Всероссийская олимпиада школьников по математике,

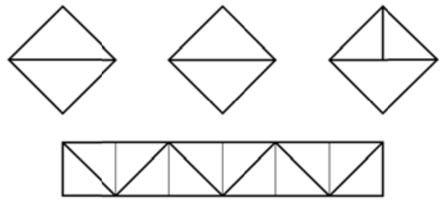
муниципальный этап, 2015 г

7 класс, решения

1. Можно ли прямоугольник размером 1×6 клеток разрезать на 7 частей так, чтобы из них можно было бы сложить 3 равных квадрата? Разрезы можно делать **не только** по сторонам клеток.

Ответ: можно.

Решение. Способ разрезания и сборки показан на рисунке.



Критерии.

Получено верное решение (с примером) – 7 баллов.

Ответ «можно» без примера – 0 баллов.

2. Карлсон может съесть торт за 40 минут, а Малыш – за 1 час 20 минут. Карлсон начал есть торт. Через сколько минут к нему должен присоединиться Малыш, чтобы Малышу досталась пятая часть всего торта?

Ответ: 16 минут.

Решение.

1) $1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$ – такую часть торта должен съесть Карлсон.

2) $40\cdot\frac{4}{5}=32$ – за столько минут Карлсон съест свою часть торта.

3) 1 ч 20 мин = 80 мин.

4) $80\cdot\frac{1}{5}=16$ – за столько минут Малыш съест свою часть торта.

5) $32-16=16$ – через столько минут должен начать есть торт Малыш.

Критерии.
Обоснованно получен верный ответ – 7 баллов.
Правильный ответ без обоснования – 0 баллов.

3. Ученик составил ребус ГОД × Ы = ВЕК, в котором разным буквам соответствуют разные цифры. Найдите все возможные значения буквы «Ы».

Ответ: 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Решение.

Если Ы = 9, то ГОД × Ы > 900; значит, В = 9 – противоречие, так как в этом случае Ы = В.

Если Ы = 8, то Г = 1, ГОД × Ы > 800, значит, В = 9. Тогда есть переход в разряд сотен, и он равен 1. Значит, О = 2 (иначе переход будет больше 1). Итак, ГОД = $\overline{12Д}$, а ВЕК = ГОД × Ы ≥ 120 × 8 = 960. Если Е = 6, то либо Д = 1 (противоречие), либо Д = К = 0 (противоречие). Следовательно, Е = 7. Тогда в разряде десятков переход равен 1, значит, Д = 2 – противоречие. Поэтому Ы не может равняться 8.

Если Ы = 7, то есть пример: 136 × 7 = 952.

Если Ы = 6, то есть пример: 145 × 6 = 870.

Если Ы = 5, то есть пример: 128 × 5 = 640.

Если Ы = 4, то есть пример: 127 × 4 = 508.

Если Ы = 3, то есть пример: 168 × 3 = 504.

Если Ы = 2, то есть пример: 154 × 2 = 308.

Если Ы = 1, то ГОД и ВЕК совпадают, противоречие.

Если Ы = 0, то ВЕК = 0, что невозможно.

Возможны и другие примеры! Проверяющим необходимо внимательно их проверить! В каждом примере все цифры должны быть различными!

Критерии.

Получено полное обоснованное решение с примерами – 7 баллов.

Получены только примеры для случаев 2, 3, 4, 5, 6, 7 без обоснования того, что Ы не равно 8, – 4 балла.

Получены все примеры и есть обоснование того, что Ы не равно 0, 1 и 9, но нет достаточного обоснования того, что Ы не равно 8, – 5 баллов.

Получены все примеры и есть верное обоснование того, что Ы не равно 8, но отсутствует обоснование того, что Ы не равно 0, 1 или 9, – 6 баллов.

Получены 4 или 5 примеров (из 6 необходимых) без обоснования того, что Ы не равно 8, – 3 балла.

Получены 2 или 3 примера без обоснования того, что Ы не равно 8, – 2 балла.

Получен только 1 пример без обоснования того, что Ы не равно 8, – 1 балл.

Получено обоснование того, что Ы не равно 0, 1, 8 и 9, без примеров – 3 балла.

Есть только ответ, что Ы может равняться 2, 3, 4, 5, 6 или 7, без примеров и обоснования – 1 балл.

4. Петя и Вася по очереди достают из коробки конфеты, при этом каждый берёт ровно на 2 конфеты больше или меньше, чем перед этим взял другой. Не брать конфеты из коробки в свою очередь нельзя. Вначале в коробке была 31 конфета. Выигрывает тот игрок, перед ходом которого в коробке останется одна или две конфеты. Первым ходит Петя и ему разрешено первым ходом взять одну или две конфеты. Кто из игроков сможет обеспечить себе выигрыш независимо от ходов противника и как он должен для этого играть?

Ответ: Петя.

Решение.
Если Петя первым ходом возьмёт 2 конфеты, то Вася следующим ходом может взять только 4 и после пары ходов общее количество конфет уменьшится на 6. После этого Петя снова должен взять 2 конфеты и после второй пары ходов общее количество конфет снова уменьшится на 6. Продолжая таким же образом, Петя добьётся того, что после пятой пары ходов количество конфет в коробке станет равно $31 - 5 \cdot 6 = 1$ и очередь ходить будет у Пети. Таким образом, он выиграет. Возможна и другая стратегия.

Критерии.
Получено верное решение – 7 баллов.
Правильный ответ без обоснования или с неверным обоснованием – 0 баллов.

5. Сколько существует десятизначных чисел, у которых сумма любых трёх стоящих рядом цифр чётна?

Ответ: $90 \times 5^8 = 35156250$.

Решение.

Первую цифру можно выбрать 9 способами (0 нельзя использовать). Вторую цифру можно выбрать 10 способами. Сумма этих цифр будет определённой чётности. Тогда третью цифру можно выбрать только 5 способами (либо выбираем чётную цифру, если сумма двух предыдущих чётна, либо нечётную, если сумма двух предыдущих нечётна). Остальные цифры выбираются аналогично по двум предыдущим. По правилу умножения общее число способов будет равно 90×5^8.

Критерии.

Получено верное решение – 7 баллов.

Верный ответ без обоснования – 0 баллов.