Всероссийская олимпиада школьников по математике,

муниципальный этап, 2015 г

8 класс, решения

1. У часовщика в мастерской есть некоторое количество часов, часть из которых неисправна. Когда сломались его собственные часы, он подсчитал, что если он отремонтирует свои часы, то в мастерской будет 24% неисправных часов, а если выбросит их, то неисправных часов будет 25%. Какой процент неисправных часов в мастерской сейчас?

Ответ 28%.

Решение. Пусть сейчас в мастерской n часов. Тогда количество неисправных часов (не считая собственных часов часовщика) равно $0{,}24n$. После того, как часовщик выбросит свои часы, это количество будет равно $0{,}25(n-1)$. Получаем уравнение

$$0{,}24n = 0{,}25(n-1),$$

то есть $0{,}01n = 0{,}25$. Значит, $n = 25$. Одни часы составляют 4% от 25, поэтому сейчас в мастерской $24 + 4 = 28\%$ неисправных часов.

Критерии.

Обоснованно получен верный ответ – 7 баллов.

Правильный ответ без обоснования – 0 баллов.

2. Вася подобрал целые числа a, b, c и d, удовлетворяющие равенству $\frac{a-b}{c-d} = \frac{a+b}{c+d}$. Может ли произведение этих четырёх чисел равняться 2015?

Ответ: нет.

Решение. Преобразуем данное равенство: $(a-b)(c+d) = (a+b)(c-d)$ или $ad - bc = -ad + bc$, т.е. $ad = bc$. Предположим, что $abcd = 2015$. Тогда $(ad)^2 = 2015$, что невозможно, так как число 2015 не является квадратом никакого целого числа.

Критерии.

Получено верное решение – 7 баллов.

В решении перебираются числа a, b, c и d, для которых $abcd = 2015$, и для них проверяется равенство $\frac{a-b}{c-d} = \frac{a+b}{c+d}$, но рассмотрены не все варианты – 0 баллов.

Рассмотрен пример чисел a, b, c и d, для которых $\frac{a-b}{c-d} = \frac{a+b}{c+d}$, и проверено, что для них $abcd$ не равно 2015, – 0 баллов.

3. Серёжа выписал в ряд 2015 различных чисел. Назовём число из этого ряда *маленьким*, если оно меньше двух своих соседей, *большим* – если оно больше двух своих соседей, и *средним*, если оно больше одного, но меньше другого из своих соседей. Оказалось, что средних чисел в этом ряду в два раза больше, чем больших. Сколько в этом ряду маленьких чисел?

Ответ: 504.

Решение.

Крайние числа не являются ни маленькими, ни большими, ни средними, поэтому чисел данных трёх видов 2013. Если не учитывать средние числа, то маленькие и большие чередуются, поэтому их количество различается не более чем на единицу. Пусть больших чисел x, а маленьких $x + y$, где y может принимать значение 1, 0 или –1. По условию количество средних чисел равно $2x$. Составим уравнение

$$x + 2x + x + y = 2013, \text{ или } 4x = 2013 - y.$$

Правая часть равенства делится на 4 только при $y = 1$. Тогда $x = 503$, а маленьких чисел 504.

Критерии.

Получено верное решение (при этом не требуется приводить пример с 504 маленькими числами) – 7 баллов.

Ход решения верный, но не учтено, что чисел трёх видов 2013, из-за чего получен неверный ответ 503 – 3 балла.

Рассмотрен конкретный случай, когда между любыми соседними большим и маленьким числами стоит одинаковое количество средних чисел, при этом получен правильный ответ – 1 балл.

4. В треугольнике ABC угол C прямой, а на сторонах AB и BC выбраны точки D и E такие, что $AD = CD$, $BD = BE$ и $CE = DE$. Найдите угол ABC.

Ответ: $36°$.

Решение.

Поскольку треугольники ADC, BDE и CDE равнобедренные, то $\angle CAD = \angle ACD$, $\angle BDE = \angle BED$ и $\angle CDE = \angle DCE$. Пусть $\alpha = \angle CDE = \angle DCE$, тогда по теореме о внешнем угле треугольника $\angle BED = \angle CDE + \angle DCE = 2\alpha$ и $\angle BDE = 2\alpha$.

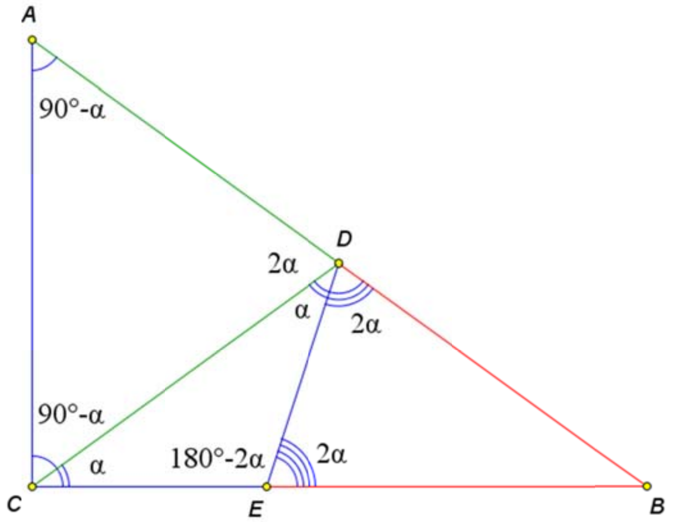
$\angle ACD = 90° - \angle DCE = 90° - \alpha = \angle CAD$, поэтому

$$\angle ADC = 180° - \angle ACD - \angle CAD = 180° - 2(90° - \alpha) = 2\alpha.$$

Поскольку $\angle ADC + \angle CDE + \angle BDE = 180°$, имеем уравнение $2\alpha + \alpha + 2\alpha = 180°$,

следовательно, $\alpha = \frac{180°}{5} = 36°$, отсюда

$$\angle ABC = 180° - \angle BDE - \angle BED = 180° - 4\alpha = \alpha = 36°.$$



Критерии.

Получено верное решение – 7 баллов.

Верный ответ без обоснования или с неправильным обоснованием – 0 баллов.

5. На каждой из девяти карточек написано по цифре: 1, 2, … , 9, каждая цифра встречается ровно 1 раз. Их разложили на несколько кучек (больше одной). Могло ли оказаться, что в каждой кучке выложенные в ряд карточки образуют число, кратное 11? Если да, то сколько таких кучек могло оказаться (найдите все варианты)?

Ответ: да, 2 или 3.

Решение.

Пример для двух кучек: 425678 и 913.

Пример для трёх кучек: 143, 275 и 968.

Могут быть и другие примеры, проверяющим необходимо проверить их правильность!

Покажем, что больше трёх кучек быть не может. Из различных цифр составить двузначное число, кратное 11, нельзя. Тогда все числа, удовлетворяющие условию, имеют не менее трёх цифр. Значит, этих чисел не более трёх.

Критерии.

Получено верное решение – 7 баллов.

Найдены примеры для двух и трёх кучек, но не доказано, что их не более трёх, – 5 баллов.

Найден только пример для двух кучек или только пример для трёх кучек – 3 балла.

Доказано, что кучек не больше трёх, но не найдено ни одного примера – 2 балла.

Доказано, что кучек не больше трёх, и найден пример только для одного из двух возможных случаев – 4 балла.

Утверждается без примеров и обоснования, что кучек может быть 2 или 3, – 0 баллов.