мира является формирование у учащихся *предпонятия* или *обобщенного представления* о межпредметном понятии как интегрирующего понятия и уже на этой основе формирование подчиненного ему предметного понятия. *Предпонятие* включает различные образы (образуют объем понятия) и свойства, существенные для межпредметного понятия (образуют содержание понятия), то есть «картинки понятия» плюс свойства, существенные для понятия. Запас образов понятия у учащихся должен быть достаточно широк. Ведь в работе с понятиями, при решении задач учащиеся в основном опираются на образы объектов, что требует сформированности достаточно широкого объема понятия. В противном случае возникают ситуации: учащиеся, зная определение геометрической прогрессии, не распознают ее в задаче; рассматривая пианино с плоскими поверхностями и без колесиков, учащиеся, да и учителя, часто не узнают в нем модель призмы.

Опора на образы при формировании понятия в школе необходима, так как согласно *психологической* трактовке термина (а за процесс формирования понятий у человека «отвечает» в первую очередь психология) «понятие», являясь целостной психической структурой, включает *образы* разной степени обобщенности [2]. Например, формируя обобщенное представление о координатах, целесообразно сначала организовать формирование объема понятия, выполняя конкретные задания на определение положения объекта в море или на суше, во времени, на числовой прямой или в системе декартовых координат и рассматривая соответствующие картинки. На основе этого ученики могут сами или с помощью учителя выделить существенные свойства межпредметного понятия «координаты»:

1) являются обозначениями положения объекта;

2) обозначают положение на поверхности или в атмосфере Земли, на прямой, плоскости, в пространстве или во времени;

3) могут быть представлены словами, числами, градусной мерой, другими знаками.

Методически **формирование обобщенного представления о межпредметном** понятии можно организовать разными способами, и на уроках это не занимает много времени. Оно включает следующие этапы.

- Создание образов понятий, подчиненных межпредметному и соподчиненных между собой. Эти понятия являются целью или средством изучения на других учебных предметах.

Например, при изучении темы «Линии в геометрии» в 5–6-х классах учащимся может быть предложено следующее задание.

Задание. Даны описания объектов:

1) черта, контур, протяженный и тонкий пространственный объект;

2) последовательность, ряд;

3) направление дороги, пути, маршрут;

4) старинная мера длины.

Придумай слово, которым можно назвать объекты всех четырех групп.

- Выявление субъектного опыта ребенка, который будет описан ниже.

Задание. Положи на рисунок кальку и обведи модели линией. (На рисунках изображена схема линий метро, шеренга детей, выстроившихся в линию, линия электропередач, технологическая линия — конвейер). Напиши словосочетания со словом «линия». В каких случаях используют это слово?

- Выделение общих свойств соподчиненных понятий (подчиненных межпредметному).

Формулируется **вывод** о том, что о линии обычно говорят, когда хотят подчеркнуть, что объект или объекты образуют что-то протяженное. Таким образом, у учащихся создается запас образов, связанных с межпредметным понятием «линия», то есть формируется объем понятия и выделяются основные его свойства (содержание понятия). Этот процесс начинается на подготовительном этапе, до введения геометрического понятия «линия» на основном этапе, продолжается на этапе закрепления, где имеет место следующий этап.

- Расширение объема межпредметного понятия.

Задание. Вставь слово и объясни, в каком учебном предмете ты можешь встретиться с этим словосочетанием:

а) оборонительная ...;

б) ... перемены даты (на поверхности земного шара, по разные стороны которой местное время отличается на сутки);

в) трёх... винтовка;

г) кабельная ...;

д) ... связи.

- Решение задач с использованием соподчиненных понятий.

Приведем две такие **задачи**.

1. В старорусской системе мер размер ногтя составлял 16 линий, а в русской системе мер с XVIII века стала использоваться «большая линия», которая в 4 раза больше «старорусской линии». Она использовалась при измерении калибра (диаметра ствола) оружия. Сколько «старорусских линий» в диаметре трехлинейной винтовки?

2. На Васильевском острове улицы, идущие от реки Невы, названы линиями. Здесь же в 1907 году была открыта первая линия движения электрического трамвая по улицам Санкт-Петербурга: от Главного штаба до 8-й линии Васильевского острова. Скорость трамвая составляла в среднем 20 км/ч. Где мог оказаться пассажир этого трамвая через 10 минут после выхода трамвая от Главного штаба (на Васильевском острове или нет?), если путь трамвая от Главного штаба до Острова составлял менее 2 км и через каждые 800 м трамвай делал остановки приблизительно по 2 минуты?

Следует отметить, что на этапе создания образов понятий, подчиненных межпредметному и соподчиненных между собой, формы предъявления этих образов могут быть различными: вербальная (слова, словосочетания, художественные тексты, стихи или цитаты из художественных текстов), иллюстративная, иллюстративно-вербальная (рисунки или фотографии и вербальные тексты как художественные, так и научные).

Например, для введения обобщенного представления (предпонятия) о межпредметном понятии «круг» учащимся можно предъявить изображения объектов: полярный круг, спасательный круг, модели геометрического круга, круги на воде, круг кровообращения, круги Эйлера и т.д., и предложить ответить на вопрос «Что объединяет эти рисунки?» На основе выполнения этого задания выделить вместе с учащимися разные смыслы понятий с именем «круг» и выяснить, какие из них описывают круг в геометрическом смысле. Такой подход будет способствовать расширению культурологического компонента при обучении математике.

Формируя понятие, необходимо иметь в виду, что очень немного понятий, даже в математике, термин которых не знаком ребенку. А значит, за этим термином у ребенка закреплен определенный смысл и значения, то есть определенный субъектный опыт, который может расходиться с научным смыслом и значением. Любую информацию человек переводит на свой язык, и другого пути формирования знаний нет [9]. Невыявление субъектного опыта может привести к тому, что при введении нового материала ученик будет переводить новую информацию в соответствии со своим субъектным опытом, не всегда включающим объективный смысл нового понятия. Учителям знакома ситуация, когда ученики при сложении чисел с радикалами начинают складывать числа, стоящие под знаком корня. В данном случае учащиеся поступают в соответствии со сформировавшимся опытом сложения дробных чисел. Ведь по внешней структуре выражения $3\frac{1}{4}+5\frac{1}{8}$ и $3\sqrt{4}+5\sqrt{8}$ одинаковы, и ученики применяют ко второму выражению те же правила, что применяли к первому.

Для выявления субъектного опыта используют разные методики [7]. При введении межпредметного понятия целесообразно использовать методику выявления смысловых характеристик, предлагая вопросы типа «Что такое функция? Где ты встречался с этим понятием? На каких учебных предметах ты использовал это понятие?» еще до введения понятия «функция». Или методику ассоциаций и рисунков, как при введении понятия «линия». Это позволит учителю понять, что предстоит корректировать ввиду расхождения субъективного и объективного смыслов понятия, а на что можно опереться при введении нового понятия. В конце урока желательно вернуться к этому заданию и предложить учащимся ручкой другого цвета исправить ответ. Это позволит определить, встроилось ли понятие в субъектный опыт ученика (необходимое условие обеспечения понимания [1]).

Поэтому организация изучения предметного понятия, подчиненного межпредметному, начиная с формирования обобщенного представления о межпредметном понятии, обоснованна не только с логической точки зрения, но и с психологической точки зрения. Широкий объем межпредметного понятия включает разные образы (значения) понятия, в том числе и содержащиеся в опыте ребенка, что позволяет связать новое понятие с уже имеющимися в опыте ребенка. Так, например, рассмотренное выше понятие «координаты» тесно связано с субъектным опытом ребенка. Указание адреса, места в билетах на поезд, в театр — это встреча ребенка с координатами без явного указания термина, а позднее в его опыте появляется и повседневное выражение «Оставь мне свои координаты». Выявление субъектного опыта позволяет выявить причины неусвоения, а не бороться с их симптомами.

Нами были выделены этапы формирования межпредметных и подчиненных им понятий на уроках математики. Этапы распределены по двум блокам: первый выполняется учителем при подготовке к урокам, второй реализуется непосредственно на уроках. Раскроем эти этапы, рассмотрев их реализацию на примере одного из наиболее важных понятий школьной математики — понятия «функция». Во ФГОС основной школы по математике функциональная линия выделена в самостоятельный раздел наряду с разделами «Алгебра», «Геометрия» и др. Да и в жизни человек постоянно встречается со словом «функция». Частота употребления этого термина составляет 1825 раз на примерно 300 млн слов, то есть каждое 165 слово в нашей речи — это слово «функция».

Блок I

Этап I. *Выделение понятий, соподчиненных изучаемому на уроках математики понятию и рассматриваемых на других учебных предметах.*

Этап реализуется на основе анализа содержания других учебных предметов. На уроках математики изучаются «числовые функции числового аргумента», на других предметах — «функции внутренних органов», «функции государства и других социальных институтов», «функции членов предложения» и т.д. Все эти понятия подчинены межпредметному понятию «функция».

Этап II. *Построение обобщенного представления о соответствующем межпредметном понятии.*

На основе анализа трактовок выделенных на первом этапе соподчиненных понятий:

– рассматриваются различные значения (образы) соподчиненных понятий, они образуют объем межпредметного понятия;

– выделяются свойства, существенные для вводимого понятия; они образуют содержание межпредметного понятия;

– рассматриваются всевозможные значения понятия (объем понятия);

– проверяется выполнение выделенных свойств для подчиненного математического понятия.

В словарях и учебниках встречается более 10 различных трактовок понятия «функция». Проведенный анализ этих трактовок позволил выделить два основных смысла этого понятия:

1) о функции мы говорим как о действии, выполняемом кем-либо или чем-либо, назначении человека или предмета;

2) под функцией понимается соответствие ($y = f(x)$) между элементами двух множеств ($\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$), при котором каждому элементу множества $\boldsymbol{X}$ ставится в соответствие единственный элемент множества $\boldsymbol{Y}$. При этом природа элементов этих множеств может быть любой [4].

Как показал проведенный нами эксперимент, 55% учащихся 7–8-х классов при опросе на уроках математики и до 90% при опросе на других уроках под функцией понимают действие. Причем из остальных учащихся на уроках математики 40% в качестве определения функции предлагали конкретные функции, заданные аналитически, или их графики. В данной ситуации можно поступить по-разному:

1. Не связывать математический объективный смысл понятия «функция» с объективными смыслами в других науках и субъективным смыслом ребенка, формировать понятие «функция» в традиционном ключе.

2. Развести разные термины соподчиненных понятий, не выходя на межпредметное понятие и не показывая детям, что смыслы этих соподчиненных понятий имеют общее.

3. Установить связь между различными смыслами понятий.

Оптимальным для достижения метапредметных результатов является последний путь. Как его реализовать?

В жизни, говоря о функции как о действии, мы выделяем только одно множество. А понимание функции во втором смысле предполагает выделение двух множеств. Но как показывает история развития математики, на определенном историческом этапе под функцией понималась только зависимая переменная, то есть объем понятия был представлен только одним множеством. После введения термина «функция» в математике в 1673 г. Готфридом Вильгельмом фон Лейбницем и до второй половины XIX в. в определении функции этим термином обозначалось только одно множество (переменную величину y называли функцией переменной величины x).

Но никакое действие не существует без объекта, который выполняет это действие. Поэтому, рассматривая функцию вне математики, можно выделить и второе множество, заданное неявно, — множество объектов, которые обладают этими функциями (или совершают эти действия). Недаром вне математики говорят о функциях чего-то или кого-то, например, функции родителей, функции органов пищеварения. Да и в математике функцию рассматривают как заданную на каком-либо множестве.

Таким образом, понятия функции в математике и вне ее имеют общие свойства.

Этап III. *Выделяются свойства, специфичные для математического понятия, подчиненного межпредметному.*

Блок II

Этап IV. *Выявление субъектного опыта учащихся.*

Этот этап реализуется уже непосредственно на уроке. Он необходим для выявления субъективного смысла (житейского представления) межпредметного понятия у каждого ученика и установления на этой основе связи с вводимым понятием.

Впервые термин «функция» встречается в учебнике природоведения 5-го класса при изучении функций растений и функций животных. Здесь функция понимается как действие, выполняемое растениями и животными. В таком же смысле можно понимать функции государства на уроках обществознания, функции внутренних органов на уроках биологии. И в бытовом значении термин «функция» звучит в таком контексте. Как показало проведенное исследование, именно в этом смысле понимают многие учащиеся понятие «функция» даже после знакомства с определением функции в алгебре. При выполнении задания назвать словосочетания со словом «функция» большинство учащихся называли функции мобильного телефона или других приборов. Поэтому введение математического понятия целесообразно начать с функций бытовых приборов или мобильного телефона, что будет способствовать не только восприятию, но и прочному усвоению понятия «функция» как связанному с субъектным опытом ученика.

