МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ № 7–8 (766)

ИЗДАЕТСЯ С 1992 г.

mat.1september.ru

электронная версия журнала дополнительные материалы в Личном кабинете на сайте www.1september.ru

издательский дом 1september.ru

Первое сентября

июль–август 2015

МАТЕМАТИКА Подписка на сайте www.1september.ru или по каталогу «Почта России»: 79073 (бумажная версия); 12717 (CD-версия)

В НОМЕРЕ

К материалам, обозначенным этим символом, есть дополнительные материалы в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru

УВАЖАЕМЫЕ ЧИТАТЕЛИ!

Все подписчики журнала имеют возможность получать электронную версию, которая не только является полной копией бумажной, но и включает дополнительные электронные материалы для практической работы.

Для получения электронной версии:

1. Откройте Личный кабинет на портале «Первое сентября» (www.1september.ru).
2. В разделе «Газеты и журналы/Получение» выберите свой журнал и кликните на кнопку «Я – подписчик бумажной версии».
3. Появится форма, посредством которой вы сможете отправить нам копию подписной квитанции. После этого в течение одного рабочего дня будет активирована электронная подписка на весь период действия бумажной.

МАТЕМАТИКА. ПЕРВОЕ СЕНТЯБРЯ

Методический журнал для учителей математики

Издается с 1992 г. Выходит один раз в месяц

РЕДАКЦИЯ:
Главный редактор: Л. Рослова
Отв. секретарь: Т. Черкавская
Редакторы: П. Камаев, О. Макарова, И. Коган
Дизайн макета: И. Лукьянов. Дизайн обложки: Э. Лурье
Корректор: Л. Громова. Верстка: Л. Кукушкина

Распространяется по подписке

Цена свободная
Тираж 22 000 экз.

Тел. редакции: **(499) 249-3460**
E-mail: **mat@1september.ru**
Сайт: **mat.1september.ru**

ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ДОМ «ПЕРВОЕ СЕНТЯБРЯ»
Главный редактор:
Артем Соловейчик (генеральный директор)
Коммерческая деятельность:
Константин Шмарковский (финансовый директор)
Развитие, IT и координация проектов:
Сергей Островский (исполнительный директор)
Реклама, конференции и техническое обеспечение Издательского дома:
Павел Кузнецов
Производство:
Станислав Савельев
Административно-хозяйственное обеспечение: Андрей Ушков
Педагогический университет:
Валерия Арсланьян (ректор)

ЖУРНАЛЫ ИЗДАТЕЛЬСКОГО ДОМА:
Английский язык – Е. Богданова,
Библиотека в школе – О. Громова,
Биология – Н. Иванова,
География – А. Митрофанов, и.о.
Дошкольное образование – Д. Тюттерин,
Здоровье детей – Н. Сёмина,
Информатика – С. Островский,
Искусство – О. Волкова,
История – А. Савельев,
Классное руководство и воспитание школьников –М. Битянова,
Литература – С. Волков,
Математика – Л. Рослова,
Начальная школа – М. Соловейчик,
Немецкий язык – М. Бузоева,
ОБЖ – А. Митрофанов,
Русский язык – Л. Гончар,
Спорт в школе – О. Леонтьева,
Технология – А. Митрофанов,
Управление школой – Е. Рачевский,
Физика – Н. Козлова,
Французский язык – Г. Чесновицкая,
Химия – О. Блохина,
Школа для родителей – Л. Печатникова,
Школьный психолог – М. Чибисова.

Иллюстрации: фотобанк Shutterstock

На с. 1 и с. 64 — коллажи из иллюстраций, взятых с сайтов: http://spitalfieldslife.com, https://www.flickr.com, http://www.britishmuseum.org, https://commons.wikimedia.org, https://suitesculturelles.files.wordpress.com, http://www.e-reading.club, http://drevniiegypt.com.ua/literature, http://www.britishmuseum.org, http://www.britishmuseum.org, https://martinfdc.wordpress.com/tag/uk, https://suitesculturelles.files.wordpress.com

УЧРЕДИТЕЛЬ:
ООО «ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ДОМ «ПЕРВОЕ СЕНТЯБРЯ»
Зарегистрировано ПИ №ФС77-58424 от 25.06.14 в Роскомнадзоре
Подписано в печать: по графику 16.04.15, фактически 16.04.15 Заказ №
Отпечатано в ОАО «Первая Образцовая типография» филиал «Чеховский печатный двор» ул. Полиграфистов, д. 1, Московская область, г. Чехов, 142300; Сайт: www.chpd.ru; E-mail: sales@chpk.ru; факс: 8(496)726-54-10, 8(495)988-63-76

АДРЕС РЕДАКЦИИ И ИЗДАТЕЛЯ:
ул. Киевская, д. 24, Москва, 121165
Телефон/ факс: **(499) 249-3138**
Отдел рекламы: **(499) 249-9870**
Сайт: **1september.ru**
facebook.com/School.of.Digital.Age

ИЗДАТЕЛЬСКАЯ ПОДПИСКА:
Телефон: **(499) 249-4758**

ПОДПИСНЫЕ ИНДЕКСЫ:
Почта России: бумажная версия – **79073**; CD версия – **12717**

МОСКОВСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЕ 80 ЛЕТ!

Л. РОСЛОВА

Да, так и есть — первая олимпиада в Москве прошла уже 80 лет тому назад, в далеком 1935 году. Она была одной из первых в мире. У ее истоков стояли звезды первой величины не только российской, но и мировой математики — Павел Александров, Андрей Колмогоров и Сергей Соболев. Ее организаторы и участники разделили судьбу страны — работали дни и ночи, погибали на фронтах, но проведение олимпиады не прерывалось даже в годы войны. Математики были нужны для решения как мирных задач, так и военных.

Через четверть века математические олимпиады вышли на международный уровень: в прошлом году международная математическая олимпиада прошла уже в 55 раз.

За это время московская олимпиада пережила и взлеты, и падения, переформатирование и смену организаторов, но она жива, и порядковый номер соревнований, прошедших в этом году, — LXXVIII, что после некоторого напряжения для перевода в наше «цифроисчисление» дает число 78. При всем при этом неизменным остается, что при организации олимпиады ставится задача не только выявления сильных учеников, но и создания атмосферы праздника математики. Наверное, именно поэтому одно из новых математических соревнований получило название «Математический праздник». Оно приобщает к математике учащихся более младшего возраста — учащихся 6–7-х классов.

В последние годы тенденция к омоложению сохраняется: появилась олимпиада «Математика+» для младших школьников. Появились новые виды соревнований: Московская математическая регата, турниры матбоев, интернет-олимпиады, устные олимпиады, иногда и по отдельным областям математики — по геометрии, вероятности, криптографии. О некоторых из них говорилось на конференции, посвященной нашему юбиляру. Тех, кто заинтересовался, за дополнительной информацией отправляю на страничку конференции на сайте Московского центра непрерывного математического образования: http://www.mccme.ru/head/news/MMO80-progr.htm.

В общем, есть где разгуляться пытливому уму и заинтересованному учителю, даже можно выбирать. Значит, у математических соревнований, как и у самой математики, есть прекрасные перспективы и продолжение в будущем.

В. СМИРНОВ, И. СМИРНОВА,
v-a-smirnov@mail.ru,
г. Москва

О НОВОЙ КОНЦЕПЦИИ ГЕОМЕТРИИ

Известно, какую большую роль играет геометрия в науке и образовании. На протяжении всей истории человечества она служила источником развития не только математики, но и многих других наук. Именно в ней появились первые теоремы и доказательства. Сами законы математического мышления формировались с помощью геометрии.

Многие геометрические задачи способствовали появлению новых научных направлений. И решение многих научных проблем получено с использованием геометрических методов.

Вообще, современная наука и ее приложения немыслимы без геометрии и ее разделов, таких как топология, теория графов, дифференциальная геометрия, алгебраическая геометрия, компьютерная геометрия и др.

Появление информационных технологий не только не снижает, но и усиливает роль геометрии, поскольку при этом существенно расширяются возможности графического представления материала, компьютерного моделирования.

Огромна роль геометрии и в школьном математическом образовании. Известен вклад, который она вносит в развитие пространственного воображения и логического мышления школьников.

Об этом говорили и говорят многие видные ученые-математики. Например, Н.Ф. Четверухин подчеркивал важность развития пространственных представлений для всех учащихся вне зависимости от направления их дальнейшего образования и выбора будущей профессии. «Хорошее пространственное воображение нужно конструктору, создающему новые машины, геологу, разведывающему недра земли, архитектору, сооружающему здания современных городов, хирургу, производящему тончайшие операции среди кровеносных сосудов и нервных волокон, скульптору, художнику и т.д.» [1].

А.Д. Александров, говоря о целях обучения геометрии, указывал, что «особенность геометрии, выделяющая ее среди других наук вообще, состоит в том, что в ней самая строгая логика соединена с наглядным представлением. Геометрия в своей сущности и есть такое соединение живого воображения и строгой логики, в котором они взаимодействуют и дополняют друг друга» [2]. В соответствии с этим в статье делается вывод о том, что преподавание геометрии в школе должно включать в себя три тесно связанных, но вместе с тем и противоположных элемента: логику, наглядное представление и применение к реальным вещам. Задача геометрии заключается в развитии у учащихся трех соответствующих качеств: логического мышления, пространственного воображения и практического понимания.

К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru (Вариант диагностической работы.)

В.Г. Болтянский говорил о том, что природа геометрии предоставляет богатые возможности для воспитания у школьников эстетического чувства красоты в самом широком значении этого слова. Красота геометрии заключается в ее проявлениях в живой природе, архитектуре, живописи, декоративно-прикладном искусстве, строительстве и т.д., а также в смелых, оригинальных, нестандартных доказательствах, выводах и решениях [3].

Много удивительно красивых пространственных форм создала природа. Например, кристаллы — природные многогранники. Свойства кристаллов, которые изучаются на уроках физики и химии, определяются их геометрическим строением, в частности, симметричным расположением атомов в кристаллической решетке. Формы правильных, полуправильных и звездчатых многогранников находят широкое применение в живописи, скульптуре, архитектуре, строительстве. Выдающийся архитектор XX столетия Ле Корбюзье писал: «Только неотступно следуя законам геометрии, архитекторы древности могли создать свои шедевры. Не случайно говорят, что пирамида Хеопса — немой трактат по геометрии, а греческая архитектура — внешнее выражение геометрии Евклида. Прошли века, но роль геометрии не изменилась. Она по-прежнему остается грамматикой архитектора».

Великий Анри Пуанкаре считал, что отличительной чертой математического ума является не логичность, а эстетичность. Он полагал, что чувство эстетического у нас врожденное, но его непрерывно нужно совершенствовать в себе. «Единственными фактами, способными обратить на себя внимание и быть полезными, являются те, которые приводят нас к познанию математического закона. Таким образом, мы приходим к следующему выводу: полезные комбинации — это в точности наиболее красивые, то есть те, которые больше всего воздействуют на это специальное чувство математической красоты, известное всем математикам» [4].

Отечественной школой накоплен уникальный опыт преподавания геометрии. Учебник по геометрии А.П. Киселева под редакцией Н.А. Глаголева на протяжении десятилетий оставался образцом строгости, четкости и доступности изложения геометрии.

Однако за последние 30 лет интерес и эффективность обучения школьников геометрии неуклонно снижались. Одной из причин этого явилось то, что обучение геометрии заменялось на изучение учебника геометрии, а достижение результатов обучения — на «прохождение» учебника.

До конца 60-х годов прошлого века недостатки такого обучения компенсировались высокой мотивацией школьников к изучению математики и наличием единого учебника геометрии А.П. Киселева.

С появлением нескольких учебников геометрии и снижением мотивации школьников к изучению математики, произошедшим во второй половине прошлого века, такое обучение стало давать сбои.

Разные учебники геометрии содержали «разную геометрию», разные определения, формулировки свойств и теорем и их доказательства. Школьники, обучавшиеся по одному учебнику геометрии, переходившие в другой класс или другую школу, где обучение геометрии велось по другому учебнику, не понимали этой «новой» для них геометрии и имели серьезные проблемы с ее изучением.

Конечно, речь не идет о возврате в школу единого учебника геометрии. Вопрос не в том, какой учебник лучше: каждый имеет свои достоинства и недостатки. Учитель, исходя из особенностей учеников данного класса, может выбрать тот или иной учебник, более полно отвечающий этим особенностям.

Задача состоит в том, чтобы, опираясь на достигнутый отечественной школой уровень геометрического образования, сделать обучение геометрии современным и интересным, учитывающим склонности и способности учеников, направленным на формирование математической культуры, интеллектуальное развитие личности каждого ученика, его творческих способностей, формирование представлений учащихся о математике, ее месте и роли в современном мире.

Выпускнику школы необходимо не только уметь решать задачи и доказывать теоремы. Математическое образование школьника должно включать в себя знакомство с историей становления и развития математики, именами ученых-математиков, временем их жизни, сделанными ими открытиями, доказанными теоремами и решенными проблемами.

История математики позволяет проникнуть в мировоззренческий смысл науки, в процесс основных ее идей, эволюцию методов. Сведения о научных поисках, открытиях помогают увидеть по-новому то, что кажется привычным и обыденным. Исторический материал может продемонстрировать учащимся, как может быть труднен и длителен путь ученого к истине, которая сегодня формулируется в виде короткого утверждения.

Исторические сведения способствуют развитию познавательных интересов и творческих способностей учащихся. Включение сведений о творчестве крупных ученых, о том, как они приходили к постановке цели своих исследований, находили метод решения, формулировали окончательный результат, позволяет создать творческую атмосферу на уроках математики, понять, что в процессе творчества нет ничего сверхъестественного, что цели достигаются в результате упорного труда.

Элементы истории служат средством нравственного воспитания учащихся, воспитания чувства гордости за достижения отечественной математики. История науки обладает множеством впечатляющих фактов о благородных социальных и гражданских мотивах деятельности ученых. Пренебрежение этим материалом или умалчивание о нем обедняет познавательный и нравственный опыт учащихся. Лишенные конкретных доказательств об единстве науки и нравственности, школьники могут считать, что существует чистая наука, далекая от реальной жизни, не связанная с судьбами людей и общества.

Наконец, «история математики важна не только потому, что она необходима для решения ряда методологических и педагогических проблем. Она важна и сама по себе, как памятник человеческому гению, позволившему человечеству пройти великий путь от полного незнания и полного подчинения силам природы до великих замыслов и свершений в познании законов развития природы и общества» [5].

Помимо истории математики, учащиеся старших классов живо интересуются современными проблемами математики и ее приложениями. Этому, в частности, во многом способствует развитие средств массовой информации, появление большого количества научно-популярной литературы, научно-популярных телевизионных и радиопередач, современных информационных технологий. Неправильной является точка зрения, согласно которой считается, что школьникам недоступно познание современного состояния науки и, в частности, геометрии, поэтому вводить элементы современной геометрии в школе не нужно. Знакомство с основными направлениями развития современной науки необходимо каждому выпускнику школы, независимо от его будущей деятельности, для ориентации в современном мире, правильного представления о процессах, происходящих в природе и обществе. Главное здесь найти золотую середину, то есть такой метод изложения материала, при котором, не вдаваясь в трудные детали, познакомить учащихся с некоторыми современными вопросами геометрии.

По выражению академика А.Д. Александрова, «ученику нужно показать реальные связи и воплощения геометрии в жизни, в природе, в искусстве, в технике и науке, чтобы геометрия предстала перед ним не как сухой предмет, подлежащий зубрежке и сдаче на экзамене, а как полное содержания, значения и красоты явление культуры, как наука в ее связях с реальными вещами». Показ прикладных аспектов геометрии совершенно необходим, особенно для учащихся старших классов, которых нужно убедить в полезности того, что они изучают в школе.

Предлагаемая *концепция обучения геометрии* в школе призвана сделать геометрию современным, интересным и полезным предметом. Она предусматривает:

– ориентацию обучения геометрии не на конкретный учебник, а на результаты обучения;

– повышение мотивации и интереса школьников к изучению геометрии;

– привлечение школьников к исследовательской и проектной деятельности;

– проведение текущего и рубежного контролей по результатам обучения в 6, 9-м (ОГЭ) и 11-м (ЕГЭ) классах.

При этом изменяется роль самого учебника. Сегодня учебник — не просто набор определений, свойств, теорем, которые нужно выучить, задач, которые нужно решить. Учебник, с одной стороны, должен создавать базу, основу обучения геометрии, реализуя программу школьного математического образования, а с другой стороны, способствовать интеллектуальному развитию личности каждого ученика, формированию представления о геометрии как науке, ее истории, современном состоянии и приложениях.

Уровень освоения учебника у разных школьников, в зависимости от их способностей, может быть разным. Не следует требовать от всех учеников заучивания всех определений, свойств, теорем и их доказательств. Это не приближает ученика к формированию геометрических представлений о соответствующем понятии или к пониманию доказательства соответствующей теоремы.

В некотором смысле геометрические представления о понятии важнее заученной формулировки его определения. Формулировки можно посмотреть в справочной литературе, а геометрические представления нет.

То же относится и к доказательствам свойств и теорем. Заучивание школьниками доказательств теорем учебника не является эффективным средством обучения доказательствам, а сами теоремы не имеют своей основной целью обучение доказательствам.

Доказательства теорем расположены в учебниках не в порядке возрастания их сложности, а следуя логике построения учебника. Для каждой теоремы, как правило, применяется свой метод доказательства. При этом сложное доказательство может предшествовать простому, а при обучении доказательствам нужно иметь серии однотипных доказательств, двигаться постепенно от простых доказательств к более сложным.

Кроме того, некоторые доказательства теорем в учебниках геометрии или не являются таковыми, или выходят за рамки школьного курса математики. Так, например, в некоторых учебниках геометрии для доказательства признаков равенства треугольников используется понятие наложения, которое носит интуитивный характер и не является математическим понятием. Следовательно, и доказательство, использующее это понятие, не является таковым. Доказательство формулы площади прямоугольника обычно проводится рассмотрением различных случаев, когда стороны выражаются: а) натуральными; б) рациональными; в) иррациональными числами. Доказательство последнего случая выходит за рамки школьного курса математики.

Таким образом, доказательства учебника в основном предназначены не для обучения доказательствам, а для объяснения того, почему верно то или иное утверждение. При этом уровень понимания школьниками этого объяснения может быть различным. Одни школьники просто поверят объяснению учителя. Другие поймут общую идею доказательства. Третьи поймут не только идею, но и ход доказательства. Четвертые смогут ответить на дополнительные вопросы по ходу доказательства. Наконец, пятые окажутся способными предложить свое доказательство. Все эти уровни понимания являются вполне допустимыми и зависят не только от способностей учащихся, но и от уровня сложности доказательства теорем. Для учителя очень важно понимать и то, и другое и в зависимости от этого строить процесс обучения.

Изменяется и роль задач, включенных в учебник: они ориентированы в основном на освоение содержания данного учебника. Среди них, как правило, имеются задачи:

– на подведение учащихся к восприятию нового материала;

– раскрытие содержания новых понятий;

– закрепление рассмотренного теоретического материала;

– применение изученных формул, свойств и теорем к решению задач.

Однако учебник не может содержать весь перечень задач, которые должен уметь решать школьник. Более того, смысл обучения решению задач состоит в том, чтобы в результате обучения школьники могли решать задачи, не встречавшиеся им ранее. Поэтому задачи для текущего и рубежного контроля по результатам обучения следует брать отличными от задач учебника. Они могут быть представлены в открытом банке задач или специальных пособиях.

Возрастает роль и значение задач, включаемых в содержание ОГЭ и ЕГЭ по математике.

Государственная итоговая аттестация (ГИА/ОГЭ) в 9-м классе и Единый государственный экзамен (ЕГЭ) в 11-м классе не только осуществляют контроль за результатами обучения школьников, полученными ими знаниями, выработанными умениями и навыками, сформированными компетенциями. Структура и содержание этих экзаменов задают ориентиры всего математического образования, влияют на отбор содержания, выбор форм и методов обучения.

Особую роль играет контроль за результатами обучения геометрии в конце 6-го класса, поскольку именно в 5–6-х классах закладываются основы геометрических представлений учащихся, от которых во многом зависит успешность изучения систематического курса геометрии в 7–11-х классах.

Среди результатов обучения геометрии, достижение которых необходимо контролировать уже в 6-м классе, отметим следующие.

1. Распознавание геометрических фигур, их элементов и конфигураций: а) на плоскости; б) в пространстве.

2. Изображение геометрических фигур, проведение дополнительных построений: а) на плоскости; б) в пространстве.

3. Нахождение величин углов: а) на плоскости; б) в пространстве.

4. Нахождение длин и расстояний: а) на плоскости; б) в пространстве.

5. Нахождение площадей фигур: а) на плоскости; б) в пространстве.

6. Нахождение объемов фигур в пространстве.

7. Знакомство с историей геометрии, именами ученых, внесших вклад в развитие геометрии.

8. Знакомство с некоторыми современными направлениями геометрии и ее приложениями.

Осуществлению контроля за перечисленными результатами обучения будет способствовать открытый банк задач по геометрии для 5–6-х классов, аналогичный открытым банкам задач ОГЭ и ЕГЭ по математике.

В электронном приложении приведен вариант диагностической работы, направленной на контроль за результатами обучения геометрии в 5–6-м классах.

А. ШЕВКИН,
г. Москва

КАСАТЕЛЬНЫЕ, ОКРУЖНОСТИ И ТЕОРЕМА ПИФАГОРА

Памятник Пифагору на о. Самос

Так уж получилось, что при работе в 8-м физматклассе по учебнику алгебры С.М. Никольского и др. и по учебнику геометрии А.В. Погорелова рядом оказались две темы: «Квадратные уравнения» и «Теорема Пифагора». Показалось интересным посвятить отдельный урок взаимосвязи этих тем. На этом уроке мы с учащимися повторили то, что следовало повторить, разобрали задачи из предыдущей пятерочки задач, а дальше примерно 30 минут урока обсуждали решение четырех задач из пяти (задача 3, аналогичная задаче 4, пошла на дом).

Чем объясняется выбор именно этих задач?

Во-первых, надо показать учащимся стандартную ситуацию в прямоугольной трапеции, приводящую к составлению квадратного уравнения, связывающего известные и неизвестные величины, при помощи теоремы Пифагора.

Во-вторых, в задачах использована одна и та же геометрическая конструкция: две окружности, касающиеся внешним образом, и касательные к ним — внешние и внутренняя, а это позволяет при решении каждой следующей задачи использовать результаты, полученные ранее, и за короткое время охватить различные вариации на заданную геометрическую тему, решить несколько непростых задач.

В-третьих, здесь можно повторить некоторые геометрические факты, что ценно само по себе.

В-четвертых, в задачах 3 и 4 можно показать, что к корням квадратного уравнения в геометрической (и вообще текстовой) задаче нужно относиться внимательно: квадратное уравнение вторым своим корнем может подсказать, что есть второй случай, который первоначально даже не виден, — это полезный воспитательный момент.

В-пятых, здесь есть возможность показать способ решения иррациональных уравнений, сводящихся к квадратным. В этот момент должен солировать учитель, так как учащиеся еще не подкованы технически и не знают, как правильно поступать в новой для них ситуации. Можно найти еще несколько причин для рассмотрения предлагаемых ниже задач, отмечу только одну из них.

Рассматриваемые задачи позволяют показать решение задач с параметром в очень естественной ситуации: искомые величины надо выразить через заданные R и r. Они считаются известными, но не заданы конкретными числовыми значениями. Здесь можно варьировать уровень сложности решения задач. В обычном классе можно приземлить этот уровень, заменив R и r подходящими числовыми значениями, например, 16 и 9. В физматклассе можно сформулировать те же задачи, используя вместо R и r номер текущего года и номер школы, например, 2015 и 2007. Будет неплохо, если учащиеся сами предложат вместо работы с такими неудобными числовыми данными заменить их на буквы R и r, а после по-

К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru

лучения ответа «на буквах» подставить данные числовые значения вместо R и r. Это еще один воспитательный момент.

При разборе решений задач мы остановимся на буквенном задании известных величин. Итог работы можно подвести так: предложить на следующем уроке в качестве самостоятельной работы те же задачи, но с числовыми данными. Итак, рассмотрим задачи и их решения.

1. Две окружности радиусов R и r касаются друг друга внешним образом. Определите длину их общей внешней касательной.

Решение. Из центров окружностей O и O_1 проведем перпендикуляры OA и O_1B к касательной (рис. 1). В прямоугольной трапеции AOO_1B проведем высоту O_1C.

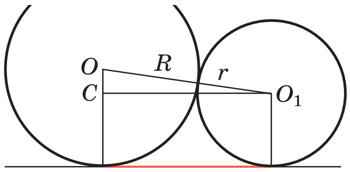


Рис. 1

Так как

$OC = OA - AC = OA - O_1B = R - r$, $OO_1 = R + r$,

то по теореме Пифагора

$$CO_1^2 = (R+r)^2 - (R-r)^2 = 4Rr,$$

тогда $AB = CO_1 = 2\sqrt{Rr}$.

Ответ: $2\sqrt{Rr}$.

2. Две окружности радиусов R и r касаются друг друга внешним образом. Определите расстояние между точками пересечения их внутренней общей касательной с их внешними общими касательными.

Решение. Пусть K — точка касания двух окружностей, CD — отрезок их общей внутренней касательной, где C и D — точки пересечения этой касательной с двумя общими внешними касательными (рис. 2).

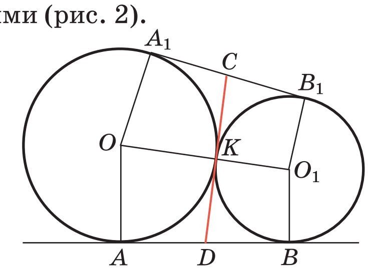


Рис. 2

По свойству отрезков касательных, проведенных из одной точки к окружности, имеем: $AD = DK = DB$. Так как $AB = 2\sqrt{Rr}$ (задача 1), то $DK = 0{,}5AB = \sqrt{Rr}$. Аналогично, $CK = 0{,}5A_1B_1 = \sqrt{Rr}$, следовательно, $CD = 2\sqrt{Rr}$.

Ответ: $2\sqrt{Rr}$.

3. Окружность радиуса R касается сторон угла в $60°$. Определите радиус второй окружности, которая касается первой окружности и сторон того же угла.

Решение. *Способ I.* Пусть окружность с центром O радиуса R касается сторон угла ABC величиной $60°$ в точках M и N, а вторая окружность радиуса x касается первой окружности в точке K и сторон угла ABC в точках E и D, как показано на рисунке 3. Так как центры окружностей, касающихся сторон угла ABC, лежат на биссектрисе этого угла, то $\angle OBC = 30°$, поэтому $BO = 2R$ и $BN = R\sqrt{3}$. Аналогично, $BD = x\sqrt{3}$. Так как $BN - BD = DN$, то верно равенство

$$R\sqrt{3} - x\sqrt{3} = 2\sqrt{Rx}. \qquad (1)$$

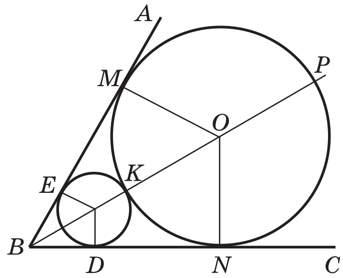


Рис. 3

Возведя обе части равенства (1) в квадрат, получим уравнение относительно x:

$$3R^2 - 6Rx + 3x^2 = 4Rx, \qquad (2)$$

которое перепишем в виде $3x^2 - 10Rx + 3R^2 = 0$. Это уравнение имеет два корня:

$$x_1 = \frac{1}{3}R \text{ и } x_2 = 3R.$$

Так как в рассматриваемом случае $x < R$ (левая часть равенства (1) положительна), то уравнение (1) имеет только корень x_1. Если же мы рассмотрим окружность радиуса $x > R$, касающуюся сторон угла ABC, а также окружность с центром O в точке P, то, рассуждая аналогично, получим равенство

$$x\sqrt{3} - R\sqrt{3} = 2\sqrt{Rx}, \qquad (3)$$

которое после возведения в квадрат приводит к уравнению (2), имеющему те же корни x_1 и x_2. Равенству (3) удовлетворяет лишь корень x_2. Таким образом, если бы мы не заметили существования второй окружности, отвечающей условиям задачи, то уравнение (2) своим вторым корнем «подсказало» бы о ее существовании. Это означает, что надо внимательно относиться к корням квадратного уравнения, не отбрасывать их бездумно.

Способ II. (*М. Прихно, К. Мушреф.*) Вычислим: $BO = 2R$, $BK = 2R - R = R$, $BK = 2x + x = 3x$. Теперь из уравнения $R = 3x$ получим его единственный корень: $x_1 = \frac{1}{3}R$. Здесь мы не получили никакой «подсказки» о существовании еще одной окружности, удовлетворяющей условиям задачи. Придется сделать новый рисунок, похожий на прежний, в котором $BN = x$, $BO = 2x$; $BK = 2x - x = x$, $BK = 2R + R = 3R$, откуда получим: $x = 3R$.

Ответ: $\frac{1}{3}R$ или $3R$.

4. Окружность радиуса R касается сторон прямого угла. Определите радиус второй окружности, которая касается первой окружности и сторон того же угла.

Решение. Пусть окружность с центром O радиуса R касается сторон прямого угла ABC в точках M и N, а вторая окружность радиуса x касается первой окружности в точке K и сторон прямого угла ABC в точках E и D, как показано на рисунке 4. Тогда $MONB$ — квадрат, $BN = R$, аналогично, $BD = x$, а $DN = 2\sqrt{Rx}$ (задача 1). Так как $BN - BD = DN$, то верно равенство

$$R - x = 2\sqrt{Rx}. \qquad (1)$$

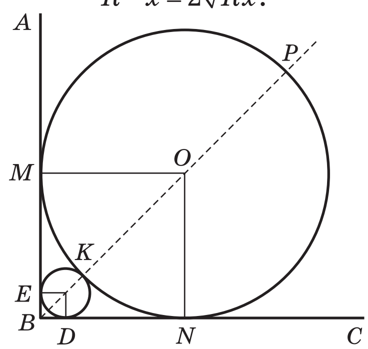


Рис. 4

Возведя обе части равенства (1) в квадрат, получим уравнение относительно x:

$$(R - x)^2 = 4Rx, \qquad (2)$$

которое перепишем в виде $x^2 - 6Rx + R^2 = 0$. Это уравнение имеет два корня:

$$x_1 = \left(3 - 2\sqrt{2}\right)R \text{ и } x_2 = \left(3 + 2\sqrt{2}\right)R.$$

Так как в рассматриваемом случае $x < R$ (левая часть равенства (1) положительна), то уравнение (2) имеет только корень x_1.

