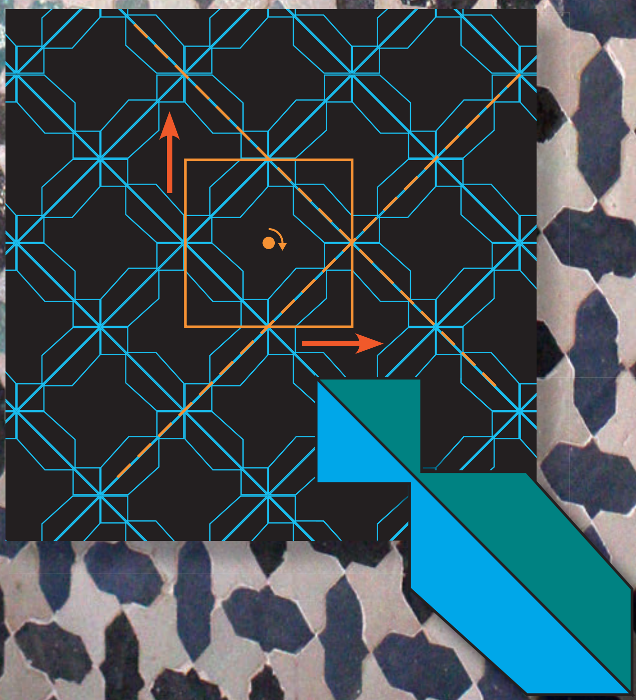
МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ № 5-6 (775)

ИЗДАЕТСЯ С 1992 г.

mat.1september.ru



издательский дом 1september.ru

Первое сентября

май–июнь 2016

МАТЕМАТИКА Подписка на сайте www.1september.ru или по каталогу «Почта России»: 79073 (бумажная версия); 12717 (CD-версия)

ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ДОМ
«ПЕРВОЕ СЕНТЯБРЯ»

Генеральный директор:
Наум Соловейчик
Главный редактор:
Артем Соловейчик
Коммерческая деятельность:
Константин Шмарковский
(финансовый директор)
Реклама, конференции и техническое обеспечение Издательского дома:
Павел Кузнецов
Производство:
Станислав Савельев
Административно-хозяйственное обеспечение: Андрей Ушков
Педагогический университет:
Валерия Арсланьян
(ректор)

ЖУРНАЛЫ ИЗДАТЕЛЬСКОГО ДОМА:
Английский язык – Е. Богданова,
Библиотека в школе – О. Громова,
Биология – Н. Иванова,
География – А. Митрофанов, и.о.
Дошкольное образование – Д. Тюттерин,
Здоровье детей – Н. Сёмина,
Информатика – С. Островский,
Искусство – О. Волкова,
История – А. Савельев,
Классное руководство и воспитание школьников – А. Полякова,
Литература – С. Волков,
Математика – Л. Рослова,
Начальная школа – М. Соловейчик,
Немецкий язык – М. Бузоева,
ОБЖ – А. Митрофанов,
Русский язык – Л. Гончар,
Спорт в школе – О. Леонтьева,
Технология – А. Митрофанов,
Управление школой – Е. Рачевский,
Физика – Н. Козлова,
Французский язык – Г. Чесновицкая,
Химия – О. Блохина,
Школа для родителей – Л. Печатникова,
Школьный психолог – М. Чибисова.

Иллюстрации: фотобанк Shutterstock

На с. 1 фото Л. Рословой
с. 64 — Henry Liebling (www.flickr.com)

УЧРЕДИТЕЛЬ:
ООО «ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ДОМ «ПЕРВОЕ СЕНТЯБРЯ»
Зарегистрировано ПИ №ФС77-58424 от 25.06.14 в Роскомнадзоре
Подписано в печать: по графику 23.02.16, фактически 23.02.16 Заказ №
Отпечатано в ОАО «Первая Образцовая типография» филиал «Чеховский печатный двор»
ул. Полиграфистов, д. 1, Московская область, г. Чехов, 142300; Сайт: www.chpd.ru;
E-mail: sales@chpk.ru; факс: 8(496)726-54-10, 8(495)988-63-76

АДРЕС РЕДАКЦИИ И ИЗДАТЕЛЯ:
ул. Киевская, д. 24, Москва, 121165
Телефон/ факс: **(499) 249-3138**
Отдел рекламы: **(499) 249-9870**
Сайт: **1september.ru**
facebook.com/School.of.Digital.Age

ИЗДАТЕЛЬСКАЯ ПОДПИСКА:
Телефон: **(499) 249-4758**

ПОДПИСНЫЕ ИНДЕКСЫ:
Почта России: бумажная версия – **79073**;
CD-версия – **12717**

В НОМЕРЕ

К материалам, обозначенным этим символом, есть дополнительные материалы в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru

УВАЖАЕМЫЕ ЧИТАТЕЛИ!

Все подписчики журнала имеют возможность получать электронную версию, которая не только является полной копией бумажной, но и включает дополнительные электронные материалы для практической работы.

Для получения электронной версии:

1. Откройте Личный кабинет на портале «Первое сентября» (www.1september.ru).
2. В разделе «Газеты и журналы/Получение» выберите свой журнал и кликните на кнопку «Я – подписчик бумажной версии».
3. Появится форма, посредством которой вы сможете отправить нам копию подписной квитанции.

После этого в течение одного рабочего дня будет активирована электронная подписка на весь период действия бумажной.

МАТЕМАТИКА. ПЕРВОЕ СЕНТЯБРЯ
Методический журнал для учителей математики
Издается с 1992 г. Выходит один раз в месяц

РЕДАКЦИЯ:
Главный редактор: Л. Рослова
Отв. секретарь: Т. Черкавская
Редакторы: П. Камаев, О. Макарова, И. Коган
Дизайн макета: И. Лукьянов. Дизайн обложки: Э. Лурье
Корректор: Л. Громова. Верстка: Л. Кукушкина

Распространяется по подписке

Цена свободная
Тираж 22 000 экз.

Тел. редакции: **(499) 249-3460**
E-mail: **mat@1september.ru**
Сайт: **mat.1september.ru**

О КРИТИЧНОСТИ И ЧТЕНИИ ИНФОРМАЦИИ

Л. РОСЛОВА

Как замечательно владеть навыками работы с информацией. Вот читаешь, например, информацию в СМИ официального лица, представляющего некоторый регион (какой именно, в данном случае значения не имеет), о том, как одиннадцатиклассники «записались» на сдачу ЕГЭ. Сказано: базовый экзамен по математике хотят сдавать свыше 87% выпускников региона, профильный — около 70%. Отлично, легко подсчитать, что только профильный экзамен будут сдавать 100 – 87 = 13% детей, базовый и профильный — 70 – 13 = 57%, только базовый — 87 – 57 = 30%. Не забываю проверить: 13 + 57 + 30 = 100%. Сколько интересной информации можно извлечь из простого сообщения чиновника, умея решать задачи на проценты! Но и дело иметь с такой информацией просто приятно.

Однако. Следующие утверждения повергают меня в уныние. Утверждается, что все больше школьников сдает экзамен по предметам естественно-научного цикла, а также больше стало желающих сдать экзамены по гуманитарным предметам. Например, на 2% выросло число желающих сдать физику. Что же это получается — по всем предметам проценты выросли? А как же сумма, которая должна равняться 100%? Наличие такого «ограничителя» указывает на то, что если где-то что-то выросло, то где-то должна быть и убыль. Тупик.

Может, общее число участников выросло. Странно, конечно, в одном случае представлять информацию в процентах, а в другом — использовать абсолютные значения. Пытаясь разобраться, нахожу информацию о том, что общее количество выпускников в этом году осталось примерно тем же, что и в прошлом. Правда, информация эта не из этого сообщения, а из данных Рособрнадзора и относится ко всей стране. Означает ли это, что количество выпускников в регионе выросло? В общем случае, конечно, нет. Но возможно.

В общем: понять невозможно. Нужна дополнительная информация. А жаль. Не думаю, что чиновник хотел что-то скрыть или намеренно запутать. Просто не очень продуманно была представлена информация, что встречается сплошь и рядом.

К чему все мои рассуждения? К вопросу о такой характеристике мышления, как критичность. Полезная штука в жизни! Позволяет реже оказываться в дураках.

http://www.tvc.ru

В. МАХРОВ, Н. СНЫТКИНА,
В. СНЫТКИНА,
Калужская опытная сельхозстанция

ПО СКАЗОЧНЫМ ТРОПИНКАМ МАТЕМАТИКИ

Неизведанный мир математики и волшебный мир сказки — их сочетание поможет развить у детей устойчивый интерес к математике. В осуществлении этой цели нам помогут задачи-сказки, в которых мы встретимся с нашими старыми знакомыми: барином и мужиком, волком и лисой, Бабой Ягой и Кощеем Бессмертным, Винни-Пухом и Пятачком, тремя поросятами и многими другими персонажами. Задачи-сказки учат рассуждать, находить пути к решению самостоятельно, долгое время сохраняют интерес к математике. Давайте познакомимся с некоторыми задачами, которые встретятся нам на сказочных тропинках Математики.

Задача 1. Часы и скучающий ослик. Ослику Иа-Иа было скучно. Прошел день, а к нему почему-то никто не зашел. И вчера тоже никого не было. Стенные часы пробили шесть раз. Ослик знал, что время от первого удара до шестого равняется 30 секундам.

– Пройдет еще один час, и часы пробьют семь раз, а еще через час — восемь раз и так далее, — подумал он, и ему стало совсем скучно.

Часы пробили 12 раз.

– Однако, уже поздно, — сказал он и лег спать. — Полночь. Интересно, сколько времени продолжается бой часов, когда они бьют 12 раз?

Утром, когда Иа-Иа поливал грядки, он услышал знакомое сопение и увидел Винни-Пуха и Пятачка.

— Ах, как вы вовремя! Я только что закончил поливать морковку и собирался завтракать, — сказал Иа-Иа.

– Замечательно! — обрадовался медвежонок.

– Я рад, что вы пришли ко мне, — продолжил ослик. — Эти дни я очень скучал. А вчера, когда я засыпал, мне в голову пришла одна задача. В полночь часы пробили 12 раз и я подумал: «Если в 6 часов вечера часы бьют шесть раз и время от первого удара до шестого равно 30 секундам, то сколько времени уйдет на 12 ударов?»

— Так это совсем просто! — воскликнул Винни-Пух. — Шесть ударов длилось 30 секунд. Значит, на 12 ударов потребуется 60 секунд.

– Ответ неверный, — сказал ослик.

– Винни, можно я подскажу? — подал голос Пятачок. — Если мы встанем в одну линию друг за другом, то нас будет трое, а промежутков между нами будет только два.

– Я понял! — воскликнул Винни-Пух. — Когда часы били шесть раз, то промежутков между ударами было пять. И каждый длился $30 : 5 = 6$ секунд. Между первым и двенадцатым ударами — 11 промежутков, каждый продолжительностью 6 секунд. Следовательно, на 12 ударов потребуется 66 секунд.

– Совершенно верно, — сказал ослик.

Вот что значит рассуждать логически.

Задача 2. Поросенка три, а волк один. В сторожке старого лесника тепло и уютно. В печи догорали сосновые поленья, на столе стояла керосиновая лампа, внучка Маша дочитывала какую-то сказку и ждала своего дедушку, который вот-вот должен был вернуться из леса. Маша приехала к нему на зимние каникулы, вечерами они сидели у печки, а дед рассказывал внучке сказки. А знал он их великое множество. Наконец скрипнула дверь и на пороге появился старый лесник.

– Дедушка, — сказала внучка. — Вчера ты мне рассказал сказку про Бабу Ягу и Кощея Бессмертного, позавчера — про Змея Горыныча и кота Баюна, а что сегодня расскажешь?

– Сегодня я расскажу про трех поросят.

– Я эту сказку знаю.

– А я расскажу тебе продолжение, — ухмыляясь в бороду, сказал лесник. — Та сказка, что ты знаешь, закончилась тем, что волк разрушил дома Ниф-Нифа и Нуф-Нуфа и три поросенка стали жить у Наф-Нафа, дом которого волк так и не смог разрушить. Ведь Наф-Наф построил крепкий дом, из кирпича. Теперь слушай, что было дальше.

– Наступила весна, мы прожили с вами в одном доме всю зиму, — сказал Наф-Наф своим братьям. — И теперь мы должны подумать о строительстве новых домиков для тебя, Ниф-Ниф, и для тебя, Нуф-Нуф.

– Зачем нам строить новые дома? — спросил Нуф-Нуф. — Мы так хорошо жили вместе.

– Мы растем, и скоро нам будет тесно в одном доме, — возразил Наф-Наф. — Да и волк не оставит нас в покое. Хорошо иметь лишнее жилище на всякий случай. Будем ходить в гости друг к другу, и волк не будет знать, в каком домике мы собрались вместе.

Но его братья, как и раньше, не хотели браться за работу. Приятно было в первые весенние деньки гулять и прыгать по лугу, рыть землю и искать прошлогодние желуди.

– До зимы еще далеко, — сказал Ниф-Ниф. — Если я и буду строить дом, то в конце лета.

– Я тоже подожду конца лета, — поддержал своего ленивого брата Нуф-Нуф.

Лето прошло быстро, наступила осень, и Наф-Наф вновь сказал своим братьям о том, что если они не начнут строить дома немедленно, то могут к зиме и не успеть.

– Волк не приходил к нам, пока было лето, — сказал Наф-Наф. — Наступит зима, волк будет голодным и обязательно придет к нам.

С большой неохотой два ленивых брата начали строить себе дома. На этот раз дома получились крепкие и надежные, не то что раньше, соломенные, и стояли рядом, а вот дом Наф-Нафа оказался в пяти километрах от них.

– Дедушка, — спросила Маша, — а зачем Ниф-Ниф и Нуф-Нуф построили дома так далеко от дома Наф-Нафа?

– Они не любили, когда брат делал им замечания, и решили построить свои дома далеко от дома Наф-Нафа, но не настолько, чтобы не ходить друг к другу в гости. Пять километров для таких шустрых поросят не так уж и много. Домики всех поросят и волка стояли вдоль одной проселочной дороги, причем дома двух братьев стоял между домами Наф-Нафа и волка. Слушай, внучка, что дальше произошло.

Решили как-то Нуф-Нуф и Ниф-Ниф навестить своего брата Наф-Нафа, чтобы сделать ему очень смелое предложение: пойти к волку с предложением мира и дружбы. Потом передумали и пошли к волку вдвоем, хотя и очень боялись. Так получилось, что и Наф-Нафу пришла в голову та же мысль. Но он не хотел говорить об этом своим братьям, так как боялся за их жизнь, и потому решил идти к волку один.

На следующий день в 6 часов утра Нуф-Нуф и Ниф-Ниф отправились к дому волка. Прыгая и веселясь, они двигались по дороге со скоростью 10 км/ч. И в тот же день в 7 часов утра по направлению к дому волка со скоростью 15 км/ч вышел их брат Наф-Наф. Пробегая мимо домов своих братьев, он понял, что их дома нет, и обрадовался тому, что не надо им объяснять, зачем он решил идти по дороге, что вела к дому волка. Через некоторое время он увидел своих братьев, бегущих по дороге, и решил незаметно проскочить мимо них. Это ему удалось.

– Дедушка, — обратилась к леснику Маша, — и что же получилось: поросята в разное время прибежали к дому волка?

– Ну да, Наф-Наф прибежал к дому волка на 20 минут раньше своих братьев.

– А сколько же километров осталось бежать поросятам с того места, где Наф-Наф встретил Ниф-Нифа и Нуф-Нуфа? — спросила Маша.

– Я думаю, что ты сама сможешь ответить на свой вопрос, если хорошо подумаешь и вспомнишь, что я тебе рассказал о трех поросятах и волке.

Лесник сел в сторонке и слушал, как его внучка, рассуждая вслух, решала задачу про волка и трех поросят.

– До того места, где Наф-Наф догнал своих братьев, он пробежал на 5 км больше, поэтому:

$$s_{\text{Нафа}} = s_{\text{Нифа и Нуфа}} + 5. \qquad (*)$$

Наф-Наф отправился в путь на 1 час позже, чем его братья, поэтому

$$s_{\text{Нафа}} = 15t_{\text{Нафа}},$$
$$s_{\text{Нифа и Нуфа}} = 10(t_{\text{Нафа}} + 1).$$

Подставим в равенство (*) полученные соотношения:

$$15t_{\text{Нафа}} = 10(t_{\text{Нафа}} + 1) + 5.$$

Из этого уравнения Маша получила, что время, затраченное Наф-Нафом до места встречи, равно 3 часа, следовательно, Ниф-Ниф и Нуф-Нуф на дорогу от своих домиков затратили 4 часа. Маша легко нашла, что Наф-Наф к моменту встречи пробежал 45 км. Теперь осталось найти расстояние от дома Наф-Нафа до дома волка. Маша продолжала рассуждать.

– Если считать, что расстояние равно x, то Наф-Наф пробежал это расстояние за $\frac{x}{15}$ ч, а два его брата за $\frac{x-5}{10}$ ч.

Потом Маша вспомнила, что Наф-Наф прибежал к дому волка на 20 минут раньше Нуф-Нуфа и Ниф-Нифа. И вот что у нее получилось:

$$\frac{x}{15}+\frac{4}{3}=\frac{x-5}{10},\ x = 55.$$

– Я решила задачу! — радостно воскликнула Маша. — Наф-Наф догнал своих братьев за 10 км до дома волка.

Задача 3. Буратино идет в школу. Папа Карло сидел у окна своей каморки и ждал Буратино. С трудом заработанный золотой папа Карло решил отдать своему деревянному человечку, чтобы тот смог купить себе букварь. Наконец прибежал радостный Буратино и сообщил папе Карло, что он нашел магазин, где можно купить букварь.

– Я не только нашел магазин, но и продавец обещал подарить мне букварь при условии, что я решу задачу, которую он мне предложит.

– Совсем неплохо бы сэкономить золотой, — сказал папа Карло. — Но золотой ты все-таки возьми. Ведь задачу можешь и не решить.

Когда Буратино пришел в книжный магазин, продавец предложил ему задачу.

– Представь себе, Буратино, что однажды собрались восемь букв и решили составить слово. Они долго менялись местами. Слово получилось, только его нужно было читать справа налево. При этом буквы разместились так:

1) буква Т стояла после буквы Я;

2) буква Т стояла перед буквой Е, но не рядом, а через одну;

3) буква Б стояла между буквами Р и Я, причем Я стояла не на первом месте;

4) буква С стояла после буквы Н, но не рядом, а через одну;

5) буква Н стояла рядом с буквой Е;

6) буква Р стояла между буквами Ь и Т.

Если ты правильно расставишь буквы, то сможешь прочитать зашифрованное слово. Только не забудь: слово читается справа налево.

– «Непростую задачу задал мне продавец», — подумал про себя Буратино. И стал рассуждать.

– Если прочитать условия 3 и 6, то условие 3 более подробное, так как там сказано, что буква Б стоит вплотную между буквами Р и Я, да еще известно положение буквы Я среди них. Эти три буквы расположены так: РБЯ. Из первых двух условий следует, что буква Я стоит перед Т, за которой через букву стоит Е. Если запишу полученное, то получу следующее расположение букв: ...РБЯТ...Е... Я сумел расставить пять букв из восьми. Из условия 6 можно сделать вывод, что Ь расположен впереди Р, так как Т стоит за буквой Я, а значит, и за Р. С другой стороны, из условий 4 и 5 ясно, что оставшиеся буквы, С и Н, находятся справа от Р. Следовательно, Ь стоит не только впереди Р, но и рядом с ней, и получилось вот что: ЬРБЯ...Е. Остались две буквы, С и Н. Согласно условию 4, буква С стоит после Н через одну букву. Разместить эти три буквы можно только одним способом: ...НЕС. Итак, окончательное расположение букв такое: ЬРБЯТНЕС.

И Буратино прочитал это слово справа налево: СЕНТЯБРЬ.

– Молодец, — похвалил Буратино продавец. — Первого сентября ты пойдешь в школу с новым букварем — это тебе мой подарок, а золотой отдай папе Карло. Пусть он тебе купит новую куртку.

Буратино поблагодарил продавца и, зажав золотой в одной руке, а в другой букварь, побежал домой.

Задача 4. Гасан и разбойники Кудеяра. Пришел раз Гасан в лес, чтобы собрать хворост и за гроши от его продажи купить на базаре немного лепешек для своей семьи. Но началась гроза. Гасан спрятался под дерево и решил подождать, пока пройдет дождь. Вдруг он услышал шум, не похожий на шум дождя. Гасан выглянул из своего укрытия и увидел несколько всадников на лошадях, навьюченных мешками. Это были разбойники во главе с Кудеяром. Замерев от страха, Гасан следил за караваном, остановившимся около входа в пещеру, скрытого буйной зеленью. Разбойники сняли с лошадей мешки и стали заносить их в пещеру. Когда разбойники вышли из пещеры, Гасан услышал, как Кудеяр сказал одному из них:

– Слушай меня, Муса. Пещера имеет форму квадрата. Сегодня мы привезли 24 мешка с драгоценностями и вдоль каждой стены поставили по семь мешков. Будешь приходить сюда каждый вечер и считать, сколько мешков стоит вдоль каждой стены. Если их будет семь, значит, никто чужой сюда не приходил и мы можем быть спокойны за наше богатство.

Когда разбойники уехали, Гасан, преодолевая страх, пробрался в пещеру. Мешки он увидел сразу. Сосчитал их: действительно, вдоль каждой стены стояло по семь мешков. Гасан понимал, что взять часть мешков — да так, чтобы разбойники не заметили пропажу, — без хитрости не удастся. Он решил непременно вернуться сюда.

Придя домой, он начертил план пещеры и нарисовал, как стоят мешки, поставив вместо мешков цифры, соответствующие числу мешков вдоль каждой стены.

Всю ночь Гасан думал, как взять несколько мешков, чтобы оставшиеся можно было расположить по семь вдоль каждой стены. И придумал.

Утром он попросил у соседа лошадь с повозкой и отправился в лес. Добравшись до пещеры, Гасан вынес из нее и погрузил в повозку четыре мешка. А оставшиеся 20 мешков поставил вдоль стен так, как придумал минувшей ночью. Уходя, он еще раз оглядел мешки: вдоль каждой стены стояло по семь мешков.

Вечером, когда Гасан был уже дома, к пещере подъехал разбойник Муса. Он убедился, что вдоль каждой стены стоит по семь мешков, и отправился в лагерь разбойников.

– Вдоль каждой стены по семь мешков, — размышлял Муса, сидя на лошади. — Но почему-то мне кажется, что мешков стало меньше.

Тем временем Гасан раздумывал, как бы забрать у разбойников еще несколько мешков. И опять он не спал всю ночь, ища способ разместить меньшее количество мешков все так же: по семь мешков вдоль каждой стены.

Утром он снова попросил у соседа лошадь с повозкой и отправился в лес. Добравшись до пещеры, Гасан вынес из нее и погрузил в повозку четыре мешка. А оставшиеся 16 поставил вдоль стен так, как придумал дома. Больше он в пещеру за драгоценностями не ездил.

Когда разбойник Муса вечером приехал в пещеру проверить мешки, он убедился, что их по-прежнему по семь вдоль каждой стены (так велел считать Кудеяр), но, прибыв в лагерь разбойников, высказал Кудеяру свои подозрения о том, что мешков стало как будто меньше.

Кудеяр сам примчался пересчитывать мешки с драгоценностями и убедился, что вдоль каждой стены стоит действительно по семь мешков, только вместо 24 их осталось в пещере всего 16. Он не стал наказывал Мусу, ведь тот считал мешки так, как было приказано. Но сказал, что мешки взял умный человек.

Подумайте, как Гасан разместил мешки в пещере, когда забрал первые четыре мешка из 24. Каким образом он разместил мешки в пещере, когда забрал еще четыре мешка, оставив там всего 16?

А мы предлагаем вам посмотреть на рисунки, где хорошо видно, как Гасан сумел разместить мешки так, чтобы вдоль каждой стены стояло по семь мешков.

Задача 5. Царь, боярин и мужик. Торговал мужик на базаре яблоками из своего сада. Ехавший мимо царь стал расспрашивать мужика, велика ли у него семья да как и на что они живут весь год.

– Доход семьи от овощей и фруктов. Торгую пять месяцев, с мая по октябрь, — говорит мужик. — Вот овощами торговать закончил. С сентября торгую яблоками. Зарабатываю немного. За овощи в мае выручаю 15 рублей, в июне — 20 рублей, а затем в каждый из трех месяцев в сумме получаю денег, как за предыдущие два. Из всех денег 15 рублей трачу на новый хомут, а остальные делим поровну между домочадцами по 40 рублей. Вот и посчитай, царь, сколько человек в моей семье вместе со мной.

Царь никак не может понять, сколько человек в семье мужика.

– Хитрая задача, — говорит. — Ты, мужик, никому не говори, что я задачу не решил. Не забывай, что я царь.

Поехал царь домой. Едет и думает: «Почему же я не спросил у мужика, сколько денег он зарабатывает, торгуя яблоками? Ведь он сказал только, сколько зарабатывает, торгуя овощами. Приеду во дворец, соберу бояр, прикажу им решить за неделю задачу».

Так и сделал. Почесали затылки бояре: не могут решить задачу. Срок подходит.

Задумал один хитрый боярин поехать к мужику за ответом. Пришел к царю и просит:

– Царь-батюшка, дай еще неделю сроку. Решу я задачу.

– Хорошо, — отвечает царь. — Решишь — награда твоя, не решишь — пеняй на себя.

Боярин нашел того мужика и говорит:

– Расскажи, как решить задачу, а я тебе дам 1000 рублей.

Отвечает мужик:

– Давай, я тебе сначала другую задачу загадаю. Отгадаешь, расскажу, как решить первую задачу. Не отгадаешь, расскажу, как решить первую задачу, но за это ты мне дашь еще 1000 рублей.

Пришлось боярину согласиться.

– Слушай внимательно. Когда царь был в наших краях, он со своей свитою заехал на базар. Я в это время торговал яблоками. У меня было две корзины яблок. В каждой корзине не более 100, да и в двух не более 100. Продавал я яблоки из первой корзины десятками по 26 рублей за десяток. Осталось 5 яблок. Из второй корзины я продавал яблоки по 26 рублей за восемь штук. Осталось тоже 5 яблок. Из второй корзины я продал яблок больше, чем из первой. Оставшиеся 10 яблок я отдал соседу, который помог мне привезти яблоки на базар. Скажи мне, чему равна средняя цена каждого яблока, привезенного мною на базар, если в каждой корзине яблок было поровну.

– Эта задача еще труднее, чем первая, — сказал боярин. — Ее я точно не решу.

Отдал он мужику 2000 рублей, и рассказал мужик боярину, как решать первую задачу.

– Если захочешь узнать, как решить вторую задачу, приезжай. Только привози еще 2000 рублей.

Едет боярин домой и думает:

– Скажу царю, что сам решил задачу, может, царская награда возместит убыток?

Как же решить задачи мужика?

Решение задачи 1. В мае месяце мужик заработал 15 руб., в июне — 20 руб. В каждом следующем месяце он зарабатывал столько рублей, сколько за два предыдущих, то есть в июле — 35 руб., в августе — 55 руб., в сентябре — 90 руб. Всего 215 руб. За 15 руб. мужик купил хомут; 200 руб. поделил между всеми членами семьи поровну: каждому по 40 руб. Значит, в семье было пять человек.

Решение задачи 2. Вторая задача действительно труднее первой. Мужик торговал яблоками десятками из первой корзины, и у него осталось 5 яблок. Значит, в первой корзине могло быть 15, 25, 35, 45, 55, 65, 75, 85 или 95 яблок. Из второй корзины мужик продавал по 26 руб. за каждые 8 яблок, и у него осталось тоже 5 яблок. Значит, во второй корзине могло быть 13, 21, 29, 37, 45, 53, 61, 69, 77, 85 или 93 яблока. Так как яблок в корзинах было поровну и не более 100 в двух, то значит, в каждой корзине было по 45 яблок.

Из первой корзины мужик продал 4 десятка и выручил 104 руб. Из второй корзины он продал яблок на сумму 130 руб. Всего он получил 234 руб. Яблок он продал 80 штук, 10 отдал соседу. Средняя цена яблока, привезенного на базар, равна $234 : 90 = 2{,}6$ руб., то есть 2 руб. 60 коп.

Задача 6. Слоненок и его друзья. Обезьянка, слоненок и удав были большими друзьями. Както слоненок пригласил приятелей к себе на ужин в 7 часов вечера. Все знали, что слоненок не любит, когда кто-нибудь опаздывает.

Удав любил греться на солнышке и был довольно ленив, но решил прибыть к ужину вовремя. А жил он в 104 м от дома слоненка. Скорость своего передвижения он знал: 8 м/мин. Знал и точную длину своего тела: 8 м. Считалось, что удав пришел в гости, если весь, до кончика хвоста, вполз в жилище.

Обезьянка жила дальше, чем удав, в 450 м от дома слоненка. Но она была шустрой и двигалась с большей скоростью, чем удав. В день приглашения обезьянка вышла из дома одновременно с удавом, но 10 мин. двигалась с меньшей скоростью, чем всегда, так как отвлекалась, разглядывая, что происходит вокруг. Обезьянка поняла, что если будет передвигаться с такой скоростью, то опоздает. Поэтому она увеличила свою скорость на 15 м/мин. и за следующие 10 мин. пробежала остальную часть пути, вовремя прибыв в гости.

С какой же скоростью пробежала обезьянка вторую часть пути и когда должен был выползти из своего дома удав, чтобы не получить замечание от слоненка?

Решение. Если скорость обезьянки в начале пути была x м/мин., то получим уравнение

$$450 = 10x + (x + 15) \cdot 10,\ x = 15.$$

Для определения времени, которое потребуется удаву, чтобы доползти от своего дома до дома слоненка, нужно разделить 104 на 8. Получится 13 мин. И следует учесть время, нужное удаву, чтобы вползти полностью, от кончика носа до кончика хвоста. При его длине в 8 м на это потребуется еще одна минута. Следовательно, удаву придется выползать из дома за 14 мин. до назначенного времени, то есть в 6 ч 45 мин.