Этап V. *Формирование у учащихся обобщенного представления (предпонятия) о межпредметном понятии.*

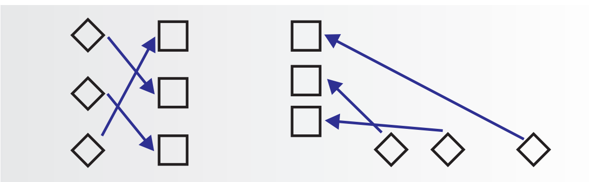
На этом этапе происходит знакомство учащихся с разными значениями (объемом) межпредметного понятия и разными его смыслами через определенную систему заданий.

Учащимся можно предложить **задания** такого типа: установить соответствие между множествами, соединив стрелкой соответствующие элементы, и дать названия множествам:

1) Motorola 1973 г.	Bluetooth
Benefon Beta 1993 г.	Голосовая связь
Siemens 2000 г.	Отправка sms
Nokia 2110 1994 г.	Встроенные часы
Sony Ericsson 2003г	Мобильный интернет
2) Легкие	Обеспечение организма глюкозой
Печень	Восприятие и обработка информации
Мозг	Обеспечение дыхания

Учащиеся под функцией понимают элементы множества, записанного во втором столбике (множество действий, которые впервые появились с выходом определенной модели телефона, множество функций внутренних органов человека). Но никакое действие не существует без объекта, который выполняет это действие. Поэтому можно выделить второе множество, которое неявно задано (множество мобильных телефонов, множество внутренних органов человека) и правило соответствия между этими множествами.

Цель заданий: сформировать обобщенный образ понятия функции на основе уже сформированных у учащихся представлений о функции, который может быть представлен схемой, и выделить свойства, существенные для межпредметного понятия: наличие двух множеств и связи между ними. То есть ученики, встречаясь с функциями в разных учебных предметах и вне школы, должны видеть не только множество действий, но и множество объектов, их производящих, и связь между этими множествами. Это будет способствовать как развитию функционального мышления учащихся, так и усвоению понятия функции в математике.



Связь между множествами может быть и явной зависимостью. Именно такие функциональные зависимости встречаются в различных учебных предметах, которые целесообразно рассмотреть с учащимися перед выделением специфики функции в школьной математике.

Например, на уроках географии учащиеся рассматривают зависимость климата территории от широтного положения, рельефа, влияния океана и преобладающих ветров. Учащимся можно предложить следующее **задание**.

Известно, что климат территории зависит от природных условий и характеристик территории. С помощью стрелок покажите зависимость основных характеристик климата территории от природных условий и характеристик территории:

Температура	Рельеф
Количество осадков	Широтное положение
	Влияние океана
Влажность	Преобладающие ветры

Как вы думаете, элементы какого множества называются зависимыми, а какого независимыми?

Этап VI. *Демонстрация специфики понятия данной предметной области, подчиненного межпредметному, связи его с другими учебными предметами. Введение определения предметного понятия, подчиненного предметному. Запись определения в алгоритмизированном виде.*

В школьном курсе алгебры специфика понятия проявляется в том, что множества являются числовыми, выделяется множество независимых и зависимых переменных, а правило соответствия (закон, зависимость) между элементами этих множеств в современной трактовке называют функцией, оно подчиняется определенному требованию и может быть задано по-разному.

В рамках системно-деятельностного подхода согласно ФГОС предполагается, что к теоретическому выводу ребенок приходит в результате собственной деятельности. Это значит, что к определению функции (содержанию понятия) учеников целесообразно подвести через решение задач, которые знакомят с объемом понятия, а именно, с различными конкретными представителями: функциональными зависимостями (кусочно-заданной функцией; функцией, заданной на множестве натуральных чисел; непрерывной функцией) и разными способами их задания (таблица, график, словесный способ и аналитический), а также позволяют выделить специфичные для математики свойства функции. Это позволит избежать формирования у учащихся представления о функции только как об аналитическом выражении или графике в виде непрерывной линии.

Ученикам могут быть предложены следующие **задачи**.

1. В час ночи в магазине «Лента» обслужили одного покупателя, в 2 часа ночи — двоих, в 3 часа ночи — двоих, в 4 часа утра — троих, в 5 часов утра — четверых. Занесите данные о числе ночных покупателей в таблицу:

Время	01:00	02:00	03:00	04:00	05:00
Число покупателей					

Изобразите соответствие между временем и числом покупателей на графике.

2. Холодильник потребляет 16 Вт в час. В 12 часов дня включили новый холодильник, а в 14:00 отключили свет на 3 часа. После чего холодильник снова включили. Постройте график зависимости потребляемой энергии от времени в период с 12 часов дня до 6 часов вечера. Придумайте формулу, с помощью которой можно найти количество энергии, потребленной холодильником в любой момент времени с 12 до 14 часов.

Для формирования объема и содержания понятия после решения каждой задачи учащиеся отвечают на вопросы и постепенно заполняют таблицу, с помощью которой они смогут сами сформулировать определение функции. Вопросы формулируются отдельно к каждой задаче с целью выделения свойств, существенных для понятия «функция». Приведем *примерный набор таких вопросов:*

– Между какими множествами установлено соответствие?

– Какое из них является множеством независимых переменных?

– Может ли числу из первого множества соответствовать два числа из второго множества? А наоборот?

Во ФГОС выделены такие познавательные логические универсальные учебные действия (УУД), как выделение свойств, существенных для понятия, умение определять понятие. Их формированию будут способствовать индуктивный способ введения понятия (описанный выше) и запись определения в виде алгоритма, где четко выделены все свойства, существенные для понятия (как общие, присущие понятиям, соподчиненным межпредметному, так и специфичные).

Функция — это:

1) соответствие (правило, закон) $y = f(x)$ между

2) элементами двух множеств (X и Y)

3) каждому элементу множества X соответствует единственный элемент множества Y.

Родовое понятие в определении подчеркивается.

Введение элементов логики в рамках ФГОС предоставляет возможность при работе с определением показать связь между родовым понятием и видовыми отличиями, которую можно изобразить фигурной скобкой.

Работа с такой записью способствует формированию такого логического УУД, как отнесение объекта к понятию.

Литература

1. *Бершадский Б.Е.* Понимание как педагогическая категория. (Мониторинг когнитивной сферы: понимает ли ученик то, что изучает). — М.: Центр «Педагогический поиск», 2004. **2.** *Веккер Л.М.* Психические процессы. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1974. **3.** *Выготский Л.С.* Лекции по педологии. — Ижевск: Изд-во Удмуртского университета, 2001. **4.** Математический энциклопедический словарь / гл. ред. Ю.В. Прохоров. — М.: Советская энциклопедия, 1988. **5.** *Подходова Н.С.* Особенности формирования познавательных универсальных учебных действий // Метаметодика как перспективное направление развития предметных методик обучения. Сб. научных статей. Выпуск 9. — СПб.: Изд-во «Статус», 2012. **6.** *Подходова Н.С.* Формирование междисциплинарных понятий (на примере обучения математике): Учебно-методическое пособие. — СПб.: Изд-во РГПУ им. А.И. Герцена, 2006. **7.** *Фреге Г.* Логика и логическая семантика. — М.: Аспект Пресс, 2000. **8.** *Якиманская И.С.* Разработки технологии личностно ориентированного обучения // Вопросы психологии, 1989, № 6, с. 3–29.

Множество 1	Множество 2	Правило (соответствие, закон)	Единственность
Время	Число покупателей	Каждому моменту времени соответствует количество покупателей	Каждому времени соответствует единственное число
Порядковый номер дня недели	Уровень воды в бочке	Каждому дню недели соответствует уровень воды в бочке	Каждому дню недели соответствует единственное число
Время	Число киловатт	Каждому моменту времени соответствует количество израсходованной электроэнергии	Каждому моменту времени соответствует единственное число

А. БЛИНКОВ, Ю. БЛИНКОВ,
Н. НАКОНЕЧНЫЙ, П. ЧУЛКОВ,
г. Москва

ТУРНИР АРХИМЕДА
МОСКОВСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ РЕГАТА

Календарь математических соревнований турнира Архимеда по традиции открывала математическая регата 9-х классов, которая состоялась 4 октября 2014 года.

В регате 9-х классов участвовало 79 команд из Долгопрудного, Костромы, Подольска, Сарова, Санкт-Петербурга, Черноголовки и, разумеется, Москвы. Победителями регаты стали одна из команд гимназии № 1514 и одна из команд физико-математической школы № 2007 г. Москвы. Математической литературой (традиционно предоставляемой МЦНМО) были награждены 20 команд, из которых 17 лучших получили также дипломы I, II или III степени.

Полные итоги регаты опубликованы на сервере МЦНМО (http://www.mccme.ru/olympiads). Там же можно найти материалы регат предыдущих лет. Подробно о том, как проводятся математические регаты, и материалы всех прошедших регат — см.: Московские математические регаты / сост.: А.Д. Блинков, В.М. Гуровиц, Е.С. Горская. — М.: МЦНМО, 2014 (в двух частях).

Как обычно, часть заданий была составлена специально для этой регаты, а остальные являются математическим фольклором или взяты из популярной математической литературы.

Условия задач

Первый тур

(*10 минут; каждая задача — 6 баллов*)

1.1. Решите уравнение $x(x+1) = 2014 \cdot 2015$.

1.2. Из четырех палочек сложен контур параллелограмма. Обязательно ли из них можно сложить контур треугольника (одна из сторон треугольника складывается из двух палочек)?

1.3. Три пирата нашли клад, состоящий из 240 золотых слитков общей стоимостью 360 долларов. Стоимость каждого слитка известна и выражается целым числом долларов. Может ли оказаться так, что добычу нельзя разделить между пиратами поровну, не переплавив слитки?

Второй тур

(*15 минут; каждая задача — 7 баллов*)

2.1. Мария Петровна идет по дороге со скоростью 4 км/ч. Увидев пенек, она садится на него и отдыхает одно и то же целое число минут. Михаил Потапович идет по той же дороге со скоростью 5 км/ч, зато сидит на каждом пеньке в два раза дольше, чем Мария Петровна. Вышли и пришли они одновременно. Длина дороги 11 км. Сколько на ней могло быть пеньков?

2.2. Точка D — середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC, $\angle BAC = 35°$. Точка B_1 симметрична точке B относительно прямой CD. Найдите угол AB_1C.

2.3. Остаток от деления натурального числа X на 26 равен неполному частному, остаток от деления X на 29 также равен неполному частному. Найдите все такие X.

Третий тур

(*20 минут; каждая задача — 8 баллов*)

3.1. Известно, что

$$\frac{a}{b+c-a}=\frac{b}{a+c-b}=\frac{c}{a+b-c}.$$

Какие значения может принимать выражение

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}?$$

3.2. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$

$$\angle DAB = \angle ABC = 60° \text{ и } \angle CAB = \angle CBD.$$

Докажите, что $AD + CB = AB$.

3.3. Петя нашел сумму всех нечетных делителей некоторого четного числа (включая 1), а Вася — сумму всех четных делителей этого же числа (включая само число). Может ли произведение двух найденных чисел быть точным квадратом?

Четвертый тур

(*25 минут; каждая задача — 9 баллов*)

4.1. Докажите, что для положительных значений a, b и c выполняется неравенство

$$\frac{a+b}{a^2+b^2}+\frac{b+c}{b^2+c^2}+\frac{c+a}{c^2+a^2}\le\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

4.2. В треугольнике ABC проведены высота BH, медиана BB_1 и средняя линия A_1C_1 (A_1 лежит на стороне BC, C_1 — на стороне AB). Прямые A_1C_1 и BB_1 пересекаются в точке M, а прямые C_1B_1 и A_1H — в точке N. Докажите, что прямые MN и BH параллельны.

4.3. В строку выписаны 40 знаков: 20 крестиков и 20 ноликов. За один ход можно поменять местами любые два соседних знака. За какое наименьшее количество ходов можно гарантированно добиться того, чтобы какие-то 20 стоящих подряд знаков оказались крестиками?