Если же мы рассмотрим окружность радиуса $x > R$, касающуюся сторон угла ABC, а также окружности с центром O в точке P, то, рассуждая аналогично, получим равенство:

$$x - R = 2\sqrt{Rx}, \qquad (3)$$

которое после возведения в квадрат приводит к уравнению (2), имеющему корни x_1 и x_2. Равенству (3) удовлетворяет лишь корень x_2. И здесь квадратное уравнение вторым корнем «подсказало» существование второй окружности, отвечающей условиям задачи.

Замечание. Применив идею М. Прихно и К. Мушреф, вычислим:

$$BO = R\sqrt{2},\ \ BK = R\sqrt{2} - R,\ \ BK = x\sqrt{2} + x.$$

Теперь из уравнения

$$R\sqrt{2} - R = x\sqrt{2} + x$$

получим его единственный корень:

$$x_1 = \frac{\left(\sqrt{2} - 1\right)R}{\sqrt{2} + 1} = \left(3 - 2\sqrt{2}\right)R.$$

Здесь мы опять не получили никакой «подсказки» о существовании еще одной окружности, удовлетворяющей условиям задачи. Придется сделать новый рисунок, похожий на прежний, в котором $BN = x$, $BD = R$, а $DN = 2\sqrt{Rx}$; рассуждая аналогично, придем к уравнению $x\sqrt{2} - x = R\sqrt{2} + R$, имеющему единственный корень:

$$x_2 = \frac{\left(\sqrt{2} + 1\right)R}{\sqrt{2} - 1} = \left(3 + 2\sqrt{2}\right)R.$$

Ответ: $\left(3 - 2\sqrt{2}\right)R$ или $\left(3 + 2\sqrt{2}\right)R$.

5. Две окружности радиусами R и r касаются друг друга внешним образом. Определите радиус окружности, которая касается данных окружностей и их общей внешней касательной.

Решение. Пусть данные окружности радиусов R и r с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом и своей внешней касательной в точках A и B. Пусть третья окружность радиуса x касается первых двух, а также их общей касательной в точке C, как показано на рисунке 5. Из задачи 1 следует, что

$$AC = 2\sqrt{rx},\ \ CB = 2\sqrt{Rx},\ \ AB = 2\sqrt{Rr}.$$

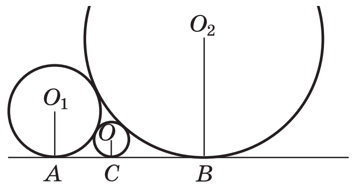


Рис. 5

Тогда верно равенство $2\sqrt{rx} + 2\sqrt{Rx} = 2\sqrt{Rr}$, из которого получим:

$$\sqrt{r}\sqrt{x} + \sqrt{R}\sqrt{x} = \sqrt{Rr},\ \ \sqrt{x}\left(\sqrt{r} + \sqrt{R}\right) = \sqrt{Rr},$$

$$\sqrt{x} = \frac{\sqrt{Rr}}{\sqrt{R} + \sqrt{r}},\ \ x = \frac{Rr}{\left(\sqrt{R} + \sqrt{r}\right)^2}.$$

Существует еще одна окружность, отвечающая условиям задачи. Чтобы не изображать на том же рисунке окружность большого радиуса, представим, что окружности радиусов R и r имеют центры O_1 и O соответственно, а третья окружность радиуса x касается первых двух, а также их общей касательной в точке B, как показано на рисунке 5. Рассуждая аналогично, придем к уравнению $2\sqrt{Rr} + 2\sqrt{rx} = 2\sqrt{Rx}$, имеющему единственный корень: $x = \frac{Rr}{\left(\sqrt{R} - \sqrt{r}\right)^2}$.

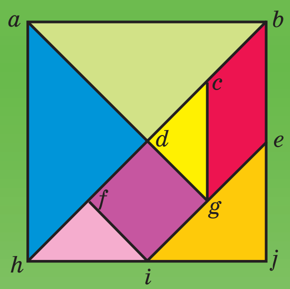
Ответ: $\frac{Rr}{\left(\sqrt{R} + \sqrt{r}\right)^2}$ или $\frac{Rr}{\left(\sqrt{R} - \sqrt{r}\right)^2}$.

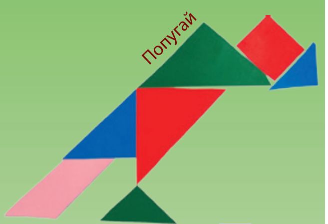

Нежное прощание

5–6 классы

ТАНГРАМ И ГЕОМЕТРИЯ

Н. ШАПОШНИКОВА,
г. Махачкала





Геометрия традиционно сложный, но в то же время важный и нужный предмет. Ее изучение направлено на формирование логического мышления и развитие пространственного воображения у школьников, умения выдвигать и доказывать гипотезы, а главное, имеет большое практическое значение. Но обучение идет тяжело, интерес к геометрии слабый, успеваемость низкая. Как же изменить отношение к геометрии, сделать ее понятной, осязаемой для учеников? Начинать обучение геометрии нужно как можно раньше. Изучение ее с 10–12 лет положительно влияет на своевременное формирование геометрической зоркости и интуиции, творческих способностей учащихся, развитие интереса к геометрическим образам и в целом к геометрии как науке, так как это уникальный возрастной период, когда ведущую роль играет образное мышление. Опыт показывает, что ученики 5–6-х классов с удовольствием занимаются геометрией, но не сухой с большим теоретическим текстом, а наглядной, через опыты, практические работы, конструирование, учебно-исследовательские задания, эксперименты.

«Чем лучше развиты руки, тем лучше развит мозг». Работа с цветной бумагой или картоном для учащихся этих классов — дело привычное и интересное. Навык, сформированный на уроках технологии в начальной школе, можно удачно использовать для изучения геометрии. Практические работы с цветной бумагой, можно сказать — опыты, позволяют создать атмосферу открытия новых знаний.

Одним из направлений такой конструкторской работы является китайская головоломка «Танграм». С ее помощью можно сформировать у учащихся много геометрических знаний. История создания этой игры, цели, которые ставились при ее изобретении, действительно соответствуют полученному результату. По одной из легенд, китайский император приказал своим ученым «придумать игру, забавляясь которой, его сын постиг бы начала математики, научился смотреть на мир глазами художника, стал терпеливым, как истинный философ, и понял бы, что зачастую сложные вещи состоят из простых вещей». Так появился танграм.

К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru

«Нас не догонят!...»

От редакции: Советуем читателям найти книгу Мартина Гарднера «Путешествие во времени», две главы которой посвящены танграму и его истории.

Сначала изготовим танграм из цветного картона. Для этого разрежем квадрат так, как показано на рисунке на с.11. Получим семь частей-танов: один параллелограмм, один квадрат, два больших, два маленьких и один средний прямоугольные треугольники.

Как можно использовать танграм на уроках геометрии?

1. Можно получать новые или закреплять ранее полученные знания на элементах танграма:

а) прямоугольный треугольник и его элементы (катеты, гипотенуза, прямой угол);

б) определение и свойства параллелограмма;

в) определение и свойства квадрата;

г) нахождение периметра и площади квадрата, параллелограмма, прямоугольных треугольников.

Так мы постигаем начала геометрии.

2. Можно заняться художественным творчеством. Для этого предложить учащимся следующие задания:

а) составить по образцу, используя все элементы танграма, изображения людей, животных, птиц, предметов быта и т.д.;

б) придумать свои фигуры, используя все элементы танграма;

в) составить композицию (смысловые картинки) при условии, что каждый отдельный ее объект состоит из целого танграма. Придумать сказку, рассказ к полученной композиции.

От редакции. Автор не приводит образцов изображений животных, птиц, людей и предметов быта. Вы можете их найти в книгах Перельмана «Занимательная геометрия», Кордемского и Русалева «Удивительный квадрат», Гарднера или в брошюре *Камаев П.М., Камаев П.П.* «Семь хитроумных фигур, или Танграм», которую найдете в электронном приложении к нашему журналу.

Так мы учим детей смотреть на мир глазами художника.

3. Можно заняться конструированием, предварительно выделив две группы:

а) конструирование различных фигур из некоторых танов;

б) конструирование конкретной фигуры с использованием определенных танов.

Примеры задач 1-й группы:

Сложите фигуру из двух больших прямоугольных треугольников. (Можно получить равнобедренный треугольник, квадрат и параллелограмм.)

Сложите фигуру из квадрата и двух маленьких прямоугольных треугольников. (Можно получить равнобедренную трапецию, параллелограмм, прямоугольник.)

Примеры задач 2-й группы:

Сложите треугольник, используя один большой и два маленьких прямоугольных треугольника и квадрат.

Сложите треугольник, в точности равный предыдущему, используя один большой, два маленьких прямоугольных треугольника и параллелограмм.

Из каких танов можно сложить трапецию?

Таким образом осуществляется следующий вид проблемного обучения: **практическое творчество**.

Так мы показываем детям, что сложные вещи состоят из простых.

В процессе конструирования новых фигур, а далее нахождения их площадей, одной из составляющих выступает прямоугольный треугольник. Возникает проблемная ситуация: найти способ вычисления его площади. Обязательно найдется ученик, который догадается, что прямоугольный треугольник можно получить из прямоугольника, разрезав его по диагонали, а равенство полученных треугольников можно доказать наложением. Отсюда можно сделать вывод: площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов.

Этот наглядно-поисковый метод ставит ученика в ситуацию, позволяющую сделать самостоятельное открытие. «В любой форме учения особенно хорошо то, что получил, вывел, понял сам, даже если знаешь, что другие это вывели раньше» (*Я.Б. Зельдович*).

Зная формулы площади прямоугольника из начальной школы и новую формулу площади прямоугольного треугольника, можно вычислять площади параллелограммов, трапеций, произвольных треугольников путем разбиения их на составляющие прямоугольники и прямоугольные треугольники.

Ученики, выполняя эти практические работы, собирая фигуры и разбивая их на составляющие, учатся анализировать и систематизировать процесс решения задач через поэтапное решение знакомых частей. Благодаря этому ускоряется развитие мышления школьников (систематика, анализ, синтез).

С помощью танграма можно наглядно преподнести тему «Равновеликие фигуры». Используя полученные ранее изображения из танграма, можно поставить вопрос о нахождении их площадей. Так как они состоят из одинаковых частей одного и того же квадрата, то их площади равны. Такие фигуры называются **равновеликими**. Как же найти площади этих фигур? Конечно, ученики предложат разные способы:

– разбить на составляющие части;

– собрать составляющие части в танграм и измерить его стороны.

Танграм поможет и при изучении тем: «Симметрия», «Координатная плоскость», «Подобие фигур». Вот примеры таких задач.

1. Сложите из танграма две фигуры, симметричные относительно прямой.

2. Сложите из танграма две фигуры, симметричные относительно точки.

3. В координатной плоскости сложите танграмовую фигуру и определите координаты характерных точек.

4. В координатной плоскости сложите танграмовые фигуры, симметричные относительно оси *Ox*; оси *Oy*; начала координат.

5. Из двух танграмов, со сторонами 10 см и 5 см, составьте одинаковые фигуры. (После этого можно дать определение подобных фигур.)

6. Определите коэффициент подобия полученных фигур.

7. Определите отношение площадей этих фигур.

Если вы решили ввести понятие симметрии относительно точки или относительно прямой с помощью танграма, то расположите две одинаковые фигуры, выполненные из одинаковых танграмов, надлежащим образом, а потом сформулируйте определения этих понятий.

Так мы видим, что «Танграм» поможет в изучении и закреплении многих тем геометрии. Новый материал идет легче, он не страшен, потому что опирается на ранее полученные знания. Старый материал повторяется через призму получения новых знаний, всякий раз подтверждая, что в мире все взаимосвязано.

С помощью танграма можно изучать не только геометрические понятия, но и повторить или изучить понятие дроби, решать задачи на нахождение дроби от числа или числа по его дроби.

8. Какую часть маленький прямоугольный треугольник составляет от большого прямоугольного треугольника? [0,25]

Лесная сказка

9. Какую часть средний прямоугольный треугольник составляет от большого прямоугольного треугольника? [0,5]

10. Какую часть маленький прямоугольный треугольник составляет от среднего прямоугольного треугольника? [0,5]

11. Какую часть маленький прямоугольный треугольник составляет от маленького квадрата? [0,5]

12. Найдите отношение площадей маленького прямоугольного треугольника и исходного квадрата? [1 : 16]

13. Найдите отношение площадей маленького прямоугольного треугольника и параллелограмма? [0,5]

14. Площадь маленького прямоугольного треугольника танграма равна 12. Найдите площадь среднего прямоугольного треугольника. [48]

15. Площадь маленького прямоугольного треугольника танграма равна 10. Найдите площадь большого прямоугольного треугольника. [160]

Ученики подтверждают свои предположения наложением или делают выводы после наложения.

Цель разнообразных исследовательско-практических работ с применением танграма не в том, чтобы получить какой-то необыкновенный результат, а в том, «чтобы сделать математическое открытие на уровне, доступном ученику».

Занятия, на которых знания приобретаются с помощью открытий, практических работ, остаются в памяти надолго и совсем не утомительны. Выдающийся физиолог Н.Е. Введенский считал, что «устают не оттого, что много работают, а оттого, что работают плохо, неумело. Если человек увлечен делом, то он не устает и не замечает времени».

Подводя итоги, можно сделать вывод, что китайская головоломка «Танграм» позволяет представить материал наглядно, увидеть красоту окружающего мира, обеспечивает многократное повторение основных положений и побуждает к открытию новых знаний.

Р. ПИМЕНОВ,
revoltp@mail.ru,
г. Санкт-Петербург

КАСАНИЕ ЧЕТЫРЕХ ОКРУЖНОСТЕЙ

http://www.buro247.ru/culture/news/vystavka-kandinskogo-v-nyu-yorkskoy-neue-galerie.html

Василий Кандинский. Круги в круге, 1923

Постановка задачи и почти полное решение ее

В детстве многие любят рисовать касающиеся окружности: рисуем одну окружность, к ней подрисовываем касающуюся, к двум подрисовываем третью. Это можно делать и монетами (рис. 1):

Рис. 1

Монетки, которую можно вставить внутрь касающихся монет-кругов, обычно не находится. Получилось бы так (рис. 2):

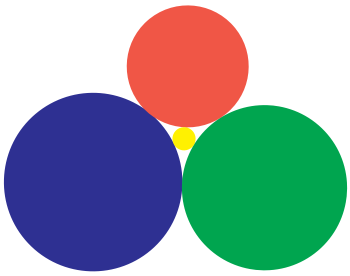


Рис. 2

Но можно заметить: есть и другая окружность, касающаяся трех исходных, она охватывает все три как лассо. Математики давно изучают эту конструкцию. Формулу, связывающую длины радиусов четырех сокасающихся окружностей, вывел Декарт, но она была забыта, и в XX веке ее переоткрыл лауреат Нобелевской премии по химии Содди. Эти окружности и зависимости между ними так восхитили его, что он написал поэму о «целующихся кругах».

В статье расскажем о других, еще более наглядных свойствах четырех сокасающихся окружностей. Построения и доказательства, как это ни странно, не потребуют ни измерения длин, ни проведения прямых, ни работы с центрами окружностей. Все рассуждения будут основаны на симметрии между окружностями (ее еще называют инверсией) и на умении проводить окружность через три точки; также применим несложные элементы комбинаторики. Подробно этот метод излагается в книге «Эстетическая геометрия или теория симметрий», а статья вводит в идеи и понятия книги. Кроме свойств сокасающихся окружностей, с помощью этого метода выведем и некоторые другие интересные, общеизвестные и не очень, теоремы про окружности. Все это легко может быть использовано на уроках и факультативах, а как именно, я поясню в конце статьи.

Четыре сокасающиеся окружности имеют шесть точек касания. Это видно прямо из рисунка, а можно подсчитать: в каждой точке касания сходятся две окружности, пару окружностей можно выбрать из четырех данных шестью способами, каждая выбранная пара определяет точку касания. Таким образом, всего получается шесть точек касания. Кстати, в пространстве пять сокасающихся сфер образуют $5 \cdot \frac{4}{2} = 10$ точек касания, и это уже не понять без комбинаторики: из пяти элементов выбираются произвольным образом два, это можно сделать десятью способами; любые две выбранные сферы касаются, таким образом, всего в пространстве у пяти сфер 10 точек касания.

О шести точках касания окружностей на плоскости будут доказаны следующие утверждения.

Утверждение 1. На этих точках можно построить четыре другие окружности так, что все они снова касаются друг друга.

Утверждение 2. На этих же точках можно построить три окружности, причем они перпендикулярны друг другу. На каждой из трех построенных окружностей будут лежать четыре точки из исходных шести точек касания.

Перпендикулярность окружностей определяется обычно через угол между их касательными в точке пересечения. Если этот угол прямой — окружности называются перпендикулярными. Другой способ определения перпендикулярности окружностей P и Q — через их симметрию.

Определение. Окружности P и Q называются перпендикулярными, если при симметрии относительно окружности P окружность Q переходит в себя.

Это совершенно аналогично определению перпендикулярных прямых. Таким определением мы и будем пользоваться в статье.

Теперь ***докажем первое утверждение.*** Прежде всего его надо уточнить: как именно строятся четыре новые окружности? Возьмем какую-нибудь окружность (например, A) из четырех исходных сокасающихся окружностей (рис. 3). На ней лежат три точки из шести рассматриваемых: это точки касания окружности A с окружностями B, C и D. Выберем три оставшиеся точки, это точки касания окружностей B, C и D между собой. Проведем через эти три оставшиеся точки окружность A'. И так поступим еще три раза: проведем окружность B' через три точки, не лежащие на окружности B, затем окружность C' через три точки, не лежащие на окружности C, затем окружность D' через точки, не лежащие на окружности D. Теорема утверждает, что все четыре новопостроенные окружности: A', B', C', D', касаются между собой.

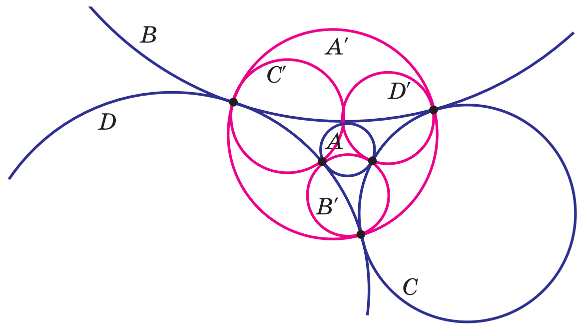


Рис. 3

Для доказательства удобны две леммы.

Лемма 1. Если три окружности касаются друг друга, то окружность, проходящая через точки их касания, перпендикулярна им всем.

Лемма 2. Если три окружности пересекаются в одной точке и одна из них перпендикулярна двум другим, то две другие касаются друг друга. Для иллюстрации этого утверждения достаточно закрыть на чертеже окружность C: A и B касаются друг друга и перпендикулярны S (рис. 4).

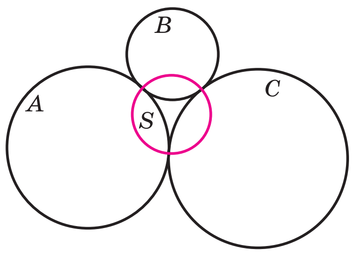


Рис. 4

Последняя лемма очевидна хотя бы из определения перпендикулярных окружностей через угол между ними (угол между касательными). Также можно рассмотреть инверсию с центром в точке пересечения трех данных окружностей. Тогда все окружности перейдут в прямые, причем перпендикулярные окружности перейдут в перпендикулярные прямые. Прямые, перпендикулярные одной прямой, параллельны, а образ параллельных прямых при инверсии — касающиеся окружности. Следовательно, две рассматриваемые окружности касаются друг друга. Что и требовалось доказать.

Первую лемму можно доказать, рассмотрев углы между окружностями или проведя инверсию в одной из точек касания. Но элегантней поступить иначе.

Пусть окружности A, B, C касаются друг друга и S — окружность, проходящая через точки касания. Рассмотрим симметрию относительно S (инверсию относительно S). При этой инверсии окружности A, B, C могут перейти только в окружности, касающиеся S, причем в тех же самых точках, что и A, B, C. Но три точки касания однозначно задают три окружности, которые в них касаются. Следовательно, окружности A, B, C при симметрии относительно S переходят в себя. Следовательно, все они перпендикулярны S. Что и требовалось доказать.

Заметим, что из первой леммы следует интересная ***теорема про окружности.***

Пусть дана окружность A и две точки на ней. Рассмотрим семейство окружностей, касающихся окружности A в этих точках. Некоторые окружности из этого семейства сами касаются между собой. Теорема утверждает, что все возможные точки касания окружностей семейства между собой сами обязательно лежат на одной окружности, перпендикулярной окружности A и проходящей через две исходные точки. Причина этого в том, что через две данные точки на окружности A можно провести одну и только одну окружность, перпендикулярную окружности A.

Теперь ***докажем утверждение про окружности*** A', B', C', D'. Возьмем две окружности (рис. 5) из них, например, A' и B'.

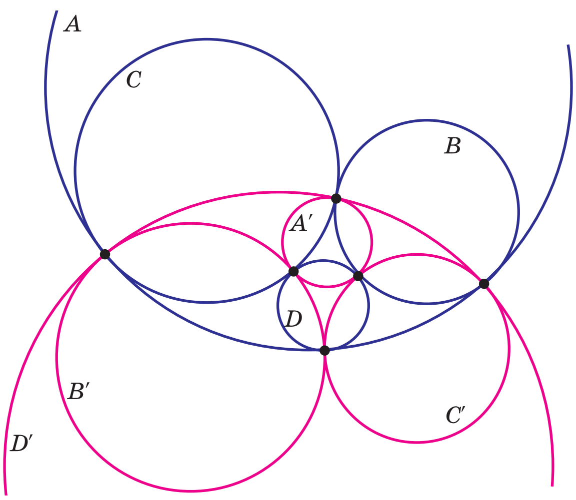


Рис. 5

Первая окружность проходит через три точки касания, не лежащие на окружности A, вторая — через три точки касания, не лежащие на окружности B. Следовательно, у них есть общая точка: точка, в которой касаются окружности C и D. По лемме 1 окружность A' перпендикулярна окружности C (так как окружность A' проходит через точки касания окружностей B, C, D между собой), по этой же лемме окружность B' перпендикулярна окружности C (так как B' проходит через точки касания окружностей A, C, D между собой). Итак, окружность C перпендикулярна окружностям A' и B', а все три окружности имеют общую точку: точку касания окружностей C и D. По лемме 2 отсюда следует, что окружности A' и B' касаются между собой. Аналогично устанавливается, что любые две окружности из A', B', C', D' — касаются между собой. Что и требовалось доказать.

На рисунке 6 касающиеся окружности расположены иначе. Возможно, что одна из окружностей совпадет с прямой.

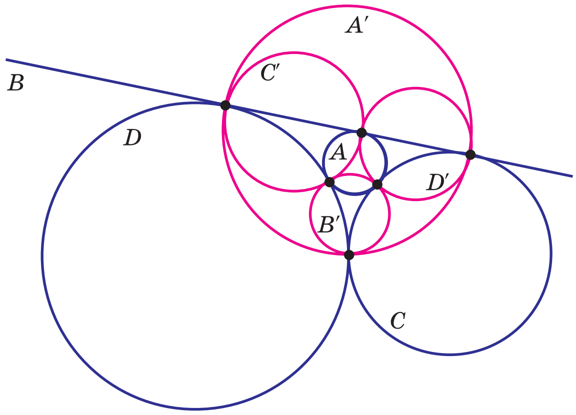


Рис. 6

Назовем четверку окружностей A', B', C', D' «дополнительными к окружностям A, B, C, D», а доказанное утверждение (что все дополнительные окружности касаются друг друга) «теоремой о взаимном касании дополнительных окружностей». Заметим, что окружности, дополнительные к дополнительным окружностям, — это исходные окружности A, B, C, D.

Теперь ***уточним утверждение*** о том, что на шести точках касания четырех окружностей можно построить три окружности, перпендикулярные друг другу. При этом на каждой из построенных окружностей должны лежать четыре точки из шести точек касания. Это кажется немного странным — новых окружностей три, на каждой лежат четыре точки касания, всего точек получается $3 \cdot 4 = 12$, а мы знаем, что точек касания шесть. Дело в том, что точки считаются по два раза: три новопостроенные окружности пересекаются между собой, а точки пересечения при механическом умножении считаются дважды.

Возникает и другой вопрос: если на каждой окружности лежат четыре точки касания, значит, среди точек касания четырех окружностей есть четверки точек, лежащих на одной окружности? Совершенно верно. Именно это мы сейчас и докажем, а доказательство того, что построенные окружности перпендикулярны друг другу, проведем позже. Но прежде всего укажем, как строить три новых окружности, какие именно четверки точек лежат на одной окружности. Здесь мы снова соприкасаемся с комбинаторикой. Четыре исходные касающиеся окружности можно разбивать на пары. Это можно делать тремя способами: четырех учеников можно посадить за парты тремя способами (если нам важно, кто с кем сидит, и неважно — за какой именно партой). Каждое разбиение исходных окружностей на пары определит одну из нужных нам окружностей. Именно: возьмем, например, пары окружностей (A; B) и (C; D). Окружности A и B касаются друг друга в какой-то точке, окружности C и D касаются друг друга в какой-то другой точке. Выбросим эти две точки из рассматриваемых шести точек касания. Теорема утверждает, что оставшиеся четыре точки обязательно лежат на одной окружности. Точно так же мы можем выбрасывать из шести точек точки касания окружностей (A; C) и (B; D) или (A; D) и (B; C). Оставшиеся четверки точек обязательно лежат на одной окружности.

Чтобы это доказать, опишем эту четверку точек иначе: указав точки, которые в нее входят. Рассмотрим разбиение окружностей на пары (A; B), (C; D) (рис. 7). Рассмотрим точки касания окружности A с окружностями C и D и точки касания окружности B с окружностями C и D. Именно эти четыре точки и останутся, если выбросить из шестерки точек касания окружностей A, B, C, D между собой точки касания окружности A с B и окружности C с D. А эти четыре точки связаны с известной ***теоремой про четыре окружности,*** касающиеся друг друга по цепочке:

Если первая окружность касается второй, вторая — третьей, третья — четвертой, а четвертая — первой (цепочка замыкается), то все четыре точки касания сами лежат на одной окружности.

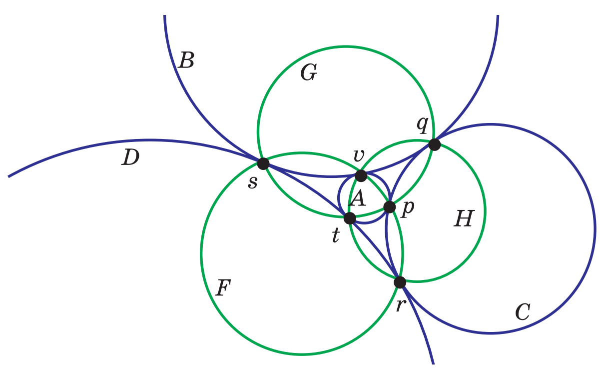


Рис. 7

В нашем случае такую цепочку образуют окружности A, C, B, D (то, что окружности A и B сами касаются друг друга и окружностей C и D, также в данный момент мы не учитываем). Четыре точки касания окружностей цепочки лежат на одной окружности (теорема о касании по цепочке имеет оговорки, связанные с расположением окружностей, в данном случае как раз все оговорки соблюдаются).

Итак, мы доказали, что среди шести точек касания скрываются три четверки точек, каждая из которых лежит на одной окружности. Было показано, как с помощью разбиения на пары исходных окружностей находить эти четверки точек. В нашем случае это четверки точек (s; v; p; r), (s; t; p; q), (r; t; v; q). Заметим, что, строя новые окружности, мы разбивали исходные окружности на пары, а сейчас выяснилось, что новые окружности возникают из того, что в четырех сокасающихся окружностях таятся различные цепочки окружностей, касающихся друг друга. Разное упорядочивание исходных окружностей определяет разные (или одинаковые) цепочки из них, а каждая цепочка в свой черед определяет окружность, на которой лежат четыре точки касания окружностей цепочки. Более подробный разбор этой ситуации ведет нас к основам теории групп и понятию факторизации, но он увел бы нас в сторону от темы.

Осталось доказать, что три новопостроенные окружности перпендикулярны. Для этого мы по-новому взглянем на симметрию и перпендикулярность между окружностями. Попутно мы докажем теорему о четырех касающихся по цепочке окружностях и узнаем несколько неожиданных теорем о них.

Новый взгляд на симметрию, перпендикулярность и полное доказательство

Основное свойство перпендикулярных окружностей, с помощью которого доказывается много теорем геометрии окружностей, гласит (рис. 8):

Если две точки p и q симметричны относительно некоторой окружности S, то любая окружность, проходящая через p и q, перпендикулярна окружности S.

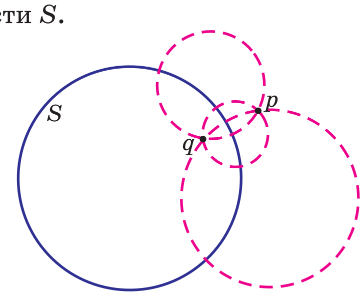


Рис. 8

Можно переформулировать это свойство:

Если при симметрии относительно окружности S какая-то точка p, лежащая на окружности X, переходит в точку, снова лежащую на X, то любая точка, лежащая на окружности X, при симметрии относительно окружности S переходит в точку, снова лежащую на окружности X.

Последнее есть просто определение перпендикулярности окружностей X и S.

Все пунктирные окружности перпендикулярны окружности S. У этого свойства есть стереометрический аналог:

Если точки p и q симметричны относительно плоскости S, то любая плоскость, проходящая через p и q, перпендикулярна S.

Мы это свойство не доказываем, хотя это и несложно.

Из этого свойства сразу следует ***«первая теорема эстетической геометрии»***, гласящая (рис. 9):

Если есть две пары точек, симметричных относительно окружности S, то эти точки лежат на одной окружности.

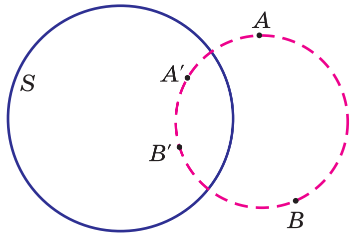


Рис. 9

Доказательство тривиально: проведем окружность X через обе точки первой пары и первую точку второй пары. По основному свойству, окружность X перпендикулярна окружности S, следовательно, вторая точка второй пары также лежит на окружности X, так как эта точка симметрична лежащей на окружности X первой точке второй пары. В противном случае $S(X)$ не равнялось бы X.