Задача 7. Кваша и ее подруги. Три лягушки сидели на краю колодца, когда к ним прискакала их давняя знакомая — лягушка Кваша.

– Жарко, однако! — проквакала гостья. — Вот бы искупаться в колодце!

Три подружки посмотрели друг на друга — вспомнили, как чуть не утонули в этом колодце.

– Что это вы так переглядываетесь? — спросила Кваша.

– Однажды мы втроем, — начала первая лягушка, — ловили комаров и упали в колодец. Хорошо, что стены колодца покрыты мхом, а то бы мы и не выбрались из него. Я каждый день поднималась на 4 метра, но соскальзывала на 1 метр. Вторая из нас за день поднималась тоже на 4 метра, но соскальзывала на 2 метра. Третья за день поднималась также на 4 метра, но соскальзывала на 3 метра. В итоге мне потребовалось 3 дня, чтобы выбраться из колодца. Вторую лягушку я ждала два дня, а третью — четыре дня. После этого мы больше не ловим здесь комаров, а охотимся за ними у ближайшего болота.

– Возьмите меня с собой, — попросила Кваша. — Кстати, а как далеко отсюда расположено болото?

– Если прыгать не спеша, то я, — продолжала первая лягушка, — допрыгаю до болота и обратно за 4 минуты. Вторая из нас тратит на путь до болота и обратно 12 мин., а третья — 15 минут. У каждой из нас есть любимая тропинка.

– Сейчас мы втроем одновременно поскачем к болоту. Надо проверить, много ли там комаров. Каждый раз мы постараемся приносить тебе по комару, а когда мы втроем одновременно окажемся у колодца, возьмем тебя с собой. А пока будешь нас ждать, сообрази, через какой промежуток времени мы снова одновременно окажемся здесь.

Когда первая лягушка принесла Кваше комара, та уже знала, через сколько минут, начиная с момента, когда лягушки ускакали к болоту, ей придется ждать их одновременного возвращения.

– Скажите, а каково расстояние до вашего болота? — спросила Кваша.

– Какое расстояние ты можешь проскакать за 1 минуту? — спросила в свою очередь одна из лягушек.

– Не более 12 метров, — ответила Кваша.

– При скорости 12 м/мин. мы вместе с тобой доберемся до болота за 10 минут. Так что до болота 120 метров.

Сколько же Кваша ждала своих подруг, пока они не оказались у колодца одновременно?

Решение. Ясно, что нужно найти число, которое делилось бы на 4, 12 и 15, причем это число должно быть наименьшим из всех таких чисел. Таким числом является 60. Кваша ждала 1 час.

Задача 8. Задача Бабы Яги. Похитил Василису Прекрасную Кощей Бессмертный и унес ее за тридевять земель в тридесятое царство. Решил Иван-царевич найти и освободить свою жену. Долго шел он и набрел на избушку на курьих ножках. Говорит Иван-царевич:

– Избушка, избушка, стань по-старому, как мать поставила: к лесу задом, ко мне передом.

Избушка повернулась к нему передом, к лесу задом. Иван-царевич вошел в нее и видит: на печи на девятом кирпиче лежит Баба Яга, костяная нога, зубы — на полке, а нос в потолок врос.

– Зачем, добрый молодец, ко мне пожаловал? — спрашивает его Баба Яга. — Дело пытаешь или от дела лытаешь?

Иван-царевич рассказал ей, что ищет свою жену, Василису Прекрасную.

– Знаю, знаю, — говорит Баба Яга, — твоя жена у Кощея Бессмертного. Трудно будет ее найти. Ну да задам я тебе задачку. Решишь — подскажу, где искать, не решишь — иди на все четыре стороны, куда глаза глядят, все одно не сыщешь. Согласен?

Иван-царевич не задумываясь согласился.

– Тогда слушай. Имеется у меня восемь метел, на которых я летаю: четыре — березовых, три — ореховых, одна — липовая, и два ящика, где я храню свой реквизит. Один ящик вмещает три метлы, другой — пять метел. Сколькими способами можно разместить все метлы в этих ящиках?

«Я думал, что у Бабы Яги одна метла, рассуждал про себя Иван-царевич. А бабуся держит про запас семь метел, но это — дело хозяйское, а задачу мне решать. Обозначу-ка я березовые метлы буквой Б, ореховые — буквой О, липовую — буквой Л. В первом ящике, например, можно разместить все березовые метлы: БББ, а можно только ореховые: ООО. Если разместить в первом ящике две ореховые метлы и одну березовую или две березовых и одну ореховую, то получится еще два случая: ООБ, ББО. Всего четыре случая. Чуть не забыл. Ведь у Бабы Яги еще и липовая метла есть. Тогда возможны еще три случая: ББЛ, ООЛ, ОБЛ. Остальные метлы Баба Яга хранит во втором ящике. Если в первом ящике она будет хранить три березовых метлы, то во втором ящике будет одна березовая метла, три ореховых и одна липовая: БОООЛ. А дальше все просто!» Обрадовался Иван-царевич и рассказал Бабе Яге о том, как она может хранить метлы в двух ящиках.

1-й ящик: БББ, ООО, ББО, ББЛ, ООБ, ООЛ, ОБЛ.

2-й ящик: БОООЛ, БББЛ, ББООЛ, ББООО, ОБББЛ, ОББББ, ООБББ.

Пришлось Бабе Яге выполнить свое обещание и показать Ивану-царевичу дорогу к Кощею Бессмертному. И Василису Прекрасную Иванцаревич все-таки спас.

Задача 9. Задача мудрой совы. Жили по соседству старый ворон и филин. Ворон жил в громадном гнезде на самом верху такого же древнего дуба, как и он сам. А филин жил в большом дупле того же дуба, но почти у самой земли, так как боялся высоты. Поэтому обычно ворон прилетал в гости к филину, когда становилось скучно одному или просто хотел поговорить о своих птичьих проблемах. И вот сегодня, услышав шум крыльев, филин понял, что сосед решил осчастливить его своим посещением.

– Здравствуй, сосед, — прокаркал ворон. — Однако, похолодало.

– А у меня в дупле тепло. Не страшен мне ни дождь, ни снег. Так что спускайся ко мне. Между прочим, вчера ко мне прилетала сова и предложила разгадать арифметический ребус:

$$\begin{array}{r} +\,\text{ВОРОН} \\ \text{СТАЯ} \\ \hline \text{ЛЕТЕЛА} \end{array}$$

Вот я и ждал тебя, чтобы вместе подумать над этой задачей, тем более что она имеет к тебе непосредственное отношение. В этом ребусе разные буквы обозначают разные цифры, сказала сова, и еще есть дополнительное условие: число СТО делится на 139. Что ж, попробуем справиться с задачей и доказать мудрой сове, что мы тоже умеем логически мыслить.

– С буквой Л все просто, — сказал ворон. — Буква Л равна 1, так как складываются пятизначное и четырехзначное числа. Пожалуй, я скажу и вторую цифру суммы: Е равна 0. Все это выполняется, если первая цифра пятизначного числа равна 9.

– Почему это ты так решил? — спросил филин у ворона.

– Потому что только в этом случае возможен переход единицы в следующий разряд. Вот что у нас получилось:

$$\begin{array}{r} \text{9орон} \\ +\quad \text{стая} \\ \hline \text{10т01а} \end{array}$$

– Я стал писать буквы маленькие, — пояснил ворон, — так как ноль очень похож на буквы О.

– А вот как решать задачу дальше, я не знаю, — задумчиво произнес филин. — Наверное, надо подбирать различные цифры для букв.

– Подбирать можно, — согласился ворон, — но мы забыли еще одно условие. Сова сказала, что СТО делится на 139. Значит, это число может быть одним из чисел: 139, 278, 417, 556, 695, 834, 973. Дальше числа, которые делятся на 139, писать не надо, так как они уже не будет трехзначными.

– Я думаю, — поддержал филин, — нужно взять только числа 278 и 834, так как в них разные буквы обозначают разные цифры и не используются цифры, которые мы уже рассматривали.

– Замечательно! — похвалил филина ворон.

– Если далее мы возьмем число 278, то оно при сложении 8 и 2, даже при переносе единицы из разряда сотен, не даст нам цифру 7. Остается рассмотреть число 834. Получим:

$$\begin{array}{r} \text{94р4н} \\ +\ \text{83ая} \\ \hline \text{10301а} \end{array}$$

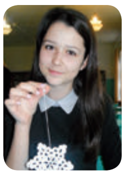
И филин с вороном успешно закончили решение задачи. Они поняли, что при сложении в разряде десятков происходит перенос единицы и буква а равна 7. Получилось два решения:

$$\begin{array}{r} 94642 \\ +\ 8375 \\ \hline 103017 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 94645 \\ +\ 8372 \\ \hline 03017 \end{array}$$

ИТОГИ КОНКУРСА «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ»

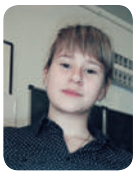
Победителями в командном зачете второй год подряд стала команда «Искатели» учащихся 7–9-х классов средней школы № 2 г. Суджа Курской области: Анастасия Дьяченко, Ольга Мусаева, Ольга Соловьёва, Александр Мельников, Николай Долгодуш, Иван Золоторёв, Елена Нечаева, Антонина Гринь, Ольга Васильева, Анастасия Хлопцева, Анастасия Головина. Руководитель: Татьяна Михайловна Воронцова.

Представляем победителей:

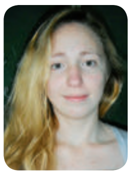

А. Головина


А. Гринь


А. Хлопцева


Е. Нечаева


А. Дьяченко


О. Мусаева


О. Соловьева

Победителем в личном первенстве стал Максим Емельянов, ученик 7 «А» класса средней школы № 3 с углубленным изучением отдельных предметов г. Можга Удмуртской Республики. Руководитель: Е.А. Акатьева. Работы Максима см. на с. 30.

КОНКУРС МАТЕМАТИЧЕСКИХ СКАЗОК

З. ЧИНОВАТАЯ,
г. Харьков, Украина

Дети — настоящие фантазеры. Они могут сочинять изумительные сказки, используя математические знания. Это задание ребята получают на лето, а в сентябре мы проводим конкурс, определяем победителей, награждаем и публикуем лучшие сказки и рисунки на сайте гимназии.

Легенда о войне чисел

Давным-давно в одной далекой-предалекой галактике на планете Математика жили-были числа. Их было большое-пребольшое множество, но они все дружили между собой, и даже их дворики не отделялись один от другого заборами. Все они жили дружно и мирно. На планете царили мир и покой. Но проснувшись одним пасмурным, дождливым утром все числа, сами не понимая причины своего плохого настроения, стали ссориться друг с другом, доказывая своему ближайшему соседу свою большую значимость. Четные доказывали нечетным, что они важнее, а нечетные доказывали обратное.

Так день сменялся ночью, а ночь сменялась днем, но никак не могли успокоиться наши неугомонные жители планеты Математика. Вскоре обычная ссора переросла в непримиримую вражду. И тогда одни жители планеты перешли на темную сторону силы, а другие присоединились к светлой. Жить бок о бок друг с другом они больше не могли. И разделились тогда числа на два огромных враждующих царства. Отделяла их друг от друга граница, которую не мог пересечь ни один из жителей.

Вот так и вышло, что по одну сторону границы стали жить четные, а по другую — нечетные числа.

Дарт Одиниус захватил власть, стал императором в царстве темной силы и взял себе в ученики Дарта Тридиуса. Вместе с ним и армией нечетных дроидов он решил захватить соседнее математическое царство. Никто не решался противостоять им.

И лишь одно число никому не доказывало своей значимости. Оно давно привыкло слышать в свой адрес: «Ты пустое место!», «Ты ничего не значишь!», «Ты ничто!». И никогда Мастер Нолиус не оспаривал эти суждения. Молча слушал высказывания глупых, злых и надменных чисел, которые и предположить не могли, какая сила скрыта в этом неприметном мудреце. Он молчал. Молчал, но знал, что лишь только ему подвластно восстановить равновесие между темной и светлой сторонами силы. Ведь стоит ему стать по правую сторону от любого нечетного числа, как оно тут же превращается в четное и переходит на светлую сторону. Он и удерживал равновесие между царствами темной и светлой силы, и никто другой не мог сравниться с мудростью и силой Мастера Нолиуса.

И даже в наше время на планете Земля помнят эту легенду, ведь именно в память о ней домá на любой улице располагаются, разделившись на две части: по правую сторону — все дома с четными номерами, а по левую — все дома с нечетными номерами.

Анастасия Спольник

Степень

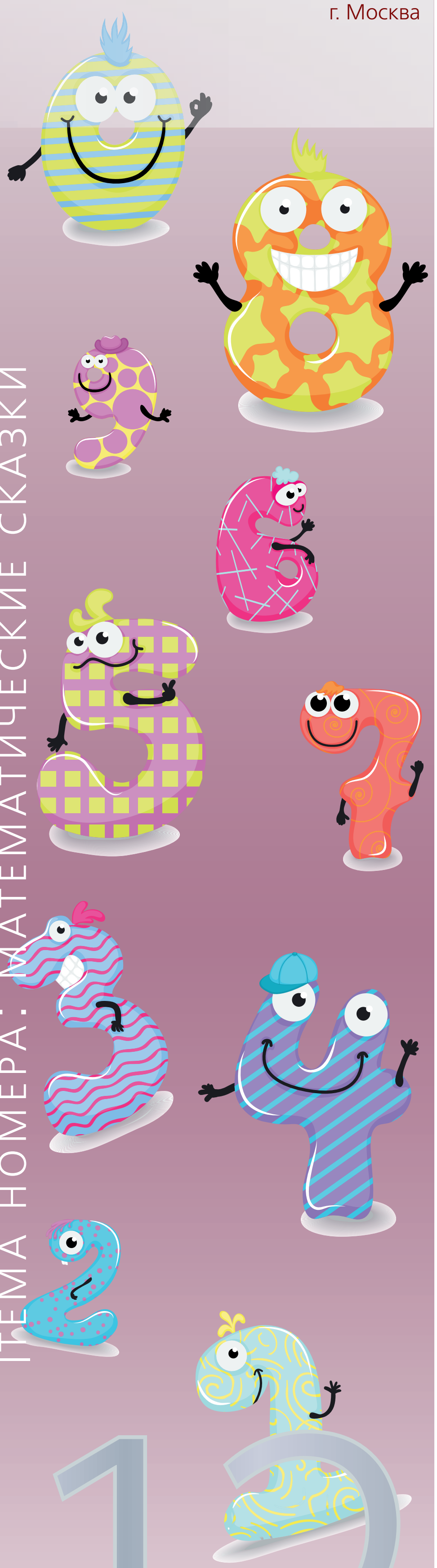
Жила в стране Математика цифра один. Она была очень известна, потому что во всем была первой. Была она первой и во всех соревнованиях, и первой среди всех цифр. Все числа ей завидовали. Однажды двойка и тройка решили тоже стать известными, но для этого нужно было сделать что-то запоминающееся. Целыми днями придумывали двойка и тройка что-нибудь интересное.

И один раз двойка сказала, что можно попробовать встать над каким-либо числом, сделав его во много раз больше. Так и решили, и когда двойка встала над десяткой, десятка умножилась на себя и стала сотней, а когда над десяткой встала тройка, та стала тысячей. Всем числам очень понравилась эта игра. Некоторые даже попробовали встать друг над другом. Так, четверка встала над тройкой, а шестерка — над пятеркой. Всем было весело и радостно. Одна лишь единица была грустной. Над каким число она б ни становилось, оно оставалась тем же самым.

Так и прославились двойка и тройка. Позже их идею назвали возведением в степень, и теперь, когда двойка становится над числом, говорят, что оно в квадрате, а когда тройка — в кубе.

Никита Чорток

А. БУРКОВА,
г. Москва



ДВЕ СКАЗКИ ПРО ЧИСЛА

Путешествие в Тридевятое царство

В Городе Цифр на уютной и маленькой улочке жила Тройка. И была у Тройки мечта — попасть в Тридевятое царство.

Еще в детстве мама часто читала Тройке про Тридевятое царство. Как говорила мама, Тридевятое царство волшебное: там можно общаться со сказочными персонажами, совершать подвиги и участвовать в чудесных превращениях.

Когда Тройка спрашивала маму, где же находится Тридевятое царство, мама таинственно замечала, что очень далеко. И чтобы туда попасть, надо преодолеть степи и пустыни, леса, непроходимые болота и другие сказочные препятствия (к примеру, реки с огнем). Но кто туда попадет, сможет стать настоящим волшебником и попасть в настоящую сказку. Только в Тридевятом царстве можно встретить Кощея Бессмертного и Бабу Ягу, волшебников и говорящих животных.

Так и не получив от мамы внятного ответа о месторасположении Тридевятого царства, Тройка обратилась к дедушке: может, он знает, где находится Тридевятое царство. Дедушка у Тройки был профессором, поэтому и ответил по-профессорски, что Тридевятое царство действительно находится далеко и, чтобы рассчитать расстояние до него, надо вспомнить старину, когда считали тройками, отсюда *тридевять,* три раза по девять — двадцать семь. Но чего двадцать семь, Тройка так и не поняла.

Папа сказал, что Тридевятое царство находится на краю земли. Тройка подумала, что если это на краю земли, то оттуда сразу же можно прыгнуть в космос.

Брат, увлекающийся астрономией, заявил, что Тридевятое царство лежит за тридевять Земель, то есть через двадцать семь планет. А значит, за пределами нашей Солнечной системы.

Тройка изучила карту мира — и так и не нашла эту страну. Поэтому она поняла, что надо просто отправляться на ее поиски. Вдруг она будет первой, кто нанесет Тридевятое царство на карту мира?

И вот в одно солнечное утро, когда родители, брат и дедушка с бабушкой занимались своими делами, Тройка выскользнула из дома с небольшим рюкзаком за плечами и направилась на поиски.

А то, что она найдет дорогу, у нее сомнений не было. Ведь мама всегда говорила, что тройка — это сказочное число.

И действительно, не успела Тройка выйти за город, как на перекрестке трех дорого увидела указатель. Он гласил: пойдешь направо — придешь в Тридевятое царство, пойдешь налево — придешь в Тридевятое царство, пойдешь прямо — придешь в Тридевятое царство.

Тройка задумалась: по какой дороге ни иди, все равно придешь в Тридевятое царство. И тут она вспомнила правило, которое они проходили в школе, что самое короткое расстояние между двумя точками — это прямая.

Тройка посмотрела направо и заметила, что дорожка петляет между деревьями, посмотрела налево — дорожка то поднималась в горку, то опускалась. А средняя дорога, кажется, шла прямо. Тройка здраво рассудила, что зачем идти долгим путем, если можно пойти более коротким, и направилась прямо.

Шла она, шла. Внезапно перед ней появился Змей Горыныч. Свирепый такой, о трех головах, из каждой огонь валит.

– Я съем тебя девочка! — грозно прогремел он. — Если не решишь мои задания.

– А какие у тебя задания? — с испугом спросила Тройка.

– Самое страшное, что может быть для школьника, — проревел Змей Горыныч. — Таблица умножения.

– Задавай свои задания, — храбро ответила Тройка.

– $3 \cdot 3$ [9]? $4 \cdot 3$ [12]? $5 \cdot 3$ [15]? $7 \cdot 3$? $9 \cdot 3$?

От удивления Змей Горыныч аж сел на хвост.

– Откуда ты все знаешь? — недоуменно спросил он.

– Так я же Тройка! — весело ответила девочка.

– Проходи, девочка, ты выдержала испытание.

Пошла Тройка дальше. Через какое-то время ей путь преградила избушка. Сидит рядом с избушкой старушка и материал какой-то рассматривает.

Увидела она Тройку и говорит ей:

– Девочка, помоги мне. Вот полотно какое-то из соединенных между собой петель. Хорошо тянется. Не знаешь ли ты, как такой материал называется?

Тройка не знала, что ответить. Тут из-за избушки выскочили три кота и подбежали к старушке. Тройка от удивления не смогла сдержаться:

– Ах, три кота аж!

Просветлело лицо старушки:

– Молодец! Вспомнила. Трикотаж это называется. Выдержала ты испытание.

Махнула старушка рукой, деревья расступились, и Тройка увидела дорожку, которая шла дальше в Тридевятое царство.

Вскоре Тройка достигла ворот Тридевятого царства. Они сами по себе распахнулись, и Тройка вошла в город.

А там на зеленых лужайках стояли разноцветные домики с аккуратными крышами, широкими окошками, ухоженными садиками.

По улицам ходил веселый народ: девушки в сарафанах, юноши в рубахах и красных сапогах.

С восхищением переходила Тройка от одного дома к другому, и дошла до дворца. Стража без препятствий пропустила ее во дворец, и в тронном зале Тройка встретила царя:

– Как у вас здесь сказочно! — восхитилась она.

– Сказочно-то сказочно, только вот задачи не решаются.

Удивилась Тройка. Ведь у нее дома все решалось легко.

– А какие у вас задачи? — поинтересовалась Тройка.

– Ну, вот, например, — промолвил царь, — если у нас Тридевятое царство, то это значит, что здесь точно $\frac{3}{9}$ царства. А куда остальная часть пропала? И какова по величине эта пропавшая часть?

Тройка все быстро посчитала:

– Если у вас здесь $\frac{3}{9}$ царства, то пропавшая часть составляет $\frac{6}{9}$ царства.

Царь возмутился:

– То есть больше половины моего царства нету!

И тут же распорядился:

– Позвать сюда трех богатырей!

И через несколько минут Илья Муромец, Добрыня Никитич и Алеша Попович уже стояли перед царем.

– Добры молодцы, — промолвил царь, оглядывая своих верных подданных. — У меня пропало $\frac{6}{9}$ царства.

– Не волнуйся, царь, — ответил Илья Муромец. — Мы сейчас же поскачем $\frac{6}{9}$ царства освобождать. Слыхали мы, что Соловей Разбойник там обитает.

Вскочили богатыри на коней и направились Соловья Разбойника изгонять. А Тройке интересно стало, и поехала она вслед за богатырями. Смотрит, а богатыри уже с Соловьем Разбойником бьются. Час бьются, два бьются, три бьются, устали, решили передохнуть. Да и Соловей Разбойник устал, лег рядом отдыхать.

Осмелела Тройка — и к нему:

– Уходи Соловей Разбойник из Тридевятого царства по добру, по здорову.

Рассмеялся Соловей Разбойник:

– Вот я тебе загадку загадаю. Отгадаешь ее — уйду, не отгадаешь — голову отрублю.

Испугалась Тройка: сможет ли она ответить на этот вопрос.

– Скажи-ка ты, о девочка, как определить числа, которые делятся на 3?

Тройка даже не поверила, ведь про себя, про число три, она все знала.

– Любое число делится на 3 в том и только том случае, если сумма его цифр делится на 3.Например, возьмем 156, сложим его цифры: $1 + 5 + 6 = 12$. 12 делится на 3, значит, и число 156 делится на 3, — бодро ответила Тройка Соловью Разбойнику.

Соловей Разбойник аж в лице переменился.

– Уж коли даже маленькие девочки в Тридевятом царстве такие умные, — сказал он, — нечего мне здесь делать.

Поднялся Соловей Разбойник, помахал богатырям и исчез в лесу.

Вот обрадовался царь, что $\frac{6}{9}$ царства опять к нему перешло. А название решили не менять, так как все уже привыкли к нему.

А Тройка пошла к синему морю, там выплыла к ней Золотая Рыбка и промолвила:

– Любое твое желание исполню, Тройка.

«В Тридевятом царстве хорошо, а дома лучше», — подумала Тройка.

– Хочу домой, к маме, — пожелала она, и тут же оказалась дома.

Нолик-младший

У господина Нолика и его супруги родился сын. Назвали его Ноликом-младшим. Все обитатели Города Цифр пришли поздравить счастливых родителей.

Папа Нолик гордо показывал всем родившегося малыша и обещал, что тот вырастет достойным жителем города и будет, как папа с мамой, строго соблюдать его законы.

Нолик-младший в это время с интересом разглядывал гостей: строгую Единицу, круглых Шестерку и Девятку, изогнутых Два и Пять, веселых Тройку и Восьмерку и поджарых Четыре и Семь.

Пока родители общались с другими цифрами, Нолик-младший выскочил из маминых рук и отправился посмотреть, что где происходит.

В углу малыши играли в сложение вместе с дядюшками-знаками. В данный момент маленькая с двумя косичками Двойка встала по одну сторону, а Четверка с четырьмя хвостиками встала справа. В середину они пустили дядюшку Плюса, а после себя попросили встать дядюшку Равенство. Получилась такая комбинация:

$$2 + 4 =$$

Двойка и Четверка радостно хихикали, ожидая, какая из цифр встанет после равенства. И вот туда уже бежит радостная Шестерка:

$$2 + 4 = 6$$

Дядюшка Равенство улыбнулся и одобрительно кивнул головой. Малыши радостно захлопали в ладоши.

– Вот оно что, — сообразил Нолик-младший. — Оказывается, мы, цифры, можем увеличивать другие цифры и числа. Я, наверное, могу это делать лучше всех.

Вот Двойка и Четверка сели на свои места, а на место Двойки встала Тройка беленькая.

– Я, я встану на второе место! — Нолик-младший бросился занимать позицию справа от дядюшки Плюса. Дядюшка Плюс похлопал Нолика-младшего по плечу:

– Вставай.

– Сколько получается? – обратился дядюшка Плюс к остальным малышам.

Тройка рыженькая встала справа от дядюшки Равенства.

– Неправильно! — вскричал Нолик-младший. — Мы же играем в сложение, и я должен увеличивать числа.

Дядюшка Плюс и дядюшка Равенство внимательно посмотрели на него.

– При сложении ноль не увеличивает число, — изрек дядюшка Плюс.

– Тогда я не буду с вами играть. Пойду к другим, — обиделся Нолик-младший и направился к другой группе малышей. Те играли в вычитание с дядюшкой Минусом и дядюшкой Равенством.

$$8 - 5 = 3.$$

– Ого! Как число уменьшается! — удивился Нолик-младший.

– Кто играет следующий вместо Пятерки? — обратился к ребятам дядюшка Минус.

– Я!

И Нолик-младший встал в выражение

$$8 - 0 =$$

И тут же другая Восьмерка стала в равенство:

$$8 - 0 = 8$$

– Неправильно! — воскликнул Нолик-младший. — Я же должен уменьшить число.

Дядюшка Минус развел руками:

– Ноль не уменьшает число при вычитании.

Нолик-младший чуть не расплакался:

– Почему все иные цифры что-то меняют? А я, что, пустое место? Ничего не могу делать.

– Почему не можешь? — это мама Нолик подхватила сына на руки. — Так, как ты можешь уменьшить или увеличить число, никакая другая цифра не может.

– Но у меня не получается, — продолжал хныкать Нолик-младший.

– Давай попробуем вместе? — предложила мама и направилась к другим ребятам, которые играли неподалеку.

Цифры вставали рядом и образовывали различные числа:

$$18,\ 24,\ 35,\ 47.$$

– А теперь ты, Нолик, встань с ребятами. Что получится?

Нолик-младший под одобряющим взглядом мамы подбежал к образованному числу и встал впереди его.

– Не туда, — рассмеялась мама. — Ты можешь увеличить число, если встанешь за ним.

И поставила Нолика-младшего после 18.

Малыши посмотрели на получившееся число 180 и запрыгали от радости.

– Ты увеличил число аж в 10 раз!

– Ух ты, — обрадовался Нолик и перебежал к 24 — получилось 240; подбежал к 35 — получилось 350; к 47 — 470.

– Мама, а что я еще могу делать? — обратился Нолик-младший к маме.

– Еще ты можешь все остальные цифры и числа обращать в самого себя.

– Как?

И мама подвела Нолика-младшего к дядюшке Умножению и дядюшке Равенству:

$$8 \cdot 0 = 0,$$
$$4 \cdot 0 = 0.$$

– Пойдем теперь проверим деление, — предложила мама:

$$0 : 3 = 0,$$
$$0 : 5 = 0.$$

– Я прямо волшебник какой-то, — радовался Нолик-младший. — А если на меня разделить, то тоже будет 0?

– Нет, на ноль делить нельзя.

– Это почему?

– По правилам математики, — объяснила мама: — деление — это действие, обратное умножению. Например, $3 \cdot 2 = 6$, а обратно $6 : 2 = 3$. То есть, например, $6 : 0$ будет означать, что если 0 умножить на какое-то число, то получится 6. А мы знаем, что такого числа, которое при умножении на 0 даст что-то, кроме нуля, просто не существует. То есть наша задача не имеет решения. Но зато ты выполняешь и иную очень важную функцию.

– Какую?

– Знаешь, дядюшка Минус не такой простой, как ты думаешь. Он может не только вычитать, но и превращать положительные числа в отрицательные. Особенно хорошо у него это получается при установлении погоды на улице. Идет Девятка по улице, улыбается, по травке ступает. Тут подбегает дядюшка Минус, и 9 превращается в –9, и сразу же становится холодно и начинает падать снег.

Ты же Нолик очень самостоятельный. Ты не зависишь ни от дядюшки Плюса, ни от дядюшки Минуса и четко разделяешь положительные и отрицательные числа. Ноль используется не только в математике. Например, в полночь на электронных часах появляются четыре нолика, то есть мы начинаем новый день.

В географии мы начинаем отсчет долготы от нулевого меридиана, проходящего через город Гринвич в Великобритании.

В нашу честь в Венгрии в центре города Будапешта установлен памятник нулю, от него отмеряются все расстояния в стране. Ноль — это единственная цифра, которой поставлен памятник.

Так что расти Нолик и гордись, что ты из нашей семьи.

ИТОГИ КОНКУРСА «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ»

Призеры

Команда «Математический потенциал»: Данила Жуков, Кристина Ковалева, Екатерина Кузнецова, Сергей Меркулов, Сергей Привалов, Дарья Притула, Анастасия Сычева, Егор Смирнов, Дарья Хитрина (8 «Б» класс СОШ № 3 г. Искитима, Новосибирская область; руководитель: Л.П. Ипатова; фото работ см. на с. 36).