Пятый тур

(*15 минут; каждая задача — 7 баллов*)

5.1. Существует ли такое x, что

$$\sqrt{x+9}+\sqrt{x}+\sqrt{x-9}=7.$$

5.2. На доске был изображен пятиугольник, вписанный в окружность. Маша измерила его углы и у нее получилось, что они равны 80°, 90°, 100°, 130° и 140° (именно в таком порядке). Не ошиблась ли Маша?

5.3. Трое играют в настольный теннис на «вылет», то есть игрок, проигравший партию, уступает место игроку, не участвовавшему в ней. В итоге Никанор сыграл 10 партий, Филимон — 15, а Агафон — 17. Кто из них проиграл во второй партии?

Ответы, решения, комментарии

1.1. 2014; –2015.

Так как каждая часть уравнения представляет собой произведение двух последовательных чисел, то оба корня подбираются исходя из предположения, что они целые, а их модули могут быть равны 2014 или 2015. Данное уравнение квадратное, поэтому имеет не более двух корней.

Комментарий. Если один корень уже подобран, то второй может быть найден по теореме Виета.

1.2. Нет, не обязательно.

Пусть из четырех одинаковых палочек длины a сложен контур ромба. Тогда треугольник из них сложить нельзя, так как треугольника со сторонами a, a и $2a$ не существует.

Примечание редактора. Для произвольного параллелограмма со сторонами a и b аналогично получим, что сумма меньших сторон составленного треугольника равна большей стороне (то есть треугольник — отрезок).

1.3. Да, может.

Пусть один из слитков стоит 121 доллар, а каждый из остальных слитков стоит 1 доллар (таких слитков будет 239). Так как каждому пирату должно достаться слитков ровно на 120 долларов, то в этом случае разделить добычу поровну будет невозможно.

2.1. 1, 3, 11 или 33 пенька.

Мария Петровна преодолевает указанную дистанцию за $\frac{11}{4}$ часа, а Михаил Потапович — за $\frac{11}{5}$ часа. Следовательно, Мария Петровна отдыхает на $\frac{11}{4}-\frac{11}{5}=\frac{11}{20}$ часа больше, что составляет 33 минуты.

Так как на каждом пеньке Мария Петровна сидит целое число минут и количество пеньков — целое число, то на каждом пеньке она может сидеть 33, 11, 3 или 1 минуту, что соответствует 1, 3, 11 или 33 пенькам.

2.2. 125°.

Из условия задачи следует, что точка D — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Кроме того, из симметрии $DB_1 = DB$, поэтому точка B_1 лежит на этой окружности (рис. 1).

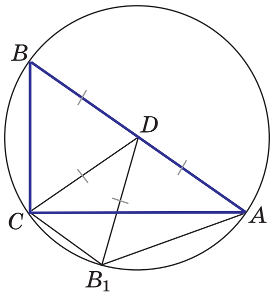


Рис. 1

Тогда

$\angle AB_1C = 180° - \angle ABC = 90° + \angle BAC = 125°$.

2.3. 270; 540.

Из условия задачи следует, что

$$\begin{cases} X = 26m + m, \\ X = 29n + n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = 27m, \\ X = 30n. \end{cases}$$

Следовательно,

$$27m = 30n \Leftrightarrow 9m = 10n,$$

значит, m кратно 10. Так как остаток при делении на 26 не больше чем 25, то $m = 10$ или $m = 20$. Таким образом, $X = 270$ или $X = 540$.

3.1. –1 или 8.

Перепишем условие в виде:

$$\frac{b+c-a}{a} = \frac{a+c-b}{b} = \frac{a+b-c}{c} = x,$$

тогда

$$b + c - a = ax,\ a + c - b = bx,\ a + b - c = cx.$$

Сложим полученные равенства почленно:

$$a + b + c = (a + b + c)x \Leftrightarrow (a + b + c)(x - 1) = 0.$$

Возможны два случая:

1) $a + b + c = 0$, тогда

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} = \frac{(-c)(-a)(-b)}{abc} = -1;$$

2) $x = 1$, тогда

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} = \frac{2c \cdot 2a \cdot 2b}{abc} = 8.$$

Комментарий. Можно также провести аналогичное рассуждение, не «переворачивая» дроби, заданные в условии.

3.2. Продлим стороны AD и BC до их пересечения в некоторой точке E, тогда треугольник ABE — равносторонний (рис. 2). Докажем, что $BC = ED$. Это можно сделать различными способами.

Способ I. В треугольниках ABC и BED $AB = BE$, $\angle CAB = \angle DBE$, $\angle ABC = 60° = \angle BED$. Таким образом, треугольники ABC и BED равны по второму признаку. Следовательно, $BC = ED$.

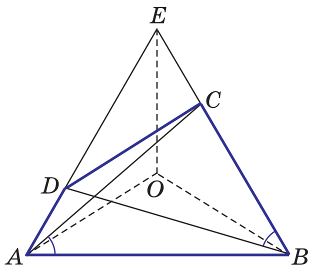


Рис. 2

Способ II. Пусть точка O — центр треугольника ABE. При повороте с центром O на угол 120° против часовой стрелки образами вершин A и B являются вершины B и E соответственно, тогда образом луча AC является луч BD (из равенства углов CAB и CBD). Так как образом стороны BE при этом повороте является сторона EA, то образом точки C является точка D. Следовательно, $BC = ED$.

Таким образом,

$$AD + CB = AD + ED = AE = AB.$$

Комментарий. Отметим, что при рассуждениях вторым способом было использовано основное свойство взаимно однозначных отображений (в частности, движений): образ пересечения равен пересечению образов.

3.3. Нет, не может.

Пусть 2^n — наибольшая степень двойки, на которую делится данное число. Если Петя получил набор его нечетных делителей $a_1, a_2, \ldots, a_m$, то в Васином наборе четных делителей должны быть все числа, которые получаются из всех нечетных делителей умножением на каждую степень двойки от 2^1 до 2^n. Таким образом, все числа из Васиного набора имеют вид: $2^k \cdot a_i$, где $1 \le k \le n$, $1 \le i \le m$.

Обозначим сумму Петиных чисел через A. Тогда сумма Васиных равна $A \cdot (2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n)$. Следовательно, произведение Петиной и Васиной сумм равно $A^2 \cdot (2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n)$. Чтобы это число являлось точным квадратом, необходимо, чтобы выражение в скобках являлось точным квадратом. Но записанная сумма степеней двойки при делении на 4 дает остаток 2, то есть она делится на 2, но не делится на 4, поэтому точным квадратом являться не может.

4.1. Докажем, что при $x > 0$ и $y > 0$ справедливо неравенство

$$\frac{x+y}{x^2+y^2} \le \frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{2}.$$

Действительно,

$$\frac{x+y}{x^2+y^2} \le \frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{2} \Leftrightarrow \frac{x+y}{x^2+y^2} \le \frac{x+y}{2xy} \Leftrightarrow \frac{1}{x^2+y^2} \le \frac{1}{2xy} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-y)^2 \ge 0.$$

Теперь запишем три однотипных верных неравенства:

$$\frac{a+b}{a^2+b^2} \le \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}, \quad \frac{b+c}{b^2+c^2} \le \frac{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{2}, \quad \frac{c+a}{c^2+a^2} \le \frac{\frac{1}{c}+\frac{1}{a}}{2},$$

и сложим их почленно. Получим доказываемое неравенство.

4.2. Так как отрезки A_1C_1 и AC параллельны, то точка M — середина отрезка A_1C_1 (рис. 3).

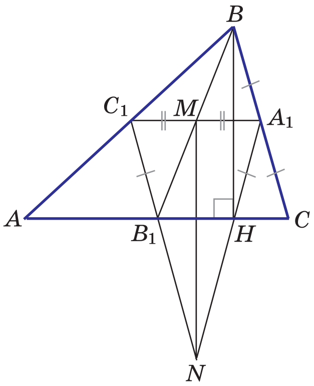


Рис. 3

Кроме того,

$$C_1B_1 = \frac{1}{2}BC = A_1C = A_1H,$$

поскольку отрезок HA_1 — медиана прямоугольного треугольника BHC. Таким образом, $C_1B_1HA_1$ — равнобокая трапеция, откуда следует, что треугольник A_1NC_1 равнобедренный. Поэтому его медиана NM является и высотой. Значит, отрезки MN и AC перпендикулярны, то есть $MN \parallel BH$.

Комментарий. Доказать, что трапеция $C_1B_1HA_1$ равнобокая, можно и по-другому. Точки A_1, B_1, C_1 и H лежат на одной окружности (окружности девяти точек треугольника ABC), а любая вписанная трапеция — равнобокая.

4.3. За 200 ходов.

Чтобы 20 крестиков стояли подряд, требуется, чтобы все нолики стояли с краев (возможно, все с одного края). Пусть есть строка с произвольной расстановкой крестиков и ноликов. Будем делать разрешенные ходы, перемещая нолики к правому или к левому краю так, чтобы правее или левее их уже не было крестиков.

Для этого сначала выберем самый правый и самый левый нолики. Чтобы один из них оказался с краю, требуется не более чем 10 ходов, так как либо слева от самого левого, либо справа от самого правого нолика стоит не более чем 10 крестиков.

Далее возьмем самый правый и самый левый нолики из оставшихся 19. Рассуждая аналогично, получим, что для указанного перемещения опять потребуется не более чем 10 ходов, и так далее. Таким образом, для получения требуемой расстановки потребуется не более $20 \cdot 10 = 200$ ходов.

Приведем пример изначальной расстановки для случая, когда меньшего количества ходов не хватит. Пусть в ряд стоит 10 крестиков, затем 20 ноликов, а затем еще 10 крестиков. В этом случае для перемещения каждого нолика к краю потребуется ровно 10 ходов.

5.1. Нет, не существует.

Левая часть равенства имеет смысл при $x \ge 9$. Поэтому $\sqrt{x} \ge \sqrt{9} = 3$, $\sqrt{x+9} \ge \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$. Тогда $\sqrt{x+9} + \sqrt{x} + \sqrt{x-9} \ge 3 + 3\sqrt{2} + 0 > 3 + 3 \cdot 1,4 = 7,2 > 7$.

5.2. Маша, конечно, ошиблась.

Пусть $ABCDE$ — данный пятиугольник, в котором углы A, B, C, D и E соответственно равны 80°, 90°, 100°, 130° и 140° (рис. 4).

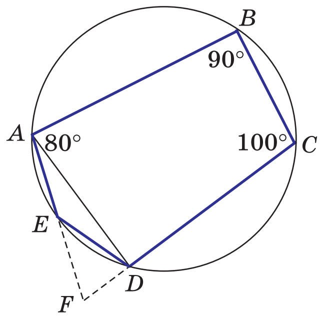


Рис. 4

Далее можно рассуждать по-разному.

Способ I. Проведем диагональ AD, тогда четырехугольник $ABCD$ также вписанный, поэтому

$$\angle BAD = 180° - \angle BCD = 80°.$$

Таким образом, $\angle BAD = \angle BAE$, что невозможно.

Способ II. Продлим отрезок AE до пересечения с прямой CD в точке F. В четырехугольнике $ABCF$ $\angle BAF + \angle BCD = 180°$, значит, этот четырехугольник вписанный, то есть точка F лежит на той же окружности, что невозможно.

Комментарий. Существуют и другие решения.

5.3. Никанор.

Всего была сыграна

$$(10 + 15 + 17) : 2 = 21$$

партия. Заметим, что любой из мальчиков не мог пропускать две или более партий подряд. Значит, Никанор играл все партии с четным номером. Так как он не играл в третьей партии, то вторую партию он проиграл.

7–9 классы

Д. АЛЕКСЕЕВ, А. ЗЕЛЕНСКИЙ,
г. Москва

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ПОКОРИ ВОРОБЬЕВЫ ГОРЫ»

В статье приводятся задания, предлагавшиеся учащимся 7–9-х классов на олимпиаде «Покори Воробьевы горы!» по математике 2014 года. Все задания даются с ответами и решениями.

Задания отборочного этапа

1. *(7–9-е классы)* Коля участвует в телевизионной игре «Стать миллионером». На вопрос дается 4 варианта ответа: A, B, C, D. Коля получает 4 подсказки:

1) правильный ответ — A или B;
2) правильный ответ — C или D;
3) правильный ответ — B;
4) ответ D неправильный.

Известно, что три подсказки ошибочны и только одна правильная. Какой вариант ответа правильный?

2. *(7–8-е классы)* Имеется два сплава меди и цинка. В первом сплаве меди в два раза больше, чем цинка, а во втором — в пять раз меньше. В каком отношении следует взять эти сплавы, чтобы получить новый сплав, в котором цинка в два раза больше, чем меди?