У этой теоремы снова есть ***стереометрический аналог:***

если есть две пары точек, симметричных относительно плоскости S, то эти точки обязательно лежат на одной плоскости.

Докажем с помощью этой теоремы утверждение о точках касания четырех окружностей, касающихся друг друга по цепочке.

Достаточно указать окружность (рис. 10), относительно которой симметричны точки касания. Это синяя окружность, относительно которой симметричны синие круги. Круг (для разнообразия на чертеже не окружности, а круги), касающийся двух данных окружностей, переходит в себя при симметрии, меняющей местами окружности, которых он касается. Поэтому на рисунке красные круги перпендикулярны пунктирной окружности. Следовательно, точки касания красного круга с двумя синими при этой симметрии меняются местами.

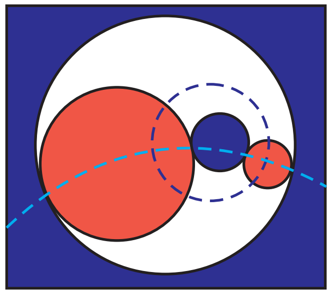


Рис. 10

Поэтому четыре точки касания разбиваются на две пары симметричных точек (симметричных относительно пунктирной окружности). По первой теореме эстетической геометрии такие четыре точки всегда лежат на одной окружности. Что и требовалось доказать. Заметим, что у внешнего круга синим выделена не внутренность, а внешность. Благодаря этому на рисунке симметричные области показаны одним цветом: синее симметрично синему, красное — красному, белое — белому. А голубая окружность, на которой лежат рассматриваемые точки касания, перпендикулярна пунктирной окружности.

Из первой теоремы эстетической геометрии возникает новый способ определения симметрии между окружностями (инверсии). Обычно инверсия определяется заданием окружности, относительно которой осуществляется симметрия. Аналогично тому, как симметрия относительно прямой (или точки, или плоскости) определяется заданием прямой — оси симметрии. Но симметрию окружностей проще определять иначе: заданием двух пар симметричных точек. Пусть мы знаем две пары симметричных точек и хотим узнать, куда при этой симметрии S перейдет произвольная точка X (рис. 11).

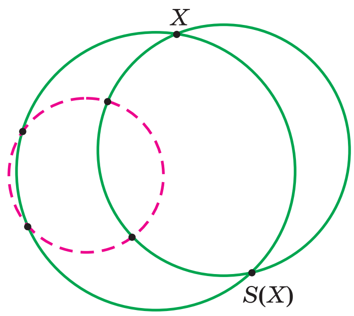


Рис. 11

Для этого достаточно провести две окружности: одну через X и первую пару симметричных точек, другую — через X и вторую пару точек. По основному свойству перпендикулярных окружностей, обе проведенные окружности перейдут в себя при симметрии S. Следовательно, точки их пересечения при этой симметрии поменяются местами. Одна общая точка этих двух окружностей нам известна — это точка X. Следовательно, вторая точка пересечения проведенных окружностей и будет точкой $S(X)$. Возможно, что обе окружности касаются друг друга в точке X, в этом случае точка X неподвижна при симметрии S, иначе говоря: $S(X) = X$.

Отметим, что аналогичного способа построения в случае симметрии относительно точки или прямой на плоскости или при симметрии относительно плоскости в пространстве не существует. В геометрии Евклида для построения симметрии нам недостаточно уметь проводить прямые или плоскости, надо еще уметь измерять расстояния или иметь угольник. А в геометрии окружностей симметрию можно осуществлять, умея лишь проводить окружности через три точки. Подробно этот способ построения симметрии окружности и связанные с ним теоремы про окружности изучаются во второй части книги «Эстетическая геометрия или теория симметрий».

Мы научились делать симметрию, если нам известны две пары симметричных точек. А как быть, если дана окружность S и мы хотим найти образ произвольной точки X при симметрии относительно этой окружности? Здесь нам поможет разбиение четырех точек на пары разными способами (рис. 12) (подобно тому, как мы раньше разбивали на пары четыре окружности).

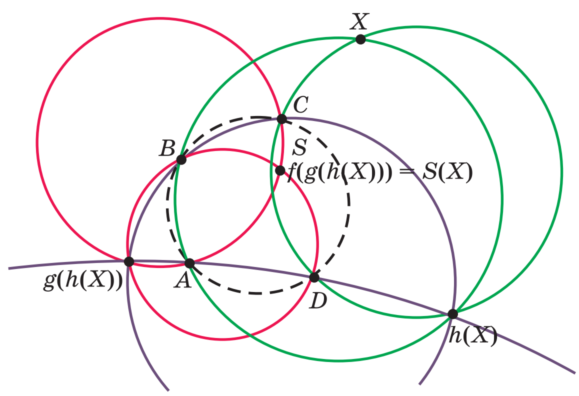


Рис. 12

Возьмем на окружности S четыре произвольные точки: A, B, C, D. Их можно разбить на пары тремя способами: (A; B) и (C; D), или (A; C) и (B; D), или (A; D) и (B; C). Каждому разбиению на пары соответствует некоторая симметрия между окружностями: точки одной пары мы считаем симметричными друг другу при этой симметрии. Обозначим эти три симметрии f, g, h: $h(A) = B$, $h(C) = D$, $g(A) = D$, $g(B) = C$, $f(A) = C$, $f(B) = D$. Теорема о разбиении четырех точек на пары тремя способами утверждает, что композиция этих трех отображений, взятых в любом порядке (например, $f \cdot g \cdot h$) всегда есть симметрия относительно окружности S. Иначе говоря, для любой точки X выполняется равенство $f(g(h(X))) = S(X)$, какими бы ни были исходные точки A, B, C, D, лежащие на окружности S.

На каждом шаге происходит путешествие по двум парам окружностей: из точки X по двух зеленым окружностям в точку $h(X)$, из нее по двум фиолетовым окружностям в точку $g(h(x))$ и на последнем шаге по двум красным окружностям в точку $f(g(h(X)))$. Каждая пара окружностей определяет разделение исходных четырех точек на пары. Заметим, что на последнем шаге, когда мы попадаем внутрь окружности S, соответствующие пары точек разделяют друг друга. В этом случае f — особый вид симметрии, его порой называют «мнимой инверсией». В книге этот случай называется «симметрией без неподвижных точек». Доказательство этой теоремы приводится в той же книге, часть 3, § 35. Здесь я предлагаю самостоятельно убедиться, что

$$f(g(h(A))) = A, \qquad f(g(h(B))) = B,$$
$$f(g(h(C))) = C, \qquad f(g(h(D))) = D.$$

Отсюда можно вывести, что отображение $f \cdot g \cdot h$ оставляет неподвижными все точки окружности, на которой лежат точки A, B, C, D, и останется один шаг для доказательства того, что отображение $f \cdot g \cdot h$ — симметрия относительно этой окружности.

Итак, у нас появился алгоритм построения симметрии произвольной точки относительно произвольной окружности. Заметим, что, как и во всем изложенном выше материале, понятия «центр окружности» и «радиус окружности» оказываются не нужны. Симметрию относительно окружности мы определяем, описываем и изучаем, не пользуясь метрическими соображениями и геометрией прямых. Евклидова геометрия нужна нам только для аналогий: пока симметрия относительно точек, прямых, плоскостей нам привычней.

Теперь у нас все готово для ***доказательства утверждения про три окружности,*** построенные на шести точках касания четырех окружностей.

Окружности, перпендикулярность которых требуется доказать, — это окружности F, G, H (рис. 13).

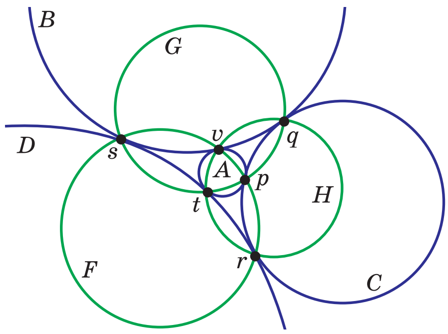


Рис. 13

Возьмем какую-нибудь из них, например, окружность F, на ней лежат четыре точки касания исходных окружностей: s, v, p, r, а точки касания q и t не лежат на ней. Эти точки — точки пересечения окружностей G и H (и точки касания окружности B с C и окружности A с D). Чтобы доказать требуемое, достаточно доказать, что q и t симметричны относительно окружности F, то есть $F(t) = q$. В этом случае, по основному свойству перпендикулярных окружностей, любые окружности, проходящие через t и q, будут перпендикулярны окружности F, в том числе окружности G и H. Для доказательства мы воспользуемся теоремой о разбиении четырех точек на пары, обеспечивающей нам построение симметрии относительно данной окружности. Четыре точки, участвующие в теореме, — это точки s, v, p, r, лежащие на окружности F. Чтобы найти $F(t)$, нам надо разбивать эти четыре точки на пары тремя способами и следить каждый раз за соответствующими пересечениями окружностей. В данном случае, поскольку среди получающихся окружностей много касающихся, это будет несложно.

Первое разбиение на пары точек s, v, p, r пусть будет $(s; r)$ и $(v; p)$. Окружность, проходящая через t, s, r, — это окружность D, окружность, проходящая через t, v, p, — это окружность A. Эти окружности касаются друг друга, и именно в точке t, следовательно, при симметрии, определяемой этим разбиением на пары, t остается неподвижной. Вторым разбиением на пары пусть будет $(s; v)$ и $(p; r)$. Окружность, проходящая через t, s, v, — это окружность C', так как все эти три точки не лежат на C, а окружность, проходящая через t, p, r, — это окружность B', так как все эти точки не лежат на B. По доказанному ранее, эти окружности также касаются в t. Поэтому при симметрии, определяемой вторым разбиением на пары, точка t снова остается неподвижной. Третье и последнее возможное разбиение на пары: $(s; p)$ и $(v; r)$. Окружность, проходящая через t, s, p, — это окружность G, окружность, проходящая через t, v, r, — это окружность H. По построению, они пересекаются в двух точках: t и q, следовательно, при симметрии, определенной этим разбиением на пары, точка t переходит в точку q. Композиция всех трех рассмотренных симметрий, очевидно, также переводит точку t в точку q, так как первые две симметрии просто оставляют точку t на месте. По теореме о разбиении четырех точек на пары тремя способами, эта композиция и есть симметрия относительно окружности, на которой лежат точки s, v, p, r. А это — окружность F. Следовательно, $F(t) = q$, что и требовалось доказать. Окружности G и H перпендикулярны окружности F, аналогично, и окружность G перпендикулярна окружности H. Мы доказали, что три окружности взаимоперпендикулярны.

Завершим разбор свойств шести точек касания неказистым рисунком (рис. 14), в котором нет ничего, кроме самих изучаемых точек.

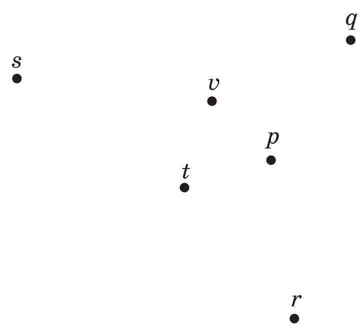


Рис. 14

На прощание разобъем эти шесть точек на три пары. В каждой пусть будут лежать пары точек пересечения окружностей F, G, H, пары выглядят так: $(s; p)$, $(v; r)$, $(q; t)$. Заметим, что точки в любых двух парах обязательно лежат на одной окружности (и разделяют друг друга на ней). С каждой парой точек можно связать симметрию относительно этой пары, такая симметрия называется в книге «Эстетическая геометрия» «биплетной симметрией». Ее можно определить как композицию симметрий относительно двух перпендикулярных окружностей, пересекающихся в данной паре точек. Свойства биплетной симметрии и ее связи с комплексными числами и более общими алгебраическими структурами чрезвычайно интересны, но здесь нет места их рассматривать. Замечу лишь, что композиция биплетных симметрий относительно любых двух пар, перечисленных выше, совпадает с симметрией относительно оставшейся пары точек.

Как же все это рисовать и преподавать?

Мы привыкли строить окружности циркулем, а выполнить этим инструментом хотя бы одно построение, о которых шла речь в статье, немалый труд. Даже построение с помощью циркуля и линейки окружности, проходящей через три точки, заметная работа, а в статье такие окружности проводятся постоянно.

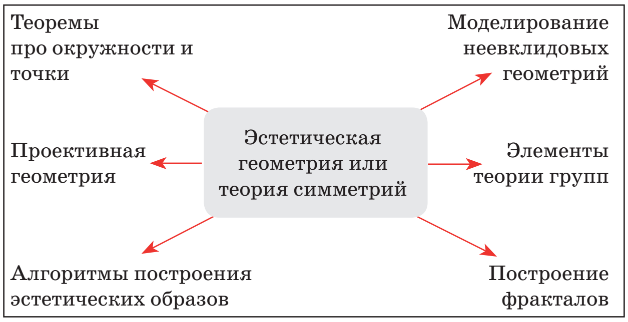
Это легко делать на компьютере. Есть замечательная бесплатная программа «Geogebra» (от слов: **гео**метрия + ал**гебра**), в последних версиях которой есть инструменты и для инверсиии и для проведения окружности по трем точкам. Программу легко скачать в Интернете. Она позволяет строить четыре сокасающиеся окружности буквально за минуту. Я расскажу как, отсюда будет ясно и практическое значение доказанной в предыдущей части теоремы. Чтобы построить четыре сокасающиеся окружности, построим 3 взаимно перпендикулярные окружности. Точки пересечения этих окружностей есть шесть точек касания между собой четырех окружностей. Поэтому достаточно сгруппировать нужным образом полученные точки (обычно касающиеся окружности сразу угадываются глазом), проведя через четыре тройки точек нужные окружности. По теореме о дополнительных окружностях, у нас будет две возможности для такой группировки точек.

Как быстро *построить* три перпендикулярные друг другу окружности? Первую окружность рисуем произвольно. Чтобы быстро построить окружность, перпендикулярную ей, воспользуемся основным свойством перпендикулярных окружностей (см. рис. 9). Выберем произвольную точку вне окружности, отразим ее относительно окружности и проведем какую-нибудь окружность через эти две точки (точку и ее образ при симметрии). Эта окружность будет перпендикулярна первой. Теперь выберем произвольную точку, не лежащую на обеих окружностях. Отразим ее относительно первой окружности, а затем и относительно второй. Три полученные точки (исходная точка и образы ее при симметриях относительно двух окружностей) соединим окружностью. Она будет перпендикулярна обеим имеющимся окружностям, так как на ней есть пары точек, симметричных относительно и той, и другой окружности. Три перпендикулярные друг другу окружности построены, что и требовалось.

Теперь группируем точки их пересечения и проводим искомые касающиеся друг друга окружности. Любое их построение с помощью циркуля и линейки будет гораздо сложнее, более того, так как радиусы окружностей часто оказываются иррациональны, построение будет заведомо приближенным, мы же не можем отмерить циркулем ровно корень из трех или двух. Программа «Geogebra» позволяет не только строить динамически изменяемые чертежи, она позволяет их анимировать. Ее инструменты интуитивно понятны и легко осваиваются учениками. С ее помощью, например, разъяснение симметрии с помощью пары пар симметричных точек (см. рис. 11) становится очень простым — за счет того, что точку X чертежа можно двигать, вслед за ней движется и симметричная ей точка S(X). «Geogebra», конечно, необязательна для преподавания новых методов симметрии или эстетической геометрии, но очень удобна. Если ее нет — желательно найти какую-то другую программу, с помощью которой можно делать инверсию и проводить окружность через три данные точки.

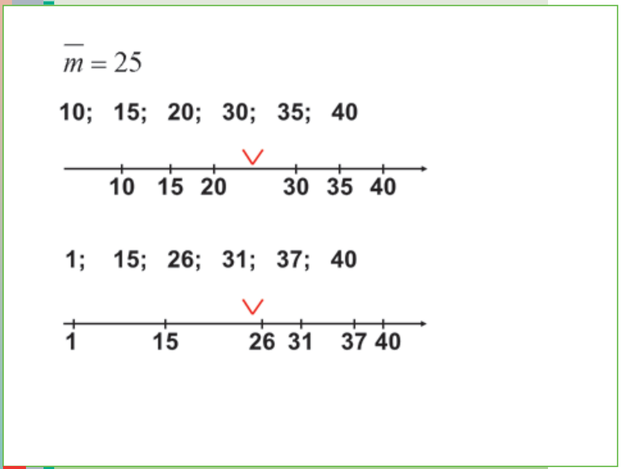
Несколько лет я веду факультатив по этой теме в Санкт-Петербургском лицее им. Иоффе. Инициатором занятий был В.А. Рыжик. Первые годы я пользовался не «Geogebroй», а авторскими средствами и специальными макросами к CorelDraw. Это позволяет соединить с геометрией окружности мощь дизайнерских средств CorelDraw, что важно для эстетической стороны преподавания. На этой базе может быть создана настоящая компьютерная лаборатория нового дизайна.

Но для преподавания математики существенней, что симметрия относительно окружности и наглядные теоремы, связанные с ней, позволяют естественно вводить учеников в проблематику многих разделов высшей математики, представление о чем дает диаграмма:

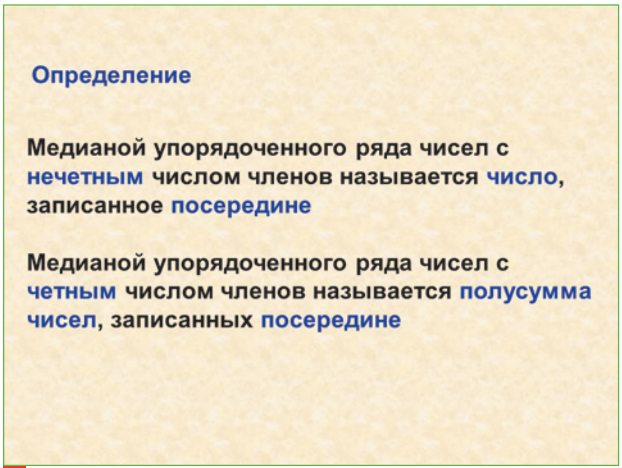


Чтобы было удобнее выходить в Интернет, я повторю ссылку на материалы по теме: http://bogemnyipeterburg.net/revolt/matem/teachpictures/index.html.

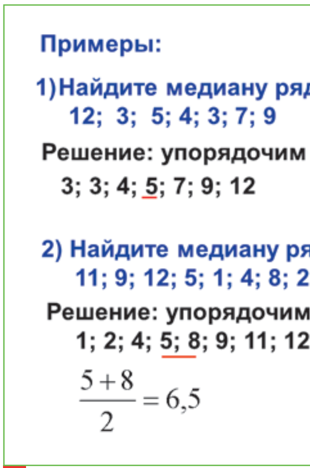
В этой статье мы двигались в основном по левой верхней стрелке и немного (при рассмотрении теоремы о разбиении четырех точек на пары тремя способами и рассматривая цепочки касающихся друг друга окружностей) по правой стрелке. Доказательства используют свойства перестановок четырех элементов. В книге «Эстетическая геометрия или теория симметрий» рассказывается и о других направлениях. А на прилагаемом к книге диске есть учебные материалы с проходящего в лицее им. Иоффе факультатива на эту тему, подборка эстетических образов, созданных методами эстетической геометрии, и полезные для преподавания эстетической геометрии компьютерные средства.



1



2



3

Презентация публикуется в авторской редакции

Сегодня в рубрике «Разбор урока» мы обсуждаем урок в 7-м классе. Урок проводит учитель математики Ирина Яновна ГОЛЕНДУХИНА, г. Москва
Урок обсуждают: главный редактор журнала «Математика» Лариса Олеговна РОСЛОВА, редакторы — Петр Михайлович КАМАЕВ и Ольга Васильевна МАКАРОВА и автор учебника Иван Ростиславович ВЫСОЦКИЙ

7 класс

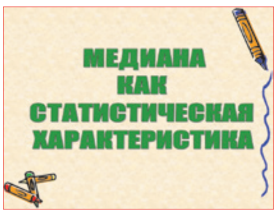
ТЕМА УРОКА: «МЕДИАНА КАК СТАТИСТИЧЕСКАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА»

Преподавание ведется по учебнику *Тюрин Ю.В., Макаров А.А., Высоцкий И.Р., Ященко И.В.* Теория вероятностей и статистика. — М.: Московские учебники, 2008. *Тип урока*: урок изучения нового материала.

Оборудование: мультимедийный проектор, презентация с элементами анимации, магнитная доска, раздаточный материал: карточки с заданиями (описанием эксперимента) для каждого ученика, бланки для записи результатов всех экспериментов и выводов по их результатам (по одному бланку на группу для каждого из трех запланированных экспериментов), сравнительная таблица для каждого ученика.

Оформление кабинета: парты сдвинуты вместе по две, так организованы места для шести групп, 4–5 человек в каждой. На столах расставлены таблички с номерами групп и разложен раздаточный материал. На экране — *слайд 1* с названием темы урока. На доске заготовлена таблица для записей результатов каждой группы и подсчета баллов и 6 мест для размещения листов с ответами.

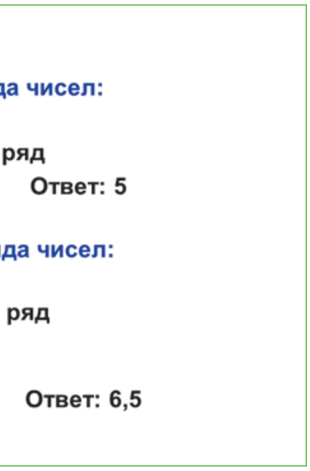
Оформление доски

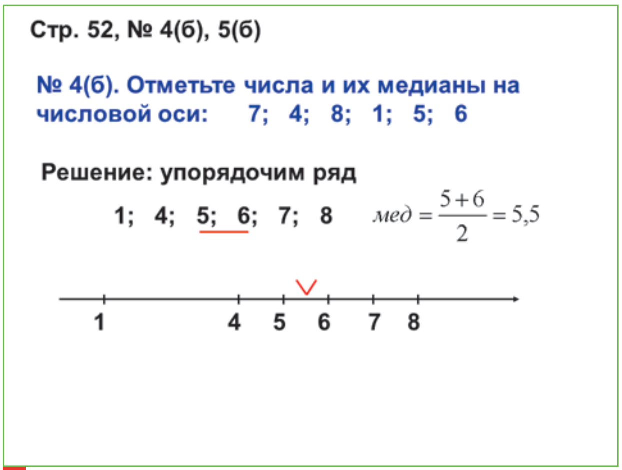


I II III IV V VI

№	I	II	III	IV	V	VI

К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru
(Авторская презентация, варианты заданий экспериментов, бланки эусприментов)





4

5

Форма урока: командное соревнование.
Формы работы: групповая, фронтальная.
Цели урока: обеспечить усвоение алгоритма выполнения типового задания; развивать мышление и познавательный интерес; продолжить формирование надпредметного навыка «постановки эксперимента».

Ход урока

Оргмомент. Приветствие, объявление темы урока, плана урока (1 мин.)

I. Активизация базовых навыков (3 мин.)

Учитель задает вопросы классу.

Вопросы

– Что такое среднее арифметическое?

[Отношение суммы чисел к их количеству.]

– Как изменится среднее арифметическое, если каждое число набора умножить на 3?

[Увеличится в 3 раза.]

– Как изменится среднее арифметическое, если из каждого числа набора вычесть 2?

[Уменьшится на 2.]

– В наборе 11 чисел. Может ли среднее арифметическое быть больше десяти из них? В каком случае?

[Может, если самое большое число набора намного больше всех остальных.]

– В наборе 11 чисел. Может ли среднее арифметическое быть меньше десяти из них? В каком случае?

[Может, если самое маленькое число набора намного меньше всех остальных.]

II. Формирование связи между имеющимися, новыми и будущими знаниями (3 мин.)

Учитель. Напомню, что раздел, который мы сейчас изучаем, называется «Описательная статистика». Она нужна для того, чтобы несколькими характеристиками описать большой набор чисел. Если чисел 5, 7 или 11, то мы и так сможем понять картину явления. А если в наборе тысяча чисел? Тогда нужны какие-то специальные характеристики. С одной из них мы познакомились на прошлом уроке. Вспомним, как среднее арифметическое описывает набор чисел.

– Известно, что среднее арифметическое некоторого набора чисел равно 25 (*слайд 2*). Что можно сказать об этом наборе?

[Что в нем есть числа, меньшие 25 и большие 25.]

– Рассмотрим два набора, среднее арифметическое которых равно 25. Отметим числа и среднее арифметическое каждого набора на координатной прямой. Какой из этих наборов лучше характеризуется числом 25?

[Первый, так как в нем числа расположены равномернее.]

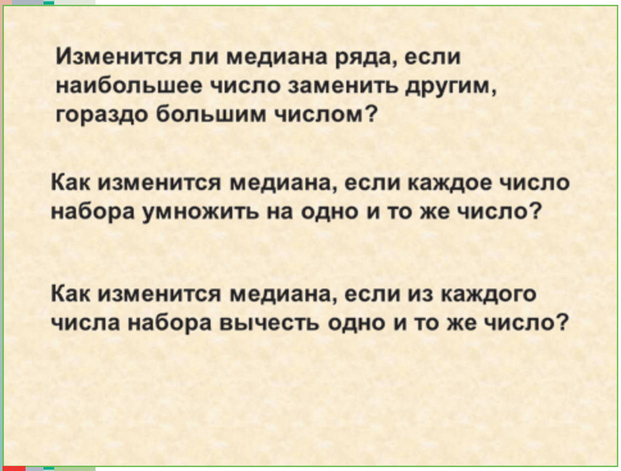
Получается, что среднее арифметическое неполно описывает набор чисел. Нужны еще какие-то характеристики. Сегодня мы познакомимся с одной из них. Она называется ***медиана***.

III. Формирование новых знаний (6 мин.)

Определение медианы и примеры вычисления медианы (*слайды 3, 4*).

IV. Первичное закрепление (5 мин.)

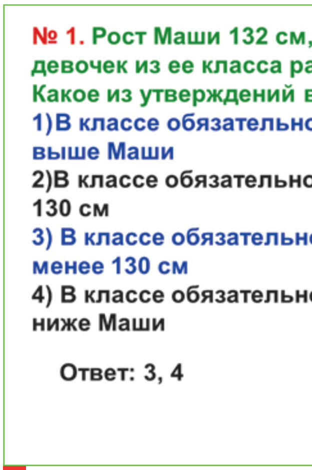
Слайды 5, 6. Учебник, с. 52, № 4 (б), 5 (б). В группах выполняют № 4 (б). Представители групп прикрепляют на доску листки с ответами




Как изменится статистическая характеристика, если:

Условие	Среднее арифметическое	медиана
Самое большое число набора умножить на 1000	увеличится	Не изменится
Из самого маленького числа набора вычесть 1000	уменьшится	Не изменится
Каждое число набора разделить на n	уменьшится в n раз	уменьшится в n раз
К каждому числу набора прибавить m	увеличится на m	увеличится на m

7



чистой стороной листа наружу, чтобы участники других групп не увидели чужой ответ. После того, как листы с ответами вывешены на доску, на экран проецируется верное решение и обсуждаются появившиеся вопросы.

Группы приступают к выполнению задания № 5 (б), а учитель проверяет решение задания 4 (б) и начисляет баллы (1 балл за верное решение). Затем та же работа с № 5 (б).

Этап V. Развитие познавательного интереса. Формирование надпредметного навыка: постановка эксперимента (8 мин.)

Учитель. Итак, мы познакомились с новой статистической характеристикой — медианой ряда. Она делит ряд на две группы, в которых одинаковое количество чисел. Попробуем выяснить, какими свойствами обладает медиана (*слайд 7*).

– Изменится ли медиана ряда, если наибольшее число заменить другим, очень большим числом? Как это проверить?

[Провести эксперимент: взять какой-нибудь ряд чисел, затем заменить в нем самое большое число другим, гораздо большим, найти медианы этих двух рядов и сравнить.]

– Как изменится медиана, если каждое число набора умножить на одно и то же число? Как это проверить?

[Провести эксперимент: взять какой-нибудь ряд чисел, затем каждое число умножить, например, на три, найти медианы этих двух рядов и сравнить.]

Учитель. Сейчас вы проведете в группах эксперименты. Каждый выполнит свое задание, а затем вы впишите результаты в общий бланк и сделаете выводы. За практическую работу группа может получить 3 балла (по одному баллу за каждый из трех экспериментов).

Ученики приступают к проведению первого эксперимента. Каждый ученик выполняет свое задание. Если в группе больше четырех учеников, некоторые задания могут дублироваться.

Задание эксперимента 1

Эксперимент № 1

Цель: определить, как изменяется медиана набора, если в нем есть выбросы.

1.1. Найдите медиану набора чисел

10; 3; 9; 8; 4; 5; 7; 8.

Умножьте самое большое число набора на 50.

Найдите медиану и среднее арифметическое нового набора чисел.

Внесите результаты в бланк и ответьте на вопросы.

Затем все вместе заполняют бланк первого эксперимента, обсуждают и делают общий вывод. Бланки с ответами вывешиваются на доску изнанкой наружу.

Бланк эксперимента 1

Эксперимент № 1

Цель: определить, как изменяется медиана набора, если в нем есть выбросы.

1.1. Медиана исходного набора __________
Медиана нового набора __________
Среднее арифметическое нового набора _______
1.2. Медиана исходного набора __________
Медиана нового набора __________
Среднее арифметическое нового набора _______
1.3. Медиана исходного набора __________
Медиана нового набора __________
Среднее арифметическое нового набора _______
1.4. Медиана исходного набора __________
Медиана нового набора __________
Среднее арифметическое нового набора _______
Вывод общий: ________________________________

После того, как все бланки вывешены, учитель объявляет верные ответы и отвечает на вопросы. Затем ученики приступают к проведению следующего эксперимента, который проводится аналогично. Учитель в это время проверяет бланки с ответами и начисляет группам баллы. (Варианты заданий, бланки экспериментов и сравнительная таблица есть в электронном приложении.)

а медиана ростов всех
авна 130 см.
верно?
о есть девочка

о есть девочка ростом

о есть девочка ростом

о есть девочка

№ 2. Рост Маши 132 см, а медиана ростов всех девочек из ее класса равна 130 см.
Какое из утверждений верно?
1)В классе все девочки, кроме Маши, имеют Рост 130 см
2)В классе обязательно есть девочка ростом 130 см
3) В классе обязательно есть девочка ростом менее 130 см
4) В классе обязательно есть девочка Ростом 128 см

Ответ: 3

9

№ 3. Медиана ростов игроков волейбольной команды равна 192 см. Самого высокого игрока заменили другим, рост которого на 5 см больше. Найдите медиану ростов игроков команды в новом составе

Ответ: 192 см

№ 4. Упорядоченный ряд состоит из 10 чисел. Укажите номера двух последовательных элементов ряда, между которыми заключена медиана

Ответ: 5 и 6

10

Задание эксперимента 2

Эксперимент № 2

Цель: определить, как изменится медиана ряда чисел, если каждый элемент ряда умножить или разделить на одно и то же число.