Команда «Кубик-Рубик»: Наталия Рязанцева, Михаил Мазур, Александр Пронин (ГБОУ «Вешняковская лингвистическая гимназия» № 1389, г. Москва; руководитель: И.А. Терешкина).

Дима Долгодушев (5-й класс МКОУ «Мужичанская СОШ», с. Банное, Воронежская область; руководитель: И.В. Чеботарева).

Наиля Камалова и Альбина Умурзакова (9-й класс, Сулеймановская средняя школа, Курганская область; руководитель: Т.В. Сандярова).

Антон Буланов и Анатолий Воякин (6-й и 8-й классы СОШ «ОЦ», пос. Серноводск, Саратовская область; руководитель: И.А. Александрова).

Кристина Зайцева и Анастасия Ковалёва (6 и 8 классы МБОУ «Ревдская средняя общеобразовательная школа им. В.С. Воронина», пос. Ревда, Мурманская область; руководитель: Т.Н. Голубятникова).

Е. ЗАБАШТА,
zabashta.93@mail.ru,
г. Краснодар

НАЧИНАЕМ ИЗУЧАТЬ ДРОБИ

Первичное знакомство учащихся с обыкновенными дробями происходит в начальной школе. На этом этапе следует выделить три основные задачи изучения темы:

1) на наглядной основе познакомить учащихся с понятиями «доли» и «дроби»;

2) сформировать умение читать и записывать доли и дроби, сравнивать их (на наглядной основе);

3) научить школьников решать задачи на нахождение доли от числа и числа по доле, задачи на нахождение дроби от числа.

В 5-м классе следует активизировать уже приобретенные знания, обобщить, углубить и систематизировать их с целью подготовки учащихся к изучению десятичных дробей.

Целесообразно начать изучение дробей с проблемной ситуации (разделить единицу на две равные части). Такая ситуация может быть создана, например, в процессе решения цепочки примеров:

$$128 \xrightarrow{:2} 64 \xrightarrow{:2} 32 \xrightarrow{:2} \ldots \xrightarrow{:2} 2 \xrightarrow{:2} 1 \xrightarrow{:2} ?$$

Выполняя это задание, учащиеся попутно вспоминают названия компонентов действия «деление». На этом уроке выводится формула:

$$\frac{a}{b} = a : b.$$

Словесная формулировка:

Дробь равна частному при делении числителя на знаменатель.

Следствие:

Знак дроби можно заменить знаком деления и наоборот.

На этом же уроке и на следующих учащиеся работают с опорной перфокартой.

1. $\frac{a}{b}$ — обыкновенная ________________________________.

Числитель дроби — это число, записанное __________ чертой.
Знаменатель дроби — это число, записанное _______ чертой.

Например, знаменателем дроби $\frac{3}{14}$ является число ___, а числителем — число ___.

2. Знаменатель дроби показывает, на сколько ______________ частей разделена ________________.
Числитель дроби показывает, сколько таких _______________.

3. Из двух дробей с равными знаменателями та дробь больше, числитель которой ______________.

Такие перфокарты раздаются каждому ученику, и он вставляет пропущенные слова. Работа продолжается до полного усвоения формулировок всеми учащимися.

Чтобы избежать механического запоминания определений, следует уделять внимание работе с наглядным материалом, в том числе мультимедийными презентациями. Кроме того, целесообразно дополнить материал учебника **задачами** следующих видов.

1. Туристы проехали на автобусе 48 км, а потом прошли пешком треть того расстояния, что проехали на автобусе. Какое расстояние преодолели туристы?

[$48 + 48 : 3 = 64$ км]

2. В тетради 24 страницы. Четверть всех страниц исписана. Сколько в тетради чистых страниц?

[$24 - 24 : 4 = 18$ страниц]

3. Велосипедист проехал 12 км. Это составило шестую часть всего пути. Какова длина всего маршрута?

[$12 \cdot 6 = 72$ км]

4. Телепередача длится 1 ч 30 мин. На рекламу отводится $\frac{2}{45}$ этого времени. Сколько минут отводится на рекламу?

[1 ч 30 мин. = 90 мин.,
$90 : 45 \cdot 2 = 4$ мин. — отводится на рекламу]

5. В парке посадили 60 берез и рябин. Березы составляют $\frac{7}{12}$ всех посаженных деревьев. Сколько посадили рябин?

[$60 - 60 : 12 \cdot 7 = 25$ рябин]

Тему **«Сравнение дробей с равными знаменателями»** школьники изучают самостоятельно или в процессе коллективной работы с учебником (в зависимости от уровня подготовки учеников класса).

При закреплении этого материала наряду с заданиями из учебника ребятам можно предложить для сравнения такие дроби:

$$\frac{3}{4} \text{ и } \frac{2}{4}, \quad \frac{5}{6} \text{ и } \frac{6}{6}, \quad \frac{7}{9} \text{ и } \frac{9}{7}, \quad \frac{8}{12} \text{ и } \frac{3}{12}, \quad \frac{3}{14} \text{ и } \frac{5}{6}$$

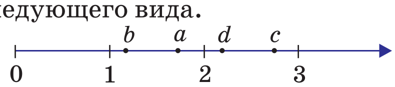
(в этом случае сравнить дроби без числового луча нельзя, так как их знаменатели не равны), $\frac{4}{13}$ и $\frac{4}{15}$ (знаменатели не равны, но сравнить дроби можно, так как равны их числители).

При введении определений правильных (П) и неправильных (Н) дробей используется опорная схема:

$$\frac{a}{b} \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} 1 \quad \begin{matrix} \text{Н} \\ \\ \text{П} \end{matrix}$$

Представьте себе, что числитель и знаменатель «соревнуются», кто сильнее, и каждый «тянет» дробь в свою сторону. Числитель «тянет» дробь вверх. Если он больше знаменателя, то дробь больше 1. А знаменатель «упирается и тащит» дробь вниз. Если перетянет он, то дробь меньше 1. Если же числитель «уравновешивает» знаменатель, то дробь равна 1.

После знакомства с правильными и неправильными дробями учащимся предлагаются задания следующего вида.



Что можно сказать о числах a, b, c, d: дробные они или натуральные? Почему?

Есть ли среди этих дробей правильные? Почему?

Какая из дробей самая маленькая (большая)?

Какие числа могут быть расположены между числами 2 и 3? Сколько дробей можно расположить на числовом луче между двумя последовательными натуральными числами?

При изучении обыкновенных дробей в устную работу на уроках можно включить различные дидактические игры. Например, **«Какое число лишнее»?**

1. $\frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \frac{9}{5}, 2, \frac{7}{20}, \frac{84}{36}$.

[2, так как оно натуральное, а остальные дробные.]

2. $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{31}{100}, \frac{13}{18}, \frac{56}{49}, \frac{111}{205}$.

[$\frac{56}{49}$, так как это неправильная дробь.]

3. $\frac{72}{60}, \frac{18}{30}, \frac{46}{13}, \frac{17}{5}, \frac{38}{19}, \frac{42}{40}$.

[$\frac{18}{30}$, так как это правильная дробь.]

4. $\frac{17}{20}, \frac{13}{45}, 2\frac{1}{14}, \frac{8}{16}, \frac{43}{50}, \frac{64}{18}$.

[$2\frac{1}{14}$, так как это смешанное число.]

5. $\frac{16}{8}, \frac{13}{3}, \frac{18}{9}, \frac{14}{2}, \frac{14}{7}$.

[$\frac{13}{3}$, так как эту дробь нельзя представить в виде натурального числа.]

После изучения темы «Сложение и вычитание дробей с равными знаменателями» можно провести урок-зачет.

Урок-зачет

Ход урока

Организационный момент

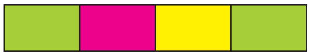
Математический диктант

1. Запишите с помощью дроби.

а) Какая часть фигуры — желтого цвета? $\left[\frac{1}{4}\right]$

б) Какая часть фигуры — зеленая? $\left[\frac{2}{4}\right]$

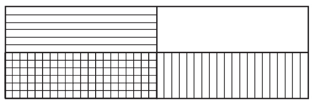
в) Какая часть фигуры не зеленая и не желтая? $\left[\frac{1}{4}\right]$



2. Какая часть фигуры не закрашена?

$\left[\frac{6}{9}; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right]$

3. Какая часть заштрихована в клетку? в линию?



$\left[\frac{1}{4}; \frac{2}{4}\right]$

Устный опрос

Устная часть урока-зачета проводится по опорным перфокартам, описанным выше, и по раздаточным карточкам с *вопросами*.

- Какую дробь называют правильной? Приведите пример.
- Какую дробь называют неправильной? Приведите пример.
- Может ли правильная дробь быть больше 1?
- Может ли неправильная дробь быть больше 1?
- Какая дробь всегда больше: правильная или неправильная?

Одновременно опрашиваются два ученика. Они отвечает поочередно на вопросы, каждый оценивает правильность ответа партнера. На этом этапе урока можно опросить 4–6 учащихся.

Письменная самостоятельная работа

Каждый учащийся получает индивидуальное задание, цель которого — подготовка к контрольной работе (проводится на следующем уроке).

В конце урока подводятся итоги выполнения творческого задания, которое было предложено учащимся за неделю до урока-зачета и выполнялось по желанию.

Варианты творческого задания:

– Придумать сказку, стихотворение, создать мультфильм, сделать презентацию, загадку об обыкновенных дробях, составить кроссворд, ребус.

– Нарисовать сказочную картину Страны Обыкновенных Дробей с Планеты Чисел.

– Составить необычную задачу по теме «Обыкновенные дроби».

Приведу ***примеры творческих работ учеников*** по теме «Обыкновенные дроби»

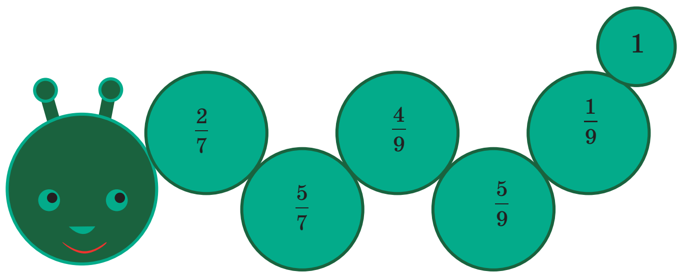
1. Кто важнее?

В некотором Дробном царстве — числовом государстве жили, не тужили, два друга — Числитель и Знаменатель. Как-то возник у них спор — кто важнее: тот, кто над чертой дроби стоит, или кто под ней располагается? Знаменатель говорит: «Я главный! Я показываю, на сколько равных частей разделено целое!» Числитель спорит: «Нет, я важнее! По мне определяют, сколько равных частей взяли!»

И продолжался бы их спор очень долго, если бы не вмешалась черта дроби. Она рассудила так: «Каждый из вас незаменим, и друг без друга вы ничего не значите! Вы важны только тогда, когда вместе!» — «А ведь ты права!» — воскликнули Числитель и Знаменатель. И с тех пор дружба их только крепла, а споры о важности прекратились.

2. Веселая гусеница

Расставить между дробями знаки «+» или «–» так, чтобы результат был равен 1.



$\left[\frac{2}{7}+\frac{5}{7}-\frac{4}{9}+\frac{5}{9}-\frac{1}{9}=1.\right]$

3. Я — дробь обыкновенная,

Важная, степенная.
Делю на части целое:
Я дама очень смелая!
Могу показывать всегда,
Сколько частей я отдала.

Заключительным этапом в системе работы над обыкновенными дробями в пятом классе можно считать проведение во внеурочное время математической викторины, на которой обобщаются и систематизируются знания учеников. Приведу один из вариантов такой викторины.

Математическая викторина «Счастливый случай»

Разминка

К доске выходят по одному игроку от каждой команды. Выполнивший задание первым, получает одно очко. Затем эти игроки садятся на свои места, их заменяет следующая пара участников игры.

Задание. Напишите:
а) любую обыкновенную дробь;
б) любую правильную дробь;
в) любую неправильную дробь;
г) дробь, которая больше 1;
д) дробь, которая меньше 1.
е) дробь, равную 1;
ж) любое смешанное число;
з) любую дробь со знаменателем 4;
и) любую дробь с числителем 4;
к) натуральное число, представленное в виде дроби.

Конкурс капитанов

Капитаны выходят к доске и по очереди записывают по одной формуле. Побеждает тот, кто последним запишет формулу (очередность ходов разыгрывается с помощью игрального кубика).

Вопросы от команд

Команды задают друг другу математические вопросы и получают по одному очку за каждый правильный ответ на вопрос соперников. Кроме того, три очка начисляется команде, задавшей самый интересный вопрос.

Вопросы «по случаю»

Члены команд по очереди вынимают из мешочка бочонки с номерами. Ведущий зачитывает вопрос с этим номером. Если команда, вытащившая бочонок, дает верный ответ, ей начисляется одно очко. В противном случае право ответа предоставляется игрокам другой команды или болельщикам.

Вопросы

1. Кусок материала разрезали на 12 равных частей. Какую часть куска составят 5 таких кусков?
2. Что такое знаменатель дроби?
3. Что такое числитель дроби?
4. Что показывает знаменатель дроби?
5. Что показывает числитель дроби?
6. Какую часть килограмма составляет 1 грамм?
7. Как узнать, какая из двух дробей больше?
8. Какую дробь называют правильной?
9. Какую дробь называют неправильной?
10. Может ли правильная дробь быть больше 1?
11. Всегда ли неправильная дробь больше 1?
12. Какая дробь больше — правильная или неправильная?
13. Найдите сумму и разность дробей $\frac{6}{4}$ и $\frac{4}{4}$.
14. Как называются числа, в записи которых есть целая и дробная части?
15. Каким натуральным числом можно заменить дробь $\frac{100}{25}$?
16. Существует только одно значение n, при котором дробь $\frac{n}{t}$ является правильной. Чему равно t? [$t = 2$]
17. 10 солдат строились в ряд,
10 солдат шли на парад.
$\frac{9}{10}$ было усатых.
Сколько было безусых солдат? [1 или 2]

Игра «Назови дробь»

Содержание игры: первая команда предлагает любую дробь. Команда соперников называет дробь, большую данной. Первая команда называет еще большую дробь и т.д. Выигрывает команда, назвавшая дробь, «больше которой нет». (Очко получает команда, игроки которой объяснят, почему в этой игре нельзя выиграть.)

«Помогайка»

Команды получают по 10 карточек. Особенность этого этапа викторины в том, что хотя каждый член команды и получает индивидуальное задание, но участники игры могут помогать друг другу.

Задание. Выделите целую часть дроби:

$\frac{5}{3}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{2}$
$\frac{8}{4}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{9}{6}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{40}{40}$

Когда будут выполнены все задания, капитан команды громко говорит: «Стоп!», другая команда сразу должна прекратить свою работу. (1 очко за каждое правильное задание плюс дополнительное очко за скорость решения.)

Участники игры (после подведения итогов) награждаются грамотами или призами.

КЁКО КАКИХАНА,
Kakihana@tsukuba-g.ac.jp
ШИНН ВАТАНАБЕ,
longlifemath@gmail.com,
Tsukuba Gakuin University,
The Mathematics Certification Institute,
Japan

Фото авторов

СТАТИСТИКА В ПРОГРАММАХ НЕПРЕРЫВНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Интернет быстро и глубоко вошел в нашу жизнь за последние десять лет. Поэтому для принятия решений или генерирования новых идей нам постоянно приходится выделять наиболее значимую информацию из огромного потока. Нам надо знать и понимать, как эту информацию можно анализировать и характеризовать. Один из способов — это статистическое мышления. Поэтому изучение статистики было включено в школьное образование. В новом курсе Министерства образования, культуры, спорта, науки и технологии Японии (MEXT) сказано: «Необходимо преподавать статистику в школе». Разделы «Использование данных» и «Анализ данных» были включены в программы курсов математики основной школы и старшей школы[1] соответственно. Кроме того, в принципах и стандартах школьного математического образования (Национальный совет учителей математики США) отмечено: «Ученики должны знать статистический анализ и соответствующие аспекты теории вероятности для выработки статистических навыков, необходимых для развития информированной и образованной личности». Это означает, что статистика необходима как в программах школьного, так и в программах непрерывного послешкольного образования[2]. Поскольку в прошлом статистика преподавалась в рамках базовой математической дисциплины, сейчас сложно понять, что такое статистическое мышление. В новом курсе статистики, который нужен школе, следует рассматривать решения задач в условиях случайной изменчивости. Что такое изменчивая ситуация? Я рассмотрю понятие «случайная изменчивость» и дам примеры статистической деятельности учащихся в условиях изменчивой ситуации.

Предметы, которые ученики принесли с собой

Дополнительные экспиременты

Введение

Жизнь усложняется, и растет роль случайной изменчивости. Быстро развиваются технологии, в мире стремительно и повсеместно распространяется Интернет. Поэтому мы можем легко получить доступ к большим объемам информации, включая точные данные. В современном обществе созидательная деятельность опирается на новейшие знания, получаемые из данных. В Японии мы называем такое общество «основанным на знании». В математике мы привыкли получать единственно верное решение задачи. Но множество

[1] В оригинале — «junior high school» и «high school» соответственно.

[2] Имеется в виду Lifelong Learning — образовательные программы по интересам, которые может свободно посещать любой житель Японии. Занятия проводятся очно и заочно, в виде кружков, лекций, собраний клубов и т.п. Организуют эти программы университеты, отвечающие за образование в своих префектурах.

К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru (Литература.)

проблем не имеют единственно верного решения в неопределенных условиях повседневной жизни, и мы сталкиваемся с тем, что в изменчивых ситуациях существует множество способов принятия решений. Таким образом, нам просто необходимо освоить статистическое мышление. В 2003 г. PISA определила понятие математической грамотности, обозначив ее компоненты как «количество», «пространство и форма», «изменение и взаимосвязь» и «неопределенность». Эта «неопределенность» соотносится со статистикой и вероятностью. Почему они назвали раздел статистики и вероятности «Неопределенность»? *Это мой первый вопрос.*

Академическое сообщество Японии (Ямамото, 2007) рекомендовало министерству образования внедрить и развить обучение статистике для дальнейшего развития созидательного общества XXI века, основанного на знании. Курс статистики включен в обязательную часть математического образования. Раздел «Использование данных» был включен в основную школу в 2011 году, «Анализ данных» — в курс старшей школы в 2012 году. В образовательную программу первого класса основной школы[3], выпущенную министерством образования, включены в первую ступень среднего образования разделы «Сбор данных об объекте, представление в виде диаграммы или графика на компьютере и определение тенденций по представленным значениям и рассеиванию данных»; в программу третьего класса[4] — разделы «Выборка данных из совокупности для простых случаев и объяснение закономерностей в совокупности по этим данным при помощи компьютера». Это предполагает использование как можно большего объема данных и компьютерной технологии в статистической обработке, а кроме того, работу с задачами в неопределенной ситуации. Что значит в математике «неопределенные условия» или «неопределенная ситуация»? Как учащиеся распознают неопределенность в задаче или неопределенную ситуацию? *Это мой второй вопрос.*

[3] Седьмой год обучения.
[4] Девятый год обучения.

Цели настоящего исследования — узнать, как люди понимают «неопределенную ситуацию» и разработать дидактический материал для статистической обработки данных, сфокусированный на рассеивании данных.

Описание неопределенности

Исторически описательная статистика развилась в математическую статистику, и концепция неопределенности возникла по мере развития статистических методов, применяемых для решения сложных задач повседневной жизни с помощью сведения к математике (Давид С. Зальцбург, 2006). В 60-е годы обсуждались и различные точки зрения на обработку и анализ данных. То есть понятия «измерения», «вероятностное распределение», «вывод» и затем «генерирование гипотезы» возникли в статистической науке. Затем оперирующая с понятием неопределенности область расширилась (Йосимура, 2007). Экономист Джон Кеннет Гэлбрэйт опубликовал свою «Эпоху неопределенности», и люди заговорили о «неопределенности». Цуру Сигето, который курировал перевод этой книги, писал: «В английском языке есть два слова, Uncertaninty и Indeterminacy, для японского понятия Fukakujity». В этой книге понятие «неопределенность» используется и определено как неопределенность исчисляемых понятий. Дж. Кейнс построил вероятностную теорию, основанную на экономической философии и также предложил «неопределенность» в качестве базового понятия (Дж. М. Кейнс, перевод Сато, 2010). Неопределенность используется в естественных науках для решения комплексных задач. Утверж-

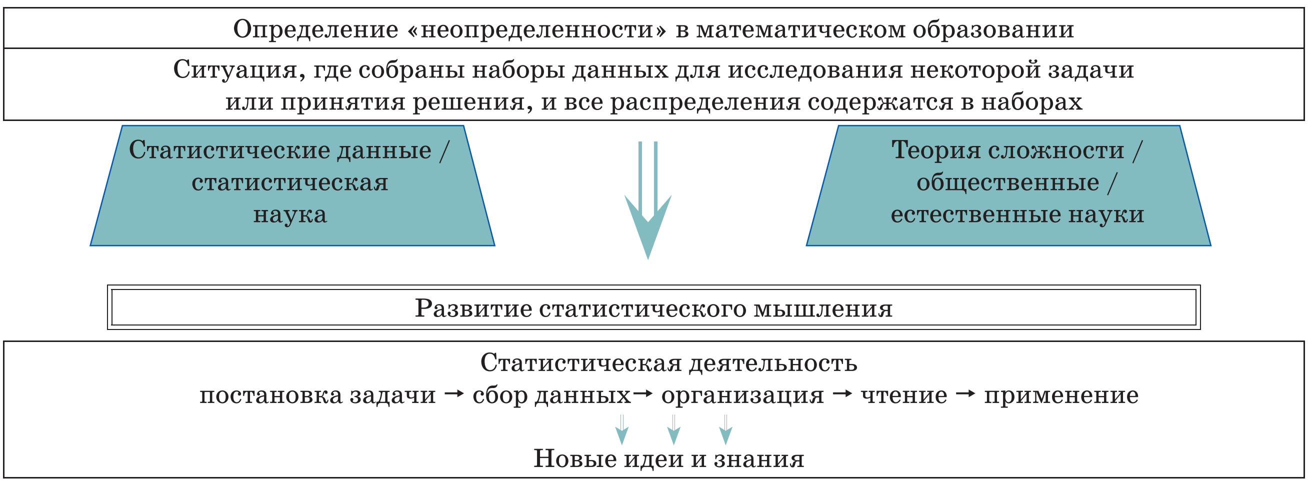


Рис. 1. Определение «неопределенности» в математическом образовании

«Является ли каждый из описанных объектов определенным, неопределенным, или это нельзя решить?»

Вопросы	**Причины выбора ответа**
Экономические **1.** Деловая активность восстанавливается. **2.** Курс йены. **3.** Потребительский налог в каждой стране. *Повседневная жизнь* **4.** Японская женская футбольная команда «Nadeshiko Japan» победит на следующем чемпионате. **5.** Прогноз погоды на завтра. **6.** Средний балл теста. *Математика/естественные науки* **7.** Площадь данного треугольника. **8.** Скорость падения мяча. **9.** Прогноз температуры в океане около Антарктиды. **10.** Будет открыт новый химический элемент.	1. Можно вычислить. 2. Величина имеет стандартное отклонение. 3. Так утверждают специалисты. 4. Это событие повседневной жизни. 5. Другое.

дается, что не существует реальной дедуктивной модели, поскольку каждое сложное событие одновременно и вероятностное, и неопределенное, и все модели строятся как множества данных или множества явлений (Тахи, 2011).

Основываясь на этой концепции неопределенности, мы определили ее в математическом образовании. Это ситуация, когда существуют наборы данных для решения проблемы или принятия решений. Каждый из этих наборов имеет собственное характеризующее его распределение.

Результат проведенного опроса

Цель исследования — поиск критерия, по которому люди распознают «неопределенность».

Объекты исследования

Японские студенты (количество 36, обозначены «ЯС»), студенты из Таиланда (29, обозначены «ТС»), участники ICME12[5] — Международного конгресса по математическому образованию (7, обозначены «УК»).

[5]Двенадцатый международный конгресс по математическому образованию. Прошел в 2012 году в Сеуле. Проходит раз в 4 года. Совпадение номера (ICME12) и года проведения случайно. В 2016 году в Гамбурге пройдет ICME13.

Мы задали 10 вопросов «Является ли каждый из описанных объектов определенным, неопределенным, или это нельзя решить? Объясните, почему вы так думаете».

Результаты

(1) Результаты: нет различий в выборе «определенное» или «неопределенное» во всех трех группах ($\chi^2 = 1{,}78$). Группа ЯС выбрала наибольшее количество «не могу решить» (табл. 1; здесь и далее: а — «Неопределенно», в — «Определенно», с — «Не могу решить»)[6].

(2) Отметим два вопроса, в которых проявляется различие между выбором ЯС и ТС. Один из них — потребительский налог. В этом вопросе есть разница в выборе ответов «определенное» или «неопределенное» (табл. 2).

Большинство ТС выбрали «неопределенное», а большинство ЯС выбрали «определенное». Причина таких разногласий может заключаться в том, что ТС считали, что налог определяется политикой, а ЯС считали, что это фиксированная величина.

Второе разногласие — в пункте «Средний балл теста».

[6] Сумма чисел в таблице 719. Один ответ был удален как не относящийся ни к одной из трех категорий.

Таблица 1

Все ответы

	а	в	с
ЯС	125	129	106
ТС	135	128	26
УК	38	27	5

Таблица 2

Потребительский налог

	а	в	с
ЯС	7	24	5
ТС	17	7	5
УК	4	3	0

Таблица 3

Средний балл теста

	а	в	с
ЯС	17	12	7
ТС	10	18	1
УК	2	3	2

Таблица 4

Причины решений «определенное» или «неопределенное»

(1) Причина неопределенности					
	1	2	3	4	5
ЯС	7	47	15	13	41
ТС	14	27	5	82	4
УК	2	2	5	9	20

(2) Причина определенности					
	1	2	3	4	5
ЯС	78	3	19	17	7
ТС	84	23	13	7	1
УК	14	2	4	1	5

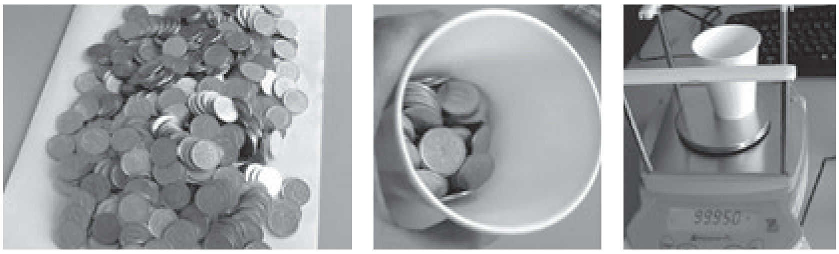


Рис. 2. Монеты достоинством 1 йена и весы

Рис. 3. Образцы по 100 г.

Большинство ЯС ответили «неопределенное», а большинство ТС ответили «определенное». Причиной может быть то обстоятельство, что ЯС изучали понятие среднего и дисперсии тестового балла перед данным опросом, а ТС опирались на правило вычисления этой величины.

(3) Проанализируем выбор причин «определенное» или «неопределенное» (табл. 4).

Видна разница в выборе причин ответа «неопределенное» между группами ЯС, ТС и УК. Но очевидно, что большинство респондентов выбрали «определенное» по первой причине (можно вычислить). Большинство из группы ТС выбрали причиной «Это повседневное событие» для ответа «неопределенное». Группы ЯС и УК выбрали другие причины, например: «Мы знаем по опыту, что все может внезапно пойти не так», «Может поменяться политика правительства», «Здесь очень много факторов», «Я не знаком с этим вопросом» и т.д.

(4) Результаты исследования наводят на мысль, что многие люди считают, что неопределенность — это то, что возникает в повседневной жизни, или то, что возникает из опыта, что происходит неожиданно и т.п. Но они не опознают как «неопределенные» те величины, которые составлены из числовых данных, обладающих случайным рассеиванием.

Возможно, многие знакомы со статистическим термином «стандартное отклонение». Но соответствующий пункт в списке «Причины», вероятно, остался не понятым и не связанным с тем, почему явление можно охарактеризовать как «неопределенное». Один из участников ICME сказал: «В математике мы оперируем определенными понятиями, а в статистике — неопределенными». Большинство учителей математики и математиков думают так же. Когда мы даем математическую задачу, большинство считает, что имеется определенная ситуация и можно получить фиксированный точный ответ. Те, кто исследует и пытается выдвигать гипотезы с помощью случайных экспериментов, наблюдений и опросов, могут судить о результатах с определенной вероятностью или с некоторой изменчивостью в ограниченных пределах, и они полагают, что такой результат — сам по себе нечто определенное.

В математическом образовании для понятий вероятности, стандартного отклонения, среднего, дисперсии и так далее в основном изучаются правила вычисления. Но люди должны уметь распознавать неопределенные ситуации, сформированные множеством изменчивых факторов, и — в итоге — должны уметь находить решения в виде неопределенных, изменчивых величин. Результат исследования показал, что возникает две ситуации неопределенности: одна — до начала работы со статистическим материалом, а другая — как результат статистической деятельности.

Пример занятий по статистике, направленных на изучение рассеивания в наборах данных

В этом разделе описывается и обсуждается статистическое занятие, посвященное изучению рассеивания данных вокруг среднего в неопределенной ситуации (Какихана, 2012).

Цель исследований

Цель исследования — изучить, как люди ощущают вес 100 г, и понять, насколько полезно понимание явления рассеивания в изучении нового.

Постановка задачи (сбор данных)

Участников попросили зачерпнуть с помощью стаканчика 100 г монет (рис. 2) «на глазок», по возможности не заглядывая в стакан, взвесить стакан на весах и записать результаты в Exel-файл.

Всего было три группы участников. У каждой было по 90 минут на работу. Первая группа (С1) состояла из студентов университета, изучивших курс «Анализ данных и статистика» (27 чел.), вторая группа (С2) — слушатели курсов математики открытого колледжа (12 участников, средний возраст свыше 60 лет), третья группа (С3) — учащиеся старшей школы из SSP[7] (24 чел.). Каждый участник работы сделал по шесть попыток. В группах С1 и С2 участники получили образец весом 100 г (рис. 3) на третьей попытке и затем сделали еще три попытки. В группе С3 участники получили образец массой 100 г сразу — перед началом эксперимента.