3. *(7–8-е классы)* Петров выписывает нечетные числа: 1, 3, 5, ..., 2013, а Васечкин — четные: 2, 4, ..., 2012. Каждый посчитал сумму всех цифр всех своих чисел и сказал отличнице Маше. Маша вычла из результата Петрова результат Васечкина. Сколько у нее получилось?

4. *(7-й класс)* Леночка собралась испечь пирог на день рождения. Она раскатала тесто равномерным слоем в виде равнобедренного прямоугольного треугольника ABC. Потом она подумала, что теста хватит на два пирога, и провела два прямолинейных разреза, параллельных катетам треугольника (рис. 1).

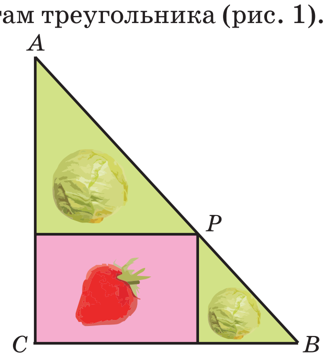


Рис. 1

Получилось два треугольника и один прямоугольник. Из прямоугольника Леночка испекла пирог с клубникой, а треугольники слепила вместе, раскатала и сделала пирог с капустой. Может ли получиться так, что в пироге с клубникой теста больше, чем в пироге с капустой?

5. *(8–9-е классы)* Из точки P, расположенной на гипотенузе AB равнобедренного прямоугольного треугольника ABC, опущены перпендикуляры на катеты. Эти перпендикуляры разбивают треугольник ABC на три части: два треугольника и прямоугольник. Может ли площадь каждой из этих частей составлять менее $\frac{4}{9}$ площади исходного треугольника?

6. *(7–9-е классы)* Числа $1, 2, \ldots, 9$ расставлены в квадрате 3×3. Будем называть «фэншуйными» такие расстановки, у которых при выборе любых трех клеток, расположенных в разных столбцах и разных строках, сумма чисел, стоящих в выбранных клетках, будет равна 15.

Пример «фэншуйной» расстановки приведен ниже (здесь, например, $1 + 6 + 8 = 15$).

4	1	7
6	3	9
5	2	8

а) *(7-й класс)* Приведите пример хотя бы одной «фэншуйной» расстановки, у которой в первой строке стоят цифры 9, 7, 8 (именно в таком порядке).

б) *(7–8-е классы)* Найдите все «фэншуйные» расстановки, у которых в первой строке стоят числа 9, 7, 8 (именно в таком порядке), и докажите, что других нет.

в) *(8–9-е классы)* Найдите количество всех «фэншуйных» расстановок.

7. *(7-й класс)* Дима пошел утром в школу, но, пройдя ровно полпути, обнаружил, что забыл дома мобильный телефон. Дима прикинул (у него была пятерка за устный счет), что если он пойдет дальше с той же скоростью, с какой шел, то придет в школу за 3 минуты до звонка на первый урок, а если побежит домой за телефоном, а потом побежит в школу, то прибежит через 3 минуты после звонка. Дима решил сбегать домой, но запыхался, пока бежал (по физкультуре у него была тройка), и из дома в школу шел уже пешком с обычной скоростью. В результате он опоздал на первый урок на целых 15 минут! Во сколько раз скорость, с которой он бегает, больше скорости, с которой он ходит?

8. *(7–9-е классы)* Знаменитый скейтер Тони Хоук катается на скейтборде (отрезок AB) в рампе, которая представляет собой полуокружность с диаметром PQ (рис. 2).

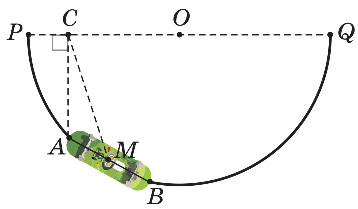


Рис. 2

Точка M — середина скейтборда, C — основание перпендикуляра, опущенного из точки A на диаметр PQ. Какие значения может принимать угол ACM, если известно, что угловая мера дуги AB равна 24°?

9. *(7-й класс)* Может ли число $n^2 + 2n + 2014$ делиться нацело на 121 при некотором целом n?

10. *(8-й класс)* В школе учится не менее 150 мальчиков, а девочек на 15% больше, чем мальчиков. Когда мальчики поехали на сборы, потребовалось 6 автобусов, причем в каждом автобусе ехало одинаковое количество школьников. Сколько всего человек учится в школе, если известно, что общее число учащихся не больше 400?

11. *(8–9-е классы)* В школьной спартакиаде участвовали команды 8 «А», 8 «Б» и 8 «В» классов. В каждом из соревнований какая-то из этих команд заняла 1-е место, какая-то — 2-е и какая-то — 3-е. По окончании спартакиады были подсчитаны очки: x очков присуждалось за первое место, y — за второе и z — за третье ($x > y > z > 0$ — целые числа). В итоге команда 8 «А» получила 22 очка, а команды 8 «Б» и 8 «В» — по 9 очков. Сколько всего было соревнований и кто занял второе место в соревновании по метанию граната, если известно, что первое место по прыжкам через «козла» заняла команда 8 «В»?

12. *(8-й класс)* Найдите количество натуральных чисел от 1 до 100, имеющих ровно четыре натуральных делителя, не менее чем три из которых не превосходят 10.

13. *(9-й класс)* Найдите сумму всех натуральных чисел, имеющих ровно четыре натуральных делителя, три из которых (из делителей) меньше 15, а четвертый — не меньше 15.

14. *(9-й класс)* У Игоря есть все 7 книг про Гарри Поттера. Сколькими способами он может расставить эти 7 томов на 3 различных книжных полках так, чтобы на каждой полке стояла хотя бы одна книга? (Расстановки, которые отличаются порядком книг на полке, считаются различными.)

15. *(9-й класс)* В уравнении $x^2 + px + q = 0$ за один шаг разрешается один из коэффициентов (p или q) увеличивать или уменьшать на 1. Можно ли из уравнения $x^2 - 2013x - 13 = 0$ за какое-то количество шагов получить уравнение $x^2 + 13x + 2013 = 0$, чтобы ни одно промежуточное уравнение не имело целых корней?

16. *(9-й класс)* Изобразите на координатной плоскости множество таких точек $(p; q)$, что уравнение $x^2 + 2px + q = 0$ имеет два корня, один из которых больше 2, а другой — меньше 0.

17. *(9-й класс)* Найдите площадь треугольника, если известно, что радиус вписанной окружности равен 1, а длины всех трех высот выражаются целыми числами.

Задания заключительного этапа

1. *(7–9-е классы)* На острове рыцарей и лжецов рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. В школе на этом острове учатся как рыцари, так и лжецы — в одном классе. Однажды учитель спросил у четырех детей: Ану, Бану, Вану и Дану, кто из них сделал домашнее задание. Они ответили:

Ану. Домашнее задание сделали Бану, Вану и Дану.

Бану. Домашнее задание не сделали Ану, Вану и Дану.

Вану. Не верьте им, господин учитель! Ану и Бану — лжецы!

Дану. Нет, господин учитель, Ану, Бану и Вану — рыцари!

Сколько рыцарей среди этих детей?

2. *(7-й класс)* Найдите наименьшее возможное значение выражения $|2015m^5 - 2014n^4|$, если m и n — натуральные числа.

3. *(7-й класс)* Фермеры Иванов, Петров, Сидоров, Васильев и Ермолаев владеют участками прямоугольной формы, площадь которых указана на рисунке 3. Найдите площадь общего пастбища.

Иванов 24 га	Лес	Ермолаев 30 га
Петров 28 га	Общее пастбище	Озеро
Пустырь	Сидоров 10 га	Васильев 20 га

Рис. 3

4. *(7–9-е классы)* Уходя на работу, мама поручила Мише, Пете и Васе: а) подмести пол в прихожей; б) помыть посуду; в) купить хлеба; г) заплатить за электричество; д) вынести мусор; е) пропылесосить ковер в гостиной. Сколькими различными способами они могут распределить задания так, чтобы каждое задание делал кто-то один из ребят, при условии, чтобы каждый что-нибудь делал?

5. *(7–8-е классы)* Найдите наибольшее трехзначное число, которое кратно сумме своих цифр и в котором первая цифра совпадает с третьей, но не совпадает со второй.

6. *(7–9-е классы)* Решите в натуральных числах уравнение $abc + ab + bc + ac + a + b + c = 164$. В ответе укажите произведение abc.

7. *(8–9-е классы)* В треугольнике ABC известны стороны $AB = 5$ и $AC = 6$. Какой должна быть сторона BC, чтобы угол ACB был максимально возможным? В ответе укажите длину стороны BC, округленную до ближайшего целого числа.

8. *(8–9-е классы)* Петя хотел нарисовать правильный треугольник ABC, но, поскольку он рисовал неточно, получился треугольник с углами $\angle A = 59°$ и $\angle B = 63°$. Потом Петя провел высоты CE и BD, но, поскольку угольник был слегка перекошен, получил углы $\angle ADB = \angle AEC = 92°$. Найдите градусную меру угла AED.

9. *(9-й класс)* Последовательность чисел задана следующим образом: $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ и $a_{n+1} = 4(a_n - a_{n-1})$ при $n \geq 2$. Найдите наименьший положительный член последовательности, кратный 2014. В ответе укажите номер этого члена.

Ответы и решения

Задания отборочного этапа

1. D.

Хотя бы одна из первых двух подсказок обязана быть верной, иначе правильного ответа нет вообще. Тогда две последние подсказки ошибочны. Поэтому правильным ответом может быть только D. В этом случае все условия выполнены: подсказки 1, 3 и 4 ошибочны, а подсказка 2 правильная.

2. 1 : 2.

Медь составляет в первом сплаве $\frac{2}{3}$, а во втором — $\frac{1}{6}$ от общей массы. Если взять x кг первого сплава и y кг второго, то сплав будет содержать $\frac{2}{3}x+\frac{1}{6}y$ меди, а его масса будет равна $x + y$. Поскольку в итоговом сплаве медь составляет $\frac{1}{3}$, то можно составить уравнение

$$\frac{2}{3}x+\frac{1}{6}y=\frac{1}{3}(x+y),$$

откуда получим: $\frac{1}{3}x=\frac{1}{6}y$, следовательно, $x : y = 1 : 2$.

3. 1007.

Разобьем числа Петрова и Васечкина на пары следующим образом: (2; 3), (4; 5), ..., (2012; 2013). При этом число 1 у Петрова останется без пары. Заметим, что в каждой паре сумма цифр второго числа (это число Петрова) на 1 больше, чем сумма цифр первого (так как эти числа отличаются только в последнем разряде), а всего таких пар будет $\frac{2012}{2}=1006$. Следовательно, разность сумм цифр будет равна 1006, а с учетом лишней единицы у Петрова — 1007.

4. Нет.

Обозначим $p=\frac{AP}{AB}$, тогда отрезанные треугольники (которые пошли на пирог с капустой) подобны исходному с коэффициентами p и $1 - p$ (рис. 4).

Если площадь исходного треугольника обозначить через S, то суммарная площадь теста, ушедшего на пирог с капустой, равна

$$S_{\text{кап}} = p^2S + (1-p)^2S = (2p^2 - 2p + 1)S,$$
следовательно, для пирога с клубникой имеем:
$$S_{\text{клубн}} = (2p - 2p^2)S.$$

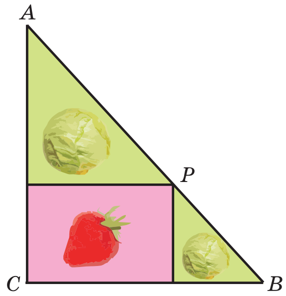


Рис. 4

Вычитая одно из другого, получим:
$$S_{\text{кап}} - S_{\text{клубн}} = (4p^2 - 4p + 1)S = (2p-1)^2S,$$
что не может быть меньше нуля.

5. Нет.

Обозначим $p = \dfrac{AP}{AB}$, тогда треугольники подобны исходному с коэффициентами p и $1 - p$. Если через S обозначить площадь исходного треугольника, то площади треугольников равны
$$S_1 = p^2S,\ S_2 = (1-p)^2S,$$
а площадь оставшегося прямоугольника равна
$$S_3 = (2p - 2p^2)S.$$

Если $p^2 < \dfrac{4}{9}$, то $p < \dfrac{2}{3}$, $1 - p < \dfrac{2}{3}$; то есть p должно лежать на интервале $\left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{2}{3}\right)$. Но тогда
$$2p - 2p^2 = -\frac{1}{2}\left(4p^2 - 4p + 1 - 1\right) = -\frac{(2p-1)^2}{2} + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{18} = \frac{4}{9}.$$

6. а)

9	7	8
3	1	2
6	4	5

б)

9	7	8
6	4	5
3	1	2

в) 72.