2.3. Найдите медиану набора чисел

3; 15; 2; 11; 3; 7; 6; 12.

Умножьте каждое число набора на 3 и найдите медиану нового набора чисел.

Внесите результаты в бланк и ответьте на вопросы.

Бланк эксперимента 2

Эксперимент № 2

Цель: определить, как изменится медиана ряда чисел, если каждый элемент ряда умножить или разделить на одно и то же число.

2.1. Медиана исходного набора ___________

Медиана нового набора ___________

Вывод: ____

...

Вывод общий: ____

Задание эксперимента 3

Эксперимент № 3

Цель: определить, как изменится медиана ряда чисел, если каждый элемент ряда изменить на одно и то же число.

3.1. Найдите медиану набора чисел

4; 15; 6; 11; 22; 7; 6; 12.

Прибавьте к каждому числу набора 2 и найдите медиану нового набора чисел.

Внесите результаты в бланк и ответьте на вопросы.

Бланк эксперимента 3

Эксперимент № 3

Цель: определить, как изменится медиана ряда чисел, если каждый элемент ряда изменить на одно и то же число.

3.1. Медиана исходного набора ___________

Медиана нового набора ___________

Вывод: ____

...

Вывод общий: ____

VI. Систематизация новых знаний (7 мин.)

Учитель. После практической работы все вместе заполняем сравнительную таблицу свойств среднего арифметического и медианы (*слайд 8*).

Сравнительная таблица

Как изменится статистическая характеристика	Статистическая характеристика	
	среднее арифметическое	**медиана**
если самое большое число набора умножить на 1000		
из самого маленького числа набора вычесть 1000		
каждое число набора разделить на n		
к каждому числу набора прибавить m		

Учащиеся предлагают ответы и подкрепляют их примерами (не оценивается). В каком случае среднее арифметическое хорошо характеризует набор, а в каком не очень хорошо? Вывод: медиана лучше характеризует набор, если в нем есть выбросы.

VII. Закреплений знаний (5 мин.)

Проводится в форме викторины (*слайды 9–12*).

VIII. Итог урока (5 мин.)

Учитель. Итак, мы теперь знаем две статистические характеристики. Посмотрим, как они описывают набор чисел (*слайд 13*). Для некоторого набора чисел известны среднее арифметическое и медиана.

Что можно сказать об этом наборе чисел? Гипотезы, обсуждения.

[Так как среднее арифметическое больше медианы, в наборе есть числа, которые намного больше других.]

Затем на экране появляется набор чисел.

Так же обсуждается еще несколько случаев.

№ 5. Известно, что медиана некоторого набора чисел равна 18. Каждое число этого Набора умножили на 2,5. найдите медиану нового набора чисел

Ответ: 45

11

Известно, что для некоторого ряда чисел

1) $\overline{m}=11$ **и** $мед=6$

1; 4; 5; 5; 6; 7; 8; 9; 36

2) $\overline{m}=57$ **и** $мед=66$

1; 60; 65; 66; 67; 70; 70

3) $\overline{m}=6$ **и** $мед=6$

3; 4; 5; 5; 6; 6; 8; 8; 9

12

Обсуждение урока

Л.Р. Сегодня у нас несколько необычное обсуждение, поскольку мы имеем возможность выслушать автора проведенного урока. Но прежде чем предоставить ей слово, хочу сказать, что урок интересен тем, что поставлены современные цели, связанные с формированием метапредметных навыков. Здесь акцент сделан на развитие двух умений — работать в группе и проводить эксперимент. Мы видим, что это не разовое мероприятие, а часть методической системы.

П.К. На мой взгляд, этот урок — пример хорошо продуманного и описанного урока. Очень четко и без лишних слов сформулированы цели урока, и весь урок направлен на их достижение. Нет набивших оскомину целей вроде «формирование коммуникативных навыков», «развитие коллективизма и технологии сотрудничества» и т.д., они явно следуют из предложенных форм работы.

Л.Р. Давайте поблагодарим Ирину Яновну за урок и передадим ей слово.

И.Г. Я начну с того, что не удалось сделать на уроке.

Первое: немного не хватило времени. Резервов времени в этом уроке немного, но они есть: можно сократить количество вопросов на этапе активизации базовых навыков, немного сократить обсуждение экспериментов перед практической работой и уменьшить количество заданий на этапе закрепления после заполнения сравнительной таблицы свойств среднего арифметического и медианы. Остальные этапы сокращать нельзя. Возможен другой путь: можно разделить этот материал на два урока. На первом уроке познакомиться с определением медианы и научиться ее находить, а на втором уроке провести практическую работу по исследованию свойств медианы.

Второе: выбранная форма соревнования очень нравится ученикам, но возможность обсуждения результатов, ошибок и выводов ограничена временем.

Третье: когда я задавала вопросы типа «Как проверить, что произойдет с медианой набора, если...», только некоторые ученики смогли самостоятельно предложить эксперимент, несмотря на проведенный накануне аналогичный урок. Были затруднения с формулированием выводов по результатам экспериментов.

Л.Р. Думаю, что здесь мы сталкиваемся с проблемой, ради которой, собственно, и появились в стандарте новые понятия. А проблема в том, что логические навыки, умение рассуждать, делать предположения и формулировать выводы сами собой не формируются, нужны специальные задания, требуется внимание учителя и систематическая работа. Кто-то из учеников приобретает новые навыки легко и быстро, а кому-то это будет сделать непросто. Но совершенно очевидно, что ребятам нравятся математические эксперименты, проблемные ситуации. Особенно если они могут работать в группе одноклассников.

П.К. По поводу групповой работы. Часто, читая конспекты уроков, проводимых учителями в групповой форме, ловлю себя на мысли, что названия команд, их девизы, эмблемы и прочее — это все лишнее. Некоторая театрализация урока, отвлекающая ученика. Здесь же описана очень деловая обстановка урока, без лишней «мишуры».

Л.Р. Что же, по мнению учителя, удалось сделать на уроке?

И.Г. Очень хорошо все справились с заполнением итоговой сравнительной таблицы. Активно и быстро отвечали на вопросы, используя результаты своих экспериментов. Все ученики усвоили определение медианы и научились ее находить, что показали результаты письменных работ, проведенных позднее. Ну, и урок им очень понравился.

П.К. У меня вопрос к учителю: откуда взялось определение медианы, которое мы читаем на слайде 3? В учебнике его нет. А слова «число, записанное посередине», честно говоря, режут слух.

Л.Р. А вот здесь я бы хотела предоставить слово еще одному участнику обсуждения — Ивану Ростиславовичу Высоцкому, одному из авторов учебника, по которому изучается этот раздел программы.

И.В. Прежде всего благодарю за приглашение принять участие в обсуждении урока. Урок достойный. Задачи хорошие, математически правильные и интересные. Что касается замечания Петра Михайловича, то я с ним согласен — лучше убрать слово «определение» и немного изменить текст: «Упорядочим набор чисел по возрастанию (каждое число не меньше предыдущего). Получим упорядоченный ряд. Если в нем нечетное количество чисел, то медианой будет число, стоящее посередине. Если чисел четное количество, то медианой будет полусумма двух чисел, стоящих посередине».

Л.Р. Я часто наблюдаю, что учителя «поправляют» авторов учебников, усиливают строгость изложения, заменяют авторские рассуждения относительно вводимого понятия определением. И здесь я, сама будучи автором, хочу заступиться за своих коллег: вводимое авторами понятие — это всегда продуманный и осмысленный выбор. Они понимают, что введение определения не единственный способ формирования понятия. Даже самый точный, самый формальный, но не всегда самый интуитивно понятный. Не каждый ученик к этому готов: не у всех есть требуемый для этого уровень развития логического мышления. И это может стать препятствием для формирования понятия.

И.В. Я бы хотел кое-что уточнить в нескольких фрагментах урока. Первый фрагмент — в котором речь идет об описательной статистике. Это место я сформулировал бы иначе:

Описательная статистика изучает способы описания массивов данных с помощью подходящих характеристик. Если данных много, то без краткого описания трудно уловить их общий смысл. Даже если данных мало, намного удобнее иметь дело с одной-двумя характеристиками, чем со всем набором. Главный вопрос: какую характеристику выбрать.

Это зависит от:

а) природы данных;

б) целей исследования;

в) наших возможностей (знаний, вычислительных средств);

г) сложившихся традиций.

Пример: время в забеге на 100 метров — здесь важнее наименьший результат; дальность прыжка на лыжах — важнее наибольший.

Второе уточнение. Я бы не ставил вопрос: «Какой набор лучше характеризуется числом 25». Ведь возникает встречный: для чего или для кого лучше? Цель исследования не поставлена. Лучше иначе: можно предложить два набора температур на улице каждый час (или день) в градусах Цельсия.

Первый набор:

19 22 23 24 23 25 25 24 26 25

Среднее арифметическое равно 23,6 °C.

Второй набор:

19 22 243 24 23 25 25 24 26 25

Среднее арифметическое набора 45,6 °C.

Обратите внимание: во втором наборе есть число, намного большее всех прочих, это 243 °C. Оно явно ошибочное. Именно из-за этой ошибки среднее арифметическое стало равно 45,6 °C. Это не похоже на среднюю или типичную температуру. Беда в том, что среднее арифметическое неустойчиво, если в наборе имеются выбросы — значения, очень резко отличающиеся от прочих в силу каких-то обстоятельств, например, из-за ошибки. Можно ли придумать более устойчивую характеристику?

Л.Р. Да, неплохой пример реальной проблемной ситуации. Кроме того, мне нравится, что это сюжетный пример. Они снижают градус формальности изложения.

И.В. У меня есть предложение, относящееся к экспериментам 3 и 4. Их лучше провести иначе, ведь в жизни никогда не приходится менять уже имеющиеся числовые данные. Давайте добавим к набору еще одно очень большое или очень маленькое число. Как изменится среднее и медиана? Фокус в том, что среднее изменится сильно, а медиана либо вовсе не изменится, либо изменится незначительно. Числа в наборах лучше подобрать с повторениями, чтобы медианное значение повторялась. Например, 3, 3, 4, 4, 7, 4, 9, 5. Тогда добавление 1000 или –1000 уведет среднее значительно, а медиана в одном случае не изменится, а в другом перескочит с 4 на 4,5.

И.Г. Я стараюсь по возможности весь изучаемый материал связывать с жизнью, приводить понятные примеры, однако для того, чтобы понять, как применяются различные статистические характеристики, нужно знать, чем они различаются. Правда, с примерами бывает очень сложно. Хотелось бы иметь больше правдивых примеров из жизни, которые показали бы нам, как все это применяется!

И.В. Кстати, есть уточнение относительно свойств набора, у которого среднее арифметическое равно 11, а медиана равна 6. Числа могут быть рассеяны таким образом, что среднее 11 и медиана 6, — небольшое отличие. Не зная природы данных и естественного для этих данных разброса, трудно судить о том, что такое большое и что такое маленькое различие между двумя средними. Лучше дать естественные однородные величины, так как в них человек ориентируется интуитивно. Например, рост мальчиков в 7-м классе. Предположим, что среднее равно 162 см, а медиана 156 см. Большое различие? Разница 6 см в росте — много. Почему так случилось? Возможно, в классе есть один-два очень рослых мальчика. Еще сюжеты: зарплата; квартплата в одном и том же районе. Или потребление электроэнергии или воды: у кого-то может оказаться очень большое потребление, резко отличающееся от типичных значений. Это может быть вызвано неисправностью, а может быть, у кого-то обогреватели работают — тюльпаны дома выращивают.

П.К. А я бы хотел задать вопрос Ирине Яновне: зачем так детально изучались свойства медианы? Это не похоже на подход, изложенный в учебнике.

И.Г. Цели, которые я ставила перед собой, готовясь к уроку, имеют разную степень обязательности. «Сформировать умение находить медиану ряда» — было для меня обязательной целью. Я стремилась, чтобы все ученики класса научились это делать. Изучение свойств медианы, постановка и проведение эксперимента, анализ результатов эксперимента носили скорее характер ознакомительный. То есть на последующих уроках мы, конечно, повторяли свойства медианы и среднего арифметического, но ответы учащихся при этом не оценивались. Ни в какие проверочные работы не включались задания, требующие знания и тем более умения применять свойства медианы.

Я включила свойства медианы в содержание урока для того, чтобы сделать изучение материала более «живым», более интересным. Кроме того, хотелось показать ученикам, как можно проверять гипотезы экспериментально, как потом анализировать результаты.

П.К. Уровень класса позволяет это делать?

И.Г. Если рассматривать цели урока именно с такой точки зрения, то, мне кажется, уровень подготовленности класса не имеет большого значения. Сами задания, которые ученики выполняли, были вполне простыми и работали на главную, обязательную цель урока. Задание «поставить эксперимент» присутствовало лишь в устной форме, и с ним справились лишь несколько человек. А вот с анализом результатов ребята справились хорошо.

Вообще, этот класс средний. В нем есть несколько хороших, трудолюбивых детей. Есть и слабые, запущенные ученики, пропускающие много уроков. Особых «звезд» нет. С другой стороны, я стараюсь всегда помнить, что могу ошибаться, определяя уровень способностей и подготовки конкретного ученика (а ведь класс состоит из отдельных учеников). А значит, вполне возможно, что кто-то именно в такой непривычной форме работы проявит себя, кого-то удастся заинтересовать и подтянуть.

Так или иначе, с заданиями ребята справились и сумели сделать выводы из полученных результатов. У некоторых, правда, были трудности с формулированием этих выводов. Но в этом я им помогала.

Л.Р. Я поддерживаю Ирину Яновну: свойства медианы, в данном случае, это в большей степени повод для обсуждения. Само свойство может быть забыто, не страшно, ведь оно сработало на формирование метапредметного навыка. И согласна, что надо отводить больше времени на обсуждение, не жалеть его, не торопить ребят.

П.К. Мне очень хочется отметить презентацию. Она очень хороша своей лаконичностью, отсутствием развлекательных «гномиков» и очень простой анимацией.

О.М. Я начну с титульного листа: подписывайте свою презентацию, размещайте авторские данные — это соблюдение ваших авторских прав.

Презентация применяется на уроке для фронтальной работы, поэтому на слайдах нет ни инструкций, ни указаний по выполнению заданий, автор их озвучивает на уроке сам. Текстовое содержание имеет структуру. Наиболее важные моменты, на которые необходимо обратить внимание учащихся, выделены или подчеркнуты красным цветом. Это обеспечивает легкое запоминание ключевых моментов темы. Но хочу обратить ваше внимание, что *слова* в тексте подчеркивать не стоит. Подчеркиванием сейчас выделяются гиперссылки, и если слово не является гиперссылкой, то выделять подчеркиванием его не стоит — это может ввести в заблуждение других пользователей вашей презентации.

На слайдах 9 и 10 между условием и вариантами ответов рекомендую вставить пустую строку, это позволит разрядить текст и будет способствовать лучшему восприятию. Слайд 11 можно разделить на два — на каждом слайде по одной задаче. Рекомендую на одном слайде использовать не более трех цветов шрифта, в противном случае в глазах начинает «пестрить» (слайд 8).

Что касается анимации... На слайде 4 решение примера вычисления медианы появляется пошагово, что соответствует цели этапа, а вот на слайдах 5 и 6 я советую одновременно вывести решение и ответ на экран. Поскольку эти слайды служат для проверки правильности решения, и терять время, кликая мышкой для появления каждой строчки, не хочется. Для этого на вкладке *Анимация* зайдите в *Область* (*Настройка*) *анимации* (в зависимости от версии Microsoft Word), выделите все строчки, кроме первой, и укажите *Запускать вместе с предыдущим*. А в остальном анимационные эффекты не раздражают и присутствуют в тех местах, где они уместны, тем самым усиливая эффект восприятия текстовой информации.

В презентации присутствует теоретическая и практическая части. Автор выделил эти слайды разным фоном: теоретическая часть — это слайды с цветным фоном (слайды 3, 7), а задания практической части расположены на слайдах с белым фоном. Разумно.

При создании презентации автор отказался от использования единого шаблона оформления слайдов. В данном случае это скорее достоинство, чем недостаток. На мой взгляд, использование готового шаблона должно быть обдуманным и оправданным. Шаблоны оформления слайдов можно создавать самим, но при этом придется подбирать цветовую гамму фона и текста, что не всегда получается удачно. Лучше воспользоваться готовыми шаблонами, например, предлагаемыми в программе PowerPoint: готовый фон и «палитра» цветовых оттенков для основных элементов содержания созданы специалистами с учетом правил цветового дизайна. При использовании шаблона оформления слайдов будьте внимательны: оформление шаблона не должно мешать расположению текста, таблицам, рисункам; объекты, расположенные на слайде не должны соприкасаться с элементами шаблона.

Л.Р. Итак, наше обсуждение закончено. Благодарю всех принявших в нем участие, а автора урока благодарю не только за то, что представила нам возможность познакомиться с ее работой, но и за участие в его разборе. Мне кажется, обсуждение было плодотворным.

ФОТО НА КОНКУРС

Внеклассное мероприятие «Математика и математики в годы Великой Отечественной войны», посвященное 70-летию Великой Победы

Мероприятие проходило в форме устного журнала. Страницы журнала познакомили гостей с именами ученых-математиков, которые занимались вопросами оборонной тематики, а также с прикладными задачами, решаемыми ими в годы Великой Отечественной войны. Обзор математических исследований военных лет показал, что ученые нашей Родины внесли огромный вклад в Победу.

Автор: Рунова Ольга Александровна,
учитель математики
Приреченской СОШ Рузаевского района
Республики Мордовия

Как воздух, математика нужна,
Одной отваги офицеру мало.
Расчеты! Залп! И цель поражена
Могучими ударами металла.

М. Борзаковский

М. КОЗЛОВ,
г. Москва

ОБСУЖДАЕМ ТРИГОНОМЕТРИЮ ВМЕСТЕ

■ Предлагаемая система задач сопровождает изучение темы «Тригонометрические функции» в 10-м классе. Создание этой системы было обусловлено двумя основными мотивами. Во-первых, некоторым неудобством использования самого распространенного на сегодняшний день учебника: *Колмогоров А.Н.* и др. Алгебра и начала анализа: учеб. для 10–11 кл. общеобразоват. учреждений. — М.: Просвещение (издания разных лет в этой теме существенно не различаются). Неудобства возникли в силу изменения программы: тригонометрия давно исключена из программы 9-го класса; некоторые минимальные сведения в курсе геометрии и скромное применение на уроках физики – вот все, что осталось; в учебнике же весь основной начальный материал — определения, формулы (без вывода), преобразования — рассмотрен в пункте 1 параграфа 1 в качестве повторения. Очевидно, что о разумном усвоении этого материала в таких условиях речи не идет. Во-вторых, я глубоко убежден в том, что вовсе не «математические» сведения сами по себе (равно как и призрачные «компетенции») являются основной целью изучения математики в школе, но овладение определенным стилем мышления, который возникает только при возможности самостоятельных размышлений и собственных интеллектуальных усилий при решении задач. При этом хотелось бы, чтобы эти усилия были логичны, последовательны и постепенны. Проще говоря, учеников нужно настойчиво учить самостоятельно наблюдать и самостоятельно соображать, не устраивая при этом гонки класса «Формула-один, два, три...». Не то плохо, что ученик не успеет выполнить все задания, а то плохо, что он выполнит их, так и не успев задуматься. Все же самая главная задача учителя — подарить ученику ощущение самостоятельного открытия! А коллекция знаний обязательно будет им собрана. Но как следствие.

Задания снабжены некоторыми пояснениями или комментариями и представляют собой «блоки», которые удобно использовать, например, при групповой форме работы или в качестве регулярных мини-зачетов, а также домашних заданий. В большинстве случаев наиболее удачной формой организации работы в классе представляется работа в малых группах с *минимально* необходимым участием учителя в обсуждении способа выполнения заданий, результатом которой явились бы письменно оформленные ответы, переданные учителю для контроля (по мере выполнения заданий). Между тем некоторые упражнения предполагают преимущественно устное обсуждение. В этих случаях, после совместного обсуждения, небольшие зачеты по тем же вопросам окажутся очень полезным упражнением, стимулирующим личную деятельность учеников.

Упражнения из учебника тоже включались в систему, но, конечно, инкогнито, в целях профилактики обращения к ГДЗ (готовые домашние задания).

Знакомство с идеями решения тригонометрических уравнений, неравенств и обратными тригонометрическими функциями не рассматривается как отдельная тема, а встроено в общую «картину идей», характерную для начального знакомства с тригонометрией. При этом достаточно большой (по сравнению с привычным) объем упражнений связан с обратными тригонометрическими функциями. С одной стороны, это придает системе дополнительную устойчивость в смысле самостоятельности размышлений над заданиями, а с другой — позволяет лучше разобраться в тригонометрии и приобрести уверенность в своих действиях при решении задач.

Если у заинтересовавшегося читателя возникнет необходимость в чтении комментариев, то лучше читать их полностью, поскольку некоторые из них уточняют смысл сделанного ранее и содержат практические рекомендации, в том числе к предыдущим пунктам. Подробное описание возможного рассказа учителя приведено только в ключевых местах: там, где это существенно для восприятия нюансов подхода к изложению соответствующего материала на уроке. В стандартных случаях изложение теории опущено.

Весь рассмотренный фактический материал относится только к начальному знакомству с тригонометрией, рассчитан на применение в работе с *самыми* обычными учениками и был написан исходя из опыта работы именно с такими учениками. Однако, как показала практика, он может быть актуален и для начального рассмотрения в классах, специализация которых подразумевает плотное и разумное знакомство с математикой.

Построение графиков тригонометрических функций, исследование этих функций, в том числе с помощью производных, сколько-нибудь сложные уравнения и неравенства, применение специальных методов решения тригонометрических уравнений и неравенств и решение их систем не рассматривается в предложенной системе заданий. Объем, в котором необходимо изучить этот материал, зависит от конкретных обстоятельств, и это изучение вполне может быть продолжено аналогичным образом.

Категорически НЕ СЛЕДУЕТ применять шаблон тригонометрической окружности с нанесенными на него значениями дуг и функций или без них. Окружность ученики должны приучиться рисовать сами, и работать с ней сами, каждый раз изображая все, что необходимо. «Ученик — не сосуд, который надо наполнить, а факел, который надо зажечь», — говорили в древности, и мудрость эта прошла через тысячелетия. Надеюсь, что предложенная система заданий будет полезна кому-нибудь, кто ищет способы «зажечь» своих учеников даже в нелегких современных условиях. Поэтому вижу своего читателя своим со-труд-ником, который, восприняв общую идею, найдет время и силы, может быть, что-либо дополнить, а может, придумать продолжение, исходя из своих целей и обстоятельств.

Задание 1

1. Почему при работе с радианной мерой угла выражение «угол альфа» преимущественно следует заменять выражением «дуга альфа»? Что такое «радиан»?

2. Что такое π? Каким смыслом обладает π? Почему-то считается, что «π — это 180». Почему? (Ведь говорят, что $\pi \approx 3{,}14$, а вовсе не 180.)

3. Найдите радианную меру «углов»:

$90°$; $30°$; $45°$; $60°$; $120°$; $135°$; $150°$; $75°$; $108°$; $210°$; $225°$; $240°$; $300°$; $315°$; $330°$; $1°$; $17°$; $76°30'$; $7200°$; α.

4. Найдите градусную меру «углов»:

а) 3π; $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{5}$; $1\frac{1}{4}\pi$; $\frac{\pi}{12}$; $\frac{7\pi}{20}$; $1\frac{1}{60}\pi$; $\frac{7\pi}{9}$; $\frac{5\pi}{18}$;

б) 1; 0,6; 1,5; 3,14; 8,2; α (ответ можно округлять).

5. а) Определите длину дуги единичной окружности, соответствующей повороту на угол:

$45°$; $60°$; $15°$; $36°$; $144°$; $124°$; $270°$; $192°$; α.

б) Определите длину дуги для тех же «углов», если радиус окружности равен: 2; 5; 0,3.

Комментарий к заданию

1; 2. Соответствующий заданию рассказ учителя может выглядеть примерно следующим образом.

Учитель. Если рассмотреть окружности одного радиуса, то они все, очевидно, равны, значит, и их длины будут равны. Как среди отрезков выбираем «эталон» — *отрезок длиной* 1, так и среди окружностей выберем аналогичный «эталон» — *окружность с радиусом длиной* 1. Исторически сложилось так, что длине половины такой окружности присвоили собственное имя — π (по первой букве греческого слова «периферия»). Ясно, что длина всей такой окружности *равна* 2π. (Если радиус окружности 1 километр, то ее длина 2π *километров* и так далее.) Если в несколько раз увеличить или уменьшить радиус этой окружности, ясно (тут я сознательно позволил себе не быть излишне педантичным), что она во столько же раз «раздуется» или «съежится», а значит, то же самое можно сказать и о ее длине. Если начальный радиус (единицу) увеличить в r раз, он *станет равен* r, но так же в r раз увеличится и *длина окружности* — она *станет* $2\pi \cdot r$.

Величину π можно очень неточно вычислить, рассмотрев вместо окружности вписанный в нее шестиугольник. Поскольку его сторона равна радиусу (в нашем случае — 1), то грубо половина окружности — *три такие стороны* — *равна* 3, то есть примерно π. Ясно, что длина настоящей окружности немного больше, то есть π на самом деле немного больше 3. Наше вычисление будет точнее, если рассмотреть вписанный восьмиугольник, а еще лучше 12-угольник (желающие могут все выкладки проделать сами, остальным придется довериться моим словам). Вот каким образом получается, что число π примерно равно 3,14, о чем все знают. На самом деле, немного больше, но большая точность при вычислениях требуется редко.

Важно понимать, что вмешательство учителя в усвоение материала должно преимущественно проходить в форме обсуждения, для чего необходимо организовывать ***совместное*** развитие мысли (контрапунктом к привычному монологу учителя или чтению учебника с «выдавливанием» формул).

Если пользоваться «эталоном окружностей» — окружностью с единичным радиусом, то ее дуга, длина которой равна 1, как раз и соответствует центральному углу, которому *присвоена* мера 1 радиан. Таким образом, измерение *углов* можно заменить измерением *длин* дуг единичной окружности: «прошли» по дуге, например, 2 метра — получили соответствующий центральный угол 2 радиана. И так далее. Конечно, при условии, что радиус окружности — 1 метр. *А значит, можно воспринимать величины углов как «обычные числа», которым привычным образом соответствует длина отрезка, и рассматривать эти величины на числовой прямой.* Осталось только обратить внимание на соответствие между радианами и градусами. Для этого заметим, что «развернув» центральный угол, «пройдем» длину полуокружности — то есть чуть больше 3, а точно — π. Получится центральный угол, опирающийся на дугу длиной π. Значит, *размером* π *радианов*. Получается, что 180 градусов развернутого угла соответствуют π радианам. Именно соответствуют, а не равны. *Равны* два *угла*, которые измеряются разными способами (мерами). Поэтому равенство $\pi_{\text{рад}} = 180°$ подразумевает не равенство чисел, а равенство соответствующих этим числам углов. Так же, как равенство 1 м = 100 см вовсе не означает равенство чисел 1 и 100. А вот равенство $\pi = 3{,}14...$ — вполне настоящее равенство.

Если одну из сторон центрального угла зафиксировать, а другую поворачивать, то можно говорить не только о привычных углах, но и об «углах», превышающих развернутый угол. В этом случае говорят об угле поворота, величину которого продолжают измерять длиной пути, пройденного вслед за поворачивающимся лучом по дуге *единичной окружности* или соответствующим количеством градусов.

Этот рассказ дает возможность довольно легко составить правильное представление о том, зачем понадобилось пользоваться радианами вместо градусов. В дальнейшем термин «угол» будет преимущественно заменяться термином «дуга», при этом будем иметь в виду *длину дуги* окружности единичного радиуса, на которую опирается соответствующий центральный угол.

3; 4. Никаких предварительных объяснений по переводу градусов в радианы и обратно, тем более никаких формул, на мой взгляд, писать не следует. Лучше поощрять, например, рассуждения такого характера:

$$«135° = 45° + 45° + 45° = \frac{3\pi}{4}_{\text{радиан}}»,$$

$$«150° = 180° - 30° = \pi_{\text{радиан}} - \frac{\pi}{6}_{\text{радиан}} = \frac{5\pi}{6}_{\text{радиан}}»$$

и тому подобные наблюдения. Формула фактически появляется сама после связки «1 рад — это примерно 17°». Потом для «борьбы» с 7200° можно будет применить как ее, так и наблюдение, что этот «угол» в 80 раз больше прямого. Последнее задание провоцирует появление формулы «в чистом виде». Она и получится, и совсем без помощи учебника! Согласитесь, это неоценимый опыт для юной души.

5 (а). Одно дело — послушать про соответствие радианов и длин, другое дело — сообразить это в ходе выполнения задания. За этим превращением внешних сведений в свои мысли очень приятно наблюдать всякому учителю.

5 (б). Вспомнят про «раздувающиеся» и «съеживающиеся» окружности не все, но те, кто вспомнят (и применят), получат радость, а это ли не достойная цель?

Задание 2

1. а) Сформулируйте определение синуса, косинуса, тангенса и котангенса угла прямоугольного треугольника.

б) Почему значения этих функций не зависят от размера треугольника, а только от величины угла?

в) Постройте угол α, для которого

$\cos\alpha = \frac{2}{3}$; $\sin\alpha = \frac{3}{5}$;

$\operatorname{tg}\alpha = 0{,}25$; $\operatorname{ctg}\alpha = 5$.

г) Для всех построенных углов определите значения остальных тригонометрических функций.

2. а) Чем удобно рассмотрение окружности единичного радиуса для определения значений $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$?

б) Почему в этом случае выражение «синус угла» преимущественно заменяют выражением «синус дуги»?

в) Какую дугу единичной окружности удобно рассматривать, если поместить эту окружность на координатную плоскость и совместить ее центр с началом координат? Как можно при этом начать воспринимать синус дуги и косинус дуги единичной окружности? Какие преимущества перед прямоугольным треугольником появляются?

г) Определите с помощью окружности значения

$$\sin 0;\ \sin\frac{\pi}{2};\ \sin\pi;\ \sin\frac{3\pi}{2};\ \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right);\ \sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right);$$

$$\sin(-\pi);\ \cos\pi;\ \cos 0;\ \cos(-\pi);\ \cos\frac{\pi}{2};\ \cos\frac{3\pi}{2};$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right);\ \cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right).$$

3. Вычислите с помощью геометрических соображений

а) $\sin\begin{pmatrix}\frac{\pi}{6}\\ \frac{\pi}{4}\\ \frac{\pi}{3}\end{pmatrix}$; б) $\cos\begin{pmatrix}\frac{\pi}{6}\\ \frac{\pi}{4}\\ \frac{\pi}{3}\end{pmatrix}$.