[7] SPP — Science Partner Project. Можно перевести как «Проект "Научное партнерство"».

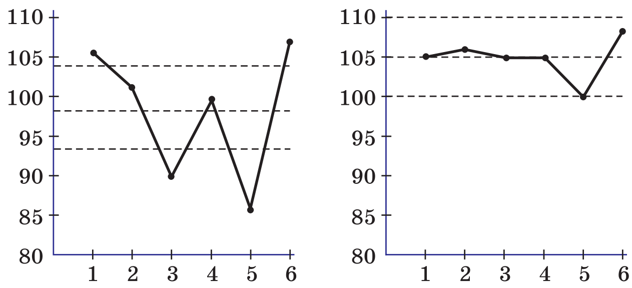


Рис. 4. Случаи А и В в группе С3[8]

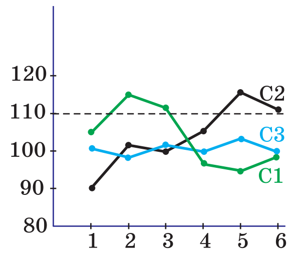


Рис. 6. График средних значений для каждой группы

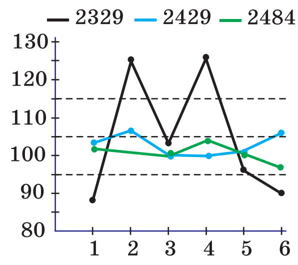


Рис. 7. График трех наборов измерений с почти одинаковым средним

Организация, анализ и интерпретация данных

В группе С3 занятие проходило следующим образом. Участникам дали результаты взвешиваний в группах С1 и С2. Они проанализировали свои взвешивания и сравнили их с результатами других групп.

(1) Графический контроль. В группе С3 участники вычислили среднее значение своих результатов, нарисовали графики[9] (рис. 4) по своим данным, на которых отметили верхнюю и нижнюю границы контрольной зоны [10]. Диаграмму несложно изобразить, пользуясь «line plot» [11] . При помощи таких графиков участникам было несложно анализировать свои результаты и сравнивать их с результатами других групп.

А. Участница говорит, что на графике видно, как она, не желая того, зачерпнула сначала слишком много, а затем слишком мало.

В. Другая участница сказала, что обрадовалась, когда у нее получилось почти точно 100 г. «Последние 3 раза я зачерпывала слишком быстро. Нужно помедленнее».

Каждый участник нашел свой собственный способ зачерпывания монет, стараясь зачерпнуть как можно точнее. График очень удобен для объяснения понятий среднего и отклонения. Большинство участников увидели, как отличаются их взвешивания от среднего значения.

(2) Графики[12]. В следующей части занятия предлагалось изобразить и проанализировать графики всех взвешиваний.

Сначала участники изобразили графики (рис. 6), используя все данные. Оказалось, что результаты в группе С3 имеют не очень большое рассеивание, а рассеивание в группах С1 и С2 уменьшилось после четырех попыток. Затем участники нашли среднее значение всех попыток во всех группах, нанесли его на график и сравнили результаты всех групп. В группе С2 сразу после получения 100-граммого образца следующая попытка была близка к 100 г, но затем среднее снова пошло вверх. Участники предположили, что пожилым людям сложно контролировать вес. Этот эксперимент выявил различия между тремя группами участников. Стало ясно, что рассеивание зависит от того, как собирались данные. Два участника отметили, что им нужно потренироваться, чтобы отмерять точнее.

Следующим заданием было сравнение трех попыток с почти одинаковым средним (табл. 5). Участники нарисовали графики трех попыток (рис. 7). Я спросила участников, чем различаются результаты. Некоторые участники указали на минимальные и максимальные значения. Я объяснила, что такое разброс и как его можно вычислить. Участники решили, что если потренироваться, то можно зачерпывать в стаканчик монеты по 100 г с небольшим разбросом (табл 5).

[8] Рисунки в оригинале крайне низкого качества. По горизонтали отмечаются номера попыток, по вертикали — масса монет. Среднее и границы коридора показаны пунктирными линиями.

[9] Здесь имеется в виду изображение последовательности точками, для наглядности соединенными отрезками.

[10] Судя по рисунку, границы зоны отстоят от среднего вверх и вниз на 10 граммов.

[11] В русифицированном Excel этот вид отображения данных называется просто «График».

[12] Снова изображались такие же графики, но для всей группы на одном рисунке.

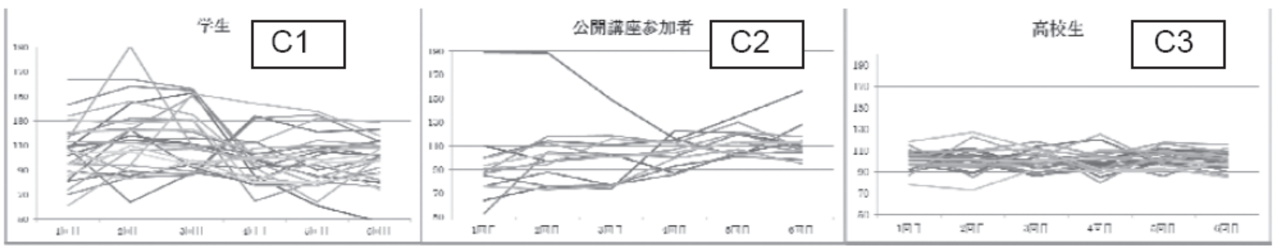


Рис. 5. Графики всех взвешиваний в каждой из трех групп

Таблица 5

Три набора результатов с почти одинаковым средним

1	2	3	4	5	6	Среднее
104	106	100	98	101	108	102,5
87	123	103	125	87	87	104
102,5	100,99	99,4	102,94	99,95	96,04	100

Последним заданием стало задание нарисовать гистограмму, чтобы проанализировать рассеивание. Участники постарались изобразить распределение частот всех результатов во всех группах при помощи таблиц и гистограмм (рис. 8). Времени было достаточно, чтобы попробовать разное число интервалов группировки. Когда участники меняли число интервалов, они получали другие распределения. Некоторые участники обнаружили выбросы. Если времени достаточно, такая работа позволяет освоить понятие выброса и влияние выбросов на поведение всего массива данных.

Когда все данные были собраны вместе, гистограмма приобрела колоколообразную форму (рис. 9). На собранных данных можно изучать кривую нормального распределения и характеристики выборки и генеральной совокупности. Можно также изучать рассеивание данных с помощью диаграммы размаха[13] (рис. 10), если у вас есть возможность ее изобразить.

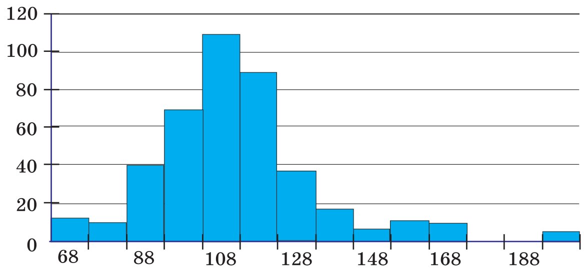


Рис. 9. Диаграмма для всех данных

[13] Диаграмма размаха (межквартильная диаграмма, диаграмма «ящик с усами») — удобный способ графического представления данных в виде ящика с границами на 1 и 3 квартилях с проведенной разделительной линией (медиана) и «усами», определяющими статистически значимую часть выборки (без выбросов). Судя по рисунку, авторы строили усы так, чтобы они тянулись от минимального до максимального значений.

Дополнительные эксперименты

Участники третьей группы (С3) взвешивали принесенные с собой конфеты, пластиковые бутылочки, ластики, пинг-понговые шарики и т.д. (рис. 11). Они были удивлены тем, что вес каждого предмета находился в пределах среднего плюс-минус три стандартных отклонения. Оказалось, что товары взвешены довольно точно, но все равно имеют отклонения в весе, вес конфет в пакетике чуть больше, чем написано на упаковке. Они подумали, что производитель учитывал психологический эффект, когда упаковывал конфеты.

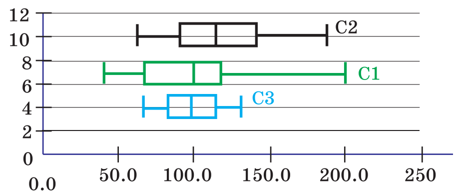


Рис. 10. Сравнение с помощью диаграмм размаха

Выводы из этого эксперимента

Оказалось, что люди имеют «чувство веса», они могут, потренировавшись, отмерить на глаз 100 г с небольшой погрешностью. Эта работа помогла учащимся понять, что такое «неопределенная задача», «изменчивость» и «рассеивание данных».

Обсуждение и выводы

Как уже было сказано, в целях развития статистического мышления статистика включена в программы математического образования в Японии.

Было проведено исследование среди 30% выпускников средних школ Японии, которое выявило проблемы с решением задач, связанных со случайной изменчивостью в повседневной жизни. Так, предлагалась задача, в которой были даны спортивные результаты двух лыжников (в фор-

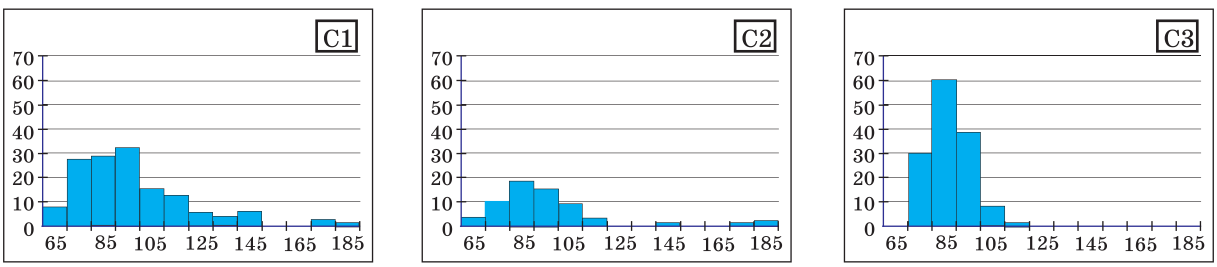


Рис. 8. Все данные в каждой группе

ме диаграммы), и выпускников попросили определить, какой лыжник будет выбран для участия в следующих Олимпийских играх. Национальный институт образования (2012) указал, что правильный ответ должен содержать имя спортсмена с разумными объяснениями. Важно было выработать способ решения задачи, оценить его, опираясь на характеристики полученных данных, и объяснить собственное рассуждение математически.

Мы утверждаем, что возникают два типа неопределенных ситуаций: одна — до начала решения задачи, а другая возникает в ответе как результат деятельности учащихся (Какихана, Сано и Мацуока, 2012). В итоге должно быть получено определенное решение с погрешностью в некоторых границах. Следует признать, что неопределенность результата в изменчивой ситуации возникает, даже если ответ был дан специалистом. Поэтому для этого типа задач ответ должен быть определен вместе с погрешностью (Какихана и Ватанабе, 2012).

Мы привели примеры статистических экспериментов для освоения понятия и роли рассеивания наборов данных.

Исода и Гонзалес (2012), Огучи (2010) и другие сообщают о неправильном прочтении столбиковых диаграмм и диаграмм размаха школьными учителями и студентами университетов. Эти исследования говорят о необходимости дополнительного изучения вопросов случайной изменчивости учителями и студентами университетов. В нашем сложном мире существует много способов решения задач, принятия решений, выдвижения гипотез в условиях неопределенности, поэтому важно изучать, как проявляется случайная изменчивость в задачах при помощи занятий по статистике и в школе, и в последующем непрерывном образовании.

Наш комментарий

Эта статья Кёко Какихана и Шинна Ватанабе, опубликованная в материалах конференции EARCOME6*, может служить источником различных идей.

Несмотря на некоторую эклектичность и описание сразу нескольких и плохо связанных между собой видов «статистической деятельности», нужно отметить, что авторы очень точно очертили проблему. Школа не привыкла иметь дело с приближенными решениями не вполне определенных задач, содержащих ситуацию изменчивости. И если до некоторого возраста представления об изменчивости и неопределенности чужды ребенку, то позже отсутствие статистической культуры начинает мешать.

Интересна идея опроса о том, что, по мнению респондентов, изменчиво, а что нет и почему. Такое исследование можно использовать для того, чтобы понять, как наши школьники относятся к изменчивым явлениям. Результаты самого этого опроса — хороший дидактический материал для занятий по статистике в 7–11-х классах.

Второе исследование, помимо обучающего компонента (средние, представление данных, понятие о рассеивании), интересно выбором природы данных. Используя точные весы, весьма трудно получить большую изменчивость. Здесь же использовано взвешивание по ощущению, на глазок. Это метод, который должен дать и хорошее среднее, и значительное рассеивание, в силу естественных причин имеет асимптотически нормальное распределение. Дополнительную ценность представляет собой взвешивание предметов массового производства — конфет, бутылочек с напитком, ластиков — всего, что оказалось под рукой. Неудивительно, что учащиеся зафиксировали рассеивание данных. Еще менее удивительно то, что по результатам не было построено ни диаграмм, ни таблиц: современные технологии производства дают небольшое рассеивание, его трудно зафиксировать с помощью бытовых весов.

Отдельно отметим то, что конфеты оказались в среднем немножко тяжелее номинала. С этим явлением мы тоже сталкивались, взвешивая шоколадные батончики, батончики нуги и т.п. Правда, причина скорее не столько в «психологическом воздействии» на потребителя, сколько в простом нежелании производителя сталкиваться с большим числом жалоб от тех же потребителей.

В заключение отметим, что среди учебных групп была группа пожилых людей, занимающихся математикой по программе непрерывного обучения. К сожалению, у нас в России таких групп и таких программ пока нет. Необходимость непрерывного добровольного образования по интересам давно обсуждается. В современной «Концепции развития математического образования» в Российской Федерации» заложены такие программы. Но до сих пор у нас нет ни опыта, ни даже примера подобных явлений.

И. ВЫСОЦКИЙ, г. Москва

* 6th East Asia Regional Conference on Mathematical Education (6-я Восточноазиатская региональная конференция по математическому образованию). Март 2013 года. Таиланд. Пхукет, Университет принца Сонкгла.

С. ПОЛИКАРПОВ,
sa.polikarpov@mpgu.edu,
г. Москва

Работа над статьей проводилась при поддержке Департамента образования города Москвы в рамках проекта «Проведение сравнительного анализа эффективности образовательных программ по предметам математики, физики, информатики, химии, биологии в системах общего образования Китая, Ю. Кореи, Сингапура с целью распространения лучшего мирового опыта в системе образования г. Москвы»

УЧИМ РЕШАТЬ. УЧИМ, КАК РЕШАТЬ. УЧИМ ЧЕРЕЗ РЕШЕНИЕ

В исследовании PISA 2009 года[1] предлагалась такая задача: «Круглая пицца радиусом 10 см стоит 10 тугриков, а пицца радиусом 20 см стоит 20 тугриков. Какую пиццу выгоднее купить?» Здесь выгоду следует, естественно, понимать в смысле уменьшения стоимости единицы площади пиццы. И несмотря на то, что решить задачу можно в уме, для ее решения нужно обладать некоторой математической подготовкой, а само решение дает интуитивное представление о таких важных понятиях, как порядок роста функции, свойства площадей (а впоследствии и объемов) подобных фигур.

Школьники Сингапура, одной из стран, где математическое образование входит в число приоритетных направлений государственной политики, демонстрируют стабильно высокие показатели на международных сравнительных исследованиях (в том числе PISA) в области математического образования[2,3], последних лет. Эти успехи принято связывать с системно реализуемым в сингапурских школах подходом к обучению математике, называемым «Решение задач» (Problem-solving).

О некоторых особенностях этого подхода шла речь в ходе международной конференции «Стратегии достижения высоких образовательных результатов», состоявшейся в МПГУ 7–8 октября 2015 года [4]. В конференции принял участие профессор То Тин Лам, один из создателей курса «Решение задач»[5] в Национальном институте образования Сингапура. Девиз курса: «Учим решать задачи, учим, как решать задачи, учим через решение задач».

В общих чертах, курс «Решение задач» может характеризоваться системным отношением к необходимости осознания своих действий учащимися в процессе решения задачи. Идеологической основой методики является известная схема решения, предложенная Д. Пойа[6], состоящая из четырех этапов: понимание постановки задачи, составление плана, осуществление плана, анализ решения.

В ходе решения предлагается применять приемы (называемые эвристиками), по отдельности достаточно хорошо известные всем интересующимся задачной тематикой, среди которых, например:

– разыграть сюжет задачи (воспроизвести процесс из условия);

[1] curriculumredesign.org/wp-content/uploads/PISA-mathematics.pdf
[2] Минобрнауки.рф/пресс-центр/2904/файл/1451/12.12.11-TIMSS_2011.pdf
[3] www.rtc-edu.ru/sites/default/files/files/news/PISA%202012_results.pdf
[4] stemasia.mpgu.org/
[5] Making mathematics practical: an approach to problem solving / Toh Tin Lam et al. — Singapore; World Scientific, Hackensack: 2011.
[6] Пойа Д. Как решать задачу. Пособие для учителей. — М., 1959.

К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru (Статья В.А. Булычева.)

– переформулировать задачу;
– решить задачу, близкую к заданной;
– начать решать с конца;
– рассмотреть разные случаи;
– рассмотреть упрощенную задачу;
– рассмотреть обобщенную задачу;
– разбить задачу на подзадачи;
– изобразить (нарисовать) модель;
– искать закономерности;
– прикидка и оценка.

Однако подчеркнем еще раз, что подход к организации обучения подразумевает как важнейшую задачу именно осознанное применение этих приемов, а не, скажем, тренировку на применение конкретного приема. Как, впрочем, и разбиение решения на этапы согласно Д. Пойа.

Разумеется, что успешное прохождение курса «Решение задач» невозможно без предварительной теоретической подготовки, освоения понятийного аппарата и базовых знаний из той области математики, к которой относится задача.

Надо отметить также, что сюжеты задач, которые используются в курсе, вообще говоря, хорошо известны и нашим школьникам. Так, рассматривается задача о взвешивании на чашечных весах[7], дающая интуитивно очень ясное понятие о двоичной (а при возможности добавления гирь на обе чаши — и троичной) системе счисления. Напомним, что задача заключается в следующем.

Найти наименьшее число гирь, которых достаточно для взвешивания на обычных двухчашечных весах любого слитка золота, если масса слитка в граммах выражается целым числом от 1 до 100. Какого веса должны быть гири? Гири разрешено класть только на левую чашу весов, а слиток золота — на правую.

Вот что предлагают сделать учителю для успешного обсуждения и поиска решения данной задачи самими учениками создатели рассматриваемого курса (в соответствии со схемой Пойа).

I. Понимание постановки задачи.

Подходящие эвристики: *разыграть сюжет задачи, использовать подходящее число* — предложить классу прикинуть, сколько понадобится гирь, чтобы взвесить все целые веса от 1 до 2, 3, 4, 20. Каких?

II. Составление плана.

Необходимо явно напомнить ученикам (изученное ранее) ключевое понятие «двоичное представление числа», затем предложить:

1. *Рассмотреть упрощенную задачу* — сколько понадобится гирь, чтобы взвесить все целые веса от 1 до 2, 3, 4, 20. Каких?

[7] *Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В.* Ленинградские математические кружки. — Киров, 1994.

2. *Решить задачу, близкую к заданной*, — использовать двоичное представление чисел от 1 до 100. Показать, что весов 2^n, где n от 0 до 6, достаточно.

III. Осуществление плана (оставлено авторами без комментария, вероятно, как этап, предназначенный для реализации учащимися в основном без помощи учителя).

IV. Анализ решения.

В схеме Пойа четвертый этап — анализ решения, по мнению сингапурских создателей курса, особенно важен. Здесь в том числе предлагается проанализировать различные варианты задач в близких к исходной постановках. В нашем случае, например, можно сделать следующее.

Проверьте решение (подберите гири), например, для взвешивания слитков весом 30 граммов и 99 граммов.

Решите теперь такую задачу: предположим, у вас имеется 7 гирь, чтобы взвесить любой слиток золота, масса которого в граммах выражается целым числом от 1 до n. Какие гири вы выберете и каково будет максимальное n?

Возможны и некоторые другие развития сюжета задачи. Например, предположим, что гири можно класть на обе чаши весов. Сколько и каких гирь понадобится в этом случае?

Другой пример — задача о русской рулетке[8], она подробно разбиралась в том числе в статье В.А. Булычева. Условие задачи таково.

В барабан револьвера помещается шесть патронов. Предположим, что револьвер заряжен только двумя патронами, установленными в подряд расположенные каморы (отверстия для патронов). Двое стреляют по очереди в воздух. Проигрывает тот, у кого револьвер выстрелит. Первый участник крутит барабан револьвера, затем нажимает на курок — выстрела нет. Что делать второму участнику: стрелять сразу или вначале прокрутить барабан?

Предлагаемая последовательность обсуждения (и решения) задачи такая:

I. Понимание постановки задачи.

Подходящие эвристики: *разыграть сюжет задачи, изобразить (нарисовать) модель* — барабан револьвера с четырьмя пустыми отверстиями и двумя последовательными, занятыми патронами.

Переформулировать задачу, например, следующим образом, в каком случае выстрел более вероятен: если стрелять сразу или если вначале прокрутить барабан?

[8] «Случайный эксперимент и его вероятностные модели». Rocznik naukowo-dydaktyczny WSP w Krakowie «Prace z Rachunku Prawdobienstwa i jego Dydaktyki II», Zeszyt 191, 1998. — Режим доступа: http://pbc.up.krakow.pl/dlibra/docmetadata?id=2591&from=&dirids=1&ver_id=&lp=14&QI=

II. Составление плана.

Необходимо явно напомнить ученикам (изученное ранее) ключевые понятия «вероятность», «пространство исходов», затем предложить *разбить задачу на подзадачи*.

1. Вычислить вероятность выстрела и в том, и в другом случае (если стрелять сразу или если вначале прокрутить барабан).

2. Чтобы определить вероятность выстрела в случае, когда барабан не крутят, необходимо осознать вначале, что будет пространством исходов, то есть каким образом мог повернуться барабан после первого нажатия на курок.

III. Осуществление плана (также, как в предыдущей задаче, оставлено без комментария).

IV. Анализ решения.

Проверка решения может заключаться, например, в проведении статистического эксперимента по вращению бумажного диска с нарисованными отверстиями (два последовательно расположенных из которых считаем заряженными).

Предположим теперь, что патроны вставлены в m последовательных отверстий, в барабан всего помещается n патронов. Каков будет ответ в этом случае? Совпадает ли он с ответом в случае, когда $m = 2$, а $n = 6$?

Другие разнообразные обобщения задачи содержатся в уже упоминавшейся статье В.А. Булычева.

Еще один пример задачи из курса такой.

В раздевалке школы, где учатся 343 ученика, имеется 343 шкафчика, пронумерованных от 1 до 343. Утром первый пришедший ученик открывает все шкафчики, второй — закрывает все шкафчики с четными номерами. Третий ученик «переиначивает» каждый третий шкафчик. Четвертый — каждый четвертый. И так далее. Какие шкафчики останутся открытыми, когда в школу придут все 343 ученика? (Здесь «переиначивает» означает «открывает», если дверка шкафчика закрыта, «закрывает» — если открыта.)

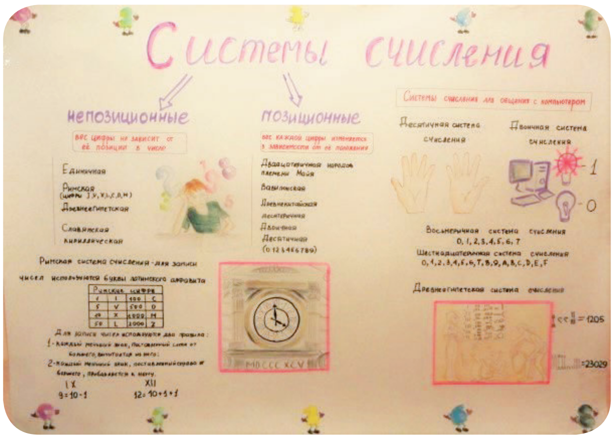
Основным результатом, который может быть получен в ходе решения, является следующее утверждение: *натуральное число, имеющее нечетное число делителей, является полным квадратом*.

Особенно важно подчеркнуть, что предлагаемая методика позволяет при наличии базовых знаний о свойствах делимости натуральных чисел вывести его как результат обсуждения в процессе решения указанной задачи в классе. Более подробно с материалами курса можно ознакомиться, например, в информационно-коммуникационной среде Интернет[9].

В заключение отметим, несмотря на известный скепсис (в том числе среди зарубежных исследователей), существующий в связи с идеей обучения математике, где во главу ставится именно решение задач (особенно из того раздела, который называется в рамках российской итоговой аттестации «реальной математикой»), такой подход при правильном подборе задач, несомненно, способствует развитию воображения, интуиции, математической культуры учащихся в целом.

[9] math.nie.edu.sg/mprose

ИТОГИ КОНКУРСА «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ»



Работа Максима Емельянова, ученика 7 « А» класса средней школы № 3 с углубленным изучением отдельных предметов г. Можга Удмуртской Республики. Руководитель: Е.А. Акатьева

Сегодня мы обсуждаем урок в 5-м классе, который был проведен учителем математики гимназии № 41 г. Люберцы Московской области Оксаной Васильевной БАНЧЕНКО. Урок обсуждают специалисты кафедры математических дисциплин Академии социального управления: М.В. ВАСИЛЬЕВА, Л.И. БОЖЕНКОВА, Е.Л. МАРДАХАЕВА.

ТЕМА УРОКА: «ЗАДАЧИ НА ДВИЖЕНИЕ ДВУХ ТЕЛ»

Тип урока: урок построения системы знаний.

Учебник: *Виленкин Н.Я.* и др. Математика. 5 класс. — М.: Мнемозина.

Цели урока (через планируемые результаты обучения):
предметные:
– понимать и правильно употреблять в речи термин «скорость сближения»;
– составлять схему движения двух тел по тексту задачи;
– решать несложные задачи на движение двух тел навстречу друг другу;
– самостоятельно выбирать более рациональный способ решения задач на движение двух тел навстречу друг другу;
метапредметные:
– распознавать вид движения двух тел: навстречу друг другу, в противоположных направлениях, в одном направлении;
– распределять объекты на группы;
– систематизировать объекты по какому-либо признаку, выполнять обобщение;
– строить речевые высказывания;
– уметь слушать и вступать в диалог; воспитывать чувство взаимопомощи;
– устанавливать связи и отношения между понятиями, выполняя анализ задач;
– использовать прием саморегуляции при решении задач на движение двух тел навстречу друг другу.

Ход урока

Мотивация

Класс делится на группы по 4 человека, которые располагаются за двумя соседними партами; каждая группа получает 9 карточек с задачами (по одной задаче на карточке).

1. Найдите путь, который преодолела ястребиная сова за 2 часа охоты, если ее скорость 130 км/ч.

2. Девочка и собака побежали с двух концов дорожки одновременно навстречу друг другу и встретились через 20 с. Найдите длину дорожки, если скорость девочки 3 м/с, а скорость собаки — 7 м/с.

3. Мальчик пробежал 60 метров за 12 секунд. С какой скоростью бежал мальчик?

К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru (Технологическая карточка.)

4. Охотник верхом на лошади проехал 56 км со скоростью 14 км/час. Сколько времени он потратил на дорогу?

5. Колобок катится навстречу Лисе. Сейчас между ними 900 метров. Скорость Колобка 70 м/мин, а скорость Лисы 80 м/мин. Через сколько минут они встретятся?

6. Между домами двух друзей — Коли и Вити — 2100 м. Они договорились встретиться и пойти гулять. За сколько минут до встречи им необходимо выйти из дома, если скорость Коли 65 м/мин, а Вити — 75 м/мин?

7. Муха летела 15 секунд со скоростью 5 м/с. Какое расстояние она пролетела за это время?

8. От станции A на станцию B, расстояние между которыми 300 км, отправился поезд со скоростью 60 км/ч. Одновременно из пункта B в пункт A отправился второй поезд со скоростью 75 км/ч. Найдите расстояние, которое будет между поездами через 2 ч пути.

9. Навстречу друг другу, каждый из своего логова, одновременно выбежали два тигра. Скорость одного тигра 48 км/ч, а другого — 54 км/ч. На каком расстоянии находятся логова, если встретились тигры через 3 часа?

Задание 1. Распределите задачи (карточки) на две группы.

Обсуждение с учащимися.

Учитель. Что общего у всех задач, которые записаны на карточках?

– Это задачи на движение.

У. Какие задачи отнесены вами к одной группе, а какие — к другой? Почему?

– К первой группе отнесены задачи 1, 3, 4, 7 — это задачи на движение одного тела; ко второй группе отнесены задачи 2, 5, 6, 8, 9 — задачи на движение двух тел.

– Если вы справились с заданием 1, то на полях тетради нарисуйте зеленый кружок, если у вас были затруднения — желтый, если не смогли справиться — красный.

Формулирование темы и постановка цели урока

Учитель. Можете ли вы решить задачи первой группы?

– Да. В задаче 1 ответ 260 км, в задаче 3 — 5 м/с, в задаче 4 — 4 ч, в задаче 7 — 75 м.

У. А можете ли вы так же быстро решить задачи второй группы?

– Нет, есть затруднения.

У. Почему возникли затруднения? Чем отличаются задачи второй группы от задач первой группы?

– Затруднения возникли при решении задач на движение двух тел, в этом отличие задач второй группы.

У. Выход их этого затруднения мы с вами и будем искать сегодня на уроке. Помогите мне, пожалуйста, сформулировать тему урока.

– «Задачи на движение двух тел».

У. Какие цели вы перед собой поставите на урок?

– Научиться решать задачи на движение двух тел.

У. Запишите в тетрадях число и тему урока.

Актуализация знаний

Учащиеся отвечают на вопросы фронтально. После каждого ответа они поднимают карточку: зеленую — если согласны с ответом, желтую — если есть сомнения, красную — если не согласны.

Учитель. Какие величины характеризуют процесс движения тела?

– Скорость, время, расстояние.

У. Какой формулой связаны эти величины?

– Они связаны формулой $s = vt$.