а)–б). Заметим, что число 6 можно поставить только в первый столбец, так как оно не может стоять с числом 9 в разных столбцах (тогда сумма будет больше 15). Его можно поставить во 2-ю или 3-ю строку. Если 6 поставить в 3-ю строку, то получается такой квадрат.

9	7	8
a	b	c
6	d	e

Далее последовательно получаем:
$$\begin{cases} 6+b+8=15, \\ 9+1+e=15, \\ 7+5+a=15, \\ 7+6+c=15, \\ 9+2+d=15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3, \\ b=1, \\ c=2, \\ d=4, \\ e=5. \end{cases}$$

Аналогично разбирается случай, когда число 6 расположено во второй строке.

в) Очевидно, числа 7, 8 и 9 должны быть расположены в одном столбце или строке. Выберем какую-то строку (3 способа) и расставим эти числа (6 способов). Проводя рассуждения, как в пункте «а», получим, что в этом случае существует ровно две «фэншуйных» расстановки. Значит, существует $3 \cdot 6 \cdot 2 = 36$ таких расстановок. Аналогично доказывается, что существует 36 расстановок, в которых числа 7, 8, 9 расположены в одном столбце.

7. 2.

Обозначим x — время, за которое Дима доходит от дома до школы, y — время, за которое Дима добегает от дома до школы, T — время, оставшееся до звонка (в момент, когда Дима обнаружил пропажу).

Тогда условия задачи можно записать так:
$$\begin{cases} \dfrac{x}{2} = T - 3, \\ \dfrac{y}{2} + y = T + 3, \\ \dfrac{y}{2} + x = T + 15. \end{cases}$$

Решая, получим, что $x = 24$, $y = 12$, $T = 15$, откуда следует, что бегает он в два раза быстрее, чем ходит.

8. 12°.

Продлим прямую AC до пересечения с окружностью в точке D (рис. 5).

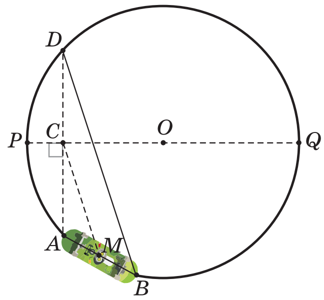


Рис. 5

Хорда AD перпендикулярна диаметру PQ, следовательно, она делится им пополам. Значит, CM — средняя линия в треугольнике ABD, поэтому $CM \parallel BD$, значит, $\angle ACM = \angle ADB$. Угол ADB вписанный и опирается на дугу AB, следовательно, равен ее половине.

9. Не может.

Запишем это число в виде
$$n^2 + 2n + 2014 = (n+1)^2 + 11 \cdot 183.$$
Если оно делится на 121, то оно должно делиться и на 11, следовательно, $n + 1$ тоже делится на 11. Тогда $(n + 1)^2$ кратно 121, а $11 \cdot 183$ — нет, следовательно, их сумма не делится на 121.

10. 387.

Число мальчиков кратно 6, обозначим его $6n$, очевидно, $n \geq 25$. Тогда девочек $6n \cdot 1{,}15 = 6{,}9n$.

Суммарное количество школьников равно $12{,}9n \le 400$, поэтому $n \le 31$. Учитывая то, что $6{,}9n$ должно быть целым, получим, что $n = 30$, то есть всего 387 учащихся.

11. Пять соревнований; 8 «Б».

Обозначим $n \ge 2$ — число соревнований в спартакиаде, тогда общее число очков, полученных всеми командами, равно

$$n \cdot (x + y + z) = 22 + 9 + 9 = 40.$$

Но $z \ge 1$, $y \ge 2$, $x \ge 3$, следовательно, $x + y + z \ge 6$. Получается, что возможны следующие варианты:

$$x + y + z = 10,\ n = 4;$$
$$x + y + z = 20,\ n = 2;$$
$$x + y + z = 8,\ n = 5.$$

Рассмотрим их.

1. Случай $x + y + z = 10$, $n = 4$. Очевидно, что $x \le 6$ (иначе 8 «В» наберет более 9 очков). Рассмотрим возможные варианты:

$x = 6$. Значит, $y = 3$, $z = 1$, но тогда 8 «А» не наберет 22 очков;

$x = 5$. Тогда 8 «А» наберет менее 20 очков;

$x \le 4$. Тогда $x + y + z \le 9$.

Значит, указанный случай невозможен.

2. Случай $x + y + z = 20$, $n = 2$. Если $x < 11$, то команда 8 «А» не смогла бы набрать 22 очка. Если $x \ge 11$, то команда 8 «В» в итоге получила бы более 11 очков, что неверно. Значит, указанный случай невозможен.

3. Случай $x + y + z = 8$, $n = 5$. Очевидно, в этом случае $z = 1$, $x + y = 7$. Поэтому или $x = 4$, $y = 3$, или $x = 5$, $y = 2$.

Если $x = 4$, $y = 3$, то $y + z = 4$. Следовательно, команды 8 «Б» и 8 «В» в каждом соревновании набирали не менее 4 очков. Тогда за 5 соревнований они должны были набрать не менее 20 очков (а на самом деле набрали $9 + 9 = 18$).

Если $x = 5$, $y = 2$, то команда 8 «В» один раз заняла 1-е место и 4 раза — последнее. Команда 8 «А» в прыжках через «козла» заняла не первое место. Единственный вариант набрать 22 очка: 2-е место и победа в оставшихся четырех соревнованиях. Получается, что команда 8 «Б» в этих четырех соревнованиях занимала все время 2-е место, а в прыжках через «козла» — 3-е.

12. 8.

Число имеет ровно 4 натуральных делителя либо если оно является кубом простого числа, либо если оно есть произведение двух простых чисел. Кубы простых чисел (удовлетворяющие условиям): 8 и 27. Простые числа, не большие 10, это 2, 3, 5 и 7. Все их попарные произведения удовлетворяют условиям, а их количество равно 6.

13. 649.

Число N имеет ровно 4 делителя либо если $N = p^3$, либо если $N = pq$, где p и q простые. В первом случае подходит только 27. Во втором случае надо рассмотреть попарные произведения всех простых чисел, меньших 15 (это числа $p_i = 2, 3, 5, 7, 11, 13$). Сумму их попарных произведений можно подсчитать так:

$$S_{pq} = \frac{(2+3+5+7+11+13)^2 - \left(2^2+3^2+5^2+7^2+11^2+13^2\right)}{2} = 652.$$

Из попарных произведений надо отбросить 6, 10 и 14, так как они меньше 15. В итоге

$$S = 27 + S_{pq} - 6 - 10 - 14 = 649.$$

14. $C_6^2 \cdot 7! = 75\,600$.

Сначала можно переставить книги в произвольном порядке, что дает 7! вариантов. Поставим две перегородки в 6 промежутков между книгами — это можно сделать C_6^2 способами. Перегородки разобьют книги на три части, которые и надо поставить на 1-, 2- и 3-ю полки. Итого получаем $C_6^2 \cdot 7! = 75\,600$ вариантов.

15. Нет.

Сумма коэффициентов уравнения $x^2 - 2013x - 13 = 0$ равна -2025, сумма коэффициентов уравнения $x^2 + 13x + 2013 = 0$ равна 2027. За один шаг сумма коэффициентов меняется на 1. Значит, в процессе перехода от первого уравнения ко второму эта сумма в какой-то момент станет равной нулю. Следовательно, это уравнение будет иметь целый корень $x = 1$.

16. Область, ограниченная прямыми $q = 0$ и $q = -4p - 4$, лежащая ниже первой и левее второй прямой.

Указанное условие равносильно тому, что значения многочлена $f(x) = x^2 + 2px + q$ отрицательны в точках $x = 0$ и $x = 2$. Следовательно, $q < 0$ и $q < -4 - 4p$.

17. $3\sqrt{3}$.

Обозначим S — площадь, a, b, c — стороны треугольника, h_a, h_b, h_c — соответствующие высоты. Тогда

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c,$$

откуда

$$a = \frac{2S}{h_a},\quad b = \frac{2S}{h_b},\quad c = \frac{2S}{h_c}.$$

Подставив в формулу

$$S = pr = \frac{a+b+c}{2},$$

получим:

$$1 = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}.$$

Не ограничивая общности, можно считать $h_a \le h_b \le h_c$. Если $h_a > 3$, то

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} < \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1.$$

Поэтому $h_a \le 3$. Рассмотрим три случая.

1. В случае $h_a = 1$ получим: $\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = 0$, что невозможно.

2. В случае $h_a = 2$ получим: $\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{2}$. Тогда
$$a=\frac{2S}{h_a}=S$$
и
$$b+c=\frac{2S}{h_b}+\frac{2S}{h_c}=2S\cdot\left(\frac{1}{h_в}+\frac{1}{h_c}\right)=S,$$
что противоречит неравенству треугольника.

3. В случае $h_a = 3$ получим: $\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{2}{3}$, причем h_b, $h_c \ge 3$, что возможно только в случае $h_a = h_b = h_c = 3$. Получаем правильный треугольник со стороной $a=b=c=2\sqrt{3}$, площадь которого равна $3\sqrt{3}$.

Задания заключительного этапа

1. 1.

Если Вану — рыцарь, то все остальные — лжецы. Если Вану — лжец, то Дану тоже лжец (поскольку говорит, что Вану — рыцарь). А из Ану и Бану по крайней мере один должен быть рыцарем. Оба они рыцарями быть не могут, так как противоречат друг другу. В любом случае только один из детей является рыцарем.

2. 0.

Найдем $N = 2014^x \cdot 2015^y$ такое, что
$$m^5 = 2014^{x-1} \cdot 2015^y \text{ и } n^4 = 2014^x \cdot 2015^{y-1}.$$
Для этого x и $y - 1$ должны быть кратны 4, а $x - 1$ и y — кратны 5. Подходят, например, $x = 16$ и $y = 5$. Тогда, если взять
$$m = 2014^3 \cdot 2015 \text{ и } n = 2014^4 \cdot 2015,$$
получим:
$$|2015m^5 - 2014n^4| = 0.$$

3. 17,5.

Поле Васильева в 2 раза больше, чем у Сидорова, следовательно, его ширина в 2 раза больше. Из этого вытекает, что площадь леса равна 15 га. Значит, площадь поля Иванова относится к площади леса как 24 : 15. Поэтому так же относится площадь поля Петрова к площади общего пастбища. Уравнение $24 : 15 = 28 : x$ имеет решение $x = 17{,}5$.

4. 540.

Всего существует $3^6 = 729$ способов распределить задания. Но при этом в $2^6 = 64$ способах все работы будут выполнять Миша и Петя. Также есть 64 способа, когда все работы будут выполнять Петя и Вася, и 64 — когда Миша и Вася. Если вычесть $3 \cdot 64$, получится, что случаи, когда всю работу выполняет один человек, мы вычли по два раза. Поэтому к результату прибавим 3:
$$3^6 - 3 \cdot 2^6 + 3 = 540.$$

5. 828.

Число $\overline{aba}=100a+10b+a$, где $a \ne b$, должно быть кратно $2a + b$, следовательно, $101a + 10b - 10(2a + b) = 81a$ тоже кратно $2a + b$.

Поскольку надо найти наибольшее такое число, рассмотрим $a = 9$. Тогда $81a = 729 = 3^6$, то есть все делители есть степени тройки, следовательно, $18 + b = 27$, откуда $b = 9$, что противоречит условию $a \ne b$.

Рассмотрим теперь $a = 8$. Тогда число $81a = 648 = 2^3 \cdot 3^4$ должно делиться на $16 + b$, что возможно только при $b = 2$ и $b = 8$. Но последнее противоречит условию $a \ne b$. Значит, $a = 8$, $b = 2$.

6. 80.
$$(a + 1)\cdot(b + 1)\cdot(c + 1) =$$
$$= abc + ab + bc + ac + a + b + c + 1 =$$
$$= 165 = 3\cdot 5\cdot 11.$$
Поэтому $a = 2$, $b = 4$ и $c = 10$. Решение единственно с точностью до перестановки a, b и c, поскольку 3, 5, 11 — простые числа.

7. 3.