4. Определите знак выражения:

а) $\sin 100°\cdot\cos 160°$; б) $\mathrm{tg}\,315°$;

в) $\mathrm{ctg}\,200°$; г) $\sin\pi\cdot\cos 2012$;

д) $\cos\pi\cdot\sin\frac{\pi}{7}$; е) $\cos 3$;

ж)* $\sin 2012$.

5. Вычислите:

$$\frac{4-2\,\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{4}+\mathrm{ctg}^4\frac{\pi}{3}}{3\sin^3\frac{\pi}{2}-4\cos^2\frac{\pi}{3}+4\,\mathrm{ctg}\frac{\pi}{4}}.$$

Комментарий к заданию

1 (а). Подразумевается, что определение, данное в 9-м классе с помощью окружности, забыто.

1 (б). Про подобие к 10-му классу слышали все, но совместить определения из пункта 1 (а) и работу с пропорциями для ответа на вопрос не всем удается сразу. Возможно, некоторые ученики так и не проделают эту работу самостоятельно, удовольствовавшись наблюдением за тем, как это делают их одноклассники. В этом нет ничего плохого: просто получается естественная дифференциация. Главное, чтобы это обсуждение было, причем ключевые мысли принадлежали бы не учителю, а ученикам. Их после всегда можно будет и повторить, и уточнить, в том числе и с более слабыми учениками. Зато ощущения от того, что выводы не навязаны правилами, а сделаны самостоятельно, важны как чудодейственное лекарство.

1 (в). Это задание переводит теоретическую мысль предыдущего пункта в практическое русло. Во-первых, надо догадаться, что годится прямоугольный треугольник с удобными сторонами. Потом выясняется, что честное построение прямоугольного треугольника с катетом 2 и гипотенузой 3 вызывает вопросы, причем не только технические (недоверие к делу своих рук может увеличить, скажем, произвольность выбора отрезка длиной 1).

1 (г). Самостоятельный поиск решения этой задачи, как правило, не обходит стороной применение теоремы Пифагора. И, по моему мнению, этот способ действий для треугольника с удобными сторонами, пожалуй, много нагляднее применения основного тригонометрического тождества. А найденный самостоятельно — гораздо более ценен. К тому же целиком основан на имеющихся уже сведениях и не требует специального запоминания.

2 (а). Идея сделать гипотенузу прямоугольного треугольника равной 1, чтобы на нее не надо было явно делить длину катета, вполне может возникнуть в процессе обсуждения построения углов из пункта 1 (в) задания. Даже если она не будет иметь успеха (например, никто не захочет строить катет длиной $\frac{2}{3}$), полезно изобразить на доске несколько последовательных положений гипотенузы при фиксированных вершине и направлении катета прямоугольного треугольника. Получится рисунок, весьма напоминающий об окружности, который можно не стирать и использовать при работе над этим пунктом.

Вообще говоря, аналогичный вопрос предполагался к обсуждению уже в курсе планиметрии перед теоремой косинусов, поэтому может быть не нов. Однако в процессе прорисовывания окружности иллюстрируется мысль о непрерывном изменении величины угла (дуги) и, как следствие, непрерывном изменении соответствующих величин синуса и косинуса.

2 (б). Как удивительно сошлись два удобства — удобство определения синуса и косинуса и удобство работы с радианной мерой — в одной окружности!

2 (в). Идея замены смысла «геометрически определенных» косинуса и синуса координатами конца дуги, если ученики с этой идеей еще не встречались, является очень смелой и красивой. Конечно, очень бы хотелось, чтобы она была, насколько это возможно, самостоятельной. Но не все ученики обладают достаточным свободомыслием. С другой стороны, не посадив яблони, глупо ждать яблок. Может быть, какому-нибудь учителю все-таки посчастливится наблюдать рождение этой идеи.

2 (г). Это как раз подходящая иллюстрация преимущества нового определения.

3. На мой взгляд, здесь уместно вспомнить вывод этих значений как с целью повторения, так и для исключения иллюзии загадочности и сложности математики и «ее результатов». Ведь очень многие ученики в 9-м классе упускают, а потом не задумываются, откуда берутся эти значения, просто их выучив (в лучшем случае). Сейчас они немного повзрослели, а значит, могут посмотреть на уже пройденное по-другому. А, учитывая недавнюю работу с единичной окружностью и новые определения синуса и косинуса, кто-то может натолкнуться на довольно красивое решение задачи с помощью этой окружности, рассмотрев центральный угол $\frac{\pi}{3}$ и увидев правильный треугольник со стороной 1, с помощью которого все и посчитает.

4. Здесь и далее в аналогичных случаях рассуждения обязательно подразумевают работу с определением, то есть с окружностью. Последнее задание требует довольно тонких рассуждений, поэтому помечено звездочкой и необязательно может быть решено даже относительно сильными учениками.

5. «У страха глаза велики», поэтому некоторые ученики не справятся с психологическим давлением этой задачи. Тем радостнее сделать открытие, что на самом деле все просто, вспомнив результаты выполнения пункта 3. Ради такого открытия и помещено здесь это задание. И очень важно, чтобы открытие произошло. Имеет ли смысл обязательно разбираться с этой задачей всем на данном этапе, зависит от степени готовности учеников к подобного рода «давлению».

Задание 3

1. а) Представим, что α — «небольшая дуга» $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$. Что можно сказать о взаимном расположении концов дуг α и $-\alpha$ на тригонометрической окружности?

б) Тот же вопрос для $-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$. Что изменилось в рассуждениях?

в) Что изменится в рассуждениях, если мысленно увеличивать длину дуги α до какого угодно значения? Попробуйте придумать универсальное рассуждение для любого значения α.

2. Верно ли равенство:

а) $\sin(-\alpha)=\sin\alpha$; б) $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$;
в) $\operatorname{tg}(-\alpha)=\operatorname{tg}\alpha$; г) $\operatorname{ctg}(-\alpha)=\operatorname{ctg}\alpha$?

Почему? Если какие-либо из них не верны, как их «подправить»?

3. Упростите:

а) $a\cdot\sin(-30°)+b\cdot\cos(-60°)-2a\cdot\operatorname{tg}(-45°)-b\cdot\operatorname{ctg}(-90°)$;

б) $\dfrac{8\sin^3\left(-\frac{\pi}{6}\right)-2\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)-1}{2-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+4\cos^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$;

в) $8\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\cdot\cos\frac{\pi}{3}+\operatorname{tg}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\cdot\operatorname{ctg}\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$.

4. Вычислите:

а) $2\sin 120°\cdot\operatorname{tg}300°$;
б) $6\cos(-240°)\cdot\operatorname{ctg}210°$;
в) $4\sin(-150°)\cdot\cos 390°\cdot\operatorname{tg}240°$.

5. Отметьте на окружности, а затем запишите все возможные значения длины дуги x, при которых будет справедливо высказывание:

а) $\cos x=0{,}5$; б) $3-\sin x=2{,}5$;
в) $2+\cos x=4$; г) $\operatorname{tg}^2 x+5=6$;
д) $\sin x>\frac{\sqrt{3}}{2}$; е) $\cos x\le\frac{1}{2}$.

Комментарий к заданию

1. Было бы прекрасно, если бы при работе с этим заданием прозвучала идея симметрии. Действительно, если к тригонометрической окружности применить симметрию относительно оси абсцисс, то дуги α и $-\alpha$ переходят друг в друга, значит, концы этих дуг симметричны относительно оси абсцисс с вытекающими из этого факта последствиями для их координат (см. следующее задание).

2. Здесь уместно поговорить (вспомнить?) о четных и нечетных функциях.

3. Если в *задании 2* подобная задача была одна и шла последней, то теперь пришло время поговорить о ее решении с большинством учеников класса.

4; 5. Периодичность тригонометрических функций до построения их графиков не должна специально обсуждаться, но соответствующие соображения учениками могут высказываться и всячески поощряться учителем. Более того, при выполнении следующего задания имеет смысл научиться некоторые из таких соображений грамотно записывать для того, чтобы в будущем фиксировать ответ к уравнениям и неравенствам. При этом, повторю основную мысль, общение на уроке нужно выстраивать в форме совместного действия учеников и учителя.

5. Поскольку это задание последнее в связке, не страшно, если самостоятельно доберутся до него не все, а лишь немногие. Но все-таки, возможно, придется просить вспомнить договоренности о начале и положительном направлении отсчета длин дуг окружности. При первом знакомстве не ставится цели записывать каждое решение «как полагается». Целью работы с этими заданиями является получение впечатления и начало понимания того, что разные по постановке вопросы решаются примерно одинаковыми средствами, используются одни и те же идеи. К тому же появляются новые пути развития мысли — неединственность точки на окружности, удовлетворяющей условию, либо вообще ее отсутствие; периодичность; периодичность подходящих значений тангенса с периодом $\frac{\pi}{2}$ (задача 5(г)); неединственность дуг для изображения решения неравенств и актуальность проблемы их грамотной записи. И, что очень важно, все это при принципиально ясном ходе рассуждений с помощью окружности. Скорее всего приступят к выполнению этого упражнения лишь самые сообразительные ученики.

Задание 4

Решите уравнения 1–18, обязательно изображая тригонометрическую окружность и пользуясь ее помощью.

1. $\sin x = 0$.	**2.** $\cos x = 0$.
3. $\sin x = 1$.	**4.** $\cos x = 1$.
5. $\cos x = -1$.	**6.** $\sin x = -1$.
7. $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.	**8.** $\cos x = -\frac{1}{2}$.
9. $\sin x = \frac{1}{2}$.	**10.** $\sin x = -\frac{1}{2}$.
11. $\cos x = \frac{1}{2}$.	**12.** $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
13. $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.	**14.** $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
15. $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.	**16.** $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
17. $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.	**18.** $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Комментарий к заданию

Здесь нужно обратить внимание на наличие рисунка окружности в качестве неотъемлемой части записи хода решения, грамотность записи ответа. Но «давать формулы корней тригонометрических уравнений» категорически не следует: они должны возникнуть как необходимость и быть сконструированы самими учениками при минимальной поддержке учителя. Иначе ученики получат в свое распоряжение очередные формулы и о разумном решении уравнений можно будет забыть. Конечно, всякий ученик может поинтересоваться в учебнике либо в Интернете, как решаются эти уравнения, и найдет там те самые формулы. Поэтому на уроке важно упредить такое развитие событий верно построенным общением с учениками по поводу этих уравнений. Было бы прекрасно, если бы после урока потребности получить помощь «сторонних производителей» просто не возникло.

Обобщенной записи решения элементарных уравнений с косинусам, а особенно с синусом, не подразумевается. Две серии решений следует записывать явно. Потому, что позже, когда мы будем работать с более сложными уравнениями, при решении которых придется производить отбор корней, привычка применять «универсальную запись» будет серьезной помехой.

Но если ученики САМИ, на основании СВОИХ наблюдений изобретут укороченный способ записи решения уравнения с косинусом, тогда, для профилактики неприятных последствий автоматизма, нужно время от времени просить таких учеников указать, например, только положительные решения уравнения либо решения из определенного промежутка и т.п.

Задание 5

Решите уравнения 1–16. Не забывайте про окружность.

1. $\sin 2x = 0$.	**2.** $\cos 3x = 0$.
3. $\sin \frac{x}{2} = 1$.	**4.** $\cos \frac{x}{3} = 1$.
5. $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -1$.	**6.** $\cos(3x + 2) = -1$.
7. $2\sin \frac{x}{4} = 1$.	**8.** $-2\sin \pi x = 1$.
9. $2\cos 2x - \sqrt{3} = 0$.	**10.** $\sqrt{3} + 2\cos\left(\frac{\pi x}{2} + 1\right) = 0$.
11. $\operatorname{tg} x = 1$.	**12.** $\operatorname{ctg} x = -1$.
13. $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$.	**14.** $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$.
15. $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.	**16.** $\operatorname{ctg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Комментарий к заданию

При работе с уравнениями 1–10 естественным образом возникает и получает некоторое развитие идея замены переменной.

При обсуждении решений уравнений 13–16 уместен рассказ о прямой тангенсов и прямой котангенсов. Уравнения 11 и 12 могут быть решены простым указанием точек окружности, координаты которых равны или отличаются знаком. Но после разговора о прямой тангенсов и прямой котангенсов полезно заметить, что эти точки как раз образуются в месте пересечения окружности и прямых $y = x$ или $y = -x$.

Еще одним преимуществом такого рассказа можно считать то, что после него легко иллюстрируется наличие у функций $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ периода π.

Задание 6

1. Решите уравнение (с помощью окружности пользоваться **обязательно**, исключение — п. «а»):

а) $x^2 - a^2 = 0$ (a — некоторое число);
б) $\sin^2 x - 1 = 0$;
в) $\cos^2 x = 1$; г) $\sin^2 x - \frac{3}{4} = 0$;
д) $\cos^2 x = \frac{1}{4}$; е) $\left(\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\cos x - \frac{1}{2}\right) = 0$.

2. Укажите все значения числа x, при которых имеет смысл выражение:
а) $\sin x$; б) $\mathrm{ctg}\, x$;
в) $\cos x$; г) $\mathrm{tg}\, x$.

3. Укажите все возможные числа, которым может равняться значение выражения:
а) $\sin x$; б) $\cos x$;
в) $1 + \sin x$; г) $1 - \cos x$;
д) $\sin x - 1$; е) $1 - \sin^2 x$;
ж) $\mathrm{tg}\, x$.

4. Укажите все возможные числа, которым может равняться значение выражения:
а) $2\sin x$; б) $\frac{1}{2}\cos x$;
в) $3\sin x$; г) $-\cos x$;
д) $-\frac{1}{3}\sin x$; ; е) $2\cos x + 1$;
ж) $\frac{4 - 3\cos x}{2}$.

5. Укажите наибольшее и наименьшее значения функции (если эти значения существуют):
а) $f(x) = \cos x + 2$; б) $f(x) = \cos^2 x + 2$;
в) $f(x) = 1 - 2\sin x$; г) $f(x) = 1 - 2\sin^2 x$;
д) $f(x) = \frac{1 - \sin^2 x}{\cos^2 x} - (\cos x \cdot \mathrm{tg}\, x)^2$.

6. Решите неравенство:
а) $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\sin x \le \frac{\sqrt{2}}{2}$;
в) $\sin^2 x < \frac{1}{2}$; г)* $\cos^2 x + \frac{2 - \sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \ge 0$.

Комментарий к заданию

1. При решении этих уравнений подразумевается использование разложения на множители. Позже будет полезным вспомнить о решении этих же уравнений при знакомстве с формулами понижения степени.

1 (е). Полезно обратить внимание учеников на различные способы объединения в «серии» решений этого уравнения и существенную помощь в этом работы с окружностью.

2. Если не мешать ученикам задумываться над формулировками, с большой долей вероятности можно услышать вопрос «Как это: «выражение имеет смысл?». Разобраться в разнице между записанным и осмысленным помогает, в частности, восхитительный перевод замечательной фразы Льюиса Кэрролла: «...И хрюкотали зелюки как мюмзики в мове». Примечательно, что сам Льюис Кэрролл придал этому выражению смысл, объяснив каждое слово. Можно ли записать « $\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{2}$ »? Можно. Но придать смысл этому выражению, исходя из принятых определений, не получится.

Не исключено, что при этом придется отвечать на осмысленный (наконец-то!) вопрос «ПОЧЕМУ нельзя делить на 0»?

3; 4. Термин «множество значений» почему-то учениками живо не воспринимается и часто становится причиной беспомощности. Другое дело *указать* (вполне можно на картинке!) какие-то числа: показали, назвали, обобщили... Ничего страшного, а задание выполнено!

5. В упражнении речь идет уже о конкретном числе, видимо, поэтому термин «значение функции» воспринимается уже проще.

5 (д). Отсутствие минимального значения у этой функции весьма поучительно и может быть обосновано как вполне строго, так и исключительно наглядно, с помощью окружности. При обсуждении этого задания можно заодно обсудить основное тригонометрическое тождество с новой точки зрения, опираясь на новое определение синуса и косинуса. Тут, конечно, «стимулирующее» участие учителя может оказаться более заметным. Но увидеть теорему Пифагора в новой ситуации и применить ее все-таки было бы хорошо сообща. Безусловно, замечательно, если ученики самостоятельно вспомнят про уравнение окружности.

6. Теперь с решением этих неравенств можно разобраться более подробно, чем в задании 3. Во-первых, ученики уже привыкли работать с окружностью. Во-вторых, усвоили некоторые особенности этой работы: необходимость учитывать периодичность, наличие разных «отправных точек» на окружности, соответствующих одному и тому же значению синуса либо косинуса. В-третьих, приобрели достаточный опыт записи решений. Поэтому более тщательная работа с записью решения этих неравенств не должна оказаться слишком трудной, и ее тоже можно и нужно организовать в прежнем стиле совместного обсуждения. Последние два неравенства требуют воспоминаний о методе интервалов, причем в роли переменной выступает функция ($\sin x$ или $\cos x$). Снова незаметно и вполне естественно появляется идея замены переменной. Позднее, уже после получения формул понижения степени, полезно было бы продемонстрировать решение неравенства 6 (в) с применением этой формулы.

Особенно подчеркну, что при выполнении упражнений из заданий 4–7 применения общего вида записи решения уравнений и неравенств с использованием обратных тригонометрических функций НЕ ТРЕБУЕТСЯ.

Задание 7

1. а) $\operatorname{tg} x = 3{,}14$. Найдите $\operatorname{ctg} x$.

б) $\operatorname{ctg} x = \sqrt{2} - 1$. Верно ли, что $\operatorname{tg} x = \sqrt{2} + 1$?

в) $\sin x = 0{,}8$, $\frac{\pi}{2} < x < \pi$. Найдите $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$.

г) $\sin x = 0{,}6$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Найдите $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$.

2. Упростите выражения:

а) $\frac{1-\cos^2 x}{\sin^2 x} - (\sin x \cdot \operatorname{ctg} x)^2$; б) $\frac{1}{1+\cos\alpha} + \frac{1}{1-\cos\alpha}$;

в) $1 + \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$; г) $\frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} \cdot \frac{1+\operatorname{ctg}^2 x}{\operatorname{ctg}^2 x}$;

д) $\sin^2 a + \cos^2 a + \operatorname{ctg}^2 a$;

е) $\frac{1-\sin^2\beta}{1-\cos^2\beta} + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha$.

3. Решите уравнение:

а) $\arccos x = \frac{\pi}{6}$; б) $\arcsin x = \frac{\pi}{2}$;

в) $\arcsin x = \frac{2\pi}{3}$; г) $\arccos \frac{x}{2} = \frac{2\pi}{3}$;

д) $\arcsin \frac{x}{3} = -\frac{\pi}{4}$; е) $\arccos \frac{x}{3} = -\frac{\pi}{4}$.

4. Постройте угол, равный...

а) $\arccos \frac{2}{3}$; б) $\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)$; в) $\arcsin \frac{4}{5}$.

5. Вычислите:

а) $\cos(\arccos 1)$; б) $\cos\left(\arccos \frac{1}{2}\right)$;

в) $\sin(\arcsin 1)$; г) $\sin\left(\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

д) $\cos(\arccos(-0{,}7))$; е) $\sin\left(\arcsin\left(-\frac{5}{7}\right)\right)$.

6. Вычислите:

а) $\arccos(\cos(-1))$; б) $\arcsin\left(\sin \frac{2\pi}{3}\right)$;

в) $\arcsin(\sin 2)$; г) $\arccos\left(\cos \frac{6\pi}{5}\right)$.

7*. Вычислите:

а) $\sin(\arccos 1)$; б) $\cos(\arcsin 1)$;

в) $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$; г) $\sin\left(\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)\right)$;

д) $\arccos\left(\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$; е) $\arccos(\sin 1)$;

ж) $\arcsin\left(\cos \frac{\pi}{6}\right)$; з) $\arcsin(\cos 2)$.

Комментарий к заданию

1 (в, г). Эти задания важно решать с помощью наглядных соображений: тригонометрической окружности, осмысления тригонометрических функций $\cos x$ и $\sin x$ как координат, вспомогательного прямоугольного треугольника и теоремы Пифагора для определения нужных абсолютных величин. Применение основного тригонометрического тождества и «правила знаков» не дает возможности «пощупать руками» все смыслы и их взаимодействия. Поэтому задание 1 (в), где отличия деятельности осознанной от действий «по правилам» заметны и существенно меняют впечатление от выполнения задания, идет перед заданием 1 (г), где разница в подходах не играет заметной роли при получении результата. Увеличивается вероятность, что и к простым ситуациям подход будет не формальным, а неформальным. И постепенно воспитывается убеждение, что «думать — это здорово»!

Кстати, исходные значения в этих упражнениях указаны так, что вспомогательный прямоугольный треугольник (с катетом 6 или 8 и гипотенузой 10) для определения абсолютных значений тригонометрических функций подобен «египетскому треугольнику», что может дать дополнительные преимущества при счете.

2. В этом задании применение основного тригонометрического тождества уже вполне уместно и является основным инструментом. Упражнение 2 (а) «симметрично» упражнению 5 (д) из предыдущего задания. Так что если кто-то не успел поработать над этим упражнением тогда, столкнется с ним теперь. Для остальных выполнение этого задания будет приятным «приветом» из их личной практики.

3. *Работа с обратными тригонометрическими функциями рассматривается как продолжение работы с тригонометрической окружностью.* В этом месте примерный предварительный рассказ учителя (привязанный, например, к номеру 1 (в, г) текущего задания) про обратные тригонометрические функции может выглядеть так. (Иллюстрации на доске появляются вслед за течением мысли; предпочтительно, чтобы их выполняли ученики. Течение мысли также должно подхватывать учеников.)

Учитель. Синусом некоторой дуги тригонометрической окружности называется, как мы помним, *ордината конца этой дуги*. При этом подразумевается, что *начало — в точке пересечения положительной полуоси абсцисс и окружности*. Обратим внимание, что не всякое значение синуса, например, некое b (не $\frac{1}{2}$, не 1 или 0, или какое-нибудь иное удобное значение), соответствует удобно записываемой длине дуги. Как же записать всякую дугу, синус которой нас интересует (например, при решении уравнения $\sin x = 0{,}3$)? Поступают очень просто (как и во всех сложных случаях): эту дугу называют... дугой, но по латыни. Очень похоже, например, на такую ситуацию: «Крокодил Гена ходил на работу в зоопарк: в зоопарке он служил *крокодилом*». Похожим образом поступили и в нашем случае:

нужную дугу назвали *арксинусом* числа b («арка» по латыни — «дуга»). Запись «arcsin 0,3», например, переводится так: *«дуга, синус которой равен 0,3»*. Неудобство здесь только одно: можно указать *бесконечно* много дуг, синус которых равен 0,3. Его преодолели следующим образом: арксинусом называют только ту дугу (вспомним, где ее начало), *значение которой находится в промежутке* $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Аналогично поступают с подходящей дугой для косинуса. Попробуем определить, что такое «арккосинус числа t» *(арккосинусом числа t будем считать такую дугу тригонометрической окружности, значение которой находится в промежутке* $[0; \pi]$, *а косинус этой дуги равен числу t)*.

Решение (мне больше по душе слово «разгадывание») предложенных уравнений позволяет сразу включить размышление над только что введенными понятиями и организовать непосредственное личное знакомство с ними.

Важно, чтобы ученики САМИ догадались и о том, что уравнения 3 (в) и 3 (г) корней не имеют, и о том, как подобрать корни остальных уравнений.

4. Это упражнение фактически иное прочтение с помощью новых средств математического языка задания 2 (1,в). Приятно, если ученики заметят, что и выполнять его можно аналогично. При этом снова (по крайней мере, неявно) возникнет идея соответствия величины дуги и угловой меры. Новое развитие прежняя идея получит при выполнении упражнения 4 (б). При желании всегда можно увеличить количество таких заданий, применяя аналогичные конструкции.

5. В упражнениях 5 (а–г) намеренно применены табличные значения. При выполнении этих упражнений работа с окружностью может сопровождаться явным указанием значений соответствующих дуг. Эта возможность для некоторых учеников является определенной помощью в сознательном выполнении задания. Упражнения 5 (д, е) такой возможности уже не предоставляют, и придется ограничиться лишь указанием соответствующих точек на окружности.

6. Есть опасность, что после предыдущих упражнений этого задания возникнет мнение (и привычное желание?), что можно поставить на поток выполнение таких заданий, механически применяя подмеченные закономерности. Упражнения этого пункта призваны разрушить такую иллюзию. Впрочем, при внимательном отношении к определению арккосинусов и арксинусов и аккуратном выполнении иллюстраций сложностей возникнуть не должно. Для успешного выполнения задания необходимы лишь внимательная работа с тригонометрической окружностью и *возможность самостоятельного открытия* способа выражения нужных дуг с помощью исходных.

7. Данное задание для начального знакомства с тригонометрией является избыточным. Однако тем, кто почувствовал уверенность в работе с тригонометрической окружностью, будет весьма приятно увидеть «ловушки», возникающие в этих упражнениях, и убедиться в своих возможностях решать и такие задания тоже. *Всякие* грамотные действия в этом случае, безусловно, следует поощрять.

Задание 8

1. а) $f(x) = 3\sin x - 6\operatorname{tg}\frac{3x}{2} + \cos 2x$. Вычислите: $f(0)$; $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$; $f\left(-\frac{\pi}{6}\right)$; $f\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$.

б) $f(x) = 4\sin x \cdot \cos 2x + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{9x}{2} \cdot \operatorname{ctg}\frac{15x}{2}$. Вычислите: $f\left(-\frac{\pi}{6}\right)$; $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

2. Упростите выражение:

а) $\frac{\sin^4 a - \cos^4 a}{\sin a - \cos a}$; б) $\frac{1+\operatorname{tg}^2 b}{1+\operatorname{ctg}^2 b}$;

в) $\frac{\sin^5 x - \cos^4 x \cdot \sin x}{\sin^2 x - \cos^2 x} - \sin x$.

3. Укажите множество значений, которые может принимать выражение:

а) $\sin x$; б) $\sin^2 x$; в) $-\sin x$;
г) $-\sin^2 x$; д) $3\sin x$; е) $3\sin x - 1$;
ж) $1 - 3\sin x$; з) $3\sin^2 x - 4$;
и) $\frac{3\sin x - 1}{2}$; к) $\frac{4 - 3\sin^2 x}{5}$.

4. Решите уравнение:

а) $\cos x = \sqrt{3}$; б) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $-2\sin x = 1$; г) $\sin x = \frac{1}{3}$;

д) $\frac{1}{2}\cos x = 0,4$; е) $(4\sin x - 5)\cdot(9\cos x + 3) = 0$;

ж) $(\sin x - 1)\cdot(2\cos^2 x - 3\cos x + 1) = 0$;

з) $\left(\sin x + \frac{2}{3}\right)\cdot\left(5\cos^2 x + 7\cos x + 2\right) = 0$.

Комментарий к заданию

1. Работа с функциональной символикой. Числа подобраны так, что вычисления значений тригонометрических функций сводятся к использованию стандартных значений. Специальное заучивание этих значений представляется категорически вредным: они хорошо откладываются в памяти при разумной работе с прямоугольными треугольниками удобных размеров и тригонометрической окружностью (для определения знаков). Причем *самым главным* представляется именно опыт разумной работы, а результат, который отложится в памяти, вторичен.

2. Вспоминаем и применяем разложение на множители, формулы сокращенного умножения, деление дробей и сокращение дробей, основное тригонометрическое тождество. Объединение нескольких умений при решении одной задачи придает уверенности в собственных силах. А неожиданно простой результат, полученный взамен первоначального вида, вдохновляет.

3. Это задание представляет собой «дидактическую лесенку» упражнений. В каждом следующем пункте «срабатывает» какое-нибудь небольшое новое соображение, позволяющее справиться с заданием с учетом выполнения предыдущего. Наибольшую ценность представляет *полностью* самостоятельное выполнение учениками упражнений. Выполнение самого первого задания должно стать начальным собственным мини-открытием, а так как его обеспечивает определение синуса — еще и опытом делать собственные выводы «из ничего», то есть только из определения. Дальнейшие упражнения позволяют сопоставить различные способы записи результата: в виде числовых интервалов и в виде простейших неравенств, и повторить работу с собственно неравенствами. Если ученикам будет предоставлена должная самостоятельность, то, возможно, они смогут «переоткрыть» (или заново осознать) известные им свойства числовых неравенств в «новой обстановке». Весьма полезным может оказаться составление аналогичных заданий с участием косинуса. Но ровно такие задания могут оказаться излишними и скучными, если идея хорошо усвоена. Поэтому решение этого вопроса оставляется на усмотрение учителя. Можно, например, предложить ученикам справиться с подобными заданиями, но с косинусом, в условиях самостоятельной работы.

4. Пункт «а» — это, по сути, небольшой поворот сюжетной линии предыдущего задания, но применительно к уравнению, и совместно с фактом отсутствия у него решений тоже является маленьким открытием. Пункты «б» и «в» приведены для «разбега», чтобы дать возможность развиться аналогии, которая бы способствовала самостоятельному открытию способа записи решения задач «г» и «д» с помощью арккосинуса и арксинуса. Решение упражнений «г» и «д» требует также *самостоятельного* применения обратных тригонометрических функций. Без этого условия упражнения теряют ценность. Задания «е»–«з» подразумевают применение нескольких уже встречавшихся идей: произведение множителей, равняющееся нулю, замена переменной, работа с тригонометрической окружностью и основной метод решения уравнений — разложение на множители. Решения заданий «ж» и «з» следует ожидать не от всех учеников.

Задание 9

1. Используя опыт работы с определениями арксинуса и арккосинуса числа x, а также определения тангенса и котангенса некоторой дуги, выполните следующие задания. (Привлечение тригонометрической окружности, прямой тангенсов и прямой котангенсов может оказать значительную помощь.)

а) Что такое «$\operatorname{arctg} x$»?

б) Что такое «$\operatorname{arcctg} x$»?

в) Изобразите на тригонометрической окружности: $\operatorname{arctg} 1$; $\operatorname{arctg} 2$; $\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right)$; $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

г) Изобразите на тригонометрической окружности: $\operatorname{arcctg}(-1)$; $\operatorname{arcctg}(-1{,}5)$; $\operatorname{arcctg}\frac{1}{2}$; $\operatorname{arcctg}\pi$.