У. Выразите из этой формулы время и скорость.

$$t=\frac{s}{v},\ v=\frac{s}{t}.$$

У. Что такое скорость?

– Скорость — это расстояние, пройденное за единицу времени.

У. Подведем итог. Карточки какого цвета вы чаще поднимали в ходе обсуждения? Нарисуйте на полях тетради кружок зеленого цвета, если верных ответов у вас было больше других, кружок желтого цвета, если чаще сомневались, но на несколько вопросов ответили верно, кружок красного цвета, если ни разу не получилось ответить верно.

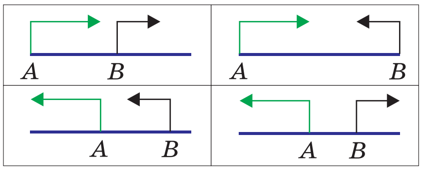
Воспроизведение и коррекция опорных знаний учащихся

Учитель. Прочитайте задачу 10 и выполните задание 2 (предъявляется на карточках).

10. Из пункта A со скоростью 52 км/ч выехал автомобиль. В это же самое время из пункта B со скоростью 40 км/ч выехал мотоцикл. Какое расстояние будет между мотоциклом и автомобилем через 2 часа, если расстояние от A до B 320 км?

Задание 2. Подумайте, в каких направлениях по отношению друг к другу могут двигаться два тела, изобразите схематически варианты движения.

Представители звеньев по очереди чертят схемы на доске. Все внимательно слушают и выражают согласие или несогласие с ответами учеников: зеленая карточка — согласие; желтая — сомнение, красная — несогласие.



У. Подведем итог. Карточки какого цвета вы чаще поднимали в процессе обсуждения? Нарисуйте на полях кружок зеленого цвета — если правильных схем было три или четыре, желтого цвета — если правильных схем было две, красного цвета — если правильных схем было не более одной.

Теперь разбейтесь на пары и выполните задание 3.

Задание 3. Решите задачу 2, по возможности — несколькими способами. Обоснуйте каждый способ. Сформулируйте общую формулу для задач на встречное движение.

Ученики работают в парах, решают, советуются и представляют (по вызову учителя) свои решения на доске. Обсуждаются варианты решения.

Решение задачи 2. Способ I.

1) $20 \cdot 3 = 60$ м — путь девочки;

2) $20 \cdot 7 = 140$ м — путь собаки;

3) $140 + 60 = 200$ м — длина дорожки.

Способ II.

1) $3 + 7 = 10$ м/с — общая скорость;

2) $10 \cdot 20 = 200$ м — длина дорожки.

Ответ: 200 м.

У. Чем различаются способы решения задачи?

– Во втором случае мы нашли общую скорость.

У. Как можно назвать эту скорость, ведь наши объекты, двигаясь навстречу друг другу, сближаются?

– Ее можно назвать скоростью сближения, так как расстояние уменьшается.

У. Верно! Теперь составьте выражение для решения задачи каждым способом.

– Для способа I выражение выглядит так: $20 \cdot 3 + 20 \cdot 7$; для способа II так: $(3 + 7) \cdot 20$.

У. Молодцы! Что надо сделать, чтобы получить ответ задачи в этом случае?

– Найти значения полученных выражений.

У. Итак, как определить скорость сближения и чему она равна?

– Скорость сближения — это расстояние, на которое объекты сближаются за единицу времени. Определить ее можно по формуле $v_{сбл} = v_1 + v_2$.

У. Выполните оценку своей работы по следующим критериям: зеленый кружок — задача была решена двумя способами и было составлено одно или два выражения; желтый — задача была решена только одним способом, к которому было составлено выражение, или задача решена двумя способами, но ни одного выражения составлено не было; красный кружок — не смог справиться с заданием.

Закрепление в знакомой ситуации

Задание 4. Решите задачу 5. Сформулируйте предписание для решения задач, в которых требуется найти время движения двух тел, движущихся навстречу друг другу.

Выполняют в группах. Одна из групп представляет решение на доске, другие группы проверяют, верно ли дано решение, и поправляют в случае необходимости.

Решение задачи 5.

1) $70 + 80 = 150$ м/мин — скорость сближения Колобка и Лисы;

2) $900 : 150 = 6$ мин. — время до встречи.

Ответ: 6 мин.

Учащиеся формулируют предписание. Обсуждают варианты.

Предписание для нахождения времени движения двух тел навстречу друг другу

1. Найти скорость сближения.
2. Разделить расстояние между телами на скорость сближения.

Учитель. Сформулируйте критерии самооценки.

– Зеленый кружок — задача решена верно и сформулировано предписание; желтый кружок — задача решена, но предписание не составлено; красный кружок — с заданием не справились.

У. Согласна. Выполните самооценку, после чего перейдем к заданию 5.

Задание 5. Решите задачи 6 и 8.

Два ученика у доски решают и объясняют решение этих задач.

Решение задачи 6.

1) $65 + 75 = 140$ м/мин — скорость сближения;

2) $2100 : 140 = 15$ мин. — время в пути до встречи.

Ответ: 15 мин.

Решение задачи 8.

1) $60 + 75 = 135$ км/ч — скорость сближения;

2) $135 \cdot 2 = 270$ км – пути, пройденные поездами;

3) $300 - 270 = 30$ км — расстояние между поездами.

Ответ: 30 км.

Учащиеся проверяют свои решения, соотнося их с записями на доске.

У. Сформулируйте критерии самооценки.

– Зеленый кружок — обе задачи решены верно, желтый кружок — верно решена только одна задача, красный кружок — задачи не решены или решены неверно.

У. Согласна. Выполните самооценку.

Самостоятельная работа с самопроверкой по эталону

Учитель. Решите задачи 11–13, обменяйтесь решениями с соседом по парте и сделайте проверку. При необходимости вы можете получить эталон для проверки.

11. Всадник едет на лошади со скоростью 8 км/ч. Какое расстояние он преодолеет за 6 часов?

12. Из двух сел выехали одновременно навстречу друг другу трактор и повозка с сеном. Скорость трактора 9 км/ч, а скорость повозки 7 км/ч. Чему равно расстояние между селами, если встреча произошла через 2 часа после начала движения?

13. Пчела летит в улей со скоростью 6 м/с. Навстречу ей из улья вылетает другая пчела со скоростью 8 м/с. Через какое время они встретятся, если перед началом полета первая пчела находилась на расстоянии 420 м от улья?

У. Выполните оценку своих действий на этапе взаимопроверки: зеленый кружок — полностью осуществил проверку работы товарища, желтый — воспользовался эталоном при проверке одной или двух задач, красный — проверку смог сделать только с помощью эталонов.

Рефлексия

Учитель. Какие цели вы ставили перед собой?

– Узнать, какими формулами надо пользоваться при решении задач на движение двух тел; научиться решать задачи на движение двух тел.

У. Какие цели достигнуты?

– Мы повторили формулы, связывающие расстояние, время и скорость движения одного тела. Рассмотрели движение двух тел навстречу друг другу. Получили формулу скорости сближения и составили предписание для нахождения времени, которое пройдет до встречи двух тел, движущихся навстречу друг другу.

У. Какие виды движения нам еще предстоит изучить?

– Движение в противоположных направлениях, а также движение в одном направлении — вдогонку и с отставанием.

У. Со всеми ли заданиями на уроке вы успешно справлялись? Посмотрите, какие кружки у вас нарисованы на полях тетради, и выполните самооценку за весь урок по следующим критериям: если зеленых кружков 3–4, поставьте себе отметку «3»; если их 5–7, то отметку «4»; а если 7–8, то отметку «5»; за два желтых кружка прибавьте еще 1 балл к общей отметке.

Обсуждение урока

Напомним читателям, что сегодня в обсуждении участвуют специалисты кафедры математических дисциплин Академии социального управления: кандидат педагогических наук, заведующая кафедрой, президент ассоциации педагогов Подмосковья «Учителя физики и математики» Марина Викторовна Васильева; доктор педагогических наук, профессор кафедры Людмила Ивановна Боженкова и кандидат педагогических наук, доцент кафедры Елена Львовна Мардахаева. Урок, который они обсуждают, был проведен в рамках методического регионального семинара «Построение уроков математики и физики в свете концепции развития математического образования в России», организованного академией совместно с ассоциацией.

М.В. Почему мы выбрали именно этот урок для нашей беседы? Урок был открытым, можно сказать, показательным, но его структура, выбранные формы и используемые методы характерны для любого урока. Я хочу обратить внимание читателей журнала на тот факт, что учитель выбрал для составления конспекта этого урока современную форму — технологическую карту (см. в личном кабинете).

Е.М. Да, в условиях реализации Федерального государственного образовательного стандарта технологическая карта является наиболее удобной формой конспекта урока. Она, как мне кажется, помогает в процессе проектирования урока четко обозначить действия учащихся, определить универсальные учебные действия, характерные для каждого этапа урока.

Л.Б. Коллеги, а я обратила внимание вот на какую интересную особенность урока: нам был показан урок построения системы знаний, однако часть материала относится к новой информации, то есть урок соединил в себе систематизацию и обобщение уже имеющихся знаний с выделением и усвоением новой информации. Здесь очень важно, чтобы учитель акцентировал внимание учащихся на этом, в начале урока при формулировании темы и постановке цели подвел их к мысли: «Сегодня мы осознаем, что мы знали раньше и что нового узнали, а в конце урока мы это обсудим». Безусловно, в конце урока на этапе рефлексии необходимо к этой мысли вернуться и попросить учащихся выделить, что нового они узнали, а что было систематизировано из уже имеющихся знаний.

Е.М. Чтобы осуществить обобщение и систематизацию материала, учитель в качестве основной выбрал групповую форму работы, причем двух видов: в парах и в группах по четыре человека.

М.В. Полностью согласна с выбором учителя, ведь именно групповая форма работы позволяет активизировать самостоятельную работу учащихся, ее итогом становятся обобщение и систематизация каждым учеником имеющихся у него знаний из курса начальной школы. Но замечу, что учитель не уделил внимания формированию у учащихся таких коммуникативных умений, как планирование учебного сотрудничества с учителем и сверстниками. Я думаю, на начальном этапе организации групповой работы надо было четче выделить роли учащихся, ведь они всего лишь пятиклассники.

Е.М. Мое внимание привлекла система заданий. Фактически все задачи, решенные учащимися на уроке, были предъявлены им в самом его начале. Они сразу увидели весь объем предстоящей им работы. На основании представленной системы задач учащиеся самостоятельно сформулировали тему урока и определили цели своей работы.

Л.Б. Да, в принципе, это полезно — представить весь объем работы в начале урока, а затем поэтапно раскрывать все ее аспекты. Но я хочу заметить, что отдельного обсуждения заслуживают сюжеты задач на движение: сюжеты некоторых задач урока, на мой взгляд, спорны.

М.В. Согласна. Например, в задаче 11 используется неудачный сюжет: лошадь, скачущая 6 часов с постоянной скоростью... С одной стороны, задача как будто взята из жизни, а с другой — понятно, что в реальной жизни такое невозможно. Как ребенок должен относиться к задаче? Однако такой сюжет полезен для того, чтобы обсудить с учащимися вопрос о реальности описанных в задаче событий, адекватности фигурирующих в ней величин.

Е.М. Хочется добавить, что неудачен и сюжет задачи 13. Ведь пчела не летает по прямой. Формулировка этой задачи могла бы позволить учителю поговорить о методе математического моделирования, при котором всегда формулируются условия, при которых данная модель работает. Вообще говоря, задача некорректна. Найденная величина расстояния верна только при условии, что пчела летела по прямой линии (а в условии об этом не сказано). Нужно либо обсуждать с учащимися сюжеты задач, либо не использовать столь провокационные сюжеты вовсе.

М.В. Коллеги, я предлагаю вам вернуться к началу урока. Учащиеся перед собой ставят цель: «Научиться решать задачи на движение двух тел». Учитель эту цель принимает, но в конце урока, на этапе рефлексии учащиеся осознают, что рассмотрели только один вариант движения двух объектов, еще осталось три варианта, которые необходимо будет рассмотреть в дальнейшем. То есть в силу недостаточности знаний они не смогли правильно поставить цель для конкретного урока, что и понятно. На этапе рефлексии, определяя достигнутое на данном уроке и оценивая то, что еще предстоит изучить, учащиеся формулируют сразу темы и цели на несколько предстоящих уроков. Это здорово! Однако было бы полезно их как-то зафиксировать, ведь наверняка к следующему уроку ученики забудут то, о чем говорилось на предыдущем, и при формулировании темы и цели этого, нового урока придется тратить время на то, чтобы освежить вспоминания.

Е.М. А вот я считаю большим недостатком урока отсутствие продуманного визуального ряда, а тема-то к наглядности весьма располагает. Большие возможности в этом смысле имеет компьютерная среда «Математика на компьютерах».

М.В. Да, мне кажется, что можно и нужно порекомендовать коллегам, читающим эти строки, использовать на подобных уроках модуль «Задачи на движение» ИИСС «Математика на компьютерах», которую можно найти в Единой коллекции цифровых образовательных ресурсов (http://school-collection.edu.ru). Это обучающая программа по теме «Решение задач на движение», она содержит демонстрационную и тестирующую части. Программа представлена в виде анимационного ролика, который демонстрирует виды движения объектов с подробным описанием решений задач, позволяющим учащимся самостоятельно проводить сравнительный анализ задач разного типа, тем самым улучшая качество усвоения материала. В модуле есть и встроенный редактор задач, им учитель может пользоваться при подготовке дидактического материала.

Е.М. Мы всегда призываем учащихся к активному участию в обсуждении решения задачи или ответа на вопрос, но как услышать мнение каждого ученика? Как сделать, чтобы все участвовали в обсуждении? Использование разноцветных карточек, которыми учащиеся обозначали свое мнение к услышанному ответу, полагаю, позволило каждого ученика привлечь к обсуждению. Решение достаточно традиционное, но действенное.

Л.Б. Полностью согласна с вами и еще добавлю, что учащиеся имели возможность высказать свое мнение также в процессе групповой работы. Групповая работа вообще способствует формированию и развитию многих коммуникативных универсальных учебных действий.

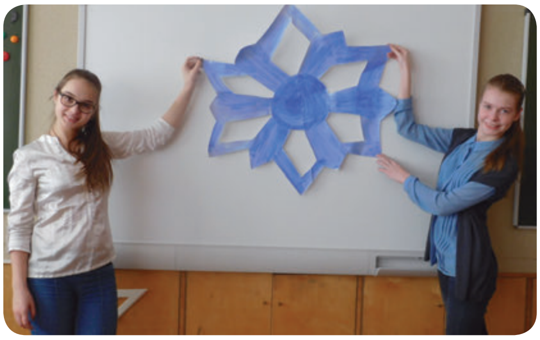
М.В. Очень важно правильно закончить урок. На этом уроке, в его заключительной части, была проведена самостоятельная работа со взаимопроверкой, что позволило учащимся показать знания, полученные и систематизированные ими в ходе групповой работы. Я считаю взаимопроверку очень полезной формой работы: она способствует формированию умений осуществлять контролирующую деятельность, помогает закреплять предметные результаты, способствует полноценному проведению этапа рефлексии.

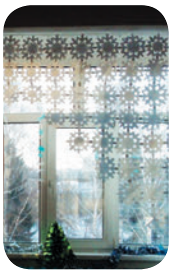
Л.Б. Для того чтобы учащиеся правильно оценивали свою работу, учитель проводил промежуточные самооценку и рефлексию на каждом этапе урока. Думаю, что это способствовало формированию у учащихся регулятивных универсальных учебных действий.

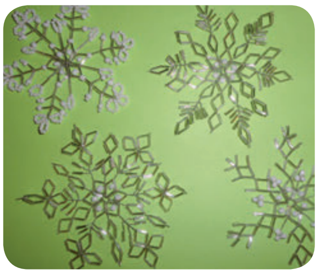
Е.М. На уроке не было работы с учебником. Выскажу предположение, что это вызвано тем, что в этом учебнике нет отдельной темы «Задачи на движение» и, кстати, в тематическом планировании не выделяется времени на ее изучение. При этом задачи на движение, конечно, есть, их много, правда, в учебнике они «распылены», что не мешает использовать их для закрепления темы. Я бы в этой связи напомнила, что грамотно организованная работа с учебником способствует формированию универсальных учебных действий, обогащает образовательные возможности урока, способствует достижению планируемых результатов. Не стоит об этом забывать.

М.В. Многое на уроке остается за его пределами. Представленный открытый урок, являясь частью системы уроков, частью методической системы, которую выстраивает учитель, представляет собой и некоторый отдельный ее элемент. Все это накладывает на него свой отпечаток; какие-то наши вопросы так и остаются без ответа и появляются новые. Мы ставим эти вопросы, чтобы побудить читателя задуматься над ними, сопоставить со своим опытом, в чем-то утвердиться, что-то попробовать изменить. Это наша цель, и нам хочется поблагодарить учителя за урок, побудивший нас к этому разговору.

ИТОГИ КОНКУРСА «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ»



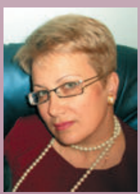





Призеры конкурса — команда «Математический потенциал» из г. Искитима Новосибирской области — и их работы

О. ГРИГОРОВА,
А. ЕВСЕЕВА,
М. ЗОТОВА,
drakosha976@yandex.ru,
г. Москва,
фото предоставлены авторами.
В обсуждении принимает участие
главный редактор журнала
"Школьный психолог",
кандидат психологических наук,
доцент МГППУ М. Чибисова.

Фото авторов



ОЦЕНИВАЕМ ЛИЧНОСТНЫЕ И МЕТАПРЕДМЕТНЫЕ КОМПЕТЕНЦИИ

В предыдущих публикациях мы рассказывали о технологиях формирования предметных компетенций на уроках математики. В этой статье поговорим о формировании личностных и метапредметных компетенций через систему критериального оценивания предметных достижений учащихся и о работе над выработкой системы критериев в оценке личностных и метапредметных результатов обучения.

Личностные и метапредметные компетенции во ФГОС

Личностные достижения в обучении, зафиксированные во ФГОС как обязательный результат совместной деятельности всех участников образовательного процесса, подлежат оцениванию. Каким образом? Как достижение планируемого результата. Как выглядит этот планируемый результат? Как сумма желаемых качеств личности выпускника, позволяющих ему достичь условий, при которых происходит его успешная самореализация в обществе. Поэтому ФГОС каждой ступени «рисует» нам портрет выпускника, соответствующего данной ступени развития.

Оценка личностных результатов обучения включает в себя:

– готовность и способность ученика к саморазвитию и личностному самоопределению;

– сформированность его мотивации к обучению и целенаправленной познавательной деятельности;

– систему социальных и межличностных отношений, отражающих личностные и гражданские позиции в деятельности;

– социальные компетенции, способность ставить цели и строить жизненные планы.

Поскольку личностные приобретения формируются только в деятельности, то задачей каждого педагога является формирование не только предметных компетенций, но и научение универсальным учебным действиям, позволяющим человеку в течение всей жизни учиться, видеть и понимать мир как целостное и взаимосвязанное явление.

Оценка метапредметных результатов обучения включает в себя:

– освоение учеником межпредметных понятий и универсальных учебных действий (регулятивных, познавательных, коммуникативных),

– способность их использования в учебной, познавательной и социальной практике;

– самостоятельность планирования и осуществления учебной деятельности;

– организация учебного сотрудничества с педагогами и сверстниками;

– построение индивидуальной образовательной траектории.

К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru (Таблица самооценки, анкета.)

Как оценивается планируемый результат формирования универсальных учебных действий? ФГОС предусматривает выполнение группового, а в старшей школе — индивидуального проекта, оценка которого фиксируется в аттестате об основном среднем образовании. Следовательно, выпускник школы на основе самоопределения перспектив своего развития, осознанного выбора будущей профессии должен выбрать область знаний и показать совокупность знаний и сформированность УУД, позволяющих ему самостоятельно выбрать тему, поставить цель, определить план деятельности и методы исследования, оформить свой труд в соответствии с требованиями и успешно его презентовать.

Как видим, чтобы достичь планируемого результата образования, ФГОС требует совместной деятельности всех педагогов на всех ступенях обучения. Это и позволит оценить интегрированные усилия по следующим уровням: высокий, средний и низкий. Приведем их краткую характеристику.

Низкий уровень показывает, что ученик узнает отдельные изученные способы действий, но применяет их лишь для известных типовых ситуаций, то есть действует на уровне воспроизведения действия. В дальнейшем обучении он может испытывать серьезные трудности, ему необходимы компенсирующие занятия по освоению всего спектра общеучебных умений.

Средний уровень говорит о том, что ученик справляется с применением проверяемых способов деятельности в несложных ситуациях, осмысленно использует изученные алгоритмы действий на уровне их комбинирования. При фиксации данного уровня необходим анализ выполнения учащимся каждой группы заданий с целью выявления трудностей в освоении тех или иных способов действий и проведения соответствующей коррекции.

Высокий уровень показывает, что ученик достаточно свободно владеет проверяемыми способами деятельности, может комбинировать изученные алгоритмы в соответствии с требованиями новой ситуации, составлять собственные планы решения учебных задач.

Достоинства критериального оценивания

В предыдущих статьях мы обращали ваше внимание на комплексный подход к оценке достижений школьников в системе критериального оценивания. Так, мы отмечали, что все уроки математики, вне зависимости от типа, начинаются с целеполагания, определяющего формирование личностных и метапредметных (познавательных, регулятивных и коммуникативных) компетенций. Каждый ученик на основе коллективной цели и учебных задач формулирует свои цели и задачи изучения и контроля знаний, что контролируется на этапе самооценки знаний и рефлексии учебных достижений. Каждый урок содержит этап планирования деятельности, что приучает учащихся к самостоятельности в работе, направляет на получение личностно значимого результата, формирует тем самым навык созидательной деятельности, лишенной социального иждивенчества. При этом система критериального оценивания ведет и к повышению мотивации к учебной деятельности, так как настраивает ученика на успешное усвоение учебной программы в рамках его возможностей, интереса к изучаемому предмету, прикладываемых волевых усилий.

Проектная технология, о которой мы рассказывали в статье об особенностях оценивания предметных компетенций на уроках различных типов, убедительно демонстрирует преимущества формирования не только предметных умений, но и универсальных учебных действий, а также возможность применения знаний в нестандартной, творческой ситуации. Проведение уроков и внеурочных занятий в системно-деятельностном методе невозможно без использования групповых форм работы. Взаимодействие и сотрудничество в системах «учитель – ученик», «ученик – ученик» позволяет учащимся не только овладевать содержанием учебного предмета, но и отрабатывать навыки совместной деятельности каждый раз в новой роли (руководитель, контролер, советник, докладчик, оформитель и др.). Однако, какой бы ни была роль, всех членов группы объединяет действие на достижение общей цели, решение общих задач. Таким образом, технологии, основанные на системно-деятельностном подходе и критериальном оценивании, позволяют сформировать как предметные, так и личностные и метапредметные компетенции.

Какие технологии оценки личностного развития используются в нашей практике? Портфолио достижений. Как известно, оно состоит из документов — сертификатов, грамот, дипломов и др., констатирующих достижения ученика по результатам участия в олимпиадах, интеллектуальных и творческих конкурсах, окончание тех или иных курсов и семинаров. Но формирование адекватной самооценки невозможно без рефлексии своей деятельности. Ребенок должен научиться анализировать динамику своего роста. Вот почему в портфолио ребенка появились такие разделы, как самоанализ контрольных работ и ликвидации пробелов знаний, цели и задачи обучения, составленные на основе промежуточных результатов и результатов анкетирования.

Пример такой анкеты, заполненной одним из учеников, смотрите далее и в Личном кабинете.

Анализ учебных достижений по алгебре и геометрии за II четверть

Ученика 7 класса школы № 687 ________________________________

1. Какую учебную цель ты ставил перед собой в этой четверти:

– по алгебре — *получить за четверть «4»;*

– по геометрии — *научиться сдавать зачет по теме с первого раза.*

2. Выбери то окончание предложения, которое ты считаешь правильным:

Достижение учебного результата — это...

– *ежедневный совместный труд учителя и ученика*;

– дело учителя;

– дело ученика.

3. Что делал учитель на уроке для достижения учебных результатов?

– Объявлял тему урока, вместе с классом рассуждал о ее смысле. *Да*

– Вместе с классом ставил цель урока. *Да*

– Излагал новый материал. *Да*

– Объясняя новый материал, учил работать с текстом, выделять главное, направлял поиск ответа на вопрос. *Да*

– Объясняя новый материал, демонстрировал презентацию. *Да*

– Для объяснения нового материала использовал дополнительные пособия на печатной основе. *Не всегда*

– Объясняя новый материал, записывал на доске формулы, определения, теоремы и т.д. *Да*

– Контролировал выполнение домашнего задания. *Нет*

– Оценивал результаты работы ученика на уроке. *Да*

– Задавал домашнее задание. *Да*

4. Всегда ли для достижения учебного результата на уроке ты...

– Имел на парте учебник, тетрадь, письменные принадлежности. *Не всегда*

– Выполнял домашнее задание в полном объеме и к каждому уроку. *Не всегда*

– Внимательно слушал учителя и выполнял задания под его руководством. *Не всегда*

– Слушал ответы одноклассников, участвовал в диалоге. *Не всегда*

– Вел записи в тетради самостоятельно или под руководством учителя. *Да*

– Задавал вопросы в случае непонимания нового материала (до урока или во время объяснения). *Да*

5. Для достижения учащимися учебных результатов учитель использовал такие формы работы на уроке.

– Фронтальная, со всем классом. *Да*

– В парах, тройках. *Да*

– В группах. *Да*

6. Оцени активность своей работы на уроке.

– В работе со всем классом поднимал руку и отвечал на вопрос учителя, быстро находил ответ в учебнике. *Нет*

– Работая в паре, тройке работу с партнерами выстраивал на равных условиях. *Старался*

– Работая в группе, активно участвовал в мозговом штурме, помогал другим найти ответ на вопрос, сам отвечал. *Если мог*

7. Оцени речь учителя.

– Доступна для понимания. *Да*

– Эмоциональна. *Да*

– Слышна. *Да*

– Темп речи соответствует восприятию *Не всегда*

8. Выдели ту модель поведения на уроке, которая характерна для тебя (*выдели нужное*).

– Я внимательно слушаю, не отвлекаясь, рассуждаю вслед за учителем, активно участвую в диалоге.

– *Я «включаюсь» в урок только тогда, когда мне интересно.*

– Я делаю вид, что работаю, а сам думаю о своих проблемах.

– Мне не интересна учеба, на урок прихожу потому, что он стоит в расписании.

9. Старался ли ты для достижения учебного результата за эту четверть (*выдели нужное*)...

– *развивать внимание, тренировать память, строить монологический ответ;*

– *читать вдумчиво текст задачи, выделяя ключевые слова для понимания вопроса задачи;*

– решать задачи повышенного уровня сложности;

– принимать участие в математических конкурсах и олимпиадах;

– ничего не делал.

10. Как ты выполняешь домашнее задание?

– Выполняю к каждому уроку. *Нет*

– Читаю пояснительный текст учебника. *Нет*

– Считаю ею достаточным то, что слышал на уроке. *Да*

– Заучиваю формулы, определения, теоремы. *Нет*

– Выполняю задания в рабочей тетради. *Да*

11. Закончи предложения.

– На уроках математики в этой четверти я наконец-то понял, *что надо учить определения и теоремы по геометрии, надо лучше делать домашние задания.*

– Я так рад, *что научился решать линейные уравнения и доказывать равенство треугольников.*

– Самое интересное, что я узнал на уроках математики: *не все математики в школе были отличниками.*

– Больше всего я сожалею о том, *что очень ленив.*

12. Добился ли ты целей, поставленных на II четверть? *Нет*

13. Какие учебные цели ты ставишь перед собой на III четверть?

– по алгебре – *все-таки получить «4»;*

– по геометрии – *самостоятельно доказать теорему у доски.*

Анализируя анкеты мы получили, во-первых, информацию о качестве своей работы и как эту работу видят и оценивают ученики, во-вторых, общее представление о мотивации конкретного ученика и возможность отслеживать ее от четверти к четверти.

Оценка и формирование мотивации

Важную роль в нашей работе играет оценка уровня мотивации, которая, без сомнения, является локомотивом учебной деятельности, влияющей на результаты обучения.

Для повышения ее уровня нельзя пренебрегать и внешними факторами. Так, по итогам четверти и года мы выстраиваем рейтинг успешности. Высокомотивированные учащиеся не позволяют себе утратить ни одной сотой балла успеха. А как стимулировать тех, кто замыкает список класса, не говоря уже о попадании в десятку успешных в параллели? Рейтинг успешности может составляться по областям знаний. Тогда «гуманитарии» будут вдохновляться своими победами среди «равных», а любому «отстающему» приятно будет себя увидеть на передовых позициях предметов развивающего цикла.

Хотелось бы на следующем этапе работы создать банк учебно-дидактических материалов по предметным областям, основанных на решении научно-практических, жизненно важных проблем, требующих использования багажа знаний, ресурсов межличностного и делового общения, позволяющих создать условия для формирования личностных и метапредметных результатов обучения на основе интеграции усилий и взаимодействия всех методических объединений школы. Это позволило бы учесть возрастную специфику задач развития учащихся, подразумевается, что в начальной школе дети должны получить знания о важнейших нравственных, культурных, личностных и социальных понятиях, на ступени основной школы — примеры образцов действия на основе этих понятий, а в старшей школе — социально значимую практику.

Мы пришли к пониманию того, что именно класс воспроизводит ту образовательную среду, те условия обучения, воспитания и социализации личности, на основе которых происходит ее развитие от самопознания через самоопределение к самореализации. Поэтому сначала необходимо строить образовательную траекторию каждого отдельного ученика, а на их основе — образовательную программу класса. Программа должна включать в себя рекомендации каждому учителю и коллективу в целом по технологиям формирования «западающих» универсальных учебных действий, по особенностям личностного и коллективного взаимодействия, позволяющего определять «прорывные» методы, формы работы по достижению прогнозируемого результата. При этом критериями личностного развития и уровня сформированности метапредметных компетенций на этапе длиной в один учебный год могут быть:

а) соответствие достижений и новообразований возрастным психолого-педагогическим требованиям (это определяет педагог-психолог);

б) соответствие свойств УУД и качеств личности заранее заданным требованиям, обсужденным на консилиуме.