Построим $AC = 6$. Тогда геометрическим местом точек B будет окружность радиуса 5 с центром в точке A. Угол ACB будет наибольшим, когда CB касается окружности (рис. 6).

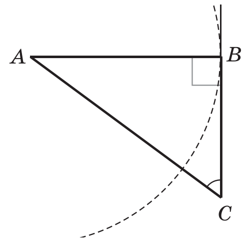


Рис. 6

Тогда $CB \perp AB$, и по теореме Пифагора
$$BC=\sqrt{AC^2-AB^2}=\sqrt{11}\approx 3.$$

8. 58°.

Заметим, что $\angle BDC = \angle BEC = 88°$ (рис. 7), следовательно, можно провести окружность, проходящую через точки B, C, D и E.

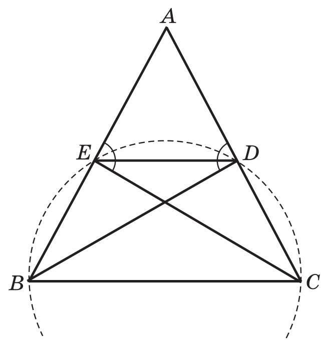


Рис. 7

Действительно, опишем окружность около треугольника BCD. Она должна пройти через точку E, так как если прямая CE пересекает окружность в точке E_1, то $\angle BE_1C = \angle BEC$, что возможно, только если E совпадает с E_1.

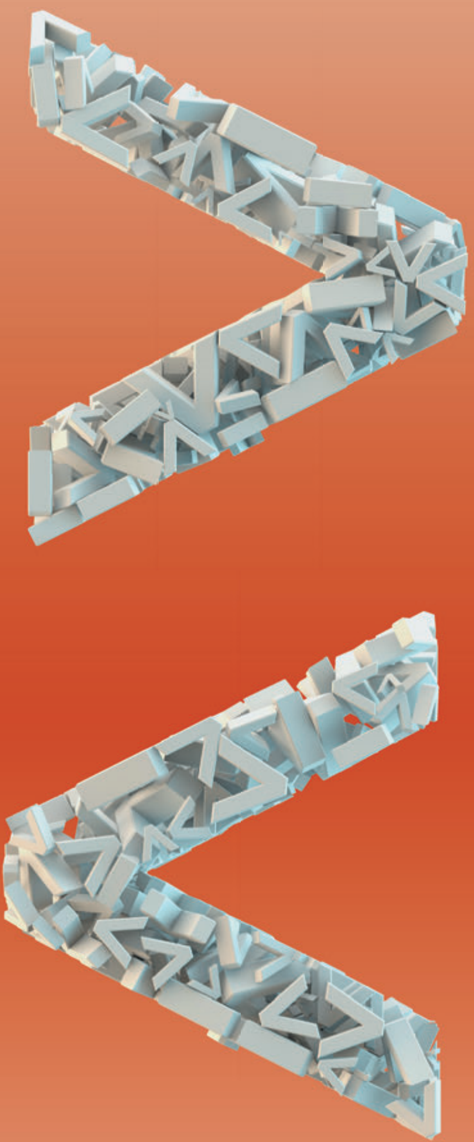
Тогда
$$\angle AED = 180° - \angle BED = \angle BCD$$
(по свойству вписанных четырехугольников), а
$$\angle BCD = 180° - \angle ABC - \angle BAC = 58°.$$

Окончание на с. 60.

9–11 классы. Начало см. в № 1–9/2015

С. ШЕСТАКОВ,
isser@yandex.ru,
г. Москва

РЕШАЕМ НЕРАВЕНСТВА



2.3. Неравенства, содержащие переменную под знаком абсолютной величины (модуля)

Неравенства, содержащие переменную под знаком абсолютной величины (модуля), обычно называют неравенствами с модулем; далее для краткости будем использовать это название. Выражение (в этой статье им может быть многочлен или алгебраическая дробь), содержащееся под знаком модуля, будем — также для краткости — называть «подмодульным», опуская в дальнейшем кавычки. Неравенства с модулем относят к сравнительно трудным, хотя значительная часть таких неравенств с успехом решается с помощью стандартных равносильных преобразований или путем «раскрытия модуля» в соответствии с его определением. Приведем сначала основные факты, связанные с модулем.

1. Модулем (абсолютной величиной) числа a называется само число a, если оно неотрицательно, и число $-a$, если число a отрицательно (определение модуля). Модуль числа a обозначается $|a|$. Таким образом,

$$|a| = a, \text{ если } a \geq 0; \ |a| = -a, \text{ если } a < 0.$$

2. $|a| \geq 0$, причем
$$|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0.$$

3. $|a - b|$ равен расстоянию между точками a и b числовой прямой; так,

$|a| = |a - 0|$ — расстояние между точками a и 0 числовой прямой,

$|a + b| = |a - (-b)|$ — расстояние между точками a и $(-b)$ числовой прямой (геометрический смысл модуля).

4. $|-a| = |a|$.

5. $\sqrt{a^2} = |a|$.

6. $|a| \geq a$, причем
$$|a| = a \Leftrightarrow a \geq 0, \ |a| > a \Leftrightarrow a < 0;$$
$|a| \geq -a$, причем
$$|a| = -a \Leftrightarrow a \leq 0, \ |a| > -a \Leftrightarrow a > 0.$$

7. $|ab| = |a| \cdot |b|$; $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$.

8. $|a|^2 = a^2$.

9. $|a| = |b| \Leftrightarrow a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = \pm b$.

10. $|a| = b \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 0, \\ a^2 = b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} a = -b \\ a = b. \end{array}\right. \end{cases}$

11. $|a| < |b| \Leftrightarrow a^2 < b^2 \Leftrightarrow (a - b)(a + b) < 0$.

12. $|a| < b \Leftrightarrow \begin{cases} a < b, \\ a > -b. \end{cases}$

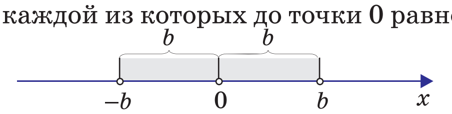
13. $|a| > b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a > b \\ a < -b. \end{array}\right.$

К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru (Упражнения к 2.3, диагностические работы 5, 6.)

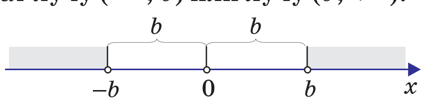
14. $|a|+|b| \geq |a+b|$, причем
$$|a|+|b|=|a+b| \Leftrightarrow ab \geq 0;$$
$$|a|+|b|>|a+b| \Leftrightarrow ab<0;$$
$|a|+|b| \geq |a-b|$, причем
$$|a|+|b|=|a-b| \Leftrightarrow ab \geq 0;$$
$$|a|+|b|>|a-b| \Leftrightarrow ab>0.$$

Свойства 2–8 легко следуют из определения модуля. Свойства 9–11 — следствия неотрицательности модуля и общего утверждения о том, что возведение в квадрат обеих частей уравнения или неравенства при условии их неотрицательности является равносильным преобразованием. Свойство 14 (его часто называют неравенством треугольника) тоже почти очевидно: если числа a и b либо оба отрицательны, либо оба положительны, либо хотя бы одно из них равно нулю (неравенство $ab \geq 0$ означает именно это), то $|a|+|b|=|a+b|$. Если числа a и b разных знаков (то есть $ab<0$), то $|a|+|b|>|a+b|$. Обратное утверждение, разумеется, тоже верно; докажите его самостоятельно, например, от противного. Заметим, что, заменив b на $-b$ и учитывая то, что $|-b|=|b|$ (свойство 4), получим другой вид неравенства треугольника: $|a|+|b| \geq |a-b|$, причем
$$|a|+|b|=|a-b| \Leftrightarrow ab \leq 0;$$
$$|a|+|b|>|a-b| \Leftrightarrow ab>0.$$

Равносильные переходы 12–13 можно обосновать, воспользовавшись, например, геометрическим смыслом модуля. Предположим сначала, что $b>0$. Решить неравенство $|a|<b$ значит найти все точки числовой прямой, расстояние от каждой из которых до точки 0 меньше b. Отложив на числовой оси в обе стороны от точки 0 отрезки, равные b, получим точки $-b$ и b, расстояние от каждой из которых до точки 0 равно b:



Ясно, что все точки a, расстояние от каждой из которых до точки 0 меньше b, принадлежат интервалу $(-b;\ b)$, то есть для них имеет место система неравенств $\begin{cases} a<b, \\ a>-b. \end{cases}$ Остается заметить, что в случае $b \leq 0$ ни эта система, ни неравенство $|a|<b$ не имеют решений. Тем самым, при любом значении b неравенство $|a|<b$ и система неравенств $\begin{cases} a<b, \\ a>-b \end{cases}$ имеют одно и то же множество решений, то есть являются равносильными. Свойство 13 доказывается аналогично: при $b>0$ искомые точки a, то есть точки, расстояние от каждой из которых до точки 0 больше b, принадлежат лучу $(-\infty;\ b)$ или лучу $(b;\ +\infty)$:



Таким образом, для этих точек имеет место совокупность неравенств $\left[\begin{array}{l} a>b \\ a<-b. \end{array}\right.$ Если же $b \leq 0$, то и этой совокупности, и неравенству $|a|>b$ удовлетворяют все точки a числовой оси. То есть при любом значении b неравенство $|a|>b$ и совокупность неравенств $\left[\begin{array}{l} a>b \\ a<-b \end{array}\right.$ имеют одно и то же множество решений, а значит, являются равносильными. Заметим еще, что свойства 11–13 остаются в силе и для нестрогих неравенств:
$$|a| \leq |b| \Leftrightarrow a^2 \leq b^2 \Leftrightarrow (a-b)(a+b) \leq 0;$$
$$|a| \leq b \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq b, \\ a \geq -b \end{cases}$$
$$|a| \geq b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a \geq b \\ a \leq -b. \end{array}\right.$$

Разумеется, приведенные выше свойства могут быть обоснованы и другими способами. Эти свойства позволяют решать самые разные по уровню сложности неравенства с модулем. Основными методами решения таких неравенств являются равносильные преобразования (свойства 9–14, а также метод знакотождественных множителей) и «раскрытие» модуля по определению. Последний метод часто называют методом интервалов; для того, чтобы не путать его с одним из основных общих методов решения неравенств, имеющим то же название, в этой статье он называется методом промежутков. Реже для решения используют метод интервалов, геометрический смысл модуля (свойство 3), введение новой переменной, свойства монотонности и ограниченности функций, заданных формулой, содержащей переменную под знаком модуля.

Простейшие неравенства с модулем

Говорить о простейших неравенствах с модулем можно только весьма условно: ведь даже самые несложные из них сводятся к решению системы или совокупности двух неравенств. Условимся под простейшими неравенствами с модулем понимать неравенства вида $f(x) \vee b$, где b — действительное число, $f(x)$ — многочлен первой или второй степени. Эти неравенства можно решать на основании равносильных переходов 12 и 13:
$$|f(x)|<b \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)<b, \\ f(x)>-b, \end{cases}$$
$$|f(x)|>b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)>b \\ f(x)<-b. \end{array}\right.$$

В случае нестрогих неравенств нужно в соответствующей системе или совокупности заменить неравенства на нестрогие.

Другим способом решения простейших неравенств с модулем (при $b > 0$) является возведение в квадрат обеих частей неравенства с последующим применением формулы разности квадратов (знак неравенства не меняется):

$$|f(x)| \vee b \Leftrightarrow f^2(x) \vee b^2 \Leftrightarrow (f(x) - b)(f(x) + b) \vee 0.$$

При $b \le 0$ тот или иной вывод о множестве решений неравенства делается в зависимости от знака неравенства с учетом неотрицательности модуля. Если $b < 0$, неравенства $|f(x)| < b$ и $|f(x)| \le b$ решений не имеют, а неравенства $|f(x)| > b$ и $|f(x)| \ge b$ справедливы при любом значении переменной. Если $b = 0$, неравенство $|f(x)| < 0$ решений не имеет, неравенство $|f(x)| \le 0$ равносильно уравнению $f(x) = 0$, неравенство $|f(x)| > 0$ равносильно неравенству $f(x) \ne 0$, а неравенство $|f(x)| \ge 0$ справедливо при любом значении переменной.

Пример 1. Решить неравенство

$$|3x + 4| \ge 5.$$

Решение. Данное неравенство равносильно совокупности неравенств

$$\left[\begin{array}{l} 3x+4 \ge 5 \\ 3x+4 \le -5, \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x \ge \dfrac{1}{3} \\ x \le -3. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty; -3] \cup \left[\dfrac{1}{3}; +\infty\right)$.