д) Сравните: $\operatorname{arctg} 60$ и $\operatorname{arctg}\frac{\pi}{3}$.

е) Сравните: $\operatorname{arctg} 2$ и $\operatorname{arcctg} 1{,}5$.

2. Вычислите:

а) $\operatorname{arctg}\sqrt{3}+\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{3}$;

б) $\operatorname{arctg} 1+\operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right)$;

в) $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{7}\right)+\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(-\frac{2\pi}{7}\right)\right)$;

г) $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4}\right)+\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$;

д) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\pi\right)+\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$;

е)* $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 2)+\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} 4)$;

ж)* $\operatorname{arctg} 2+\operatorname{arcctg} 2$;

з)* $\operatorname{arctg} x+\operatorname{arcctg} x$.

3. Решите уравнение:

а) $2\operatorname{tg} x = 3$; б) $(\operatorname{tg}^2 x - 3)(\operatorname{tg} x - 3) = 0$;

в) $3\operatorname{tg} x = 5\operatorname{ctg} x$; г) $\operatorname{tg}^2 x + 5\operatorname{tg} x = 6$.

Комментарий к заданию

1. Очень важно, чтобы работа учеников над определениями арктангенса и арккотангенса была как можно более самостоятельной. Обратите внимание учеников (в который раз!) на то, что мы работаем с окружностью единичного радиуса, а в этом случае радианная мера (углов) полностью соответствует мере длины (дуг) этой окружности. Поэтому задание «изобразите на тригонометрической окружности» имеет и дополнительную нагрузку — еще раз осознать этот двойной смысл. Что особенно актуально при выполнении, например, последнего упражнения из пункта 1 (в), которое требует четкого понимания того, что $\frac{\pi}{2}$ — число, которое изображается на прямой тангенсов в виде отрезка соответствующей длины. Упражнение 1 (д) тоже содержит «ловушку», связанную с распространенной привычкой «стандартно» относиться к некоторым числам.

2. Упражнение «а» подразумевает работу с табличными значениями и никаких дополнительных сложностей не содержит. В упражнении «б» небольшой «нагрузкой» является отрицательный аргумент котангенса, упражнение «в» стимулирует осознание определения, а упражнения «г» и «д» уже подразумевают аккуратную работу с ним. Для упрощения этой работы используются стандартные значения аргументов, которые могут оказаться дополнительной опорой, если параллельно общим рассуждениям с помощью тригонометрической окружности указывать конкретные числовые значения. Упражнения «е»–«з» сложнее; и хотя рассуждения, которые могут быть приведены для обоснования выводов при выполнении этих упражнений, по сути не выходят за рамки работы с определением и не представляются слишком сложными, выполнение этих упражнений следует ожидать не от всех учащихся. Но обсудить их геометрическое решение с использованием прямых тангенсов и котангенсов будет интересно и полезно. Естественно, выстраивая общение с учениками в виде совместного развития мысли.

3. При решении уравнений весьма разумно, как и ранее, сделать тригонометрическую окружность и прямую тангенсов (или котангенсов) обязательным элементом объяснения и записи решения, даже если имеем дело с табличными значениями. В пункте 3 (в) полезно умножить обе части уравнения на tg x, предварительно проверив, что нулевое его значение можно исключить. Поскольку в школах такой подход к преобразованию уравнений, основанный на понятии равносильности, почему-то в основном заменен правилами, особенно во 2–6-х классах, привычка может помешать ученикам самостоятельно додуматься до этого действия. Но самостоятельность все-таки важнее этих соображений. Поэтому замечания, *непосредственно относящиеся к решению,* учителем должны сообщаться ПОСЛЕ самостоятельных действий учеников. Пожалуй, этот комментарий применим ко всем предлагаемым упражнениям.

Задание 10

Ключевая формула школьного курса тригонометрии возникнет при работе над задачей вычисления длины одного и того же отрезка с двух точек зрения.

1. Изобразите прямоугольную систему координат.

а) Отметьте точки $A(1;\ 5)$ и $C(-2;\ 1)$. Нарисуйте такой прямоугольный треугольник, который поможет вычислить длину AB. Вычислите эту длину.

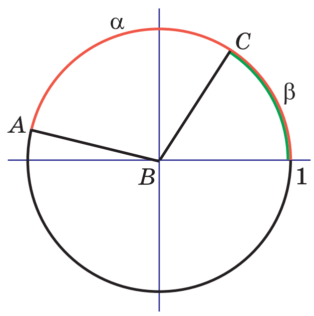
б) Отметьте какие-нибудь точки $A(k;\ p)$ и $C(h;\ r)$. Объясните, как и с помощью какого прямоугольного треугольника вычислить длину AC?

в) Чем отличается решение задачи пункта «б» в различных случаях расположения точек A и C? Как расположение точек влияет на результат?

2. а) Нарисуйте острый угол с вершиной B. Присвоим ему значение α. На сторонах угла отложите отрезки BA и BC. Присвоим их длинам значения a и b. Как теперь вычислить длину AC?

б) Как изменится решение задачи пункта «а», если вначале нарисовать тупой угол?

3. Исходя из данных рисунка:



а) определите координаты точек A и C;

б) определите величину угла ABC и отрезков BA и BC;

в) определите двумя способами значение AC^2;

г) понаблюдав за результатами пункта «в», получите равенство для $\cos(\alpha - \beta)$.

4.* Верно ли (и почему), что:

а) тот же результат будет справедлив и для $\cos(\beta - \alpha)$;

б) тот же результат будет справедлив и для $\cos(2\pi - (\alpha - \beta))$;

в) полученная формула будет выполняться для произвольных значений $\alpha - \beta$, а не только для тех, которые находятся в пределах развернутого угла?

Комментарий к заданию

1. Безусловно, согласно школьной программе к 10-му классу ученики должны знать формулу определения расстояния между точками по их координатам. Однако практика показывает, что эту формулу знают очень немногие. Еще меньшее количество, зная формулу, имеет представление о ее происхождении и воспринимает ее согласно правилу «Это невозможно понять, это надо запомнить». Поэтому очень полезным окажется самостоятельное открытие того, что, кроме теоремы Пифагор для получения этой формулы ничего не требуется. Такие открытия воспитывают уверенность в себе, что порождает хорошее отношение к предмету в целом. При условии, конечно, что открытие состоится (хотя бы в некоторой степени), а не будет заменено прямым указанием учителя.

Конечно, если представления учеников о формуле расстояния между точками являются полными, подробное выполнение упражнения может быть опущено.

2. Повторять или не повторять доказательство теоремы косинусов, зависит от конкретных обстоятельств. Чаще всего они таковы, что организация этого повторения в виде самостоятельного мини-открытия весьма актуальна по причинам, названным выше. Но если ученик с ходу и верно пользуется теоремой косинусов, требовать или нет от него доказательство этой теоремы — дело, как говорится, хозяйское. Возможно, достаточно обратить внимание на разницу в вычислениях при применении теоремы в случаях острого и тупого угла, лишний раз поработав с определением косинуса.

3. К этому, ключевому, моменту ученики уже достаточно хорошо подготовлены предыдущими упражнениями и умением работать согласно определениям. Поэтому вся работа может и должна проделываться ими без существенного вмешательства учителя. Два способа, о которых идет речь в пункте «в», — как раз те, что были рассмотрены в упражнениях 1 и 2 этого задания. Поэтому, даже если задания 1 и 2 будут признаны излишними, не стоит пропускать их вовсе, чтобы не оставлять учеников перед неопределенным выбором теперь.

4. Это упражнение для самых дотошных учеников. Возможно, некоторые успели втянуться в эту тему так, что им захочется доказать формулу полностью, не ограничиваясь удобным, как на картинке, соотношением дуг. Тогда придется вспоминать про четность функции косинус (пункт «а») и ее периодичность (пункты «б» и «в»). Пункт «б» необходим для того, чтобы обосновать верность формулы в случае, если $\pi < \alpha - \beta < 2\pi$, а в пункте «в» придется аккуратно рассмотреть еще и случаи равенства разности $\alpha - \beta$ нулю; π; 2π.

Задание 11

1. Воспользовавшись удачно подобранными значениями α и β в выражении $\cos(\alpha - \beta)$, вычислите:

а) $\cos 15°$;

б) $\cos 75°$;

в) $\cos 105°$.

2. Догадайтесь, как получить разность вместо суммы $\alpha + \beta$ и формулу для $\cos(\alpha + \beta)$, опираясь на формулу для $\cos(\alpha - \beta)$.

3. Преобразуйте:

а) $\cos\left(\begin{matrix}\frac{\pi}{2}\\ \frac{3\pi}{2}\\ \pi\end{matrix}+\alpha\right)$; б) $\cos\left(\begin{matrix}\frac{\pi}{2}\\ \frac{3\pi}{2}\\ \pi\end{matrix}-\alpha\right)$.

4. а) Напишите равенство для $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$. Замените в левой и правой частях этого равенства переменную x на выражение $\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$. Упростите полученное такой заменой выражение.

б) В равенстве для $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ замените x выражением $(\alpha + \beta)$ и догадайтесь, как вывести формулу для $\sin(\alpha + \beta)$.

в) Вычислите: $\sin 75°$; $\sin 105°$; $\sin 15°$.

5. Придумайте, как вывести формулу для $\sin(\alpha - \beta)$.

6. Преобразуйте:

а) $\sin\left(\begin{matrix}\frac{\pi}{2}\\ \frac{3\pi}{2}\\ \pi\end{matrix}+\alpha\right)$; б) $\sin\left(\begin{matrix}\frac{3\pi}{2}\\ \pi\end{matrix}-\alpha\right)$.

Комментарий к заданию

2. Идея замены выражения $\alpha + \beta$ выражением $\alpha - (-\beta)$ с последующей заменой β на $-\beta$ в полученной в предыдущем задании формуле и с дальнейшими небольшими преобразованиями при условии самостоятельного открытия заслуживает возгласа «Эврика!». Задача учителя (при необходимости!) так произносить свои подсказки, чтобы они были как можно незаметнее, а этот возглас как можно громче.

3. Обоснование формул приведения, с одной стороны, способствует их запоминанию, с другой — запоминанию применяемых формул косинуса суммы и разности. А еще служит основой для выполнения упражнения 4.

4; 5. Если работа над этими заданиями пойдет не очень активно, можно оживить ее, например, организацией игры-соревнования между «рабочими группами» в классе: кто раньше догадывается, тот пишет и озвучивает обоснованное доказательство для всех, а группа получает баллы; также можно начислять баллы другим группам за существенные дополнения ответа. По результатам набранных баллов **все** члены победившей группы могут быть чем-нибудь награждены (отличными отметками за урок, либо послаблением в домашнем задании, либо может разыгрываться право не ответить ровно на один вопрос без снижения отметки — фантазия подскажет, чем можно наградить победителей!). Но при дополнительном условии: наличии хороших записей всех выводов формул. Надеюсь, что творческая мысль читателя продолжит и дополнит мысль автора. Упражнение 5, рассчитано на возникновение у учеников личных воспоминаний о приеме, который был применен в случае с косинусом.

6. Это упражнение аналогично третьему в этом задании, но случай $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ исключен, так как соответствующая формула уже была получена в упражнении 4 (а).

Задание 12

1. а) Имея в виду, что $x + x = 2x$, получите формулу для $\sin 2x$.

б) Придумайте, как получить формулу для $\cos 2x$. Получите три варианта записи этой формулы.

2. Решите уравнение:

а) $\cos^2 x - 3\cos x = 0$; б) $\sin^2 x = 2\sin x$;

в) $\sin 2x + \cos x = 0$; г) $\sin^2 x - 3 = \cos 2x$;

д) $\cos 2x + 1 = \cos x$; е) $\sin^2 x = 1 + \cos^2 x$;

ж) $\cos^4 x - \sin^4 x = \frac{1}{2}$.

Комментарий к заданию

После выполнения упражнения 1 работу над основными формулами тригонометрии можно считать завершенной. В руках учеников находится основной арсенал тригонометрических формул и приемов, который для большинства из них окажется и достаточным. В упражнении 1 (а) «логичнее» было бы сделать подсказку в виде равенства $2x = x + x$. Однако, как показывает опыт, в работе с обычными учениками важны даже такие мелочи, а примененная в формулировке перестановка способствует активизации мыслительного процесса, в большей степени делая его самостоятельным. Упражнение 2 дает возможность получить удовольствие от применения самостоятельно полученных знаний в различных ситуациях.

Задание 13

1. Вычислите без калькулятора:

а) $\sin 10° \cdot \cos 20° + \cos 10° \cdot \sin 20°$;

б) $\cos\frac{5\pi}{12}\cdot\cos\frac{\pi}{12}-\sin\frac{5\pi}{12}\cdot\sin\frac{\pi}{12}$;

в) $\sin 7° \cdot \cos 37° - \cos 7° \cdot \cos 53°$;

г) $\sin\frac{3\pi}{7}\cdot\sin\frac{2\pi}{21}+\cos\frac{2\pi}{21}\cdot\cos\frac{3\pi}{7}$.

д)* $\cos 59° \cdot \cos 89° - \cos 149° \cdot \sin 91°$.

2. Решите уравнение:

а) $\sin\frac{\pi}{6}\cdot\cos x+\cos\frac{\pi}{6}\cdot\sin x=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$;

б) $\cos\frac{\pi}{3}\cdot\cos 2x+\cos\frac{\pi}{6}\cdot\sin 2x=0$;

в) $\frac{1}{2}\sin 3x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 3x=1$;

г) $\sqrt{2}\sin x-\sqrt{2}\cos x=2$;

д) $\cos x - \sin x = 1$.

3. а) Вычислите без калькулятора: $\operatorname{tg} 75°$; $\operatorname{tg} 15°$.

б) Вычислите $\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$, если $\operatorname{tg}\alpha = 2$.

Комментарий к заданию

Закрепление использования полученных основных формул (упражнение 1) дополняется необходимостью придумать промежуточные шаги для того, чтобы применение этих формул стало возможным 1 (в–д).

Дальнейшее применение этой идеи развивается при решении уравнений (упражнение 2). Очевидная ситуация 2 (а) последовательно сменяется все менее очевидными, и в конце остается фактически совсем немного до применения метода вспомогательного аргумента. Рассматривать или нет далее этот метод после открытия учениками идеи решения уравнений 2 (в–д), зависит от того, насколько ученики увлечены решением задач и готовы к работе с более сложными заданиями.

3. Выполнение этого упражнения сопряжено с необходимостью самостоятельно совместить определение тангенса, соответствующие полученные формулы для синуса и косинуса и опыт решения похожих задач ранее (*задание 11*). При решении упражнения 3 (б) придется столкнуться с технической сложностью, которая при условии самостоятельной работы имеет характер творческого технического приема и преодоление которой открывает прямой путь к выводу формул тангенса суммы или разности аргументов. Самостоятельно получить эти формулы и можно предложить некоторым ученикам класса. Смогут ли они сами преодолеть техническую сложность, о которой шла речь, или же им потребуются сильные подсказки, зависит от того, насколько они успели привыкнуть к самостоятельным действиям, работая с этой системой заданий.

Задание 14

Решите уравнение **(1–6)**.

1. $\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$.

2. $6\sin^4 x = 1 - \sin^2 x$.

3. $\operatorname{tg}^3 x = \operatorname{tg} x$.

4. $2\cos^2 x = 3\sin x + 2$.

5. $2\operatorname{tg} x + 3\operatorname{ctg} x = 5$.

6*. $1 - \sin 2x = \cos x - \sin x$.

Комментарий к заданию

Несколько уравнений, решения которых не содержат принципиально новых идей решения (пожалуй, кроме шестого), в заключение скорее являются проверкой не столько полученных конкретных знаний, хотя и этого тоже, сколько навыка самостоятельных действий и принятия самостоятельных решений.

НЕКОРРЕКТНАЯ ЗАДАЧА

М. СТАРШОВ,
mastarshov@mail.ru,
г. Москва

На одном учительском сайте случайно попал в раздел «Гостевая книга», зачитался перепиской хозяина с гостями, в основном со своими учениками, и, как оказалось, не зря.

Одно послание привлекло особое внимание в силу моей врожденной способности выбирать в текстах какие-нибудь изюминки. Вот пишет мальчик:

«Глеб (23.05.2014 19:37)

Концы данного отрезка длиной 125 см отстоят от плоскости на 100 см и 56 см. Найти длину его трапеции. Можете помочь? Пожалуйста!»

Ответ. Добрый вечер, Глеб! Могу, только сформулируй задачу корректно!

Интересно, а я смогу ли решить столь некорректную задачу? Вопрос-то я понимаю, хотя никогда не преподавал математики.

Представил себе трапецию. Разность ее оснований 100 – 56 = 44 см есть катет прямоугольного треугольника, гипотенузой которого является заданный отрезок 125 см, и по теореме Пифагора второй катет легко вычисляется. А он в этой трапеции «работает» высотой:

$$h=\sqrt{125^2-44^2}=\sqrt{81\cdot 169}=9\cdot 13=117.$$

Осталось только сложить четыре числа:

$$56 + 100 + 125 + 117 = 398 \text{ см}.$$

При таком порядке действий вся задача решается «в уме». И тут я задумался: едва ли мальчик Глеб придумал эту задачу, вероятно, был какой-то хороший добрый математик (я представил себе старого учителя земской школы, похожего на Льва Толстого), который подобрал именно такие удобные числа. Возможно, на уроке, после найденного кем-то из школьников ответа, он показывал короткий и легкий путь решения; как говорил когда-то мой учитель Николай Иванович — рациональное решение. И эта простенькая задача служила ему и школярам очень разнообразно. Тут и свойства трапеции, и теорема Пифагора, и формула разности квадратов, и поучение не торопиться, работая с цифрами; не возводя два числа в квадрат, так как удобнее и проще работать с корнем. И даже повторение квадратов чисел первой сотни! Если сейчас в каждом телефоне есть калькулятор, зачем помнить, что 169 — это квадрат тринадцати?

Школьные преподаватели математики, вероятно, знают эту задачу, но используют ли они все ее скрытые возможности?

А школьные физики могут увидеть здесь аналогию с прекрасной задачей о сталкивающихся поездах, «под которые попала» автор известного пособия для поступающих в вузы Л.Б. Милковская. В трех изданиях с неизменным названием «Повторим физику» (в 1970, 1972 и 1977-м годах) автор сражается с условием одной и той же старинной задачи в поисках спасения поездов, особенно одного из них, с пассажирами. А на самом деле первый вариант задачи содержал тоже очень аккуратно подобранные настоящим автором числа. Поезда при этом «сталкивались», но при относительной скорости 3 метра в секунду. Да с такой скоростью приземлился Том Сойер, спрыгнувший не то что с забора, а с табуретки. Вот здесь-то физик и видит изюминку в задаче — возможность в игровой почти форме донести до школьников трудное понятие относительной скорости. А при изменении чисел это пропадает, хотя пассажиров «удается спасти».

В заключение с удовольствием отмечаю требование педагога к ученику: «Могу, только сформулируй задачу корректно!»

У меня тоже возникли претензии к этому Глебу, но он, видимо, долго мучился с задачей и не списывал ее текст, а писал по памяти. И пересказал ее довольно понятно. Интересно, в каком классе он учится? Мне почему-то хочется, чтобы у меня были такие ученики, а то все ЕГЭ да ЕГЭ...

Педагогический университет
«Первое сентября»

ДИСТАНЦИОННЫЕ КУРСЫ ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

(с учетом требований ФГОС)

Ведется прием заявок на первый поток 2015/16 учебного года

образовательные программы:

- НОРМАТИВНЫЙ СРОК ОСВОЕНИЯ – 108 УЧЕБНЫХ ЧАСОВ

  Стоимость – 4990 руб.

- НОРМАТИВНЫЙ СРОК ОСВОЕНИЯ – 72 УЧЕБНЫХ ЧАСА

  Стоимость – от 3990 руб.

По окончании выдается удостоверение о повышении квалификации установленного образца

Перечень курсов и подробности – на сайте edu.1september.ru

Пожалуйста, обратите внимание:

заявки на обучение подаются только из Личного кабинета, который можно открыть на любом сайте портала www.1september.ru

Г. ФИЛИППОВСКИЙ,
г. Киев.

КЛАВДИЙ ПТОЛЕМЕЙ И ЕГО ТЕОРЕМА

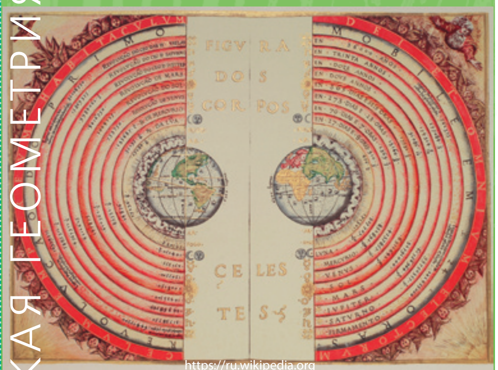

https://ru.wikipedia.org

Иллюстрация геоцентрической системы мира, сделанная португальским картографом Бартоломеу Велью в 1568 году

Легче, кажется, двигать самые планеты, чем постичь их движение.
Клавдий Птолемей

Клавдий Птолемей (II век н.э.) — автор знаменитого труда «Великое математическое построение астрономии в XIII книгах» («Альмагест»). И хотя Птолемей ошибся в своих астрономических постулатах: Земля на самом деле не является центром Вселенной, но его астрономические вычисления были наиболее точными.

При изучении звездного неба у Птолемея возникла потребность в определении хорд различных дуг величиной до 1° и даже меньше. Именно в этот момент и выручила доказанная им же теорема *о произведении диагоналей вписанного в круг четырехугольника*! *Теорема Птолемея* до сих пор служит нам при решении задач на вписанный четырехугольник.

Также с именем Птолемея связаны и достижения греческой тригонометрии. И хотя в то время еще не вошли в обиход понятия синуса, косинуса, тангенса, но, опираясь на труды Гиппарха (ок. 190–125 гг. до н.э.), Птолемей составил знаменитые *таблицы хорд* дуг окружностей. А работать с хордами или с синусами — это фактически одно и то же, поскольку синус равен половине такой хорды (рис. 1): $\sin\alpha = \frac{a}{2} : 1$ и $a = AB = 2\sin\alpha$. Таблица хорд Птолемея, сохранившаяся до наших дней, соответствует таблице синусов от 0 до 90° (с шагом 0,25°) — с пятью верными знаками после запятой!

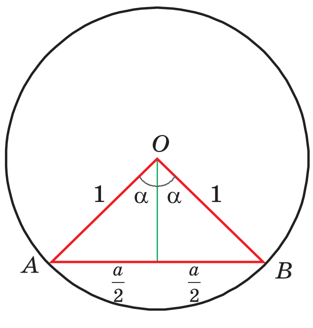


Рис. 1

Понятно, что создание этой *таблицы* было в первую очередь вызвано к жизни потребностями астрономии, и впервые они появились в главной работе Птолемея «Альмагест», где наряду с тригонометрией на плоскости содержались элементы сферической тригонометрии и прилагался каталог из 1028 звезд. «Альмагест» для того времени давал наиболее полную картину мироздания.

К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru (Задачи для самостоятельного решения)

Нас же интересует *теорема Птолемея*, которая в древности звучала так:

Прямоугольник, построенный на диагоналях вписанного в круг четырехугольника, равен сумме прямоугольников, построенных на противоположных сторонах.

Задачи, приведенные в данной статье, покажут, сколь она действенна, как порой она выручает при решении сложных геометрических задач.

Предложим оригинальное, редко встречающееся в литературе доказательство теоремы Птолемея. Итак, докажем, что *произведение диагоналей вписанного в круг четырехугольника равно сумме произведений его противоположных сторон*, или, согласно рисунку 2, $ef = ac + bd$.

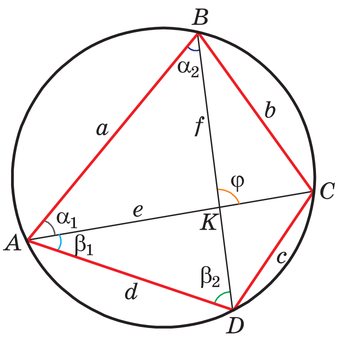


Рис. 2

Заметим, что $\varphi = \alpha_1 + \alpha_2$ (внешний угол треугольника ABK) и $\varphi = 180° - (\beta_1 + \beta_2)$ — из треугольника AKD. Тогда

$$\sin\varphi = \sin(\alpha_1 + \alpha_2) = \sin(\beta_1 + \beta_2).$$

Очевидно, что

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} ef \sin\varphi. \qquad (1)$$

Проведем $BN \parallel AC$ (рис. 3).

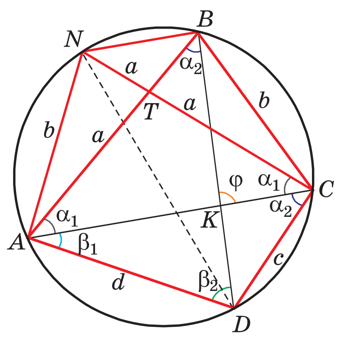


Рис. 3

Очевидно, что $ANBC$ — равнобокая трапеция и

$$AN = BC = b,\ NC = AB = a,$$

$$\angle NCA = \angle BAC = \alpha_1.$$

$$S_{ANCD} = S_{ABCD}$$

(так как в трапеции $ANBC$ треугольники ANT и CTB равновелики). Четырехугольник $ANCD$ состоит из двух треугольников: NCD и NAD, а его площадь есть сумма площадей этих треугольников.

$$S_{NCD} = \frac{1}{2} ac \sin\angle NCD.$$

Поскольку $\angle ACD = \angle ABD = \alpha_2$ (вписанные, опираются на одну дугу), то

$$S_{NCD} = \frac{1}{2} ac\sin(\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{1}{2} ac \sin\varphi,$$

$$S_{NAD} = \frac{1}{2} bd \sin\angle NAD.$$

Поскольку $\angle NAC = \beta_2$ (стягивает такую же дугу, что и $\angle ADB = \beta_2$), то

$$S_{NAD} = \frac{1}{2} bd\sin(\beta_1 + \beta_2) = \frac{1}{2} bd\sin\varphi.$$

Итак,

$$S_{ANCD} = \frac{1}{2} ac\sin\varphi + \frac{1}{2} bd\sin\varphi = S_{ABCD},$$

или

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(ac + bd)\sin\varphi. \qquad (2)$$

Сравнив (1) и (2), получим:

$$ef = ac + bd.$$

Теорема Птолемея доказана! Однако остается вопрос: как Птолемей, составляя *таблицы хорд*, пользовался своей знаменитой теоремой? А вот как!

• Пусть в круге радиуса R известны хорды $AB = a$, $AC = b$. Требуется найти хорду $BC = x$, соответствующую разности дуг AC и AB (рис. 4).

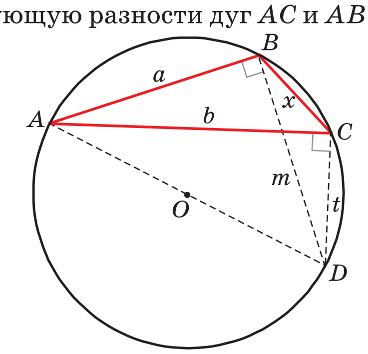


Рис. 4

Решение. Проведем диаметр AD и найдем длины отрезков BD и CB из прямоугольных треугольников ABD и ACD:

$$BD = m = \sqrt{4R^2 - a^2},$$

$$CD = t = \sqrt{4R^2 - b^2}.$$

Применим теорему Птолемея для четырехугольника $ABCD$:

$$b \cdot m = a \cdot t + 2R \cdot x,\quad x = \frac{bm - at}{2R}.$$

Зная теперь хорду дуги BC, Птолемей находил хорду половины дуги BC. При этом он пользовался формулой, аналогичной современной формуле:

$$2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \cos\alpha.$$

Приведем современное геометрическое доказательство этой формулы.

• Пусть в равнобедренном треугольнике ABC ($b = c$, $\angle BAC = \alpha$) проведены высоты AH_1 и BH_2 (рис. 5).

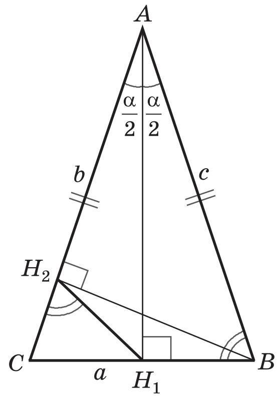


Рис. 5

Нетрудно показать, что треугольники H_1H_2C и ABC подобны. Тогда

$$\frac{CH_1}{b} = \frac{CH_2}{a},$$

или

$$CH_1 \cdot a = CH_2 \cdot b. \qquad (3)$$

Но

$$CH_1 = b \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$$

(из треугольника ACH_1) и

$$a = 2CH_1 = 2b\sin\frac{\alpha}{2}.$$

$CH_2 = b - AH_2$, где $AH_2 = c \cdot \cos\alpha = b \cdot \cos\alpha$ (из треугольника ABH_2). Тогда

$$CH_2 = b - b\cos\alpha = b(1 - \cos\alpha).$$

Подставим полученное значение в равенство (3):

$$b \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot 2b \cdot \sin\frac{\alpha}{2} = b(1 - \cos\alpha) \cdot b,$$

откуда получим:

$$2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \cos\alpha.$$

Заметим, что эта формула позволяла Птолемею, вычислив, например, хорду дуги 12°, находить хорды дуг 6°, 3°, 1,5°, 0,75°.

Следует отметить, что способ вычисления хорд соответствующих дуг с помощью теоремы Птолемея также совпадает с известными нам формулами тригонометрии:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta.$$

И вот почему.

• Пусть треугольник ABC вписан в окружность радиуса R (рис. 6). Проведем диаметр CD. При этом пусть

$$\angle ACD = \angle ABD = \alpha \text{ и } \angle DCB = \angle DAB = \beta.$$

По теореме Птолемея для четырехугольника $ADBC$ имеем:

$$c \cdot CD = a \cdot AD + b \cdot BD.$$

Но $c = 2R\sin(\alpha + \beta)$ — теорема синусов для треугольника ABC.

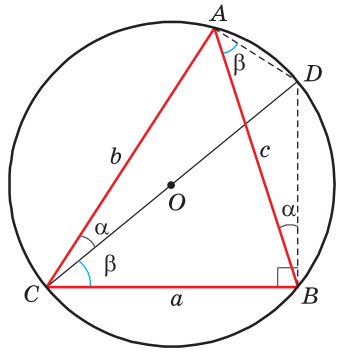


Рис. 6

$a = 2R\cos\beta$ — из прямоугольного треугольника CBD ($\angle CBD = 90°$ как вписанный, опирающийся на диаметр).

$AD = 2R\sin\alpha$ и $BD = 2R\sin\beta$ — теорема синусов для треугольника ABD.