Способы проверки — комплексные контрольные работы по областям знаний, решение учебных проблем и т.д. Это внешняя проверка. Внутренний же способ — это самооценка своих достижений, которую можно организовать по конкретным универсальным учебным действиям, соответствующим требованиям ФГОС на данной ступени обучения (таблицу для проведения самооценки см. в электронном приложении). Поскольку работа над этим блоком задач у нас только началась, она подлежит еще тщательному изучению и осмыслению, а результатами мы обязательно поделимся с коллегами.

Постскриптум

И в качестве завершения еще несколько слов о том, как мы пришли к пониманию необходимости создания и применения критериальной системы оценивания. Каждая из нас, независимо друг от друга, начала применять отдельные элементы балльной системы и самоанализа на своих уроках. Увидев друг у друга схожие идеи, мы постарались их обобщить, собрать и привести в стройную систему. В этом большим подспорьем для нас стала наша личная индивидуальность: одна фонтанировала идеями, другая выступала с объективной критикой, отсеивая фантастическое, а третья настаивала на различных способах апробации и доведения «экспериментов» до конечного результата. В сомнениях, спорах и открытых уроках получалось то, чем мы поделились с вами в наших статьях.

Первый год работа шла урывками и в основном сводилась к анализу контрольных работ, без рефлексии. Но урок подготовки к контрольной работе (с составлением ее эталона и написания критериев для оценивания заданий различного уровня сложности) был у нас с самого начала.

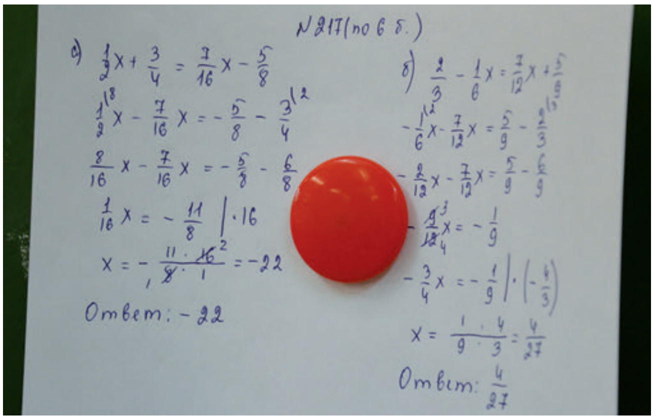
Следующим шагом стала идея о том, что балльная система не должна становиться итогом при изучении темы. Она должна служить допуском к написанию контрольной работы и сопровождать ученика на протяжении изучения всей темы. Следовательно, все учащиеся (проболевшие, прогулявшие, не сдавшие промежуточных работ) обязаны набрать минимальное количество баллов, что возможно только при написании всех формирующих работ, входящих в тему.

Эта часть работы заняла наибольшее количество времени, так как каждое новое предложение апробировалось, обкатывалось каждым участником нашего содружества. Вносились замечания, предложения. Каждая примеряла «задумку» на себя, вносила что-то личное, и одно и то же предложение могло быть протестировано несколько раз и с разных сторон для выявления лучшего варианта. Таким образом выстраивалась единая, устраивающая всех нас система. Активное участие в этом принимали и дети. Они обсуждали удобство пользования таблицами, границы критериев, участвовали в составлении каталогов по темам.

Хотелось бы отметить, что процесс создания контрольно-сопроводительных и дидактических материалов требует много сил и времени, поэтому для его оптимизации полезно в одной параллели работать двум преподавателям. Тогда можно распределить работу по принципу «У меня это получается лучше, значит, это сделаю я» или «Я свободен — я это сделаю». Но выработка основных стратегий все равно происходит коллективно.

За прошедший период каждая из нас смогла апробировать нашу систему в параллелях 5–8-х классов хотя бы однократно.

Огромную благодарность мы выражаем методисту нашей школы Елене Васильевне Живилковой, которая, регулярно посещая наши уроки, вовремя заметила разрозненность элементов зарождающейся системы, смогла соединить их и придать им методически верное направление. Мы продолжаем ее совершенствовать, находимся в творческом поиске и приглашаем всех к сотрудничеству.



АНКЕТИРОВАНИЕ

М. ЧИБИСОВА,
г. Москва

Новые стандарты требуют новых измерительных инструментов. Анкетирование — один из самых простых приемов, который мы часто используем в педагогической практике. Казалось бы, ничего сложного: придумай вопросы и раздавай респондентам. Но на самом деле в составлении анкеты есть множество «подводных камней», о которых важно знать при использовании этого метода.

Когда мы проводим диагностику, мы часто сталкиваемся с явлением, получившим название «социальная желательность». Это склонность давать одобряемые, «правильные» ответы. Например, если спросить учеников в анкете, готовились ли они к контрольной работе, с большой степенью вероятности рискну предположить, что многие ответят утвердительно, даже если в реальности они вообще не открывали ни учебник, ни тетрадь. Это касается не только самих вопросов, но и формулировки возможных ответов. В анкете, предложенной авторами, среди вариантов ответа на вопрос есть такой: «Ничего не делал». Рискну предположить, что мало кто из учеников выберет именно его, причем не потому, что правда стараются, а именно в силу влияния социальной желательности.

При составлении анкеты важно так формулировать вопросы и утверждения, чтобы они звучали нейтрально, как можно меньше провоцируя на социально желательные ответы. Например, с этой точки зрения довольно удачна предложенная авторами формулировка «Старался ли ты для достижения учебного результата за эту четверть...»

Также непросто бывает выбрать, как ученикам отвечать на вопросы. Чаще всего на практике мы выбираем вариант «Да» или «Нет» или вообще предоставляем ученикам самостоятельно решить, как именно ответить. Однако варианты ответа «Если могу» или «Не всегда» очень расплывчаты и мало что позволяют узнать об ученике.

В этой ситуации можно использовать прием, который называется «шкала Лайкерта». В этом случае мы предлагаем оценить степень согласия / несогласия с определенным утверждением по определенной шкале (например, 10-балльной). Причем ответ 10 баллов означает максимальную степень согласия, а 0 — минимальную. В чем преимущества такой формы? Во-первых, полученный ответ становится более содержательным. Предположим, что два разных ученика оценивают свое участие в групповой работе на уроке («Работая в группе, активно участвовал в мозговом штурме, помогал другим найти ответ на вопрос, сам отвечал»). В одном случае они оба пишут «Если мог», а в другом — один ученик оценивает свою работу на 6 баллов из 10, а второй — на 4. Тем самым мы получаем более дифференцированную оценку. Во-вторых, мы можем увидеть динамику ответов одного и того же школьника. Скажем, в начале года он оценивает свою работу на 6, а к концу года — на 8 баллов.

Например, вопрос анкеты «Как ты выполняешь домашнее задание» можно было бы переформулировать таким образом: «Оцени, насколько часто при подготовке домашнего задания ты выполняешь перечисленное, по такой шкале, где 0 — практически никогда, 10 — всегда без исключения».

В педагогической практике анкета может иметь не только диагностическую, но и рефлексивную функцию. Отметим, что авторы включили в анкету вопросы, стимулирующие осмысление учениками достигнутых результатов («Какую учебную цель ты ставил перед собой» и «Добился ли ты целей, поставленных на II четверть») и самостоятельную постановку целей. Такое построение анкеты делает ее полезной не только для педагога, но и для самого ученика.

Некоторые вопросы предложенной авторами анкеты имеют так называемый открытый характер — в них нет заранее заданных вариантов ответа, ученики отвечают на них развернутыми фразами или завершают начатые педагогом предложения. Конечно, обрабатывать такие ответы сложнее. Но часто именно они позволяют получить неожиданные сведения. Не случайно сейчас в психологии активно развивается так называемый качественный подход в исследованиях, смысл которого — не считать баллы, а анализировать и интерпретировать полученные ответы. Такое сочетание качественного и количественного, статистического подхода делает анкету особенно информативной.

Д. ШАРЫГИН,
г. Москва

КРАСИВЫЕ ЗАДАЧИ, КРАСИВЫЕ РЕШЕНИЯ

Игорь Федорович Шарыгин — талантливый математик, влюбленный в геометрию, называвший теорему Пифагора «одним из древнейших памятников мировой культуры». Именно от И.Ф. Шарыгина можно было услышать эпитет «композитор задач», слова, которые в полной мере можно отнести к нему самому.

Этот яркий и талантливый человек воплотил свое отношение к геометрии, к геометрическим задачам, создав один из самых интересных школьных учебников по геометрии.

Цель статьи — представить концепцию учебника И.Ф. Шарыгина «Геометрия. 7–9» через задачный материал.

В аннотации к учебнику говорится, что данный учебник «реализует авторскую наглядно-эмпирическую концепцию построения школьного курса геометрии», при этом «большое внимание уделено методам решения геометрических задач».

Из этих слов можно сделать ложное предположение о некоторой «нестрогости» построения курса геометрии в учебнике, возможно, об отсутствии каких-либо доказательств либо замене их «наглядно-эмпирическим» материалом. Это неверно. Все теоремы и утверждения в учебнике строго доказываются. Более того, именно в этом во многом и заключался подход автора к построению курса, всегда утверждавшего, что геометрия — это единственный предмет в школе, в котором ни одно утверждение не принимается на веру, напротив, каждое утверждение строго доказывается.

В чем же тогда заключается наглядно-эмпирическая концепция автора?

В том, что формальные логические рассуждения в данном курсе заменяются геометрическими, существенно более «наглядными» и понятными школьнику, а также большим вниманием автора к построению чертежей при решении задач.

Часто говорят, что геометрия — это умение правильно рассуждать на неправильном чертеже. Автор придерживался противоположной позиции. Чертеж — это наш помощник при решении задач, и он должен максимально правильно отражать условие задачи. Более того, если в процессе решения открываются новые факты, то чертеж необходимо переделать с их учетом. На чертеж нельзя опираться, но чертеж может помочь нам что-то увидеть, что потом, конечно, нужно будет доказать.

Что абсолютно точно указано в аннотации, так это огромное внимание, уделяемое методам решения геометрических задач. Большинство этих методов чисто геометрические, такие как:

– метод ключевого треугольника;
– метод подобия;
– метод площадей;
– метод вспомогательной окружности (мне доводилось слышать другое название данного метода — «метод Шарыгина»);

и многие другие.

Методы решения представлены в учебнике на примерах доказательств теорем и решений задач. А для лучшего обучения и закрепления навыков их применения служит уникальная, база геометрических задач, включенных в учебник.

В свое время один из задачников И.Ф. Шарыгина вышел с подзаголовком «От учебной задачи к творческой». Во многом именно по этому принципу выстроена и база задач в учебнике. После каждого параграфа можно найти как задачи начального уровня, направленные на закрепление пройденного материала и его дополнение важными геометрическими фактами, так и большое количество творческих, красивых геометрических задач.

Красота геометрической задачи — это и красивый, зачастую «именной», геометрический факт, и красивая формулировка, необычная геометрическая конструкция, наконец, красивое решение, зачастую заменяющее значительно более длинное «классическое». Проиллюстрируем сказанное примерами задач из данного учебника.

Задача 1. Прямая Симсона. (*Задача № 647*) Рассмотрим окружность, описанную около треугольника ABC. Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из произвольной точки описанной окружности на прямые AB, BC и AC, лежат на одной прямой. Эту прямую и называют прямой Симсона.

Решение. Возьмем произвольную точку M на описанной около треугольника ABC окружности и опустим из нее перпендикуляры на прямые AB, BC и AC. Обозначим основания этих перпендикуляров P, R и Q (рис. 1).

Благодаря хорошему чертежу видно, что точки P, Q и R лежат на одной прямой. Возможно на чертеже Симсона «увидел» этот факт. Но, конечно, его еще нужно доказать.

Рассмотрим точки A, P, M и Q. Они лежат на окружности с диаметром AM (в учебнике формулируется и доказывается это утверждение. Значит, углы MPQ и MAQ равны, как опирающиеся на одну дугу (рис. 2).

Аналогично, точки M, P, B и R лежат на одной окружности, откуда следует равенство углов MPR и MBR.

Но угол MAQ (он же угол MAC) и угол MBR (он же угол MBC) равны как опирающиеся на дугу AC описанной около треугольника ABC окружности. Таким образом, равны и углы MPQ и MPR, то есть точки P, Q и R лежат на одной прямой.

Как видите, метод вспомогательной окружности помог найти красивое геометрическое решение данной задачи.

Задача 2. Прямая Эйлера. В тексте учебника доказывается следующий красивый геометрический факт: три замечательные точки треугольника — центр описанной окружности, точка пересечения медиан и точка пересечения высот — лежат на одной прямой (эта прямая называется прямой Эйлера). Приведем его доказательство.

Доказательство. Пусть D — середина стороны BC треугольника ABC, O — центр описанной около него окружности, а H — точка пересечения его высот. Проведем через вершины треугольника ABC прямые, параллельные противоположным сторонам, и обозначим точки их пересечения A_0, B_0 и C_0 (рис. 3).

Треугольник $A_0B_0C_0$ подобен треугольнику ABC с коэффициентом 2 (стороны треугольника ABC являются средними линиями треугольника $A_0B_0C_0$). Кроме того, точка пересечения высот треугольника ABC — точка H — является центром окружности, описанной около треугольника $A_0B_0C_0$ (высоты треугольника ABC являются серединными перпендикулярами к сторонам треугольника $A_0B_0C_0$). Таким образом, точке H треугольника $A_0B_0C_0$ соответствует при данном подобии точка O треугольника ABC, а отрезки AH и OD являются соответственными отрезками в подобных треугольниках. Значит, $AH = 2OD$.

Обозначим через M точку пересечения отрезков AD и OH. Из подобия треугольников AHM и DOM (следует из параллельности AH и OD) следует, что $\frac{AM}{DM} = \frac{AH}{OD} = 2$. Таким образом, точка M делит медиану AD треугольника ABC в отношении 2 : 1, то есть она является точкой пересечения медиан треугольника ABC.

В этом же разделе приводится еще один геометрический факт, связанный с именем Эйлера.

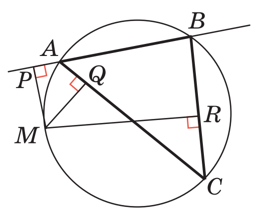


Рис. 1

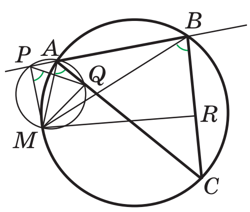


Рис. 2

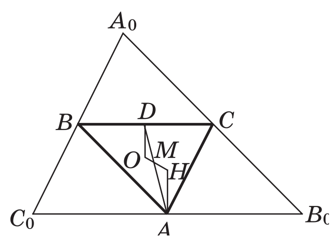


Рис. 3

Задача 3. Формула Эйлера. (*Задача № 1028*) Если R и r — радиусы описанной и вписанной окружностей треугольника, а d — расстояние между их центрами, то $d^2 = R^2 - 2Rr$.

Доказательство. Рассмотрим треугольник ABC. Пусть O — центр его описанной окружности, а J — центр вписанной. Решение этой задачи можно разбить на несколько частей — подзадач (две из них предваряют данную задачу в учебнике, что дает некоторую подсказку для решения этой сложной задачи).

1) Продолжим биссектрису AJ до пересечения с описанной около треугольника окружностью в точке M и проведем диаметр, проходящий через точку J (рис. 4). По свойству хорд окружности, $AJ \cdot JM = (R - d) \cdot (R + d)$.

2) Докажем, что $MJ = MB$ (и равно MC, так как точка M — середина дуги BC). Угол BJM равен полусумме углов A и B треугольника ABC (как внешний угол треугольника ABJ), то есть он равен углу JBM (рис. 5). Отсюда следует необходимое равенство.

3) Из теоремы синусов для треугольника ABM:

$$\frac{BM}{\sin\frac{\angle A}{2}} = 2R = \frac{JM}{\sin\frac{\angle A}{2}}.$$

Из прямоугольного треугольника AJP:

$$AJ = \frac{r}{\sin\frac{\angle A}{2}}.$$

Таким образом, $AJ \cdot JM = 2Rr$.

Приравнивая правые части формул, полученных в пунктах 1–3, получаем требуемое равенство $d^2 = R^2 - 2Rr$.

В предыдущей задаче использовалась важная часть теоремы синусов, о которой почему-то часто забывают, а именно что отношения сторон треугольника к синусам противоположных углов не только равны между собой, но и равны диаметру окружности, описанной около треугольника. Эта часть формулировки теоремы синусов помогает и в решении следующей задачи, красота которой заключается прежде всего в ее формулировке.

Задача 4. Рассмотрим две пересекающиеся окружности радиусов R и r. Проведем прямую, касающуюся каждой из этих окружностей в точках A и B соответственно. Найдите радиус окружности, проходящей через точки A и B и точку пересечения окружностей.

Не правда ли, на первый взгляд в задаче кажется слишком много неопределенности? Ведь и окружности могут пересекаться по-разному. Да и точек пересечения у них две, — какой из треугольников рассматривать. Кажется, что в задаче не хватает каких-то условий, например, расстояния между центрами окружностей или еще чего-нибудь. Оказывается, что все вышеперечисленное не является важным, а решение задачи хоть и связано с «несколько тригонометрической» теоремой синусов, но все же не лишено изящества.

Решение. Обозначим точки пересечения окружностей C и D (рис. 6).

Из теоремы синусов для треугольника ACD:

$$\frac{AC}{\sin\angle ADC} = 2R.$$

Но угол ADC дополняет до $180°$ угол CAB, равный половине дуги CDA. Таким образом,

$$\frac{AC}{\sin\angle CAB} = 2R.$$

Аналогично,

$$\frac{CB}{\sin\angle CBA} = 2r$$

(теорема синусов для треугольника CDB). Перемножив полученные равенства, получаем:

$$\frac{AC \cdot CB}{\sin\angle CAB \cdot \sin\angle CBA} = 4Rr.$$

Из теоремы синусов для треугольника ABC:

$$\frac{AC}{\sin\angle CBA} = \frac{CB}{\sin\angle CAB},$$

что равно диаметру окружности, описанной около треугольника ABC. Таким образом, искомый радиус равен $\sqrt{2Rr}$.

Решение для треугольника ADB абсолютно аналогично. В этом случае необходимые углы не дополняют друг друга до $180°$, а просто равны.

Вернемся к задаче 3. В ее решении использовалось важнейшее свойство подобия, которое приво-

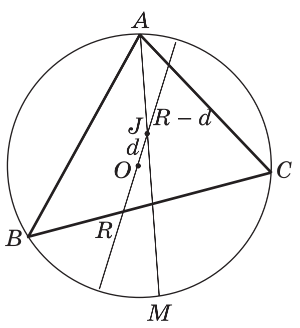


Рис. 4

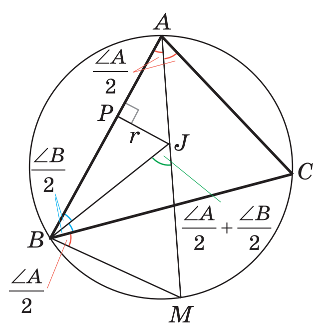


Рис. 5

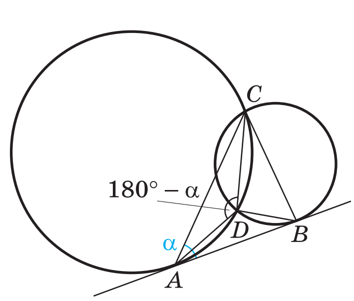


Рис. 6

дится в учебнике: отношение любых двух соответствующих линейных элементов подобных фигур равно коэффициенту подобия. Действительно, ведь при использовании подобия мы привыкли говорить только об отношении соответствующих сторон треугольника, а в решении задачи 2 соответствующими оказались отрезки перпендикуляров, опущенных из центров описанных окружностей на стороны треугольников.

Задача 5. Трапеция $ABCD$ двумя прямыми, параллельными ее основаниям, поделена на три трапеции, в каждую из которых можно вписать окружность. Радиусы наибольшей и наименьшей из окружностей равны R и r соответственно. Найдите радиус средней окружности.

Решение. Обозначим точки пересечения прямых, делящих трапецию, с ее боковыми сторонами как P, Q, T и S соответственно (рис. 7).

Продолжим боковые стороны трапеции до их пересечения в точке F. Треугольники PFQ и TFS подобны. Пусть радиус средней окружности равен x. Окружности радиуса r, вписанной в треугольник PFQ, в треугольнике TFS соответствует окружность радиуса x. А окружности радиуса x, касающейся одной стороны и продолжений двух других сторон треугольника PFQ, в треугольнике TFS соответствует окружность радиуса R, построенная аналогично (данные окружности называются вневписанными, и этот термин, конечно, присутствует в учебнике, но в данном случае это неважно). По свойству подобия

$$\frac{r}{x}=\frac{x}{R}, \quad x=\sqrt{Rr}.$$

Рассмотрим еще две красивые задачи: важнейшее свойство трапеции, приводящееся в учебнике, и необычную задачу на данное свойство.

Задача 6. Важное свойство трапеции: четыре точки — середины оснований трапеции, точка пересечения ее диагоналей и точка пересечения продолжений ее боковых сторон — лежат на одной прямой.

Доказательство. Обозначим точками E и F середины оснований AD и BC трапеции $ABCD$ соответственно, K — точку пересечения ее диагоналей, а M — точку пересечения боковых сторон (рис. 8).

Точки M, E и F лежат на одной прямой (ME и MF — соответствующие медианы в подобных треугольниках, делящие угол при вершине M на соответственно одинаковые части). Кроме того, из подобия треугольников BKC и DKA точки E, K и A также лежат на одной прямой. Значит, все четыре точки лежат на одной прямой.

Задача 7. На плоскости заданы две параллельные прямые и точка M, не лежащая на них. С помощью одной линейки проведите через точку M прямую, параллельную данным прямым.

Решение. Рассмотрим случай, когда точка M не лежит между прямыми. Проведем через нее две прямые, пересекающие данные и высекающие из них трапецию $ABCD$ (рис. 9).

Проведем диагонали трапеции и построим прямую, проходящую через точку M и точку пересечения диагоналей K. По приведенному в задаче 6 свойству трапеции, эта прямая делит основания трапеции пополам (обозначим точками E и F). Построим прямые AE и FC и обозначим точку их пересечения N (рис. 9).

Тогда прямая MN и будет искомой (это следует из того, что, например, для двух пар подобных треугольников, BMC и AMD, ENC и ANF, коэффициенты подобия одинаковы). Таким образом, отношения высот, опущенных из вершин M и N, в каждой из пар подобных треугольников одинаковы, значит, точки M и N находятся на одинаковом расстоянии от каждой из данных параллельных прямых.

Аналогично задача решается и для случая, если точка M находится между двумя данными прямыми (рис. 10).

Приведенными в статье задачами список красивых задач из учебника И.Ф. Шарыгина далеко не исчерпывается, и каждый, кто откроет учебник, найдет в нем задачи по своему вкусу.

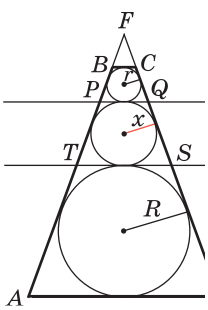


Рис. 7

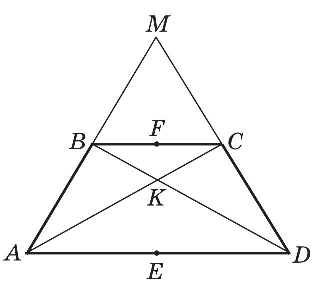


Рис. 8

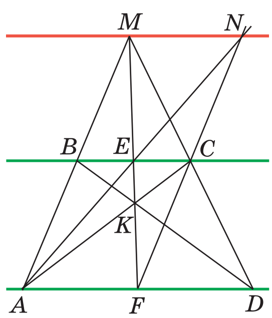


Рис. 9

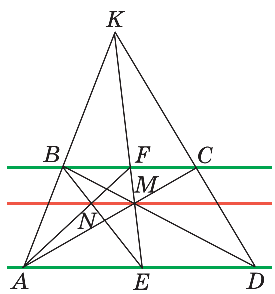


Рис. 10

LECTA

ПЛАТФОРМА LECTA

ЭЛЕКТРОННЫЕ ШКОЛЬНЫЕ УЧЕБНИКИ НА УРОКЕ, ДОМА, В ДОРОГЕ

- Одновременное использование учебников в электронной форме на трех планшетных или стационарных компьютерах
- Использование учебников без подключения к сети Интернет
- Единые заметки и закладки на всех устройствах, которые вы используете
- Более 500 учебников в электронной форме

дрофа · вентана граф
ОБЪЕДИНЕННАЯ ИЗДАТЕЛЬСКАЯ ГРУППА

ВСЕРОССИЙСКИЙ КОНКУРС
«ЭЛЕКТРОННЫЙ УЧЕБНИК НА УРОКЕ»
апрель — октябрь 2016

Подробнее на efu.drofa.ru

КАК ПЕРЕЙТИ НА LECTA ПОЛЬЗОВАТЕЛЯМ ОРФОГРАФ И АЗБУКА?

- Установить приложение LECTA на своем устройстве: www.lecta.ru
- В разделе «Авторизация» пройти процедуру восстановления пароля с зарегестрированным адресом электронной почты в системах Орфограф и Азбука
- Получить на свой адрес электронной почты новый пароль и произвести вход в приложении LECTA

Все учебники, ранее выданные в системах Орфограф и Азбука, сохраняются!

Не получается? Пишите: start@lecta.ru

дрофа · вентана граф

#ПЕРЕХОДИНАЛЕКТА

www.lecta.ru | 8 800 555 46 68 | start@lecta.ru

windows · android · iOS (скоро)

А. БЛИНКОВ,
г. Москва

КРУЖОК ПО ГЕОМЕТРИИ

Занятие 3. Комбинаторная геометрия (примеры и контрпримеры-1)

Для успешного освоения материала этого занятия школьникам достаточно иметь начальные сведения о видах четырехугольников, представление о симметричных точках и подобных треугольниках (в случае, если школьники не знают подобия треугольников, можно изменить условия задач, говоря о треугольниках с соответственно равными углами).

Все задачи этого занятия содержат вопросы вида: «Существует ли…», «Можно ли…», «Верно ли…» и так далее. Для их решения вы должны привести ответ и пример (если ответ «да») либо ответ и контрпример (если ответ «нет»). В некоторых случаях еще надо пояснить, почему созданная вами конструкция действительно существует и удовлетворяет условию задачи. Рассмотрим примеры.

Пример 1. Треугольник разбили на пять треугольников, ему подобных. Может ли исходный треугольник быть отличным от прямоугольного?

Прежде чем обсуждать решение этой задачи, имеет смысл спросить, как разбить требуемым образом: а) равнобедренный прямоугольный треугольник; б) произвольный прямоугольный треугольник.

Решение. Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC с углом $120°$ при вершине. Его можно разбить на пять подобных ему треугольников так, как показано на рисунке 1. Действительно, каждый из образовавшихся треугольников также равнобедренный с углом $120°$ при вершине.

Ответ: может.

Пример 2. На плоскости отметили 8 точек. Каждую пару точек соединили отрезком и к каждому такому отрезку построили серединный перпендикуляр. Могло ли оказаться так, что на каждом построенном перпендикуляре лежат ровно две отмеченные точки?

На первый взгляд кажется, что описанная ситуация невозможна. Полезно обратить внимание школьников на тот факт, что серединный перпендикуляр к отрезку является его осью симметрии, и навести их на мысль, что если описанная конфигурация существует, то расположение точек должно быть максимально симметричным, поэтому наиболее логичным является использование квадрата и равностороннего треугольника.

Решение. Построим квадрат, а вне его на каждой стороне — равносторонний треугольник (рис. 2). Восемь отмеченных точек — их вершины. Отрезки, соединяющие остальные пары точек, проводить не будем (*чтобы не загромождать чертеж*).

Ввиду симметрии, среди указанных в условии образуются отрезки шести видов: 1) и 2) стороны и диагонали квадрата; 3) остальные стороны построенных треугольников; 4), 5) отрезки, соединяющие «дальние» вершины соседних или противолежащих треугольников; 6) отрезки, соединяющие наиболее удаленные друг от друга вершины квадрата и треугольника.

Тогда:

1) серединный перпендикуляр к стороне квадрата содержит ровно две вершины противолежащих треугольников;

2) одна диагональ квадрата является серединным перпендикуляром к другой;

3) серединный перпендикуляр к стороне треугольника (не являющейся стороной квадрата) содержит сторону соседнего треугольника;

4) серединный перпендикуляр к отрезку, соединяющему соседние «дальние» вершины, содержит диагональ квадрата;

5) один отрезок, соединяющий противолежащие «дальние» вершины, является серединным перпендикуляром к другому;

6) для каждого отрезка такого вида найдется другой отрезок того же вида, являющийся к нему серединным перпендикуляром.

Ответ: могло.

Отметим, что равносторонние треугольники на сторонах квадрата можно было строить и внутрь этого квадрата.

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

1. Существует ли шестиугольник, который одним прямолинейным разрезом можно разбить на четыре равных треугольника?

2. Можно ли разрезать неравнобедренный треугольник на две части так, чтобы из этих частей можно было сложить трапецию, у которой две стороны данного треугольника являются: а) основаниями; б) боковыми сторонами?

3. Существует ли равнобедренный треугольник, который можно разбить на три треугольника так, чтобы из любых двух можно было опять сложить равнобедренный треугольник?

4. Каждая диагональ делит четырехугольник на два равнобедренных треугольника. Обязательно ли эти диагонали перпендикулярны?

5. На плоскости отмечено несколько точек (больше трех). Известно, что если стереть любую точку, то оставшиеся точки будут симметричны относительно какой-нибудь прямой. Верно ли, что все отмеченные точки обязательно симметричны относительно какой-нибудь прямой?

6. Каждый из двух равных четырехугольников разрезали на два треугольника. Среди получившихся треугольников нет равных. Могут ли все треугольники быть подобными?