Пример 2. Решить неравенство

$$|x^2 - 9x + 14| \le 6.$$

Решение. Данное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 9x + 14 \le 6, \\ x^2 - 9x + 14 \ge -6, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 9x + 8 \le 0, \\ x^2 - 9x + 20 \ge 0. \end{cases}$$

Решим первое неравенство системы. Корнями квадратного трехчлена в левой части этого неравенства являются числа 1 и 8, старший коэффициент трехчлена положителен. Следовательно, множество решений неравенства: $[1; 8]$. Решим второе неравенство системы. Корнями квадратного трехчлена в левой части неравенства являются числа 4 и 5, старший коэффициент трехчлена положителен. Следовательно, множество решений неравенства: $(-\infty; 4] \cup [5; +\infty)$. Пересечением множеств решений неравенств системы является множество $[1; 4] \cup [5; 8]$.

Ответ: $[1; 4] \cup [5; 8]$.

Пример 3. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} |2x^2 - 4x - 11| \ge 5, \\ |x^2 - 5| \le 4. \end{cases}$$

Решение. Решим первое неравенство данной системы. Обе части неравенства неотрицательны при любом значении переменной. Поэтому возведение их в квадрат будет равносильным преобразованием. Возведем обе части неравенства в квадрат:

$$(2x^2 - 4x - 11)^2 \ge 5^2,$$
$$(2x^2 - 4x - 11)^2 - 5^2 \ge 0.$$

Применив формулу разности квадратов, получим неравенство

$$(2x^2 - 4x - 16)(2x^2 - 4x - 6) \ge 0.$$

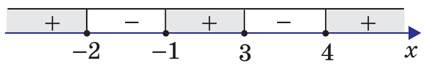
После вынесения общих множителей и деления обеих частей неравенства на 4, придем к неравенству

$$(x^2 - 2x - 8)(x^2 - 2x - 3) \ge 0.$$

Корнями квадратного трехчлена $x^2 - 2x - 8$ являются числа -2 и 4, корнями квадратного трехчлена $x^2 - 2x - 3$ являются числа -1 и 3. Поэтому неравенство можно переписать в виде

$$(x + 2)(x - 4)(x + 1)(x - 3) \ge 0.$$

Применим метод интервалов:



Множество решений неравенства: $(-\infty; -2] \cup [-1; 3] \cup [4; +\infty)$.

Решим второе неравенство данной системы. Возведем обе части неравенства в квадрат:

$$(x^2 - 5)^2 \le 4^2, \ (x^2 - 5)^2 - 4^2 \le 0.$$

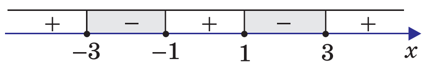
Воспользовавшись формулой разности квадратов, получим неравенство

$$(x^2 - 1)(x^2 - 9) \ge 0,$$

и далее,

$$(x + 1)(x - 1)(x + 3)(x - 3) \le 0.$$

Применим метод интервалов:



Множество решений неравенства: $[-3; -1] \cup [1; 3]$.

Найдем множество решений данной системы неравенств как пересечение числовых множеств $(-\infty; -2] \cup [-1; 3] \cup [4; +\infty)$ и $[-3; -1] \cup [1; 3]$. Получим множество $[-3; -2] \cup \{-1\} \cup [1; 3]$.

Ответ: $[-3; -2] \cup \{-1\} \cup [1; 3]$.

Более сложные неравенства с модулем

Перейдем к изложению методов решения более сложных неравенств с модулем.

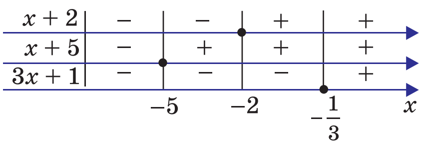
Метод промежутков

Одним из наиболее известных методов решения неравенств с модулем является метод промежутков, основанный на «раскрытии» модуля в соответствии с определением модуля. Суть метода заключается в следующем. На числовой оси отмечается ОДЗ неравенства. Затем ОДЗ разбивается на несколько промежутков точками, в которых подмодульные алгебраические выражения обращаются в нуль. На любом из этих промежутков любое из таких выражений (из школьного курса алгебры) определено и не равно нулю, следовательно, оно принимает только положительные или только отрицательные значения (какие именно, можно определить, выбрав любое значение из рассматриваемого промежутка и определив знак выражения при этом значении). Поэтому в зависимости от промежутка модуль каждого из таких выражений раскрывается либо со знаком «плюс», либо со знаком «минус». Определять знаки подмодульных выражений удобно с помощью одного рисунка, на котором изображены одна под другой оси с отмеченной ОДЗ неравенства и нулями для каждого из подмодульных выражений так, что получается своего рода таблица. В «строчках» этой таблицы расставляют знаки подмодульных выражений, а затем «по столбцам» определяют, с каким знаком раскрывается модуль каждого из этих выражений на каждом из полученных промежутков. Далее на каждом промежутке находят решение полученного неравенства, уже не содержащего знаков модуля. Последний шаг — объединение найденных решений. Этот метод целесообразно применять в основном если неравенство содержит два и более модуля, а подмодульные выражения являются многочленами первой или второй степени. В большинстве же случаев более эффективным является применение равносильных преобразований.

Пример 1. Решить неравенство

$$|x+2|-|x+5|<1-x-2|3x+1|.$$

Решение. Определим промежутки знакопостоянства каждого из выражений под знаками модуля, для наглядности и удобства изобразив их на одной схеме (жирными точками отмечены нули соответствующих подмодульных выражений):



Рассмотрим четыре случая, раскрывая модули на каждом из четырех полученных промежутков согласно знакам в каждом из столбцов.

1. $\begin{cases} x \ge -\dfrac{1}{3}, \\ x+2-x-5<1-x-6x-2, \end{cases}$ $\begin{cases} x \ge -\dfrac{1}{3}, \\ x<\dfrac{2}{7}, \end{cases}$

значит, $x \in \left[-\dfrac{1}{3}; \dfrac{2}{7}\right)$.

2. $\begin{cases} -2 \le x < -\dfrac{1}{3}, \\ x+2-x-5<1-x+6x+2, \end{cases}$ $\begin{cases} -2 \le x < -\dfrac{1}{3}, \\ x>-\dfrac{6}{5}, \end{cases}$

значит, $x \in \left(-\dfrac{6}{5}; -\dfrac{1}{3}\right)$.

3. $\begin{cases} -5 \le x < -2, \\ -x-2-x-5<1-x+6x+2, \end{cases}$ $\begin{cases} -5 \le x < -2, \\ x>-\dfrac{10}{7}; \end{cases}$

решений нет.

4. $\begin{cases} x<-5, \\ -x-2+x+5<1-x+6x+2, \end{cases}$ $\begin{cases} x<-5, \\ x>0; \end{cases}$

решений нет.

Осталось объединить полученные на каждом из четырех промежутков решения. Это удобно делать снизу вверх по тексту решения:

$$\left(-\frac{6}{5}; -\frac{1}{3}\right) \cup \left[-\frac{1}{3}; \frac{2}{7}\right) = \left(-\frac{6}{5}; \frac{2}{7}\right).$$

Ответ: $\left(-\dfrac{6}{5}; \dfrac{2}{7}\right)$.

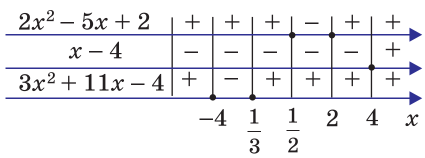
Пример 2. Решить неравенство

$$|2x^2-5x+2|+3|4-x| \ge |4-11x-3x^2|.$$

Решение. Сначала, применив свойство $|-a|=|a|$ (свойство 4, позволяющее менять знак подмодульного выражения), приведем все подмодульные выражения к стандартному виду. Получим неравенство

$$|2x^2-5x+2|+3|x-4| \ge |3x^2+11x-4|.$$

Этот шаг не является обязательным, но во многих случаях позволяет избежать ошибок, связанных с вычислением корней и определением промежутков знакопостоянства квадратного трехчлена, старший коэффициент которого отрицателен. Найдем нули подмодульных выражений. Корнями квадратного трехчлена $2x^2-5x+2$ являются числа $\dfrac{1}{2}$ и 2. Корнем многочлена $x-4$ является, очевидно, число 4. Корнями квадратного трехчлена $3x^2+11x-4$ являются числа –4 и $\dfrac{1}{3}$. Теперь можно составить стандартную табличку промежутков знакопостоянства каждого из подмодульных выражений, воспользовавшись тем, что квадратный трехчлен стандартного вида принимает отрицательные значения только в промежутке между своими корнями:



Пять нулей подмодульных выражений разбивают числовую ось на шесть промежутков. Решим данное неравенство на каждом из шести промежутков, учитывая то, что в трех столбцах расстановка знаков одинакова: это позволяет вместо трех случаев рассмотреть один.

1. $\begin{cases} x \ge 4, \\ 2x^2 - 5x + 2 + 3x - 12 \ge 3x^2 + 11x - 4, \end{cases}$

откуда
$$\begin{cases} x \ge 4, \\ x^2 + 13x + 6 \le 0. \end{cases}$$

Разумеется, можно формально решить квадратное неравенство последней системы, найдя корни квадратного трехчлена в левой части неравенства (это будут иррациональные числа). Но лучше просто заметить, что неравенство $x^2 + 13x + 6 \le 0$ не имеет положительных решений, поскольку при положительных значениях переменной его левая часть положительна. Значит, и вся система не имеет решений.

2. $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 2 \le x < 4 \\ \dfrac{1}{3} \le x < \dfrac{1}{2} \\ x < -4, \end{array}\right. \\ 2x^2 - 5x + 2 - 3x + 12 \ge 3x^2 + 11x - 4. \end{cases}$

Последнее неравенство системы приводится к виду
$$x^2 + 19x - 18 \le 0.$$

Корнями квадратного трехчлена $x^2 + 19x - 18$ являются числа
$$\frac{-19 - \sqrt{433}}{2} \text{ и } \frac{-19 + \sqrt{433}}{2},$$
а решением неравенства $x^2 + 19x - 18 \le 0$ — отрезок $\left[-\dfrac{19+\sqrt{433}}{2}; \dfrac{-19+\sqrt{433}}{2}\right]$. Заметим, что $400 < 433 < 441$, поэтому $20 < \sqrt{433} < 21$, и значит, $-20 < -\dfrac{19+\sqrt{433}}{2} < -19,5$, а $\dfrac{1}{2} < \dfrac{-19+\sqrt{433}}{2} < 1$. Следовательно, отрезок $\left[-\dfrac{19+\sqrt{433}}{2}; \dfrac{-19+\sqrt{433}}{2}\right]$ не имеет пересечений с промежутком $[2; 4)$, содержит промежуток $\left[\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{2}\right)$, а его пересечение с промежутком $(-\infty; -4)$ — промежуток $\left[-\dfrac{19+\sqrt{433}}{2}; -4\right)$. Итак, в этом случае множество решений данного неравенства —
$$\left[-\frac{19+\sqrt{433}}{2}; -4\right) \cup \left[\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right).$$

3. $\begin{cases} \dfrac{1}{2} \le x < 2, \\ -2x^2 + 5x - 2 - 3x + 12 \ge 3x^2 + 11x - 4, \end{cases}$

откуда
$$\begin{cases} \dfrac{1}{2} \le x < 2, \\ 5x^2 + 9x - 14 \le 0. \end{cases}$$

Корнями квадратного трехчлена $5x^2 + 9x - 14$ являются числа $-\dfrac{14}{5}$ и 1, а решением неравенства $5x^2 + 9x - 14 \le 0$ — отрезок $\left[-\dfrac{14}{5}; 1\right]$. Следовательно, решение последней системы: $\left[\dfrac{1}{2}; 1\right]$.

4. $\begin{cases} -4 \le x < \dfrac{1}{3}, \\ 2x^2 - 5x + 2 - 3x + 12 \ge -3x^2 - 11x + 4, \end{cases}$

откуда
$$\begin{cases} -4 \le x < \dfrac{1}{3}, \\ 5x^2 + 3x + 10 \ge 0. \end{cases}$$

Дискриминант квадратного трехчлена $5x^2 + 3x + 10$ отрицателен, а старший коэффициент положителен. Поэтому неравенство $5x^2 + 3x + 10 \ge 0$ выполняется при любом действительном значении переменной, а решением системы является промежуток $\left[-4; \dfrac{1}{3}\right)$.