$b = 2R\cos\alpha$ — из прямоугольного треугольника CAD.

Итак,

$$2R \cdot \sin(\alpha + \beta) \cdot 2R =$$
$$= 2R\cos\beta \cdot 2R \cdot \sin\alpha + 2R\cos\alpha \cdot 2R \cdot \sin\beta.$$

После сокращения на $4R^2$ получим:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta.$$

Приведем еще весьма изящное *доказательство теоремы косинусов с помощью теоремы Птолемея.*

• Опишем окружность около треугольника ABC и проведем $AD \parallel BC$ (рис. 7). Очевидно, что $ABCD$ — равнобокая трапеция и

$$BD = AC = b,\ CD = AB = c,$$
$$\angle DCB = \angle ABC = \angle B.$$

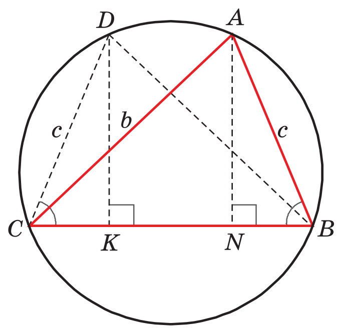


Рис. 7

Проведем в трапеции высоты AN и DK. Тогда

$$CK = BN = c\cos B.$$

После чего найдем, что

$$KN = a - 2c \cdot \cos B = AD.$$

Применив теорему Птолемея к трапеции $ABCD$, получим:

$$c^2 + a \cdot (a - 2c \cdot \cos B) = b^2,$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B.$$

Итак, мы убедились: истоки теоремы Птолемея — в тригонометрии!

А теперь посмотрим, как теорема Птолемея помогает решать задачи.

Задача 1. Найти диагональ равнобокой трапеции с основаниями a и b и боковой стороной c.

Решение. Боковые стороны и диагонали равнобокой трапеции равны. Кроме того, около равнобокой трапеции можно описать окружность (*покажите!*). Тогда согласно рисунку 8 имеем:

$$d \cdot d = a \cdot b + c \cdot c,\ d = \sqrt{ab + c^2}.$$

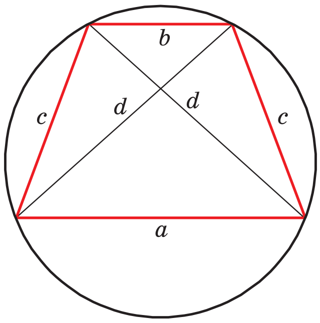


Рис. 8

Задача 2. Вокруг квадрата $ABCD$ описана окружность. На дуге BC произвольно взята точка K. Известно, что $KB + KD = n$. Найти KA.

Решение. Пусть сторона квадрата AB равна a (рис. 9).

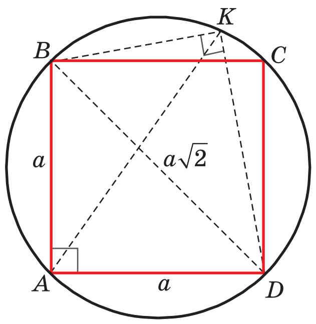


Рис. 9

Четырехугольник $ABKD$ вписан в окружность, для него справедлива теорема Птолемея:

$$KA \cdot a\sqrt{2} = KB \cdot a + KD \cdot a,$$
$$KA \cdot a\sqrt{2} = a(KB + KD).$$

Поскольку по условию $KB + KD = n$, то

$$KA = \frac{n}{\sqrt{2}}.$$

Задача 3. По двум данным хордам a и b круга диаметром $2R$ найти длину хорды, которая стягивает их суммарную дугу.

Решение. Пусть

$$AB = a,\ BC = b,\ AC = x.$$

Проведем диаметр BD (рис. 10). Тогда

$$\angle BAD = \angle BCD = 90^\circ$$

(вписанные, опираются на диаметр). Значит,

$$AD = \sqrt{4R^2 - a^2} \text{ и } CD = \sqrt{4R^2 - b^2}.$$

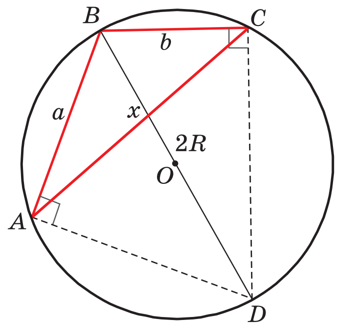


Рис. 10

Согласно теореме Птолемея для вписанного четырехугольника $ABCD$

$$x \cdot 2R = a\sqrt{4R^2 - b^2} + b\sqrt{4R^2 - a^2},$$

откуда

$$x = \frac{1}{2R}\left(a\sqrt{4R^2 - b^2} + b\sqrt{4R^2 - a^2}\right).$$

Задача 4. Дан треугольник ABC со сторонами a, b, c. Найти расстояние от центра O описанной около него окружности до высоты AH_1 (рис. 11).

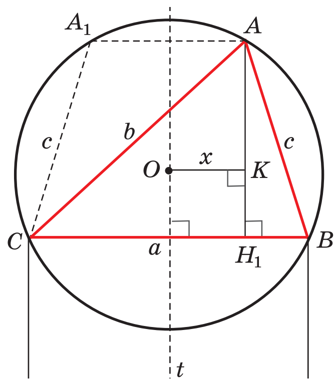


Рис. 11

Решение. Пусть $b > c$ и $OK = x$ — искомое расстояние. Выполним зеркальное отображение треугольника ABC относительно t — серединного перпендикуляра к BC. Получим равнобокую трапецию $ABCA_1$, в которой $AA_1 = 2OK = 2x$. По теореме Птолемея для этой трапеции имеем:

$$b \cdot b = 2x \cdot a + c \cdot c,$$

откуда

$$x = \frac{b^2 - c^2}{2a}.$$

Задача 5. Дан равносторонний треугольник ABC с центром O. Точка K внутри него такова, что $\angle BKC = 120^\circ$. Известно, что $CK - BK = n$. Найти KO.

Решение. Поскольку

$$\angle BKC = \angle BOC = 120^\circ,$$

то точки B, K, O, C лежат на одной окружности (рис. 12). Пусть

$$AB = BC = AC = a.$$

Тогда

$$BO = CO = R = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

(*покажите!*). По теореме Птолемея для вписанного четырехугольника $BKOC$:

$$CK \cdot R = OK \cdot a + BK \cdot R,$$

откуда

$$OK \cdot a = R \cdot (CK - BK),$$

$$OK \cdot a = \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot n, \; OK = \frac{n}{\sqrt{3}}.$$

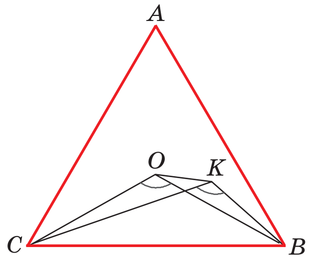


Рис. 12

Задача 6. Радиусы двух концентрических окружностей ω и ω_1 соответственно равны 15 и 8. Точка K находится на расстоянии 17 от их центра O (рис. 13). Найти расстояние TN между ближайшими точками касания, лежащими на ω и ω_1 (KT и KN — касательные к окружностям ω и ω_1).

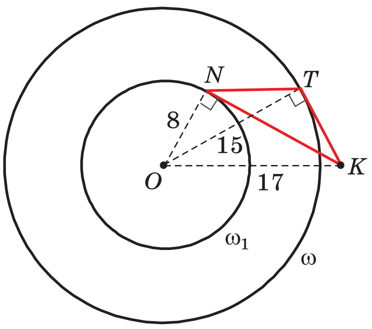


Рис. 13

Решение. Очевидно, что около четырехугольника $KTNO$ можно описать окружность ($\angle OTK = \angle ONK = 90°$). При этом

$$TK = \sqrt{17^2 - 15^2} = 8 \text{ и } NK = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15.$$

Тогда, воспользовавшись теоремой Птолемея для четырехугольника $KTNO$, получим:

$$15 \cdot 15 = TN \cdot 17 + 8 \cdot 8,$$

откуда

$$TN = \frac{225 - 64}{17} = 9\frac{8}{17}.$$

Задача 7. I — центр вписанной окружности треугольника ABC со сторонами a, b, c. Прямая AI пересекает описанную около треугольника окружность в точке W. Чему равно отношение $\frac{AW}{IW}$?

Решение. Запишем теорему Птолемея для четырехугольника $ABWC$ (рис. 14):

$$AW \cdot a = BW \cdot b + CW \cdot c.$$

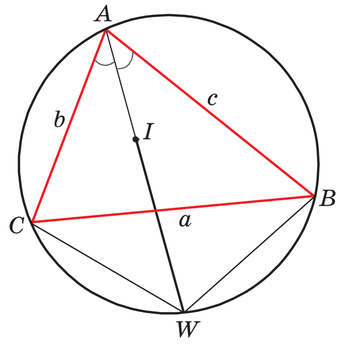


Рис. 14

Согласно «теореметрилистника» $BW = CW = IW$ (*докажите!*). Тогда

$$AW \cdot a = IW \cdot (b + c), \quad \frac{AW}{IW} = \frac{b+c}{a}.$$

Задача 8. Доказать, что в остроугольном треугольнике ABC справедливо равенство

$$a \cdot AH + b \cdot BH + c \cdot CH = 4S$$

(H — ортоцентр, S — площадь треугольника).

Доказательство. Точки, симметричные ортоцентру треугольника ABC относительно его сторон, лежат на описанной около треугольника ABC окружности (*докажите!*). То есть $HH_1 = H_1N$. При этом $BN = BH$, $CN = CH$ (рис. 15).

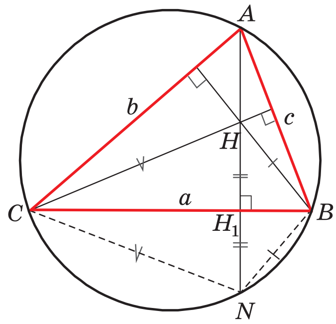


Рис. 15

По теореме Птолемея для четырехугольника $ABNC$

$$a \cdot AN = b \cdot BN + c \cdot CN.$$

Поскольку

$$HH_1 = H_1N \text{ и } AH_1 = h_a,$$

то можно записать, что

$$AN = 2h_a - AH.$$

С учетом того, что

$$BN = BH \text{ и } CN = CH,$$

имеем:

$$a \cdot (2h_a - AH) = b \cdot BH + c \cdot CH,$$

$$2ah_a = a \cdot AH + b \cdot BH + c \cdot CH,$$

$$4S = a \cdot AH + b \cdot BH + c \cdot CH.$$

Задача 9. В треугольнике ABC площади S точки M_1, M_2, M_3 — соответственно середины сторон BC, AC и AB. Известно, что в этом треугольнике $\frac{R}{r} = k$. Найти значение суммы

$$a(OM_2+OM_3)+b(OM_1+OM_3)+c(OM_1+OM_2),$$
где O — центр описанной окружности.

Решение. Очевидно, что

$$M_2M_3=\frac{a}{2},\quad AM_2=\frac{b}{2},\quad AM_3=\frac{c}{2}$$

и $AO=R$ (рис. 16).

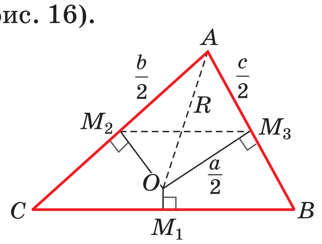


Рис. 16

Около четырехугольника AM_2OM_3 можно описать окружность (два противоположных угла равны по 90°). Воспользуемся теоремой Птолемея:

$$\frac{a}{2}\cdot R=\frac{b}{2}\cdot OM_3+\frac{c}{2}\cdot OM_2.$$

Умножив на 2, получим:

$$aR=b\cdot OM_3+c\cdot OM_2. \qquad (1)$$

Для четырехугольника BM_2OM_1 также применим теорему Птолемея и, умножив на 2, получим:

$$bR=a\cdot OM_3+c\cdot OM_1, \qquad (2)$$

а для четырехугольника CM_1OM_2:

$$cR=a\cdot OM_2+b\cdot OM_1. \qquad (3).$$

Остается сложить левые и правые части равенств (1)–(3):

$$R(a+b+c)=$$
$$=a(OM_2+OM_3)+b(OM_1+OM_3)+c(OM_1+OM_2).$$

Итак,

$$a(OM_2+OM_3)+b(OM_1+OM_3)+c(OM_1+OM_2)=$$
$$=2p\cdot R=2pr\cdot\frac{R}{r}=2S\cdot k.$$

Задача 10. Доказать формулу для произведения высот треугольника ABC:

$$h_a\cdot h_b\cdot h_c=2S\cdot a\cdot(\cos A+\cos B\cdot\cos C).$$

Решение. Проведем в треугольнике ABC высоты $BH_2=h_b$ и $CH_3=h_c$ (рис. 17). Около четырехугольника BH_3H_2C можно описать окружность с диаметром BC. Тогда по теореме Птолемея

$$h_b\cdot h_c=a\cdot H_2H_3+BH_3\cdot CH_2.$$

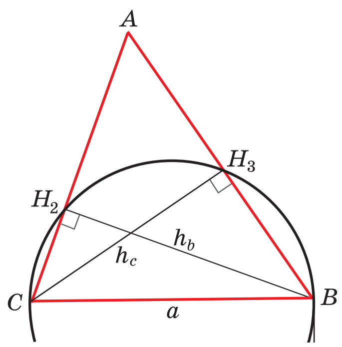


Рис. 17

Но

$H_2H_3=a\cdot\cos A$ (*докажите!*);

$BH_3=a\cdot\cos B$ (из треугольника CH_3B);

$CH_2=a\cdot\cos C$ (из треугольника BH_2C).

Имеем:

$$h_b\cdot h_c=a\cdot a\cdot\cos A+a\cdot\cos B\cdot a\cdot\cos C,$$

или

$$h_b\cdot h_c=a^2(\cos A+\cos B\cdot\cos C).$$

Домножим обе части последнего равенства на h_a, где $h_a=\frac{2S}{a}$.

Получаем:

$$h_a\cdot h_b\cdot h_c=\frac{2S}{a}\cdot a^2(\cos A+\cos B\cos C),$$

$$h_a\cdot h_b\cdot h_c=2S\cdot a(\cos A+\cos B\cos C).$$

При решении задач повышенной трудности, олимпиадных задач широко используется следствие из теоремы Птолемея — *неравенство Птолемея:*

Для произвольного выпуклого четырехугольника $ABCD$ выполняется неравенство: $ef\le ac+bd$ (рис. 18), *равенство имеет место в случае вписанного четырехугольника.*

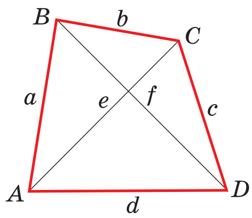


Рис. 18

Докажите неравенство Птолемея самостоятельно.

Задача 11. Сумма расстояний от точки X, взятой вне квадрата, до двух его соседних вершин равна n. Каково наибольшее значение суммы расстояний от точки X до двух других вершин квадрата?

Решение. Пусть $XB+XC=n$. Требуется найти $(XA+XD)_{\max}$ (рис. 19).

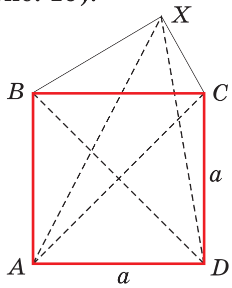


Рис. 19

Обозначив сторону квадрата через a, запишем неравенство Птолемея для четырехугольника $ABXC$:

$$XA \cdot a \le XB \cdot a\sqrt{2} + XC \cdot a,$$

$$XA \le XB\sqrt{2} + XC. \qquad (1)$$

По неравенству Птолемея для четырехугольника $BXCD$ имеем:

$$XD \cdot a \le XB \cdot a + XC \cdot a\sqrt{2},$$

$$XD \le XB + XC\sqrt{2}. \qquad (2)$$

Сложив левые и правые части неравенств (1) и (2), получим:

$$XA + XD \le n\left(\sqrt{2}+1\right).$$

Очевидно, что равенство достигается, когда точка X лежит на описанной около квадрата $ABCD$ окружности. Таким образом,

$$(XA + XD)_{\max} = n\left(\sqrt{2}+1\right).$$

Задача 12. В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$:

$$AB = BC,\ CD = DE,\ EF = FA$$

Докажите, что

$$\frac{BC}{BE} + \frac{DE}{DA} + \frac{FA}{FC} \ge \frac{3}{2}.$$

Доказательство. Пусть $AC = a$, $CE = b$, $EA = c$. (рис. 20). Запишем неравенство Птолемея для четырехугольника $ABCE$:

$$BE \cdot a \le AB \cdot b + BC \cdot c.$$

Но по условию $AB = BC$. Тогда

$$BE \cdot a \le BC(b + c),$$

откуда

$$\frac{BC}{BE} \ge \frac{a}{b+c}. \qquad (1)$$

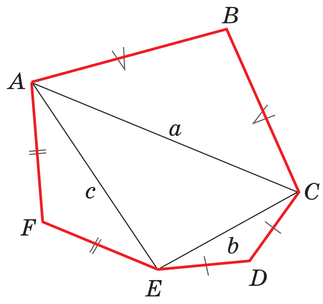


Рис. 20

Применив неравенство Птолемея для четырехугольника $ACDE$ получим:

$$\frac{DE}{DA} \ge \frac{b}{a+c}. \qquad (2)$$

Неравенство

$$\frac{FA}{FC} \ge \frac{c}{a+b} \qquad (3)$$

следует из неравенства Птолемея для четырехугольника $ACEF$. Сложив левые и правые части неравенств (1)–(3), получим:

$$\frac{BC}{BE} + \frac{DE}{DA} + \frac{FA}{AC} \ge \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}.$$

В свою очередь,

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \ge \frac{3}{2}$$

— известное алгебраическое неравенство для положительных чисел a, b, c. Следовательно, тем более

$$\frac{BC}{BE} + \frac{DE}{DA} + \frac{FA}{AC} \ge \frac{3}{2}.$$

ФОТО НА КОНКУРС

Навеки с математикой
Автор: Лариса Геннадьевна Егорова,
учитель математики и физики Емёткинской СОШ
Козловского района Чувашской Республики

Листая свой школьный фотоальбом, я наткнулась на этот снимок и решила прислать вам ещё одну фотографию с этими же учениками, теперь уже последнюю, снятую в День их последнего звонка. Жаль, что школьные годы быстро пролетели, и уже «оперевшиеся птенчики» улетели из родного «гнезда». Хоть эти ребята и закончили школу, тем не менее часто приходят в свой второй дом, интересуются тем, как и чем занимаются нынешние ученики на занятиях кружка «Занимательная математика» и на уроках математики, интересуются их успехами, радуются за них и ностальгически им завидуют. И мне становится приятно, что, несмотря на то, что Царица наук не ко всем этим ребятам была благосклонна и математика не всем им давалась одинаково легко, всё же они выросли настоящими любителями этой замечательной науки.

Продолжается прием заявок на 2015/16 учебный год

Фестиваль педагогических идей «Открытый урок» festival.1september.ru

Свидетельство о регистрации СМИ Эл. № ФС77-53231

В течение 12 лет – самый массовый, представительный и посещаемый педагогический форум Рунета. Самая большая коллекция авторских разработок учителей.

Разместить публикацию может каждый педагог. Всем авторам предоставляются документы о публикации. По итогам каждого учебного года выпускаются электронные и бумажные сборники.

В рамках фестиваля для желающих проводится конкурс презентаций. Всем участникам конкурса высылаются специальные дипломы.

Удобный Личный кабинет участника фестиваля, возможность автоматического создания личного профессионального портфолио. В помощь участникам – квалифицированные сотрудники оргкомитета. Единственный в России образовательный сайт, имеющий службу поддержки в режиме on-line 7 дней в неделю.

Участвуйте в фестивале, размещайте свои работы, получайте документы о публикации!

Фестиваль творческих и исследовательских работ учащихся «Портфолио ученика» project.1september.ru

Свидетельство о регистрации СМИ Эл. № ФС77-53211

Площадка для публикации работ учащихся, выполненных под руководством педагогов.

Всем ученикам и педагогам предоставляются документы о публикации. По итогам каждого учебного года выпускаются электронные и бумажные сборники.

В рамках фестиваля для желающих проводится **конкурс проектных работ**.

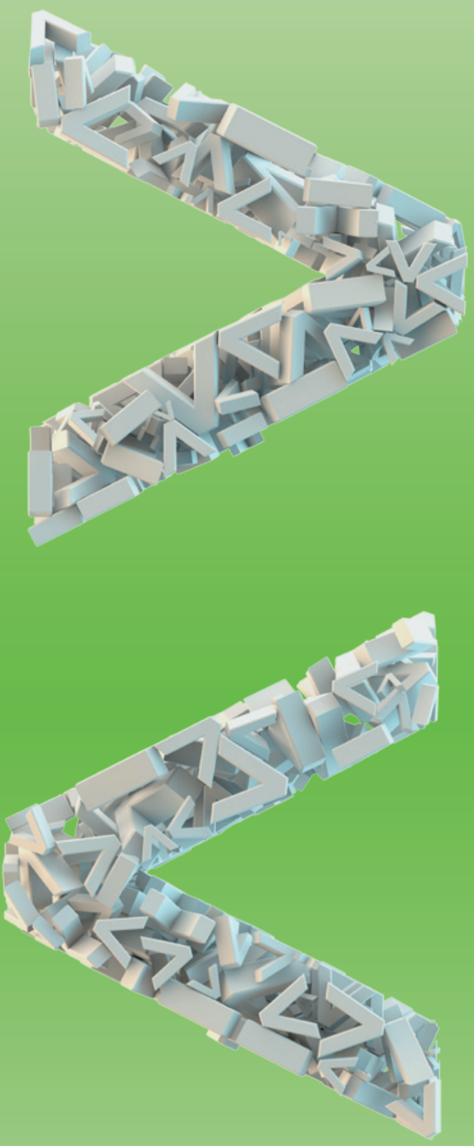
Все участники конкурса награждаются специальными дипломами.

Участвуйте вместе с учениками!

9–11 классы. Начало см. в № 1–6/2015

С. ШЕСТАКОВ,
isser@yandex.ru,
г. Москва

РЕШАЕМ НЕРАВЕНСТВА



2.1. Целые неравенства и системы неравенств

Более сложные целые неравенства

Перейдем теперь к более сложным целым неравенствам, проиллюстрировав методы их решения примерами. Вычисление корней квадратных трехчленов в этом параграфе и далее опускается для экономии места.

Метод интервалов

Метод интервалов является одним из основных методов решения целых неравенств. Обычно он применяется после приведения неравенства к виду

$$p_1(x)\cdot p_2(x)\cdot \ldots \cdot p_n(x) \vee 0, \qquad (1)$$

который будем называть стандартным. Многочлены $p_1(x)$, $p_2(x)$, ..., $p_n(x)$, как правило, являются многочленами первой или второй степени. Последние в случае положительности дискриминанта следует представить в виде произведения линейных множителей по формуле

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

разложения квадратного трехчлена на линейные множители; в случае неположительности дискриминанта квадратный трехчлен принимает только неотрицательные или только неположительные значения, что и нужно учитывать при решении неравенства. Перед применением метода интервалов можно обе части неравенства разделить на полученное после разложения на множители произведение старших коэффициентов квадратных трехчленов.

Пример 1. Решить неравенство

$$(3x^2 - 8x + 4)(5x^2 - 8x - 4) \le 0.$$

Решение. Корнями квадратного трехчлена $3x^2 - 8x + 4$ являются числа $\frac{2}{3}$ и 2. По формуле разложения квадратного трехчлена на линейные множители получим:

$$3x^2 - 8x + 4 = 3\left(x - \frac{2}{3}\right)(x - 2).$$

Корнями квадратного трехчлена $5x^2 - 8x - 4$ являются числа $-\frac{2}{5}$ и 2. По формуле разложения квадратного трехчлена на линейные множители получим, что

$$5x^2 - 8x - 4 = 5\left(x + \frac{2}{5}\right)(x - 2).$$

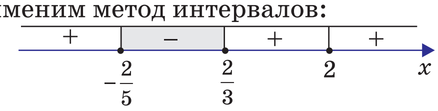
Следовательно, данное неравенство приводится к виду

$$3\left(x - \frac{2}{3}\right)(x - 2)\cdot 5\left(x + \frac{2}{5}\right)(x - 2) \le 0,$$

$$\left(x + \frac{2}{5}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right)(x - 2)^2 \le 0.$$

К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru (Упражнения по теме: «Целые неравенства», диагностическая работа 2.)

Применим метод интервалов:



Ответ: $\left[-\frac{2}{5}; \frac{2}{3}\right] \cup \{2\}$.

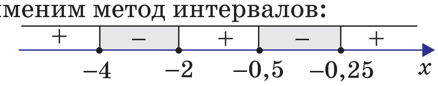
Пример 2. Решить систему неравенств

$$\begin{cases}(2x^2+9x+4)(4x^2+9x+2)(9x^2+2x+4)\leq 0,\\ (1-16x^2)(5x^2+2x)(4x^2+20x+25)\geq 0.\end{cases}$$

Решение. Решим первое неравенство данной системы. Корнями квадратного трехчлена $2x^2 + 9x + 4$ являются числа -4 и $-0{,}5$. Корнями квадратного трехчлена $4x^2 + 9x + 2$ являются числа -2 и $-0{,}25$. Дискриминант квадратного трехчлена $9x^2 + 2x + 4$ отрицателен, а старший коэффициент положителен. Следовательно, при любом действительном значении переменной этот трехчлен принимает только положительные значения. Поэтому обе части неравенства можно разделить на $9x^2 + 2x + 4$. Таким образом, первое неравенство данной системы приводится к виду

$$2(x + 4)(x + 0{,}5) \cdot 4(x + 2)(x + 0{,}25) \leq 0,$$
$$(x + 4)(x + 0{,}5)(x + 2)(x + 0{,}25) \leq 0.$$

Применим метод интервалов:



Множество решений неравенства: $[-4; -2] \cup [-0{,}5; -0{,}25]$.

Решим второе неравенство данной системы. Разложим на множители каждый из многочленов в скобках:

$$1 - 16x^2 = -16(x + 0{,}25)(x - 0{,}25),$$
$$5x^2 + 2x = 5x(x + 0{,}4),$$

а квадратный трехчлен $4x^2 + 20x + 25$ является полным квадратом (те, кто не видит этого, могут вычислить дискриминант — он равен нулю):

$$4x^2 + 20x + 25 = 4(x + 2{,}5)^2.$$

Следовательно, второе неравенство данной системы примет вид

$$-16(x + 0{,}25)(x - 0{,}25) \cdot 5x(x + 0{,}4) \cdot 4(x + 2{,}5)^2 \geq 0.$$

Разделим обе части неравенства на $-16 \cdot 5 \cdot 4$, изменив знак неравенства на противоположный:

$$(x + 0{,}25)(x - 0{,}25)x(x + 0{,}4)(x + 2{,}5)^2 \leq 0.$$

Применим метод интервалов:

Множество решений неравенства: $\{-2{,}5\} \cup [-0{,}4; -0{,}25] \cup [0; 0{,}25]$.

Чтобы решить данную систему, найдем пересечение полученных множеств: $\{-2{,}5\} \cup [-0{,}4; -0{,}25]$.

Ответ: $\{-2{,}5\} \cup [-0{,}4; -0{,}25]$.

Замечание. Умножение или деление обеих частей неравенства на выражение, содержащее переменную, возможно в одном-единственном случае: если при любом значении переменной это выражение принимает только положительные значения (это было сделано при решении примера 2) или только отрицательные значения (в этом случае знак неравенства следует изменить на противоположный). Во всех остальных случаях такое умножение или деление является грубой ошибкой, поскольку проводится с сохранением знака неравенства, что для значений переменной, при которых данное выражение отрицательно, неверно.

Равносильные преобразования

Разумеется, далеко не каждое целое неравенство сразу дается в стандартном виде. Куда чаще встречаются задачи, в которых для приведения неравенства к стандартному виду надо проделать определенные преобразования. Прежде всего это раскрытие скобок и приведение подобных, вынесение общего множителя, разложение на множители (в том числе и с помощью формул сокращенного умножения). Поскольку областью допустимых значений любого целого неравенства является вся числовая прямая, указанные преобразования будут равносильными.

Пример 3. Решить неравенство

$$(16x^2 + 14x + 3)(2x - 1) \geq (8x^2 - 2x - 1)(2x + 1).$$

Решение. При раскрытии скобок получим в левой и правой частях неравенства многочлены третьей степени с соответственно различными старшими коэффициентами и свободными членами, то есть придем в итоге к неравенству третьей степени. Попробуем привести неравенство к стандартному виду иным способом. Корнями квадратного трехчлена $16x^2 + 14x + 3$ являются числа $-\frac{1}{2}$ и $-\frac{3}{8}$. Разложим левую часть неравенства на множители:

$$16\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{3}{8}\right)(2x-1)\geq(8x^2-2x-1)(2x+1).$$

Для упрощения дальнейших преобразований избавимся от дробей в скобках:

$$(2x + 1)(8x + 3)(2x - 1) \geq (8x^2 - 2x - 1)(2x + 1).$$

Перемножим вторую и третью скобки в левой части неравенства, перенесем выражение из правой части неравенства в левую и вынесем общий множитель $(2x + 1)$. Получим:

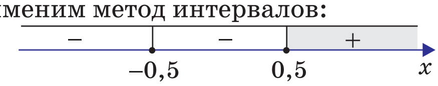
$$(2x + 1)(16x^2 - 2x - 3 - 8x^2 + 2x + 1) \geq 0,$$
$$(2x + 1)(8x^2 - 2) \geq 0.$$

Вынесем за скобки коэффициенты при переменной:

$$2(x + 0{,}5) \cdot 8(x^2 - 0{,}25) \geq 0.$$

Разделив обе части неравенства на 16 и, применив формулу разности квадратов, придем к неравенству $(x - 0{,}5)(x + 0{,}5)^2 \geq 0$.

Применим метод интервалов:



Ответ: $\{-0{,}5\} \cup [0{,}5; +\infty)$.

Одним из наиболее часто встречающихся преобразований алгебраических выражений является разложение на множители. Если в предыдущем примере для этого было достаточно проделать только техническую работу, то для решения следующего уже надо проявить определенную наблюдательность.

