**Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике 2012 -2013**

**Задачи для 7-8 классов**

**Задача 1.** Решите числовой ребус $\overbar{abcd}+\overbar{abc}+\overbar{ab}+a=2012$ (запись вида $\overbar{abcd}$ означает число, в десятичной записи которого слева направо следуют цифры $a$, $b$, $c$ и $d$, причём разным буквам могут соответствовать одинаковые цифры). Объясните, как вы нашли неизвестные.

**Ответ:** $a=c=1$, $b=8$, $d=2$.

**Решение.** На первом месте в числе $\overbar{abcd}$ может стоять 1 или 2. Цифра 2 не подходит, так как при сложении получим число не меньшее, чем 2222. Итак, $a=1$. Чтобы сумма всех чисел начиналась с 2, необходимо, чтобы произошёл перенос единицы в разряд тысяч (в разряде единиц складывается 4 числа, из которых одна единица, поэтому в разряд десятков может перейти не больше 2, из разряда десятков в разряд сотен – тоже не больше 2, из разряда сотен в разряд тысяч – не больше 1). Тогда $b$ может равняться 7, 8 или 9 в зависимости от того, какое число перешло в разряд сотен из разряда десятков. Если $b=7$, то в разряд сотен может перейти не больше единицы, тогда не будет переноса в разряд тысяч. Если $b=9$, то в сумме получится число не меньшее, чем 2110. Значит, $b=8$. Тогда $c+d=3$ или $c+d=13$. Во втором случае получаем в разряде десятков (с учётом переноса двойки из разряда единиц в разряд десятков), что $c+8+1+2=11$, тогда $c=0$, $d=13$, противоречие. Поэтому $c+d=3$ и $c+8+1+1=11$, т.е. $c=1$, $d=2$.

**Критерии.** Только ответ без обоснования того, что других решений нет – 5 баллов.

****

**Задача 2.** Сказочное королевство имеет форму фигуры, изображённой на рисунке. Король хочет оставить себе одну десятую всего королевства, а остальную часть разделить на одинаковые по форме и площади части между четырьмя сыновьями (границы между частями не обязательно должны проходить по линиям сетки). Сможет ли он это сделать? Ответ обоснуйте.



**Ответ:** Да. Например, так.

**Задача 3.** На Планете Драконов обитают драконы с одной, двумя и тремя головами. 99 драконов с этой планеты привезли в Московский зоопарк. Вася, посетивший вольер с драконами, насчитал у них 250 голов. Докажите, что среди привезённых драконов есть хотя бы один двухголовый.

**Решение.** Если бы двухголовых драконов не было, то каждый дракон имел бы нечётное количество голов, а поскольку и самих драконов нечётное количество, то суммарное количество голов у них было бы нечётным. Это противоречит условию задачи.

**Задача 4.** Том Сойер и Гек Финн красят каждый свой забор, причём эти заборы одинаковые. Том начал красить на 6 часов позже Гека, и через 3 часа работы он заметил, что покрасил столько же, сколько Геку осталось покрасить. Сколько нужно времени на покраску одного забора Тому, если вдвоём они могут его покрасить за 5 часов?

**Ответ:** 7,5 ч.

**Решение.** Пусть $x$ – часть забора, покрашенная Томом за 3 часа. К этому моменту Гек проработал 9 часов и покрасил часть забора, равную $1-x$. Тогда скорость, с которой красит забор Том, равна $\frac{x}{3}$ забора/час, а скорость Гека – $\frac{1-x}{9}$ забора/час. Их скорость при совместной работе равна $\frac{1}{5}$ забора/час, отсюда получаем уравнение $\frac{x}{3}+\frac{1-x}{9}=\frac{1}{5 }$. Решая его, находим $x=\frac{2}{5}$. Скорость покраски Тома равна $\frac{2}{15}$ забора/час, значит, на весь забор ему нужно $\frac{15}{2}=7,5$ ч.

**Задача 5.** В наборе, состоящем из пяти серебряных и четырёх золотых монет, имеется одна фальшивая, которая выглядит точно так же, как настоящая, но весит меньше настоящей. Все настоящие золотые монеты одинаковые и все настоящие серебряные одинаковые, но настоящая золотая отличается по весу от настоящей серебряной. Неизвестно, выглядит фальшивая монета как золотая или как серебряная. Как найти фальшивую монету за два взвешивания на чашечных весах без гирь?

**Решение.** Положим на каждую чашу весов по две серебряные и одной золотой монете. Если весы в равновесии, то фальшивая монета среди отложенных одной серебряной и двух золотых. Кладём на чаши весов по одной из этих золотых монет. Если они в равновесии, то оставшаяся серебряная – фальшивая, если одна чаша перевесила, значит, фальшивая на другой чаше. Если же после первого взвешивания одна чаша весов перевесила, то фальшивая монета находится среди трёх монет с другой чаши (назовём их подозрительными). Мы кладём на чаши весов по одной подозрительной серебряной монете. Если весы в равновесии, то фальшивая – подозрительная золотая. Если одна чаша перевесила, то фальшивая на другой чаше.