7. Можно ли отметить на плоскости восемь точек и провести: а) 8 прямых; б) 9 прямых (каждую — ровно через две отмеченные точки) так, чтобы по обе стороны от каждой прямой было одинаковое количество точек?

8. Существует ли пятиугольник, который одним прямолинейным разрезом можно разбить на три части так, что из двух частей можно будет сложить третью?

Ответы и решения

1. Существует.

Например, рисунок 3.

2. В обоих случаях — можно.

а) Разрежем треугольник ABC по одной из биссектрис, например, по биссектрисе CD (рис. 4).

Получим треугольники ACD и BCD. Отразим треугольник BCD симметрично относительно серединного перпендикуляра к проведенной биссектрисе и получим треугольник ECD. Так как $\angle ACD = \angle CDE$, то $AC \parallel DE$, то есть $ACED$ — трапеция с основаниями AC и $DE = BC$.

б) Разрежем треугольник ABC по высоте, лежащей внутри треугольника (хотя бы одна такая высота найдется, например, CD, рис. 5). Получим треугольники ACD и BCD. Отразим треугольник BCD симметрично относительно серединного перпендикуляра к проведенной высоте и получим треугольник ECD. Так как $\angle ADC = \angle DCE = 90°$, то $AD \parallel CE$, то есть $ACED$ — трапеция с боковыми сторонами AC и $DE = BC$.

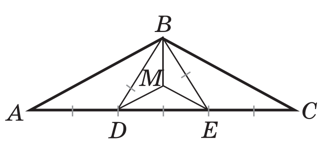


Рис. 1

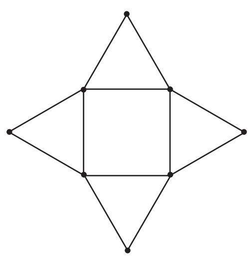


Рис. 2

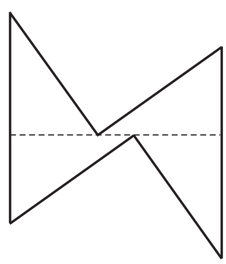


Рис. 3

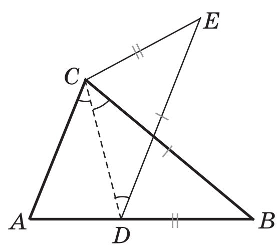


Рис. 4

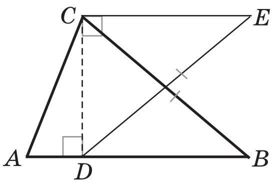


Рис. 5

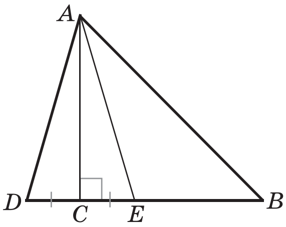


Рис. 6

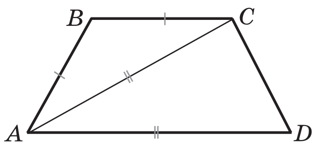


Рис. 7

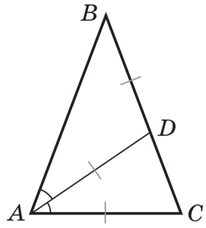


Рис. 8

Комментарий. Отметим, что поскольку данный треугольник неравнобедренный, то в обоих случаях действительно получается трапеция, а не параллелограмм.

3. Существует.

Рассмотрим, например, равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C (рис. 6). На продолжении стороны BC отметим точку D так, чтобы $BD = AB$, после чего на стороне BC отметим точку E так, чтобы $CE = CD$. Треугольник ABD искомый, так как, выбрав любые два из треугольников ACB, ACE и ACD, можно сложить из них равнобедренный треугольник.

4. Нет.

Например, рассмотрим равнобокую трапецию $ABCD$, в которой $AD \parallel BC$, $AB = BC$, $AD = AC$ (рис. 7).

Она, очевидно, удовлетворяет условию. Несложно проверить, что такая трапеция существует: достаточно выбрать угол при основании, равный 72°.

5. Нет.

Способ I. Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC с углом 36° при вершине B и проведем его биссектрису AD (рис. 8). Она разбивает исходный треугольник на два равнобедренных (*счет углов*). Тогда любые три из четырех точек, A, B, C и D, удовлетворяют условию.

Способ II. Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC с углом 108° при вершине B и на стороне AC отметим точку D так, чтобы $CD = CB$ (рис. 9). Тогда $AD = BD$ (*счет углов*), поэтому любые три из четырех точек, A, B, C и D, удовлетворяют условию.

6. Могут.

Рассмотрим, например, невыпуклый четырехугольник $ABCD$, в котором нет равных сторон, острые углы B и D равны, а противолежащие стороны попарно перпендикулярны (рис. 10).

Комментарий. Такой четырехугольник несложно построить, если в остроугольном треугольнике ABD провести высоты BE и DF, которые пересекутся в точке C.

Если его разрезать по прямой BC, то получим треугольники ABE и DCE, а если разрезать по прямой DC — то треугольники ADF и BCF. Эти четыре прямоугольных треугольника подобны, так как у них равны соответствующие острые углы. Равных среди них нет, так как их гипотенузы попарно различны.

Комментарий. В частности, если углы A, B и D равны по 45°, то каждый из получающихся треугольников является прямоугольным и равнобедренным.

7. а), б) можно.

См., например, рисунки 11, *а* и *б*.

8. Да, существует.

Рассмотрим, например, пятиугольник $ABCDE$, составленный из прямоугольника $ABXY$ и равных прямоугольных треугольников CDX и EDY (рис. 12).

Если выбрать размеры пятиугольника так, чтобы

$$AB = CX = EY = 2BX = 2DX = 2DY,$$

и разрезать его по прямой XY, то из прямоугольных треугольников CDX и EDY можно будет сложить прямоугольник $ABXY$.

Комментарий. Существуют и другие примеры.

Занятие 4. Равны ли... ? Существуют ли... ? (примеры и контрпримеры-2)

Для успешного освоения материала этого занятия школьникам достаточно знать признаки равенства треугольников, свойства и признаки равнобедренного треугольника, свойства углов, вписанных в окружность, соответствие между дугами окружности и стягивающими их хордами.

Преподаватели могут обратить внимание на тот факт, что во всех примерах и задачах этого занятия получается отрицательный ответ, но учащимся это заранее сообщать не следует.

На предыдущем занятии рассматривались примеры и контрпримеры к различным геометрическим утверждениям, которые в основном были связаны с разрезанием фигур или с различным расположением точек и прямых. На этом занятии также потребуется строить примеры и контрпримеры к геометрическим утверждениям, но сами утверждения будут другими.

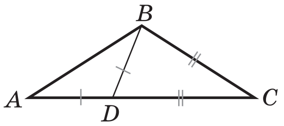


Рис. 9

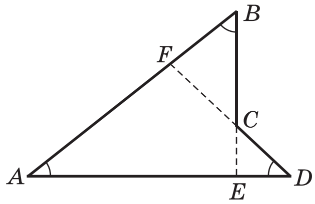


Рис. 10

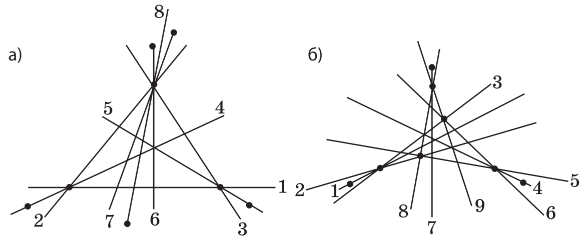


Рис. 11

В них пойдет речь о существовании треугольников или четырехугольников, обладающих определенными свойствами, а также о том, хватает ли того или иного набора соответственно равных элементов для вывода о равенстве этих фигур.

Характерным примером последнего является так называемый ***«четвертый признак» равенства треугольников***. Напомню его суть.

Пример 1. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ соответственно равны: стороны AB и A_1B_1, стороны BC и B_1C_1, углы A и A_1. Обязательно ли эти треугольники равны?

Решение. Вспомним построение треугольника по двум сторонам и углу, противолежащему одной из них. При соответствующем подборе данных эта задача может иметь два решения (рис. 1). Полученные треугольники ABC и ABC_1 не равны, так как один из них остроугольный, а другой — тупоугольный.

Можно считать, что в заданных треугольниках совпадают углы A и A_1, а также стороны AB и A_1B_1, тогда рассмотренное построение приводит к требуемому контрпримеру.

Ответ: не обязательно.

Отметим, что в этом случае сумма углов C и C_1 этих треугольников равна 180°. Это позволяет сформулировать утверждение, которое принято называть «четвертым признаком» равенства треугольников:

Если две стороны одного треугольника соответственно равны двум сторонам другого треугольника и равны соответствующие углы, противолежащие каким-то из этих сторон, то либо эти треугольники равны, либо углы, противолежащие другим данным сторонам, в сумме составляют 180°.

Прежде чем рассматривать следующий пример, полезно вспомнить основное свойство вписанных углов, а также тот факт, что равные дуги окружности стягиваются равными хордами.

Пример 2. В некотором треугольнике биссектрисы двух внутренних углов продолжили до пересечения с описанной окружностью и получили две равные хорды. Обязательно ли этот треугольник равнобедренный?

Решение. Рассмотрим треугольник ABC, отличный от равнобедренного, в котором угол A равен 60°. Пусть D и E — точки пересечения биссектрис, углов B и C соответственно, с окружностью, описанной около треугольника ABC (рис. 2). Докажем, что $BD = CE$.

Действительно, пусть

$$\angle ABC = 2\beta, \angle ACB = 2\gamma,$$

тогда

$$\angle ACD = \angle ABD = \beta, \angle BAE = \angle BCE = \gamma.$$

Заметим, что

$$60° + 2\beta + 2\gamma = 180°, \ \beta + \gamma = 60°.$$

Значит,

$$\angle CAE = 60° + \gamma = \beta + \gamma + \gamma = \angle BCD.$$

Следовательно, равны дуги CAE и BCD, то есть равны и стягивающие их хорды BD и CE.

Ответ: не обязательно.

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

1. Существует ли такой параллелограмм, что все точки попарного пересечения биссектрис его углов лежат вне параллелограмма или на его границе?

2. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ соответственно равны:

а) стороны AB и A_1B_1, высоты, проведенные из вершин B и B_1, медианы, проведенные из вершин C и C_1;

б) углы A и A_1, высоты, проведенные из вершин B и B_1, медианы, проведенные из вершин C и C_1. Обязательно ли эти треугольники равны?

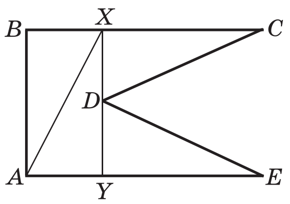


Рис. 12

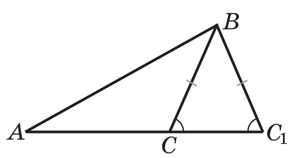


Рис. 1

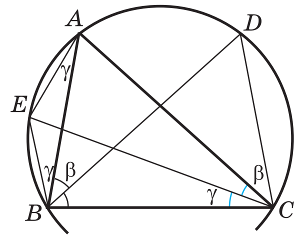


Рис. 2

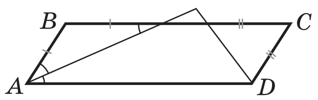


Рис. 3

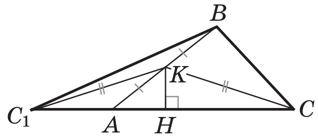


Рис. 4

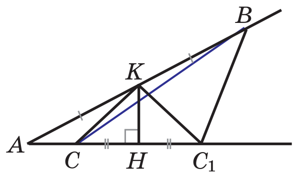


Рис. 5

3. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ равны стороны AB и CD и равны углы A и C. Обязательно ли $ABCD$ — параллелограмм?

4. В ромбе $ABCD$ на сторонах AB и BC отмечены точки E и F соответственно так, что $\angle DEF = \angle DFE$. Верно ли, что $BE = BF$?

5. У двух трапеций соответственно равны углы и диагонали. Верно ли, что такие трапеции равны?

6. Существует ли треугольник, в котором центр вписанной окружности не лежит внутри треугольника, образованного средними линиями данного?

7. Верно ли, что треугольник является равнобедренным, если центр его вписанной окружности одинаково удален от середин двух сторон?

8. Существует ли треугольник, в котором одна из сторон равна какой-то из его высот, другая — какой-то из биссектрис, третья — какой-то из медиан?

Ответы и решения

1. Не существует.

Воспользуемся тем, что ***биссектриса угла параллелограмма отсекает от него равнобедренный треугольник*** (рис. 3).

Способ I. Пусть биссектрисы углов A и D параллелограмма $ABCD$ пересеклись не внутри него, тогда $BC \geq 2AB$. Аналогично, если биссектрисы углов A и B пересеклись не внутри параллелограмма, то $AB = CD \geq 2BC$. Противоречие.

Способ II. Пусть проведена биссектриса острого угла A, тогда высота, проведенная из вершины B в отсеченном треугольнике, является его биссектрисой. Но основание биссектрисы этого треугольника лежит внутри параллелограмма.

2. а), б) не обязательно.

Приведем примеры двух неравных треугольников, для которых выполняются все равенства из условия задачи.

а) Построим равнобедренный треугольник CKC_1 и проведем высоту KH к его основанию (рис. 4). На отрезке C_1H выберем произвольную точку A, проведем луч AK и отложим на нем точку B так, что $BK = AK$.

Таким образом, в неравных треугольниках ABC и ABC_1 сторона AB и высота, проведенная из вершины B, — общие, а медианы CK и C_1K равны.

б) На одной из сторон острого угла A отложим произвольный отрезок AB (рис. 5). Из точки K — середины отрезка AB — опустим перпендикуляр KH на другую сторону угла. Отметим на этой стороне угла точки C и C_1 так, чтобы $HC = HC_1$. Тогда в треугольнике CKC_1 совпадают высота и медиана, поэтому он равнобедренный ($KC = KC_1$). Таким образом, в неравных треугольниках ABC и ABC_1 равны углы BAC и BAC_1, высота, проведенная из вершины B, общая и равны медианы CK и C_1K, проведенные из вершин C и C_1.

3. Не обязательно.

Проведем две равные пересекающиеся окружности с центрами O_1 и O_2 (рис. 6). Пусть BD — их общая хорда. В окружности с центром O_1 на большей дуге BD отметим точку A так, чтобы точка O_1 лежала внутри треугольника ABD.

В окружности с центром O_2 существуют две хорды с концом в точке D, равные AB. Выберем из них DC, которая не параллельна AB (точка O_2 лежит вне треугольника BCD).

Для четырехугольника $ABCD$ выполняются заданные условия, но он не параллелограмм.

Комментарий. Отметим, что треугольники ABD и CDB удовлетворяют условию «четвертого признака» равенства треугольников. Поэтому можно было, не привлекая окружности, сослаться на существование двух неравных треугольников, удовлетворяющих условию задачи и расположенных аналогичным образом.

4. Нет.

Рассмотрим ромб $ABCD$, в котором углы B и D тупые. Так как основания высот ромба, проведенных, например, из вершины D, лежат на сторонах ромба, то найдется окружность с центром D, которая пересечет каждую из сторон AB и BC в двух точках (E, K и F, M соответственно, рис. 7). Тогда $\angle DEF = \angle DFE$ (углы при основании равнобедренного треугольника DEF), но $BE \neq BF$.

Комментарий. Отметим, что в треугольниках DEA и DFC $DA = DC$, $DE = DF$ и $\angle A = \angle C$. Согласно «четвертому признаку» равенства тре-

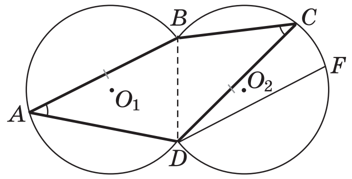


Рис. 6

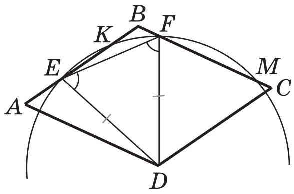


Рис. 7

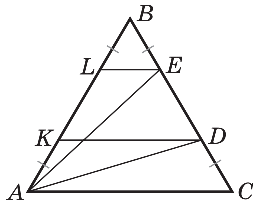


Рис. 8

угольников, отсюда следует, что либо эти треугольники равны, либо

$$\angle DEA + \angle DFC = 180^\circ$$

(что и выполняется в данном случае).

5. Нет.

Способ I. На стороне AB равностороннего треугольника ABC отметим точки K и L, а на стороне CB — точки D и E так, чтобы $AK = BL = CD = BE$ (рис. 8). Тогда $AD = AE$. Значит, равнобокие трапеции $AKDC$ и $ALEC$ искомые.

Способ II. Рассмотрим две равнобокие трапеции $ABCD$ и $KLMN$ с соответственно параллельными сторонами, вписанные в одну и ту же окружность (рис. 9). Их углы соответственно равны, что следует из параллельности сторон, тогда соответственно равны и дуги, на которые опираются равные углы, значит, равны и диагонали трапеций, стягивающие равные дуги.

Комментарий. Равенство диагоналей двух трапеций можно также получить по следствию из теоремы синусов.

6. Не существует.

Пусть центр I вписанной окружности треугольника ABC не лежит внутри треугольника, образованного средними линиями (рис. 10). Тогда расстояние от I до одной из сторон не меньше, чем половина высоты, проведенной к этой стороне. Так как это расстояние является радиусом вписанной окружности, то диаметр этой окружности не меньше высоты. Но это невозможно, так как в этом случае вписанная окружность должна иметь общую точку с прямой m, параллельной этой стороне и проходящей через противолежащую вершину.

7. Нет.

Пусть окружность с центром I вписана в треугольник ABC, K и L — точки ее касания со сторонами $AC = b$ и $BC = a$ соответственно, B_1 и A_1 — середины этих сторон, расположенные в разных полуплоскостях относительно прямой KL (рис. 11). Тогда $AC \neq BC$.

Докажем, что такая ситуация возможна. Равенство отрезков IB_1 и IA_1 равносильно равенству треугольников IKB_1 и ILA_1, которое в свою очередь равносильно тому, что $B_1K = A_1L$. Заметим, что

$$B_1K = B_1C - CK =$$
$$= \frac{b}{2} - (p - c) = \frac{b}{2} - \frac{a+b-c}{2} = \frac{c-a}{2}.$$

Аналогично,

$$A_1L = A_1B - BL = \frac{b-c}{2}.$$

Таким образом, условие задачи выполняется тогда и только тогда, когда $c = \frac{a+b}{2}$ (*треугольник ABC, удовлетворяющий такому условию, называют разностным*).

8. Не существует.

Предположим, что такой треугольник существует. Заметим, что любая высота, любая биссектриса и любая медиана треугольника меньше хотя бы одной из сторон, между которыми она проведена. Действительно, один из углов, который любой из этих отрезков образует со стороной, к которой он проведен, неострый, значит, этот отрезок меньше, чем сторона, лежащая напротив этого угла.

Следовательно, наибольшая сторона треугольника больше любой высоты, биссектрисы и медианы. Противоречие.

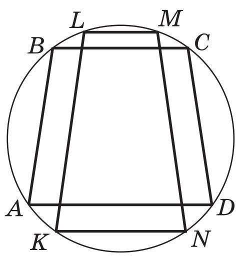


Рис. 9

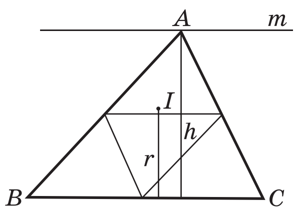


Рис. 10

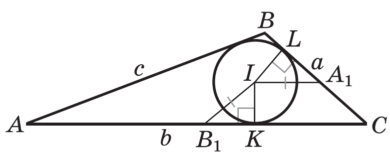


Рис. 11

В. ДЯТЛОВ,
vndyatlov@yandex.ru,
г. Новосибирск

КАК НАУЧИТЬ(СЯ) РЕШАТЬ ЗАДАЧИ ПО ПЛАНИМЕТРИИ

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ОКРУЖНОСТЕЙ

В этой лекции обсудим особенности обработки ситуаций, в которых окружности взаимодействуют между собой — касаются, пересекаются, имеют общую касательную и т.д. Основную роль в решении будут играть фрагменты 28–32 (см. [1]), однако могут использоваться и другие шаблоны. Все условия разобранных примеров взяты из [2, 3].

Пример 1. Сторона правильного треугольника ABC равна a, AD — его высота, опущенная из вершины A. Найти радиус окружности, которая касается стороны AC, высоты AD и описанной около треугольника ABC окружности.

Построение чертежа начнем с окружности, в которую впишем правильный треугольник ABC и проведем в нем высоту из вершины A (рис. 1,*а*). Сделаем заготовку для выбора центра искомой окружности. Он должен лежать на биссектрисе угла CAD. Для проведения такой биссектрисы продолжим высоту AD до пересечения с окружностью и на дуге от полученной точки до точки C отметим середину. Луч, проведенный из A через эту середину, даст биссектрису угла CAD.

На построенной биссектрисе выберем точку E с таким расчетом, чтобы расстояние от нее до описанной окружности было равно расстоянию до прямой AC. Искомую окружность изображать не будем ввиду ненадобности (рис. 1,*б*), а ее радиус обозначим через r.

В чем особенности? Есть сильная особенность, состоящая во внутреннем касании двух окружностей. Такая особенность отмечена на фрагменте 29. Согласно рекомендациям к этому фрагменту, надо обратить внимание на отрезок OE, соединяющий центры окружности, описанной около треугольника, и искомой окружности. Он равен разности их радиусов. Надо искать, в каких треугольниках этот отрезок будет стороной. Легко заметить треугольник AEO, но он не прямоугольный, и в случае его использо-

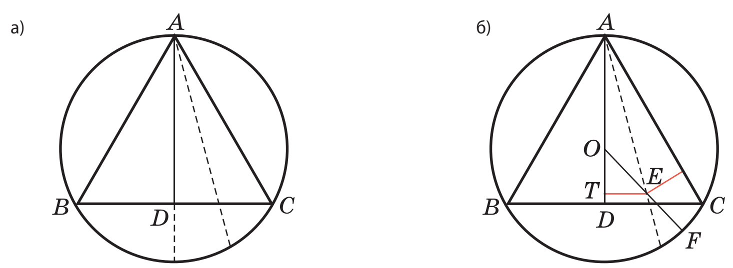


Рис. 1

вания надо будет применять теорему косинусов. Можно заметить прямоугольный треугольник, в котором OE — сторона, если провести радиус искомой окружности в точку T ее касания с высотой AD (см. рис. 1,*б*).

Остановимся на треугольнике EOT, хотя получить результат можно и с использованием треугольника AEO. В треугольнике EOT есть выражения для двух сторон:

$$EO = FO - EF = \frac{a}{\sqrt{3}} - r,\ ET = r,$$

а сторону OT опишем как разность отрезков AT и AO. Выражение для отрезка AT найдем из треугольника AET, в котором $ET = r$ и $\angle EAT = 15°$, а именно

$$AT = r\left(2 + \sqrt{3}\right).$$

Применим теорему Пифагора к треугольнику EOT:

$$EO^2 = ET^2 + OT^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{\sqrt{3}} - r\right)^2 = r^2 + \left(\left(2+\sqrt{3}\right)r - \frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2.$$

Получили уравнение относительно r. Решив его, найдем

$$r = \frac{2a}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}+3}{7+4\sqrt{3}} = \frac{2a}{3}\left(9 - 5\sqrt{3}\right).$$

Пример 2. Прямая l_1 касается окружностей с центрами O_1 и O_2 внешним образом (то есть окружности лежат по одну сторону от прямой l_1), расстояние между точками касания равно 24. Прямая l_2 является внутренней общей касательной (то есть окружности лежат по разные стороны от прямой l_2), а расстояние между точками касания в этом случае равно 7. Наименьшее расстояние между точками окружностей O_1 и O_2 равно 1. Найти радиусы данных окружностей.

Поскольку никаких особых свойств в условии задачи не наблюдается, нарисуем две окружности неподалеку одна от другой и проведем к ним общие внешнюю и внутреннюю касательные (рис. 2). Согласно условию, $AB = 24$, $CD = 7$. Нетрудно показать, что точки, обеспечивающие наименьшее расстояние между точками окружностей, суть точки E и F пересечения отрезка O_1O_2, соединяющего центры, и данных окружностей. По условию, $EF = 1$.

В чем особенности задачи? Находим, что из фрагментов, связанных со взаимодействием двух окружностей, здесь подходят фрагменты 31 и 32. Согласно пожеланиям, относящимся к этим фрагментам, надо через центр одной из окружностей провести прямую до пересечения с радиусом другой, идущим в точку касания. Не загромождая чертеж другим касанием, выполним это пожелание на отдельном рисунке (рис. 3).

Для прямоугольного треугольника O_1KO_2 запишем теорему Пифагора, предварительно введя обозначения r и R для радиусов окружностей и считая $r < R$:

$$(r + R + 1)^2 = 24^2 + (R - r)^2. \qquad (1)$$

Получили уравнение относительно r и R.

Обращаясь к фрагменту 32 и следуя соответствующим рекомендациям, снова проведем через центр одной из окружностей прямую до пересечения с продолжением идущего в точку касания радиуса (рис. 4).

Из прямоугольного треугольника O_1LO_2 по теореме Пифагора имеем

$$(r + R + 1)^2 = 7^2 + (R + r)^2. \qquad (2)$$

Из системы уравнений (1), (2) нетрудно найти значения для радиусов: $\frac{31}{2}$ и $\frac{17}{2}$.

Пример 3. Через вершину правильного треугольника со стороной, равной единице, проведена прямая, которая делит его на два треугольника. Найти радиусы окружностей, вписанных в каждый из получившихся треугольников, если известно, что один из этих радиусов в два раза больше другого.

Сначала изобразим правильный треугольник ABC. Затем на основании AC выберем точку D так, чтобы дальнейшее построение было наиболее согласовано с данными задачи. В треугольниках ABD и BCD отметим центры E и F вписанных в них окружностей и проведем радиусы

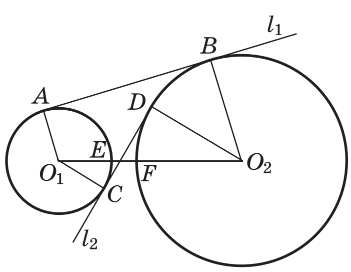


Рис. 2

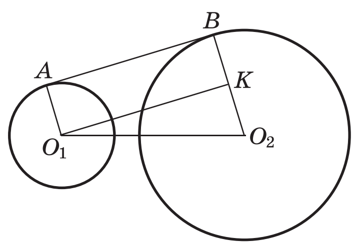


Рис. 3

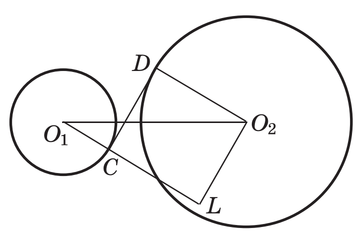


Рис. 4

в точки касания, сами окружности изображать не будем (рис. 5).

В чем особенности? По-видимому, обилие касательных к окружностям приведет нас к фрагменту 25, согласно разъяснениям к которому надо будет проследить за всеми парами равных друг другу отрезков. Обозначив радиус меньшей из окружностей через r, а большей — через $2r$, сразу будем отмечать величины отрезков, которые можно выразить через эти радиусы с учетом свойств фигуры. Рассматривая касания из точки A, заметим, что

$$AP = AQ = r\operatorname{ctg} 30^\circ = r\sqrt{3},$$

из точки C — что

$$CL = CK = 2r\sqrt{3}.$$

Из точки B касаний больше, поэтому и равенств с учетом данных о длине стороны можно найти больше:

$$BK = BM = 1 - 2r\sqrt{3},$$

$$BQ = BN = 1 - r\sqrt{3},$$

$$MN = BN - BM = r\sqrt{3}.$$

По-видимому, все факты касания обработаны. Надо искать другие особенности. Можно заметить появление конфигурации фрагмента 32. Проделав манипуляции, предложенные в пояснениях к этому фрагменту (рис. 6), получим прямоугольный треугольник EFT, в котором два катета выражены через r, тем самым есть выражение через r гипотенузы: $EF = 2\sqrt{3}r$.

Обработаем внешнее касание окружностей и прямой AC, руководствуясь пожеланиями к позиции 31, а именно построив прямоугольный треугольник EFG (рис. 7), в котором

$$FG = r, \quad EG = PL = 1 - 3r\sqrt{3}.$$

Согласно теореме Пифагора, примененной к треугольнику EFG,

$$12r^2 = r^2 + \left(1 - 3r\sqrt{3}\right)^2 \Leftrightarrow r = \frac{3\sqrt{3} \pm \sqrt{11}}{16}.$$

Поскольку в задаче речь идет об окружностях, вписанных в соответствующие треугольники, надо выбрать знак минус перед корнем.

Таким образом,

$$r = \frac{3\sqrt{3} - \sqrt{11}}{16}.$$

Пример 4. Дан сегмент круга радиусом R. Высота сегмента равна h. На высоте сегмента как на диаметре построена окружность. Определить радиус окружности, касающейся построенной окружности, дуги и хорды сегмента ($h < R$).

Поскольку в условии указано, что $h < R$, все события разворачиваются в одной половине круга. Поэтому изобразим верхнюю половину круга и проведем его радиус OA. Изобразим окружность, диаметр которой является частью этого радиуса, и проведем хорду, касающуюся этой окружности в точке E (рис. 8,*а*).

Разберемся с особенностями. В задаче речь идет об окружности, касающейся двух окружностей и отрезка. Обратившись к набору шаблонов, можно найти, что рассматриваемая ситуация отмечена на фрагментах 28 и 29 (есть внешнее и внутреннее касания окружностей). Согласно рекомендациям к этим фрагментам, надо соединять центры и рассматривать полученные отрезки. Не изображая искомой окружности, отметим ее центр Q и проведем соответствующие отрезки (рис. 8,*б*). Обозначим через x длину искомого радиуса и будем изучать, в какие фигуры входят отрезки PQ и QO. Легко заметить, что эти отрезки суть стороны треугольника PQO.