Осталось объединить найденные решения:
$$\left[-\frac{19+\sqrt{433}}{2}; -4\right) \cup \left[-4; \frac{1}{3}\right) \cup \left[\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{1}{2}; 1\right] = \left[-\frac{19+\sqrt{433}}{2}; 1\right].$$

Ответ: $\left[-\dfrac{19+\sqrt{433}}{2}; 1\right]$.

Окончание. Начало на с. 50

9. 1008.

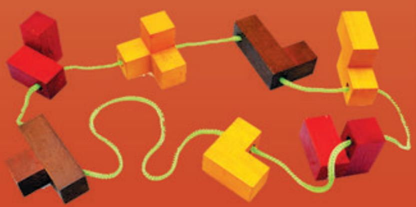
Заметим, что
$$a_{n+1} - 2a_n = 2a_n - 4a_{n-1} = 2(a_n - 2a_{n-1}).$$
Обозначим
$$b_n = a_{n+1} - 2a_n,$$
тогда $b_1 = 1$ и $b_{n+1} = 2b_n$, то есть $b_n = 2^{n-1}$. Таким образом,
$$a_n = b_{n-1} + 2a_{n-1} = = b_{n-1} + 2b_{n-2} + 4a_{n-2} = \ldots = = b_{n-1} + 2b_{n-2} + \ldots + 2^{n-1}b_1 + 2^n a_1 = = (n-1)2^{n-2}.$$

Если это число кратно 2014, то $(n - 1)$ кратно 1007, то есть $n = 1008$.

Н. АВИЛОВ,
avilow@rambler.ru,
ст. Егорлыкская, Ростовская обл.

КУБИК ПУТЕШЕСТВЕННИКОВ

Ведущий рубрики — Николай Иванович Авилов — на фоне своей коллекции головоломок



Как появляются новые головоломки? Иногда очень простая идея позволяет известную головоломку превратить в новую и интересную. Ирина Александровна Новичкова из Москвы придумала следующее. В каждом из семи игровых элементов классической головоломки «Кубики Сома», изобретенной датским физиком Питом Хейном в 30-х годах XX века, она просверлила сквозное отверстие и в строго определенной последовательности нанизала их на шнур. После того, как концы шнурка спаяли между собой, игровые элементы оказались нанизанными внутри замкнутой петли. Получились этакие бусы.

Цель играющего осталась прежней — собрать куб так, чтобы шнурок не защемлялся между элементами. Попробуйте сами, и вы убедитесь, что сделать это гораздо сложнее, чем в известном варианте. Так родилась оригинальная головоломка, которая на сегодня прошла апробацию среди отечественных и зарубежных экспертов в области логических и развивающих игр и защищена авторским свидетельством.

Название головоломки не случайно, её действительно удобно брать в путешествие, коротать с ней время в вагоне пассажирского поезда или самолете, с пользой стоять в транспортных пробках. При этом вы не рискуете обронить головоломку или её элементы.

Со слов автора, диапазон возрастной адресности головоломки — от 5 до 99 лет. Действительно, в силу «нерассыпаемости» игрушка может быть использована как дидактический материал для знакомства с простейшими геометрическими формами. Людям же старшего возраста, для которых характерна некоторая забывчивость и ослабление зрения, головоломка позволит проводить свой досуг без опасения потерять какие-либо элементы набора. Несомненно, головоломка будет интересна и школьникам, ведь она является и геометрической, и комбинаторной задачей одновременно.

С этой головоломкой Ирина Александровна стала лауреатом конкурса «Игрушка — космическому экипажу», который проводил Московский городской дворец детского творчества. Надеюсь, в будущем головоломка побывает в космосе, ведь её удобно использовать в невесомости: во-первых, элементы её не будут разлетаться по всей космической станции, во-вторых, в процессе решения элементы прилегают друг к другу не за счёт силы тяжести, как на Земле, а за счёт упругих свойств шнурка.

Кроме этого, головоломка награждена дипломом на конкурсе «Инновационная игрушка-2010» и пользовалась успехом на международных встречах изобретателей головоломок в Лос-Анджелесе, Токио, Антверпене, Чикаго и Хельсинки.

Вот такая занятная головоломка получилась у Ирины Александровны. Недаром же говорят: «Всё гениальное — просто!»

К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru

РЕФЕРАТЫ ЭЛЕКТРОННЫХ ПУБЛИКАЦИЙ

Понарьина Е. <prepodpomath@yandex.ru> (г. Москва). **Элементы математической статистики.** Данная статья — это попытка упорядочить и обобщить те знания, которые представляют собой минимум, необходимый для решения задач математической статистики. Статья может быть полезна учителям и учащимся 11-х классов на этапе формирования умений и навыков решения задач с использованием изучаемого материала. Материал представлен в виде блоков, состоящих из определений, решенных типовых примеров и упражнений для самостоятельного решения.

Пивоварова Т. <prepodpomath@yandex.ru> (г. Майский, Республика Кабардино-Балкария). **Способ «переброски» для решения квадратного уравнения. 8 класс.** Для решения квадратных уравнений в школьном курсе математики в основном применяется метод решения по формуле. В вариантах ОГЭ и ЕГЭ часто встречаются уравнения, которые имеют рациональные корни. Автор предлагает алгоритм устного решения квадратных уравнений, имеющих рациональные корни.

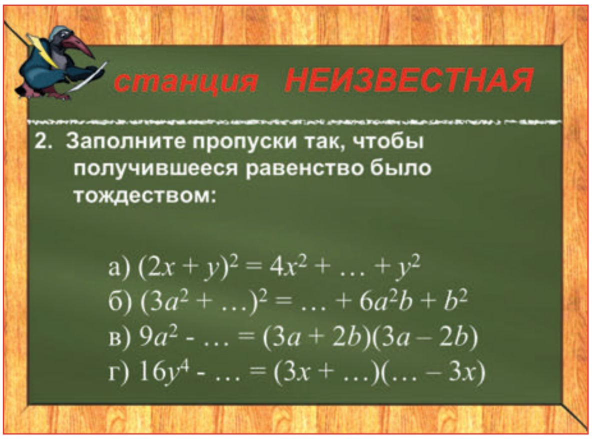
Арустамян М. (хут. Ёлкин, Ростовская обл.). **Контрольная работа по математике за I полугодие. 5 класс.** Особенность контрольной работы состоит в пролонгировании задач обязательного уровня возможностей с тем, чтобы обеспечить объективность проверки базовой подготовки школьников и выявить динамику образовательных достижений каждого обучающегося. Работа представлена в двух вариантах. Каждый вариант состоит из двух частей. Первая часть содержит базовые задания с кратким ответом, вторая часть — задания повышенного уровня. При их выполнении нужно написать полное решение и ответ.

Константинов В. < kvp321106@mail.ru > (г. Москва) **Чудеса криптографии.** Методы современной криптографии позволили создать такие системы шифрования, что взломать этот шифр, не зная секретного кода (ключа), на самом мощном компьютере невозможно. Поэтому сейчас все упирается в то, чтобы обеспечить невозможность для противника перехватить ключ во время передачи его от одного абонента другому. В статье рассматривается алгоритм формирования секретного ключа из двух двоичных чисел, которыми обмениваются между собой абоненты и затем формируют из него одно и то же число — ключ. Противник же, перехватив эти числа, сформировать ключ не может. При этом используются так называемые односторонние преобразования двоичных чисел, при

К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru

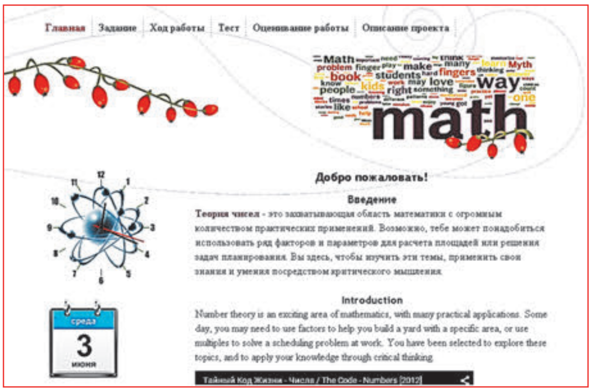
которых прямое преобразование $A = F(B)$ может быть легко выполнено на современном компьютере, а обратное преобразование $B = P(A)$ не может быть выполнено за приемлемое время (для этого требуются миллиарды лет). В статье рассматривается подобный алгоритм, предложенный Эль-Гамалем, в котором используются арифметические действия, выполняемые над элементами поля Галуа по простому модулю. Очень кратко описана соответствующая теория.

Заиченко Н. <zaichenkona@mail.ru> (г. Барабинск, Новосибирская обл.). **Тема урока: «Формулы сокращенного умножения». 8 класс.** Учебник: Мордкович А.Г. Алгебра, 8 класс. Цель урока: способствовать формированию навыков применения формул сокращенного умножения при тождественных преобразованиях, при решении уравнений. Урок построен в форме путешествия. Задания, используемые на уроке, направлены на обобщение полученных знаний по теме. В урок добавлен соревновательный момент: за каждое верно выполненное задание ученики получают баллы. По количеству набранных баллов и по результатам теста в конце урока выставляется отметка каждому ученику. Урок сопровождается презентацией.



Буркова А. <a_burkova@mail.ru> (г. Москва). **Карл Вейерштрасс — великий математик.** В октябре 2015 года исполняется 200 лет со дня рождения выдающегося немецкого математика Карла Вейерштрасса (1815–1897). Исследования Вейерштрасса обогатили математический анализ, теорию специальных функций, дифференциальную геометрию и линейную алгебру. Среди его учеников можно встретить такие имена, как К. Шварц, С. Ковалевская, И. Фукс и многие другие. Автор в легкой, доступной форме изложил биографические факты из жизни К. Вейерштрасса.

Алышова Н., Никитина И. (г. Мытищи, Московская обл.) **Использование дистанционных образовательных технологий при обучении математике на примере веб-квест.** Авторы делятся своим опытом работы по одной из дистанционных интерактивных методик преподавания — технологии Веб-квест (Web-Quest). Веб-квест — это интерактивная учебная деятельность, которая предполагает решение какой-либо проблемы, предусматривающей, с одной стороны, использование разнообразных методов, средств обучения, а с другой — интегрирование знаний, умений из различных областей науки и техники. По мнению авторов, использование этого метода делает учебный процесс творческим, а ученика — раскованным и целеустремленным. В статье описана проектная работа «Числа вокруг нас» для учащихся 7-го класса. Цели работы: повышение мотивации к изучению математики на основе межпредметной интеграции и проектной деятельности; способствовать раскрытию творческого потенциала учащихся; развитие навыка самостоятельной работы с информацией. Также приведены примеры решения проблем участниками проекта.



Хэмптон-Корт

Замок Хэмптон-Корт в окрестностях Лондона – бывшая загородная резиденция английских королей династии Тюдоров. Интересно, что они, вопреки расхожему мнению, не только скакали по полям и лугам в погоне за несчастными зайцами и оленями, но время проводили и за интеллектуальными развлечениями; образцы различных настольных игр можно увидеть в залах дворца. Но наибольший интерес для математика представляет объект, находящийся за его стенами, – это знаменитый хэмптон-кортский лабиринт. Мы знаем о нем благодаря не менее известной книге Джером К. Джерома «Трое в лодке» и экранизации этого произведения, главные роли в которой играют наши любимые актеры Андрей Миронов, Александр Ширвиндт и Михаил Державин. Есть в этой картине и эпизод, посвященный лабиринту. Правда, не знаю, где именно он снимался, но только не в настоящем хэмптон-кортском лабиринте. В фильме лабиринт представляет собой каменное сооружение, в то время как реальный – это зеленое насаждение. Образуют его кустарники высотой около 180 см, ширина дорожек равна 60 см. Заложен лабиринт был в конце XVII века, но те ли это кустики (ведь 300 лет прошло), как долго они росли до современного состояния, мне выяснить не удалось. Лабиринт открыт для посещения, и внутри его все происходит точно так, как в фильме: посетители ходят кругами, дети убегают от родителей и теряются в его недрах. Ну, а для тех, кто знает правило одной руки, дойти до центра лабиринта кратчайшим маршрутом не проблема. А вы знаете?

А вдоль парка несет свои воды Темза, по которой снуют лодочки, некоторые даже напоминающие ту, в которой путешествовали упомянутые литературно-кинематографические персонажи, в лабиринте все-таки заблудившиеся.

Л. Рослова