Пример 4. Решить неравенство

$$x^4 + 10x^3 + 25x^2 - 36 > 0.$$

Решение. Заметим, что сумма первых трех слагаемых левой части неравенства является полным квадратом:

$$x^4 + 10x^3 + 25x^2 = (x^2 + 5x)^2.$$

Теперь неравенство можно переписать в виде

$$(x^2 + 5x)^2 - 6^2 > 0$$

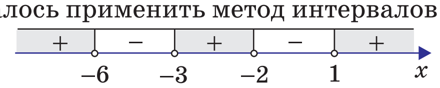
и применить формулу разности квадратов:

$$(x^2 + 5x - 6)(x^2 + 5x + 6) > 0.$$

Корнями квадратного трехчлена в первой скобке являются числа –6 и 1; корнями квадратного трехчлена во второй скобке являются числа –3 и –2. Теперь левую часть последнего неравенства можно разложить на множители:

$$(x + 6)(x - 1)(x + 3)(x + 2) < 0.$$

Осталось применить метод интервалов:



Решение неравенства: $(-\infty; -6) \cup (-3; -2) \cup (1; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -6) \cup (-3; -2) \cup (1; +\infty)$.

Пример 5. Решить неравенство

$$(x^2 + 1{,}3x + 0{,}9)^2 + (x^2 + 3{,}3x - 0{,}7)^2 \le$$
$$\le (x^2 + 1{,}5x + 0{,}74)^2 + (x^2 + 3{,}1x - 0{,}54)^2.$$

Решение. Уныние, которое может вызвать подобный пример, — чувство не слишком продуктивное, а на экзамене так и вообще недопустимое. Понятно, что раскрытие скобок в данном случае будет поступком героическим, но малоперспективным из-за очевидно больших затрат времени и вероятных ошибок. Ясно, что решение примера предполагает иные действия, прежде всего анализ условия. Поскольку неравенство является целым, каким-то образом придется привести его к стандартному виду. Инструментов для этого не так много, все они указаны выше. Прежде всего это разложение на множители. Наличие квадратов наводит на мысль о возможном применении формулы разности квадратов. Остается заметить, что разность первого квадратного трехчлена в правой части неравенства и первого квадратного трехчлена в левой части неравенства равна разности второго квадратного трехчлена в левой части неравенства и второго квадратного трехчлена в правой части неравенства. Применив формулу разности квадратов, получим:

$$(x^2 + 1{,}5x + 0{,}74)^2 - (x^2 + 1{,}3x + 0{,}9)^2 =$$
$$= (0{,}2x - 0{,}16)(2x^2 + 2{,}8x + 1{,}64),$$
$$(x^2 + 3{,}3x - 0{,}7)^2 + (x^2 + 3{,}1x - 0{,}54)^2 =$$
$$= (0{,}2x - 0{,}16)(2x^2 + 6{,}4x - 1{,}24).$$

Данное неравенство можно переписать так:

$$(0{,}2x - 0{,}16)(2x^2 + 6{,}4x - 1{,}24) \le$$
$$\le (0{,}2x - 0{,}16)(2x^2 + 2{,}8x + 1{,}64).$$

Перенесем выражение из правой части в левую, вынесем общий множитель и приведем подобные:

$$(0{,}2x - 0{,}16)(3{,}6x - 2{,}88) \le 0.$$

Вынесем за скобки коэффициенты при переменной:

$$0{,}2(x - 0{,}8) \cdot 3{,}6(x - 0{,}8) \le 0,\ (x - 0{,}8)^2 \le 0.$$

Единственным решением полученного неравенства является $x = 0{,}8$.

Ответ: $\{0{,}8\}$.

Метод введения новой переменной

Напомним, что основной идеей решения неравенств с помощью метода введения новой переменной является замена повторяющегося алгебраического выражения некоторой буквой (обычно латинской), играющей роль новой переменной. Такая замена позволяет свести решение данного неравенства к последовательному решению нескольких неравенств меньшей степени (обычно квадратных) либо разложить на множители левую часть и, сделав обратную замену, воспользоваться методом интервалов (этот способ часто оказывается более коротким). В некоторых случаях замена является только вспомогательным средством, позволяющим упростить алгебраические преобразования с целью получения менее сложного по сравнению с данным неравенства.

Пример 6. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} 25x^4 - 41x + 16 \le 0, \\ 7\left(2x^2 - x - 1\right) + 1 \ge \left(2x^2 - x\right)^2. \end{cases}$$

Решение. Решим первое неравенство данной системы. Введем новую переменную $t = x^2$. Неравенство примет вид

$$25t^2 - 41t + 16 \le 0.$$

Корнями квадратного трехчлена в левой части полученного неравенства являются числа 1 и $\frac{16}{25}$. Поэтому неравенство можно переписать в виде

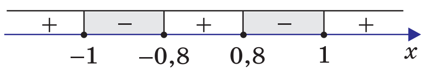
$$25\left(t - \frac{16}{25}\right)(t - 1) \le 0.$$

Разделим обе части последнего неравенства на 25 и сделаем обратную замену:

$$\left(x^2-\frac{16}{25}\right)(x^2-1)\le 0,$$

$$(x-0{,}8)(x+0{,}8)(x-1)(x+1)\le 0.$$

Применим метод интервалов:



Решение первого неравенства данной системы: $[-1; -0{,}8] \cup [0{,}8; 1]$.

Решим второе неравенство данной системы. Пусть $z = 2x^2 - x$. Неравенство примет вид

$$7(z-1)+1\ge z^2.$$

Приведем неравенство к базовому виду:

$$z^2-7z+6\le 0.$$

Корнями квадратного трехчлена в левой части полученного неравенства являются числа 1 и 6. Разложив левую часть последнего неравенства на множители, получим:

$$(z-1)(z-6)\le 0.$$

Сделаем обратную замену:

$$(2x^2-x-1)(2x^2-x-6)\le 0.$$

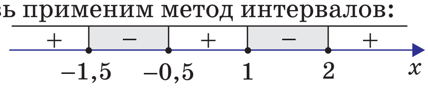
Корнями квадратного трехчлена в первой скобке левой части неравенства являются числа $-0{,}5$ и 1, корнями квадратного трехчлена во второй скобке являются числа $-1{,}5$ и 2. Разложив на множители каждый из этих трехчленов, придем к неравенству

$$2(x+0{,}5)(x-1)\cdot 2(x+1{,}5)(x-2)\le 0,$$

откуда

$$(x+0{,}5)(x-1)(x+1{,}5)(x-2)\le 0.$$

Вновь применим метод интервалов:



Решение второго неравенства данной системы: $[-1{,}5; -0{,}5] \cup [1; 2]$.

Решение данной системы найдем как пересечение числовых множеств

$$[-1; -0{,}8] \cup [0{,}8; 1] \text{ и } [-1{,}5; -0{,}5] \cup [1; 2].$$

В данном случае это легко сделать и без чертежа, ведь отрезок $[-1; -0{,}8]$ целиком содержится в отрезке $[-1{,}5; -0{,}5]$, а не пересекающиеся с ними отрезки $[0{,}8; 1]$ и $[1; 2]$ имеют единственную общую точку 1. Следовательно, решение данной системы: $[-1; -0{,}8] \cup \{1\}$.

Ответ: $[-1; -0{,}8] \cup \{1\}$.

Замечание. При решении каждого из неравенств данной системы новая переменная использовалась только для нахождения корней квадратного трехчлена в левой части полученного после ее введения базового квадратного неравенства и последующего разложения на множители с целью применения метода интервалов. Другой путь состоит в формальном решении полученного после замены неравенства с целью сведения данного неравенства к нескольким более простым. Так, решением неравенства $25t^2 - 41t + 16 \le 0$ является отрезок $\left[\frac{16}{25}; 1\right]$. Так что $t \in \left[\frac{16}{25}; 1\right]$ можно записать в виде системы $\begin{cases} t\ge \frac{16}{25}, \\ t\le 1. \end{cases}$ Далее, сделав обратную замену, получим: $\begin{cases} x^2\ge \frac{16}{25}, \\ x^2\le 1. \end{cases}$ Останется решить каждое из квадратных неравенств системы. Аналогично, решением неравенства $z^2 - 7z + 6 \le 0$ является отрезок $[1; 6]$. После обратной замены получим:

$$\begin{cases} 2x^2-x\ge 1, \\ 2x^2-x\le 6. \end{cases}$$

Опять останется решить каждое из квадратных неравенств системы. Какой способ использовать — разложение на множители с последующим применением метода интервалов или последовательное решение нескольких квадратных неравенств — совершенно неважно, здесь можно руководствоваться своими предпочтениями.

В следующем примере вводятся уже две новые переменные, правда, только для того, чтобы упростить преобразования данного неравенства. Такая ситуация, как уже отмечалось, время от времени встречается в самых разных задачах.

Пример 7. Решить неравенство

$$(6x^5+5x^3-4x-3)(6x^5+4x^3+5x^2+x-3)\le$$
$$\le(6x^5+5x^3-5x-3)(6x^5+4x^3+5x^2+2x-3).$$

Решение. Обозначим первую скобку левой части буквой a, вторую скобку — буквой b. Тогда неравенство можно записать в виде

$$ab\le(a-x)(b+x),\ \ ab\le ab+(a-b)x-x^2.$$

После упрощений и вынесения общего множителя получим:

$$x(a-b-x)\ge 0.$$

Поскольку

$$a-b-x=x^3-5x^2-6x,$$

приходим к неравенству

$$x(x^3-5x^2-6x)\ge 0.$$

Вынесем общий множитель за скобку:

$$x^2(x^2-5x-6)\ge 0.$$

Корнями квадратного трехчлена в левой части последнего неравенства являются числа -1 и 6. Разложив левую часть этого неравенства на множители, получим:

$$x^2(x+1)(x-6)\ge 0.$$

Применим метод интервалов:

Решение неравенства: $(-\infty; -1] \cup \{0\} \cup [6; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -1] \cup \{0\} \cup [6; +\infty)$.

Метод знакотождественных множителей

Метод знакотождественных множителей для целых неравенств заключается в замене одного или нескольких множителей (целых алгебраических выражений) в левой части неравенства вида $a_1(x)\cdot a_2(x)\cdot \ldots \cdot a_n(x) \vee 0$ знакотождественным выражением. Для рассматриваемых неравенств таких пар знакотождественных выражений всего две:

1) $a(x) = u^{2n+1}(x) - v^{2n+1}(x)$ и $b(x) = u(x) - v(x)$ (разность одинаковых нечетных степеней двух выражений можно заменять разностью этих выражений);

2) $a(x) = u^{2n}(x) - v^{2n}(x)$ и $b(x) = u^2(x) - v^2(x)$ (разность одинаковых четных степеней двух выражений можно заменять разностью квадратов этих выражений).

То, что указанные пары знакотождественны, следует из монотонного возрастания степенной функции: на всей числовой оси для нечетных степеней, на множестве неотрицательных чисел для четных степеней. В силу монотонного возрастания функции $y = t^{2n+1}$ (здесь $n \in N$) разности $t_1^{2n+1} - t_2^{2n+1}$ и $t_1 - t_2$ являются числами одного знака при любом значении переменной; аналогично, в силу неотрицательности t_1^2 и t_2^2 и возрастания функции $y = t^n$ при $t \ge 0$ (для любого $n \ge 2$, $n \in N$) разности $t_1^{2n} - t_2^{2n}$ и $t_1^2 - t_2^2$ являются числами одного знака при любом значении переменной.

Пример 8. Решить неравенство

$$(3x + 2)^6 \le (2x + 3)^3.$$

Решение. Перенесем выражение из правой части неравенства в левую и запишем полученную разность в виде разности кубов:

$$((3x + 2)^2)^3 - (2x + 3)^3 \le 0.$$

Применив метод знакотождественных множителей, придем к неравенству

$$(3x + 2)^2 - (2x + 3) \le 0,$$

после раскрытия скобок и приведения подобных получим квадратное неравенство

$$9x^2 + 10x + 1 \le 0.$$

Корнями квадратного трехчлена в левой части неравенства являются числа -1 и $-\frac{1}{9}$. В силу положительности старшего коэффициента этого трехчлена решение неравенства: $\left[-1; -\frac{1}{9}\right]$.

Ответ: $\left[-1; -\frac{1}{9}\right]$.

Пример 9. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} \left(x^{14} - (x+2)^7\right)\left(x^{10} + (x-6)^5\right) \le 0, \\ \left(x^2 - x - 5\right)^8 \ge \left(x^2 + x - 3\right)^8. \end{cases}$$

Решение. Решим первое неравенство данной системы. Выражение в первой скобке представляет собой разность седьмых степеней:

$$(x^2)^7 - (x + 2)^7.$$

Выражение во второй скобке можно представить в виде разности пятых степеней:

$$x^{10} - (x - 6)^5 = (x^2)^5 - (-x + 6)^5.$$

Поскольку разность одинаковых нечетных степеней двух многочленов и разность этих многочленов являются знакотождественными, первое неравенство системы можно переписать в виде

$$(x^2 - (x + 2))(x^2 - (-x + 6)) \le 0,$$

откуда

$$(x^2 - x - 2)(x^2 + x - 6) \le 0.$$

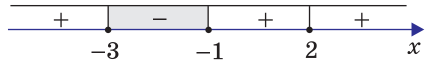
Корнями квадратного трехчлена в первой скобке левой части полученного неравенства являются числа -1 и 2. Корнями квадратного трехчлена во второй скобке являются числа -3 и 2. Разложив на множители каждый из этих трехчленов, придем к неравенству

$$(x + 1)(x - 2)(x + 3)(x - 2) \le 0,$$

откуда

$$(x + 3)(x + 1)(x - 2)^2 \le 0.$$

Применим метод интервалов:



Решение первого неравенства данной системы: $[-3; -1] \cup \{2\}$. Решим второе неравенство данной системы, записав его в виде

$$(x^2 - x - 5)^8 - (x^2 + x - 3)^8 \ge 0.$$

Используем знакотождественность разности одинаковых четных степеней двух многочленов и разности квадратов этих многочленов. Получим неравенство

$$(x^2 - x - 5)^2 - (x^2 + x - 3)^2 \ge 0.$$

Применим формулу разности квадратов:

$$(x^2 - x - 5 - x^2 - x + 3)(x^2 - x - 5 + x^2 + x - 3) \ge 0,$$

откуда

$$(-2x - 2)(2x^2 - 8) \ge 0.$$

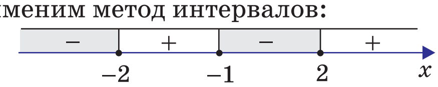
Вынесем общие множители за скобки:

$$-2(x + 1)\cdot 2(x^2 - 4) \ge 0.$$

Разделим обе части неравенства на число -4, изменив знак неравенства на противоположный, после чего разложим на множители выражение во второй скобке:

$$(x + 1)(x - 2)(x + 2) \le 0.$$

Применим метод интервалов:



Решение второго неравенства данной системы: $(-\infty; -2] \cup [-1; 2]$.

Решение данной системы: $[-3; -2] \cup \{-1; 2\}$.

Ответ: $[-3; -2] \cup \{-1; 2\}$.

Применение свойств функций

Наряду с неравенствами, решение которых связано с теми или иными алгебраическими преобразованиями, введением новой переменной, применением метода интервалов или метода знакотождественных множителей, встречаются неравенства, решение которых с помощью перечисленных стандартных методов невозможно. При решении этих неравенств существенным образом используются такие свойства функций, как ограниченность, монотонность, периодичность. Поскольку — за некоторыми исключениями — решение этих задач связано (пусть и в небольшой степени) с выдвижением и проверкой гипотез, логическим перебором и т.п., их обычно относят к нестандартным неравенствам.

Пример 10. Решить неравенство

$$(x^2 + 2x + 3)(x^2 + 2x + 4)(x^2 + 2x + 5) \times$$
$$\times\, x(x^2 + 2x + 6) \le 120.$$

Решение. Ясно, что можно ввести новую переменную, например, обозначив через какую-то букву первую скобку левой части неравенства. Но тогда получится неравенство четвертой степени. Попробуем иной способ, попытавшись использовать ограниченность квадратичной функции. Для этого выделим полные квадраты:

$$((x + 1)^2 + 2)((x + 1)^2 + 3)((x + 1)^2 + 4) \times$$
$$\times\, ((x + 1)^2 + 5) \le 120.$$

Поскольку $(x + 1)^2 \ge 0$, получим, что при любом значении переменной значение выражения $(x + 1)^2 + 2$ не меньше 2,
значение выражения $(x + 1)^2 + 3$ не меньше 3,
значение выражения $(x + 1)^2 + 4$ не меньше 4,
значение выражения $(x + 1)^2 + 5$ не меньше 5.

Следовательно, произведение в левой части неравенства не меньше $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$. Поэтому неравенство будет выполнено, только если его левая часть равна 120, что возможно лишь в случае $(x + 1)^2 = 0$, откуда $x = -1$.

Ответ: $\{-1\}$.

Пример 11. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} \left(x^7 + 2x^3 + 9x + 12\right)\left(x^3 + 3x - 14\right) \le 0, \\ x^6 + 2x^2 \ge 3. \end{cases}$$

Решение. Решим первое неравенство данной системы. Функции

$f(x) = x^7 + 2x^3 + 9x + 12$ и $g(x) = x^3 + 3x - 14$

монотонно возрастают, каждая на всей числовой прямой. Заметим, что $f(-1) = 0$, $g(2) = 0$. Поэтому выражения

$x^7 + 2x^3 + 9x + 12$ и $x + 1$, $x^3 + 3x - 14$ и $x - 2$

являются знакотождественными. Значит, первое неравенство системы можно переписать в виде $(x + 1)(x - 2) \le 0$. Решение неравенства — отрезок $[-1; 2]$. Решим второе неравенство данной системы. Обозначим x^2 через t и перепишем неравенство в виде $t^3 + 2t - 3 \ge 0$. Функция $y = t^3 + 2t - 3$ монотонно возрастает на всей числовой прямой, $y(1) = 0$. Следовательно, выражения $t^3 + 2t - 3$ и $t - 1$ знакотождественны. Поэтому неравенство $t^3 + 2t - 3 \ge 0$ равносильно неравенству $t - 1 \ge 0$. Сделаем обратную замену:

$$x^2 - 1 \ge 0,\ (x - 1)(x + 1) \ge 0.$$

Решение последнего неравенства, а значит, и второго неравенства данной системы — множество $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$.

Решение данной системы: $\{-1\} \cup [1; 2]$.

Ответ: $\{-1\} \cup [1; 2]$.

Следующий пример связан со свойствами четности и периодичности. Нестандартным его можно считать только из-за достаточно редкой для школьных учебников формулировки; само же решение является вполне стандартным.

Пример 12. Функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой и является нечетной периодической с периодом, равным 16. Решить неравенство $f(x) \ge 0$, если $f(x) = 10x^2 - 16x - x^3$ для всех $x \in [0; 8]$.

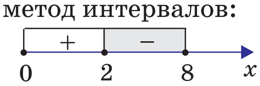
Решение. Поскольку функция $y = f(x)$ является периодической, нужно сначала найти все решения данного неравенства на любом отрезке числовой прямой, длина которого равна периоду функции. В данном случае функция является еще и нечетной. Поэтому можно решить неравенство на отрезке, длина которого равна половине периода функции и одним из концов которого является число 0, а затем воспользоваться нечетностью функции. Найдем вначале все решения неравенства $f(x) \ge 0$, то есть неравенства $10x^2 - 16x - x^3 \ge 0$, принадлежащие отрезку $[0; 8]$. Приведем неравенство к виду

$$x^3 - 10x^2 + 16x \le 0.$$

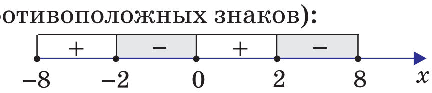
Вынесем общий множитель: $x(x^2 - 10x + 16) \le 0$. Корнями квадратного трехчлена $x^2 - 10x + 16$ являются числа 2 и 8. Разложив этот трехчлен на множители, получим неравенство

$$x(x - 2)(x - 8) \le 0.$$

Применим метод интервалов:



Найдем решение неравенства на отрезке, длина которого равна длине периода, то есть на отрезке $[-8; 8]$, воспользовавшись нечетностью функции (ее график симметричен относительно начала координат, поэтому в симметричных относительно нуля точках она принимает значения противоположных знаков):

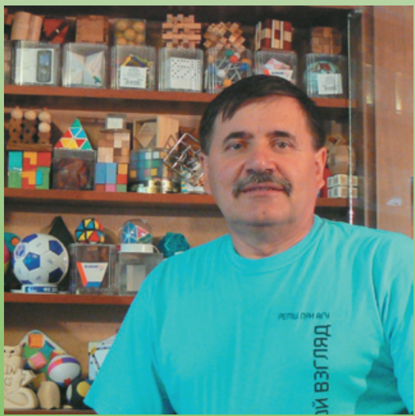


Теперь с учетом того, что период функции равен 16, находим решение неравенства: $[16n - 2; 16n] \cup [16n + 2; 16n + 8]$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ: $[16n - 2; 16n] \cup [16n + 2; 16n + 8]$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Н. АВИЛОВ,
avilow@rambler.ru,
ст. Егорлыкская, Ростовская обл.

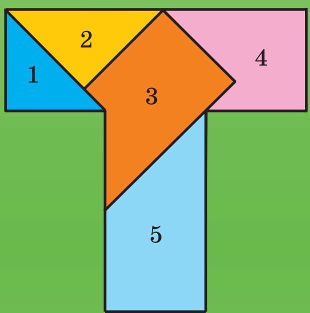
СИММЕТРИКС Т-5

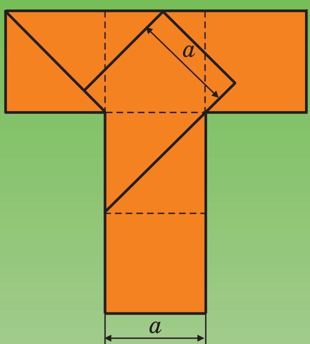

Ведущий рубрики — Николай Иванович Авилов — на фоне своей коллекции головоломок

■ Совсем недавно среди головоломок на складывание фигур появилось новое семейство головоломок — симметриксы. В головоломках этого типа нужно из нескольких игровых элементов сложить симметричную фигуру, руководствуясь простыми правилами: прикладывая элементы друг к другу, их можно как угодно поворачивать и переворачивать, но нельзя накладывать.

Существуют симметриксы с двумя, тремя и более элементами. «Симметрикс Т-5» содержит пять частей. Интересно, что эта головоломка появилась в результате эксперимента «по придумыванию головоломок», который проводился на факультете государственного управления МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством Дмитрия Кавтарадзе.

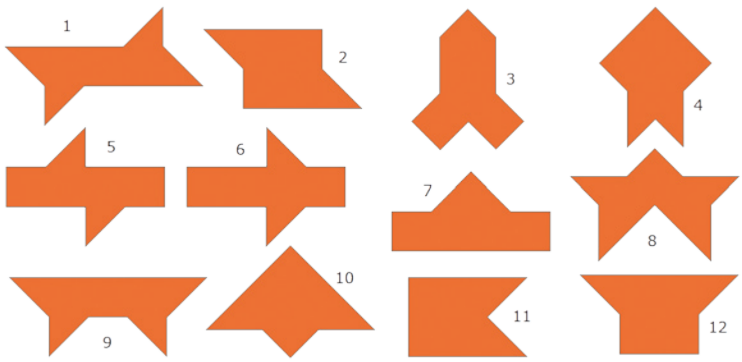
Участникам эксперимента предлагалось разрезать бумажный силуэт буквы «Т», состоящий из пяти квадратов, на несколько частей так, чтобы получились элементы, не содержащие явных подсказок решающему головоломку. Как говорят организаторы этого эксперимента: «Представленный на рисунке вариант, пожалуй, один из лучших, который мы могли бы в принципе получить в результате такого эксперимента». Как разрезать, ясно на рисунке слева, справа показаны пять игровых элементов головоломки. Авторами этого разрезания являются Владимир Красноухов и Ирина Новичкова.





Как выяснилось позже, полученный набор настолько удачен, что возможно из его элементов сложить не только изображение буквы «Т», но и много других симметричных фигур. Так появился новый «Симметрикс Т-5», с которым участник эксперимента Ирина Новичкова участвовала в обмене головоломками на «IPP-34» в Лондоне.

Обычно в симметриксах не указывается фигура, которую нужно сложить, но здесь сделаем исключение, потому что «Симметрикс Т-5» «богат» на симметричные фигуры, которые можно сложить из его набора. На рисунке приведено двенадцать симметричных фигур. Все они фигуры имеют или ось симметрии, или центр симметрии.



Именно эти фигуры приведены в инструкции к головоломке. Но, готовясь к публикации, мне удалось найти еще четыре симметричные фигуры, которые тоже можно сложить из элементов Т-5. Попробуйте найти их. Возможно, вам повезет и вы найдете новую фигуру и таким образом внесете вклад в коллекцию фигур «Симметрикса Т-5».

К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru

РЕФЕРАТЫ ЭЛЕКТРОННЫХ ПУБЛИКАЦИЙ

Останина Е. (с. Коса, Пермский край). **Тест по теме: «Производная». 10 класс.** Цель проведения теста состоит в том, чтобы проверить практические навыки по теме «Производная». Тест состоит из 68 заданий. К каждому заданию предлагается три варианта ответа, один из которых верный. Выполнение теста предполагается дома по мере изучения тем, связанных с темой «Производная». Предлагаемый тест помогает выявить, насколько свободно и уверенно ученики владеют знаниями, насколько сформированы их умения и навыки. Также его можно предложить в 11-м классе для повторения и индивидуальной работы учащихся.

Бощенко О. (г. Волгоград). **Итоговые уроки — решение проблемы обобщения и систематизации. 7 класс.** По мнению автора, элементы занимательности вызывают у детей чувство удивления, живой интерес к процессу познания, помогают усвоить любой учебный материал. Игра ставит ученика в условия поиска, пробуждает интерес к победе, а отсюда стремление быть быстрым, собранным, находчивым, уметь четко выполнять задания. Автор предлагает внеклассное мероприятие, которое включает в себя несколько конкурсов. Начинается игра с интеллектуальной разминки — ряда шуточных задач. Продолжает игру конкурс капитанов «В мире животных», состоящий из трех заданий. Затем следуют конкурс факиров, модельеров и кулинарный конкурс. Заканчивается игра кроссвордом.

Нармонтас В. <vytautasnarmontas@gmail.com> (г. Кретинга, Литва). **На помощь приходит полный квадрат.** Метод выделения полного квадрата основывается на формулах сокращенного умножения — формулах квадрата суммы и разности. Данный метод применяется при упрощении громоздких выражений, а также при решении квадратных уравнений. Его можно применять как самостоятельно, так и в комбинации с другими методами: вынесение общего множителя за скобки, замена переменной, группировка слагаемых и др. Автор предлагает рассмотреть решения ряда заданий повышенной сложности, при решении которых применяется метод выделения полного квадрата. Решение таких задач требует знания теории чисел, умения выполнять различные алгебраические преобразования, хорошей техники исследования. Эти навыки необходимы ученикам для успешных выступлений на математических олимпиадах, сдачи ЕГЭ.

Мардахаева Е. <mantissa-l@mail.ru> (г. Москва). **Занятия для умных рук. 5–6 классы.** В качестве результатов освоения образовательной программы основного общего образования в Федеральном

К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru

государственном образовательном стандарте определены три вида образовательных результатов: личностные, метапредметные и предметные. Достижение таких (широко определенных) результатов обучения, закрепленных в стандарте, затруднительно только посредством учебной деятельности учащихся. Необходимо совершенствовать формы и методы организации учебной и их внеурочной деятельности, которая обладает достаточно высоким потенциалом для развития и обучения. Автор предлагает остановиться на одном из ее видов — конструировании. В 5–6-х классах с помощью конструирования можно сделать более наглядным и осязаемым изучение таких геометрических понятий, как «угол», «треугольник», «квадрат», «прямоугольник», «прямоугольный параллелепипед», «куб». Задания, предлагаемые ученикам, выполняются на реальных моделях, изготовленных из цветной бумаги, картона, спичек (палочек), алюминиевой проволоки, пластмассы и других материалов. Автор определил следующие темы занятий: «Задачи на перекладывание», «Задачи на разрезание», «Задачи на перекраивание», а также привлек геометрическую головоломку «Танграм», геометрическую головоломку «Полимино», изучение понятия угла и треугольника с помощью геоплана, изготовление каркасов, разверток, моделей.

Мыцына Л. (с. Крутое, Белгородская обл.). **Тема урока: «Математическое путешествие по Белгородской области». 5 класс.** Учебник: Виленкин Н.Я., Жохов А.С. и др. Математика, 5 класс. Цель урока: закрепление практических умений и навыков работы с десятичными дробями и вычисления процентов. На уроке учащиеся знакомятся с историей городов Короча, Белгород, Оскол, Шебекено, Грайворон. Знакомятся с промышленностью и народным хозяйством Белгородской области. Краеведческие задания, используемые на уроке, направлены на повышение интереса к математике, познание природы родного края. Также они способствуют развитию внимания, наблюдательности, исследовательских умений и навыков, активизируют познавательную деятельность. Урок сопровождается презентацией.

Макаренко И. (г. Могилев, Республика Беларусь). **Тема урока: «Основные задачи на проценты». 5 класс.** Цели урока: отработка практических навыков при вычислении процентов, применение данных навыков при решении задач. Автор предлагает на уроке провести заочное путешествие по достопримечательностям Белоруссии, таким, как летний амфитеатр в Витебске, Беловежская пуща, Национальная библиотека и памятник Звездочету в Могилеве. Урок насыщен различными формами работы: фронтальная, групповая и самостоятельная с последующей взаимопроверкой. Задачи, используемые учителем на уроке для закрепления умений, краеведческого содержания и носят исследовательский характер.

В рейтинге музеев мира Британский музей занимает одну из верхних строчек: и по богатству коллекции, и по посещаемости. Моя цель — древнейший из известных математических артефактов и жемчужина коллекции музея - папирус Ахмеса. Однако с первых залов забываешь обо всем на свете — здесь воочию видишь то, что было хорошо знакомо по фотографиям и иллюстрациям. Просто ожившие страницы школьных учебников истории! А вот и история математики: глиняные таблички с финансовыми расчетами, приспособления для вычислений, игральные кости, настольные игры, и возраст всего этого насчитывает не одну тысячу лет! Так! А где же папирус? Каждый экспонат здесь, кажется, уже просканирован и сфотографирован. Приходится обращаться за помощью к служителю. Ответ звучит как приговор: «Мне очень жаль, но папирус чрезвычайно хрупкий, и это не дает возможности выставлять его в залах. Он должен храниться при специальных условиях». Служитель полон сочувствия. Интересно, сколько раз он уже отвечал на этот вопрос? Мне стал известен еще один такой случай. Интересовался папирусом наш коллега и соотечественник Сергей Евгеньевич Рукшин. Обескураживающий ответ породил неожиданную мысль: а какова судьба не менее известного московского папируса? Может, не стоит ездить за семь верст киселя хлебать?

Л. Рослова