Осталось понять, каким образом учесть касание окружностью данной хорды. По-видимому, надо отразить отрезок QD на отрезке PQ в виде отрезка CE и использовать его длину (рис. 8,*в*). Перпендикуляр CQ к PO приводит к особенности, отраженной на фрагменте 12: общий катет в двух прямоугольных треугольниках. Согласно рекомендациям к указанному фрагменту воспользуемся теоремой Пифагора, выразив общий катет CQ треугольников CPQ и CQO и приравняв полученные выражения. Так как

$$CP = \frac{h}{2} - x, \quad OC = R - h + x,$$

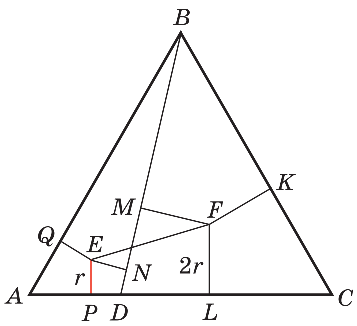


Рис. 5

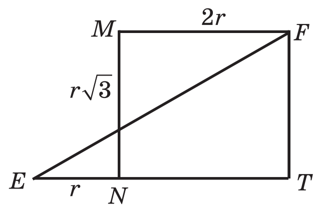


Рис. 6

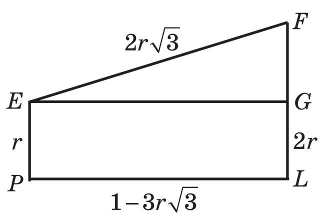


Рис. 7

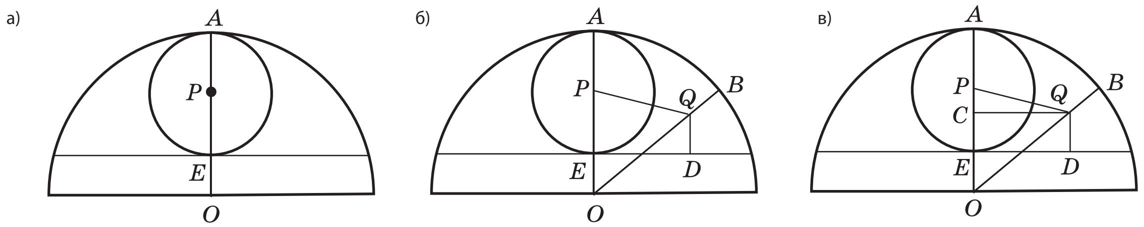


Рис. 8

$$PQ=\frac{h}{2}+x,\quad QO=R-x,$$

имеем

$$\left(\frac{h}{2}+x\right)^2-\left(\frac{h}{2}-x\right)^2=(R-x)-(R-h+x)^2,$$

откуда

$$x=\frac{h(2R-h)}{4R}.$$

Пример 5. Окружности с центрами O_1 и O_2, радиусы которых 5 и 3 соответственно, пересекаются в точках A и B, причем $AB = 4$. Известно, что центр окружности O_2 лежит вне круга O_1. Точка C — середина лежащей в круге O_1 дуги AB окружности O_2. Лучи AC и BC пересекают окружность O_1 в точках M и N. Найти длину отрезка MN.

Изобразим окружности O_1 и O_2, отметим точки A, B, C, проведем лучи AC и BC и получим отрезок MN (рис. 9). Используя равенство вписанных углов, опирающихся на одну дугу, нетрудно доказать, что $MN \parallel AB$. На этапе подготовки рисунка никаких трудностей не появилось.

Каковы особенности? Начнем с того, что есть две пересекающиеся окружности, а значит, надо обратиться к пояснениям, относящимся к позиции 30 набора шаблонов. Соединим центры окружностей с точками A, B и заметим, что получились отрезки известной длины. Кроме того, известен отрезок, соединяющий точки пересечения окружностей (рис. 10). Обратимся к поиску других особенностей. В результате проведения в каждой из окружностей радиусов в точки пересечения появились центральные углы. Поскольку пока нет иного типа углов, связанных со стягивающими отрезок AB дугами в окружностях O_1, O_2, эту особенность не используем, но и упускать из виду не будем.

Одной из особенностей является искомая величина — требуется найти отрезок. Откуда можно найти отрезок MN? Из треугольника, лучше прямоугольного, в котором он — сторона. Но у нас такого треугольника нет и не предвидится. Поэтому надо попробовать искать MN из такого треугольника, в котором искомый отрезок является стороной. Но отрезок MN ни в какой треугольник не входит. Искать его как часть другого отрезка или составлять из других отрезков невозможно. Остается создать какой-либо треугольник, в котором MN окажется стороной. Сделаем это так: к точкам M и N будем мысленно добавлять какую-то точку, соединять с ней M и N и смотреть, насколько информативен получаемый в результате такой процедуры треугольник. Можно добавить точку O_1 и рассматривать треугольник MNO_1, а можно — точку A или B и рассматривать, например, треугольник AMN. В треугольнике MNO_1 достаточно найти хотя бы один угол, но не видно, как этот треугольник связан с данными. В треугольнике AMN, вписанном в окружность O_1, достаточно найти угол MAN и затем воспользоваться теоремой синусов. Этот треугольник хотя бы слегка связан с данными — в нем есть угол AMN, вписанный в окружность O_1 и опирающийся на дугу AN, и это побуждает остановиться на анализе треугольника AMN (см. рис. 10).

В треугольнике AMN для получения MN надо найти угол MAN, однако информация мо-

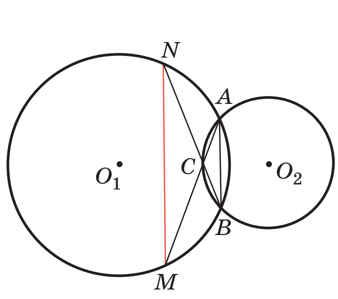


Рис. 9

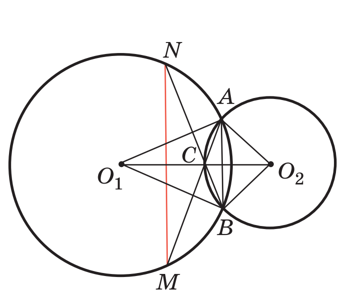


Рис. 10

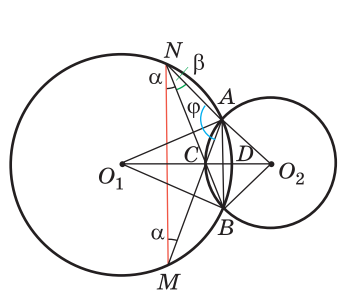


Рис. 11

жет быть об угле NMA, и это намек на то, что надо искать оставшиеся два угла, а затем найти с их помощью $\sin \angle MAN$. Полезно сразу наметить цель, чтобы не сделать лишних действий. Согласно условию, C — середина дуги AB, следовательно, $\angle CAB = \angle ABC$, то есть $\angle BAM = \angle ABN$, значит, дуги AN и BM окружности O_1 равны. Поэтому равны и опирающиеся на них вписанные в окружность O_1 углы (фрагмент 20). Введем обозначения с учетом таких равенств (рис. 11): пусть

$$\angle AMN = \angle ABN = \angle BAM = \angle BNM = \alpha,$$

$$\angle ANB = \frac{1}{2}\angle AO_1B = \beta.$$

Тогда

$$\sin\varphi = \sin(\pi - (2\alpha + \beta)) = \sin(2\alpha + \beta) = \sin 2\alpha \cos\beta + \cos 2\alpha \sin\beta.$$

Осталось проделать техническую работу. Поскольку

$$\angle AO_1B = 2\beta,\ \angle AO_1D = \beta,$$

имеем

$$\sin\beta = \frac{2}{5},\quad \cos\beta = \frac{\sqrt{21}}{5}.$$

Найдем α как угол CAB, вписанный в окружность O_2 и опирающийся на дугу BC. Он вдвое меньше центрального угла AO_2B, стало быть, $\angle BO_2C = 2\alpha$, а меру этого угла легко найти из треугольника BDO_2:

$$\sin 2\alpha = \frac{2}{3},\quad \cos 2\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Собирая полученную информацию, находим

$$\sin\varphi = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{21}}{5} + \frac{\sqrt{5}}{3}\cdot\frac{2}{5} = \frac{2}{15}\left(\sqrt{21} + \sqrt{5}\right).$$

Привлекая теорему синусов применительно к окружности O_1 и треугольнику AMN, получаем:

$$\frac{MN}{\sin\varphi} = 10 \Leftrightarrow MN = \frac{4}{3}\left(\sqrt{21} + \sqrt{5}\right).$$

Пример 6. Около треугольника ABC с равными сторонами AC и BC описана окружность радиусом R. Угол C треугольника равен $\alpha < \frac{\pi}{2}$. Точка E — середина дуги BC описанной окружности. Найти радиус окружности, касающейся внешним образом описанной окружности в точке E и прямой AB.

Нарисуем окружность, проведем отрезок AB, через его середину поднимем перпендикуляр до пересечения с окружностью в точке C и получим равнобедренный треугольник. Через центр O окружности и середину E дуги BC проведем луч и выберем на нем точку D так, чтобы отрезок DE был равен длине перпендикуляра DF из D на прямую AB. Вся имеющаяся информация отражена на рисунке 12,*а*.

Есть сильная особенность — внешнее касание двух окружностей, отраженная на фрагменте 28. Согласно рекомендациям к этому фрагменту, надо изучать, в какие фигуры входит отрезок DO, соединяющий центры этих окружностей. Наличие перпендикуляров OM и DF к одной прямой подсказывает, что в качестве такой фигуры можно взять трапецию $MODF$. Обозначив искомый радиус через r, заметим, что в этой трапеции $DO = r + R$, $DF = r$, отрезок MO можно выразить исходя из данных, и осталось либо связать с данными отрезок FM, либо проследить за углами трапеции.

Появление трапеции побуждает обратиться к связанным с ней фрагментам, и поскольку здесь принимают участие стороны трапеции, наиболее подходит фрагмент 18, в пояснениях к которому говорится, что надо перенести параллельно одну из сторон трапеции. Поднимем сторону FM до точки O и получим отрезок LO, а с ним прямоугольный треугольник DLO (рис. 12,*б*). В этом треугольнике выражена гипотенуза и один из катетов и осталось определиться со вторым катетом или с каким-либо углом.

Мы до сих пор никак не использовали тот факт, что E — середина дуги. Что это дает, что отсюда можно вывести? По крайней мере то, что EO пересекает сторону BC в ее середине (это легко показать), из чего нетрудно вывести, что $DO \perp BC$. Пусть K — середина BC.

Новая информация — снова вопрос об особенностях. Просматривается намек на фрагмент 7 набора шаблонов. Есть прямоугольный треугольник BCM, на его катете CM есть точка O, из которой проведен перпендикуляр OK к гипотенузе BC, есть прямая LO, параллель-

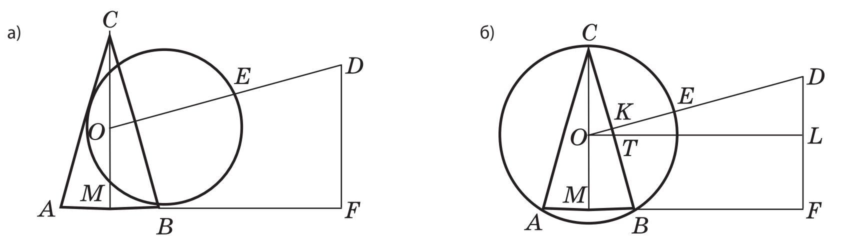


Рис. 12

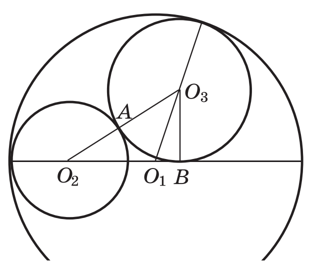


Рис. 13

ная BM. Надо изучать подобие и равенство углов. Ввиду параллельности OT и BM имеем $\angle OTK = \angle CBM$, откуда

$$\angle KOT = \angle BCM = \frac{\alpha}{2}.$$

Обработаем накопленную информацию. Найдем выражение для отрезка FL. Проще всего его найти из прямоугольного треугольника BOM (на рисунке не выделен). Действительно,

$$\angle AOB = 2\alpha,\ \angle BOM = \alpha,\ FL = R\cos\alpha.$$

Осталось записать какое-либо равенство с использованием треугольника DLO для получения уравнения относительно r. Если ориентироваться на теорему Пифагора, то надо, во-первых, выразить LO, а во-вторых, в результате получится квадратичное выражение. Лучше обратиться к углам и записать равенство, отвечающее определению какой-либо из тригонометрических функций. Поскольку в нашем распоряжении есть выражения для отрезков DL и DO, а $\angle DOL = \frac{\alpha}{2}$, имеем:

$$DL = DO\sin\frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow r - R\cos\alpha = (r+R)\sin\frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r = R\frac{\cos\alpha + \sin\frac{\alpha}{2}}{1-\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Пример 7. Две окружности касаются внутренним образом. Третья окружность касается первых двух и их линии центров.

а) Доказать, что периметр треугольника с вершинами в центрах трех окружностей равен диаметру наибольшей из этих окружностей.

б) Найти радиус третьей окружности, если известно, что радиусы первых двух равны 6 и 2.

Подготовим рисунок согласно условиям: изобразим большую окружность, проведем горизонтально ее диаметр и изобразим меньшую окружность, взяв ее центр на имеющемся диаметре. Расположим третью окружность так, чтобы она касалась первых двух окружностей и линии их центров.

В задаче присутствует сильная особенность — касание окружностей (фрагменты 28, 29). В таком случае, при внешнем касании надо соединить центры. Проделав такую операцию, получим отрезок O_2O_3. При внутреннем касании надо через центры провести прямую до точки касания окружностей (рис. 13).

В решении непременно будут использованы отрезки, равные сумме радиусов при внешнем касании и разности радиусов при внутреннем, а именно отрезки O_1O_2, O_1O_3 и O_2O_3. Поскольку их использование неизбежно, введем для них краткие обозначения: пусть R — радиус внешней окружности, r — данной внутренней и x — второй внутренней. Тогда

$$O_1O_2 = R - r,\ O_1O_3 = R - x,\ O_2O_3 = r + x.$$

Приступим к доказательству утверждения из пункта «*а*». Для периметра P треугольника $O_1O_2O_3$ имеем

$$P = O_1O_2 + O_1O_3 + O_2O_3 = $$
$$= R - r + R - x + r + x = 2R,$$

что и требовалось.

Вычислим x, если $R = 6$ и $r = 2$. Для этого соберем информацию о касаниях в одном треугольнике, а именно треугольнике $O_1O_2O_3$, и применим к нему теорему косинусов для получения уравнения относительно x. Требуемый для этой теоремы $\cos\angle O_1O_2O_3$ получим из треугольника BO_2O_3, в котором

$$\sin\angle O_1O_2O_3 = \frac{x}{x+2} \text{ и } \cos\angle O_1O_2O_3 = \frac{2\sqrt{x+1}}{x+2}.$$

По теореме косинусов применительно к треугольнику $O_1O_2O_3$ имеем:

$$(6-x)^2 = (2+x)^2 + 16 - 2\cdot(2+x)\cdot 4\cdot\frac{2\sqrt{x+1}}{x+2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1} = x - 1,$$

откуда $x = 3$.

Пример 8. Окружность с центром O вписана в угол, равный $60°$. Окружность большего радиуса с центром O_1 также вписана в этот угол и проходит через точку O.

а) Доказать, что радиус второй окружности вдвое больше радиуса первой.

б) Найти длину общей хорды этих окружностей, если известно, что радиус первой окружности равен $2\sqrt{15}$.

Построим чертеж, отражающий условия задачи: изобразим угол, в нем меньшую окружность, затем большую. Каковы особенности задачи, связанные с данными? Наличие двух взаимодействующих окружностей (пересекающихся), к тому же вписанных в один и тот же угол (фрагмент 25). В таком случае рекомендуется из вершины угла провести луч через центры окружностей и провести радиусы в точки касания (рис. 14,*а*).

Еще одна особенность — угол величиной $60°$. Этот угол биссектрисой AO делится на углы по $30°$, так что появляются прямоугольные треугольники с углом в $30°$. Это сильная особенность, тем более для прямоугольных треугольников, например, треугольников ABO и ACO_1. Пусть радиус меньшей окружности равен r, а большей — R. Тогда в треугольнике ACO_1 имеем $AO_1 = 2R$. С другой стороны, из треугольника ABO по аналогичной причине получим $AO = 2r$.

$$AO_1 = AO + OO_1 = 2r + R,\ 2r + R = 2R,\ R = 2r.$$

Приступим к вычислению длины отрезка MN (рис. 14,*б*). Откуда найти отрезок? Из треугольника, лучше прямоугольного, в котором данный отрезок является стороной. Однако у нас не просматривается пока никакого треугольника с таким свойством. Будем конструировать треугольники, в которых MN — сторона, добавляя к M и N по одной точке, и смотреть, насколько перспективен получаемый при этом треугольник, заменяя точку, если треугольник недостаточно перспективен. Воспользовавшись рекомендациями к фрагменту 30, добавим к указанным точкам одну из примечательных точек, а именно O_1. Получим треугольник MO_1N и пару равных между собой прямоугольных треугольников MO_1T и NO_1T (рис. 14,*в*).

Из какого треугольника искать MN? Сначала посмотрим на прямоугольный треугольник MO_1T, понимая, что $MN = 2MT$. Каковы перспективы нахождения MT? У нас есть длина отрезка MO_1, это величина радиуса большей окружности, и нужно найти либо еще одну сторону в треугольнике MO_1T, либо угол. Насчет стороны TO_1 — трудно сказать, а про угол можно подумать. Какой угол будем искать? Наверное, угол MO_1T как связанный с радиусами. Откуда найти угол? Из треугольника. Из какого? Ясно, что не из треугольника MO_1T. В какой треугольник еще входит угол MO_1T? В треугольник MOO_1. Проанализируем этот треугольник. В нем

$$MO_1 = R,\ OO_1 = R \text{ и } MO = r.$$

Но мы уже доказали, что $R = 2r$, так что найти угол из равнобедренного треугольника со сторонами r, $2r$ и $2r$ нетрудно. Привлекая, например, теорему косинусов, получим, что

$$\cos\angle MO_1O = \frac{7}{8}.$$

Теперь имеем

$$MT = MO_1 \cdot \sin\angle MO_1T = 2\cdot 4\sqrt{15}\cdot\frac{\sqrt{15}}{8},$$

откуда $MT = 15$.

Пример 9. Две окружности касаются внешним образом в точке K. Прямая касается первой окружности в точке A, а второй — в точке B. Прямая BK пересекает первую окружность в точке D, прямая AK пересекает вторую окружность в точке C.

а) Докажите, что $AD \parallel BC$.

б) Найдите площадь треугольника DKC, если известно, что радиусы окружностей равны 4 и 9.

Как обработать особенность, заключающуюся в касании окружностей? Можно провести отрезок, соединяющий центры окружностей, но у нас никаких сведений насчет центров нет, и от этого шага пока воздержимся, хотя, как отмечено в рекомендациях к шаблону 28, именно этот отрезок должен быть использован в случае касания окружностей, и мы будем иметь это в виду. Можно провести общую касательную и отрабатывать равенства соответствующих отрезков и углов. Судя по тому, что требуется доказать, скорее всего, надо будет проследить за равными углами.

Изобразим касающиеся окружности, их общую касательную AB и проведем через точку K общую касательную к окружностям до пересечения с AB в точке E. Появились касательные к окружности, идущие из одной точки, что отражено на фрагменте 25. Согласно рекомендациям к этому фрагменту, заметим, что $AE = KE = BE$, так что треугольники AEK и BEK равнобедренные. Обозначим через α и β углы при их основаниях (рис. 15). Собирая в треугольнике ABK сумму углов, приходим к равенству

$$2(\alpha + \beta) = 180°,\ \alpha + \beta = 90°.$$

В окружностях есть вписанные углы, а также углы между хордами и касательными, значит, обратим внимание на шаблон 20. В правой окружности угол BCK вписанный, опирающийся на дугу BK, которая стягивается хордой BK, тем самым его мера такая же, как и угла между хордой BK и касательной EB, то есть $\angle BCK = \beta$. Значит, в треугольнике ABC имеем

$$\angle ACB + \angle BAC = \alpha + \beta = 90°,$$

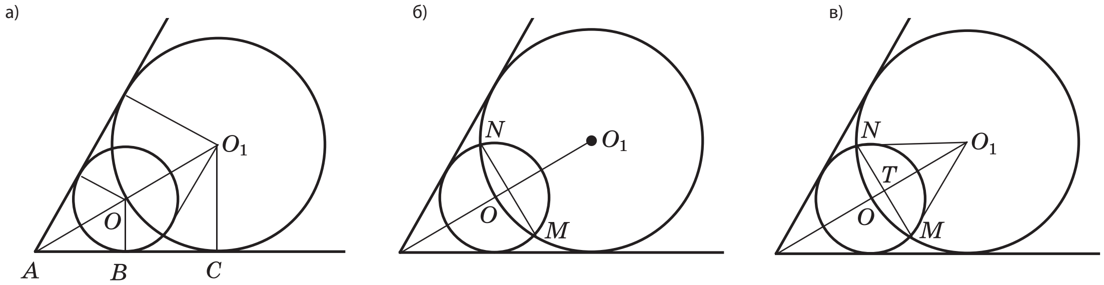


Рис. 14

стало быть, угол CBE прямой. Аналогично можно показать, что угол DAE тоже прямой. Следовательно, AD и BC параллельны как прямые, перпендикулярные к одной прямой. В частности, эти отрезки суть диаметры.

Для нахождения площади треугольника DKC найдем его стороны CK и DK. Треугольник CKD прямоугольный. Введем обозначения: пусть $CK = 4x$, $BK = 4y$. Тогда ввиду легко доказываемого подобия треугольников BCK и DAK с коэффициентом 4 : 9 имеем:

$$AK = 9x,\ DK = 9y.$$

По теореме Пифагора, примененной к треугольнику BCK, будет $x^2 + y^2 = 4$. Для получения еще одного уравнения можно использовать треугольник ABK, но в нем неизвестна сторона AB. Вспомним, что отрезок O_1O_2, соединяющий центры окружностей, равен 13, и из трапеции AO_1O_2B найдем, что $AB = 12$. Теперь из треугольника ABK по теореме Пифагора имеем $81x^2 + 16y^2 = 144$. Из этой системы получаем, что

$$x = \frac{4}{\sqrt{13}}, \quad y = \frac{6}{\sqrt{13}}.$$

Тогда для площади треугольника CDK приходим к выражению

$$\frac{1}{2} \cdot 4x \cdot 9y = \frac{432}{13}.$$

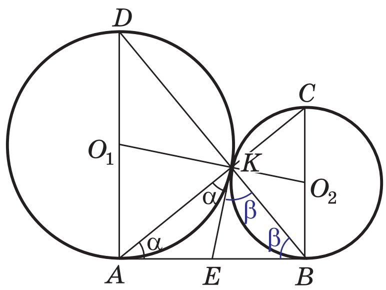


Рис. 15

Упражнения

1. Около равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) с углом B равными 30°, описана окружность S радиусом R, AD — ее диаметр, проведенный из точки A. Найдите радиус окружности, касающейся стороны AC данного треугольника, диаметра AD и окружности S.

2. Сторона квадрата $ABCD$ равна a. Найдите радиус окружности, которая касается стороны AB, диагонали AC и окружности, описанной около квадрата $ABCD$.

3. Прямая l_1 касается окружностей O_1 и O_2 внешним образом (то есть окружности лежат по одну сторону от прямой l_1), расстояние между точками касания равно 12. Прямая l_2 является внутренней общей касательной (то есть окружности лежат по разные стороны от прямой l_2), расстояние между точками касания равно 8. Найдите радиусы окружностей O_1 и O_2, если известно, что радиус одной из них в пять раз больше радиуса другой.

4. К двум окружностям с центрами O_1 и O_2 проведены две внешние общие касательные l_1 и l_2 (то есть такие, для каждой из которых окружности O_1 и O_2 лежат по одну сторону от касательной), а также общая внутренняя касательная l_3 (для которой окружности лежат по разные стороны от нее). Известно, что расстояние между точками касания l_3 с окружностями O_1 и O_2 равно 2 и что l_3 образует с прямыми l_1 и l_2 соответственно углы в 30° и 90°. Найдите радиусы данных окружностей.

5. Окружности O_1 и O_2 радиусами 3 и 4 соответственно пересекаются в точках A и B, причем $AB = 2$. Известно, что центр окружности O_2 лежит вне круга O_1. Точка C — середина лежащей вне круга O_1 дуги AB окружности O_2. Лучи CA и CB пересекают окружность O_1 в точках M и N. Найдите длину отрезка MN.

6. Окружности O_1 и O_2 радиусами 4 и 5 соответственно пересекаются в точках A и B, причем $AB = 6$. Известно, что центр окружности O_2 лежит в круге O_1. Пусть C — середина лежащей в круге O_2 дуги AB окружности O_1. Лучи AC и BC пересекают окружность O_1 в точках M и N. Найдите длину отрезка MN.

Ответы: **1.** $\frac{2}{3}R\left(\sqrt{3}-1\right)$. **2.** $2a\left(3\sqrt{3}-5\right)$. **3.** 2 и 10. **4.** $\sqrt{3}+1$ и $\sqrt{3}-1$. **5.** $\frac{1}{2}\left(\sqrt{15}+\sqrt{8}\right)$. **6.** $\frac{1}{2}\left(12-3\sqrt{7}\right)$.

Литература

1. *Дятлов В.* Как научить(ся) решать задачи по планиметрии: Лекция 1. Методы анализа планиметрических задач // Математика, 2016, № 1. **2.** *Белоносов В.С., Фокин М.В.* Задачи вступительных экзаменов по математике. — Изд. 8-е, испр. и допол. — Новосибирск: Сибирское университетское издательство, 2005. **3.** *Высоцкий И.Р., Захаров П.И., Посицельский С.Е.* и др. ЕГЭ-2015. Математика. 50 вариантов типовых тестовых заданий / под ред. И.В. Ященко. — М.: Экзамен, 2015.

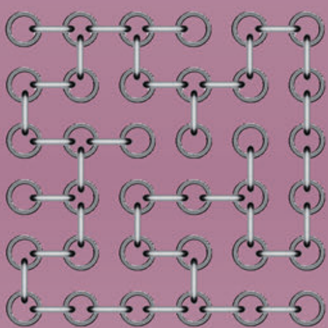
Н. АВИЛОВ,
avilow@rambler.ru,
ст. Егорлыкская, Ростовская обл.,
фото автора

ЦЕПОЧКА КАЛИНИНА

Ведущий рубрики — Николай Иванович Авилов — на фоне своей коллекции головоломок

Головоломку «Цепочка» придумал Анатолий Тимофеевич Калинин, известный в России изобретатель и коллекционер головоломок. Незамысловатая конструкция цепочки из 36 колец, особым образом соединенных друг с другом, позволяет расположить ее в виде квадрата 6×6. Головоломка проста в изготовлении и интересна в решении.

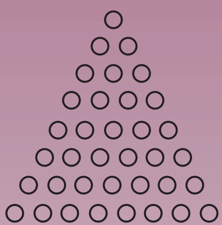
Как же изготовить эту нестандартную цепочку? Кольца можно сделать так. На цилиндрический стержень диаметром 10–15 мм намотаем плотно друг к другу 36 витков проволоки диаметром 1–2 мм. Сняв ее со стержня, разрежем или распилим на отдельные кольца. Соединительные звенья (их тоже 36) — это отрезки такой же проволоки, но длиной 3–4 см, концы которых аккуратно подогнуты круглогубцами. Теперь сцепим кольца и звенья в цепочку согласно рисунку — и головоломка готова, ее можно решать.

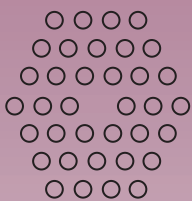


Для демонстрационного варианта головоломки вобьем в квадратный кусок доски 36 маленьких гвоздиков так, чтобы они оказались в узлах квадратной решетки. Укрепим доску с гвоздиками на стене — и остается «повесить» цепочку на эту доску, следуя принципу «Каждому кольцу — свой гвоздик».

Есть еще один вариант. Если вас пригласили на день рождения, то цепочка может стать оригинальным подарком имениннице. Аккуратно изготовленная, она может служить не только головоломкой, но и украшением.

Не в моих правилах сообщать читателям решение головоломки сразу, но здесь я это сделал не только для того, чтобы вы правильно соединили звенья и кольца вместе, но еще и вот почему. Не знаю, зачем автор головоломки выбрал 36 колец. Ведь можно было взять 25 или 49. Но благодаря тому, что он остановился на числе 36, мне удалось расширить возможности головоломки. Число 36 не только квадратное, оно еще и треугольное, поэтому кольца этой цепочки можно расположить в форме равностороннего треугольника. Можно придумать и другие фигуры. Например, цепочку можно «свернуть» в форме правильного шестиугольника без центрального кольца.





Вот теперь решите эти головоломки, но уже без подсказки!

Анатолий Тимофеевич Калинин — известный в России изобретатель и коллекционер головоломок. Он написал несколько книг и множество статей в периодических журналах о головоломках, имеет авторские свидетельства на изобретение головоломок. Человек авторитетный в мире головоломок, участник многих международных встреч любителей и знатоков головоломок, один из организаторов всероссийского клуба ценителей головоломок «Диоген». И по сей день Анатолий Тимофеевич занимается популяризацией головоломок.

К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru (Решение головоломки.)

Порядок поворота орнамента равен 4, орнаментальная плоскость переходит в себя при повороте на 90°. Есть и осевая симметрия: оси симметрии проходят через «веретена», расположенные вертикально. Центры поворота лежат на осях симметрии и в центрах «вертушек».

<table>
<tr><td colspan="3">Порядок поворота равен 4</td></tr>
<tr><td colspan="3">Есть ли осевая симметрия?</td></tr>
<tr><td colspan="2">Да</td><td>Нет</td></tr>
<tr><td colspan="2">Все ли центры поворота лежат на осях симметрии?</td><td rowspan="3">p4</td></tr>
<tr><td>Да</td><td>Нет</td></tr>
<tr><td>p4m</td><td>pg</td></tr>
</table>