

МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ №2 (761)

ИЗДАЕТСЯ С 1992 г.

mat.1september.ru

Тема номера

Методобъединение

Проверка знаний

Повышение квалификации

Зачем изучать математику?

Между алгеброй и геометрией

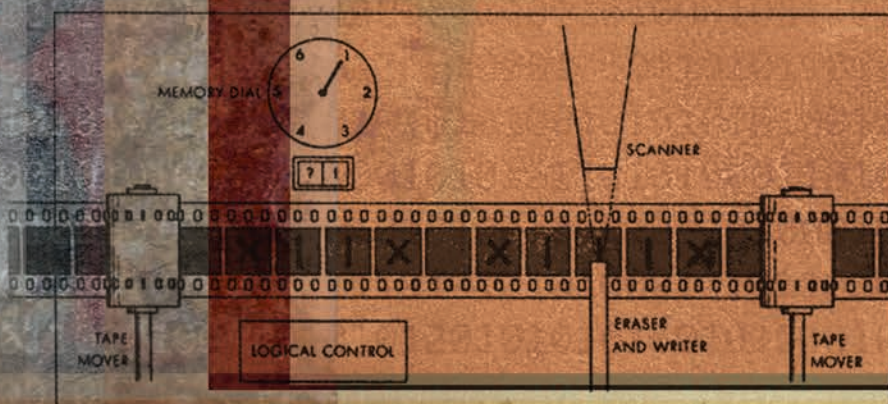
ЕГЭ-2015: профильный уровень

XI Творческий конкурс учителей математики

с. 19

с. 29

с. 46



электронная версия журнала
дополнительные материалы
в Личном кабинете
на сайте
www.1september.ru

КЕМБРИДЖ

музей
Шерлока Холмса

Первое сентября

февраль
2015

МАТЕМАТИКА Подписка на сайте www.1september.ru или по каталогу «Почта России»: 79073 (бумажная версия); 12717 (CD-версия)

ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ДОМ
«ПЕРВОЕ СЕНТЯБРЯ»

Главный редактор:

Артем Соловейчик
(генеральный директор)

Коммерческая деятельность:

Константин Шмарковский
(финансовый директор)

Развитие, IT и координация проектов:

Сергей Островский
(исполнительный директор)

Реклама, конференции и техническое

обеспечение Издательского дома:

Павел Кузнецов

Производство:

Станислав Савельев

Административно-хозяйственное

обеспечение: Андрей Ушков

Педагогический университет:

Валерия Арсланян
(ректор)

ЖУРНАЛЫ ИЗДАТЕЛЬСКОГО ДОМА:

Английский язык – А. Громушкина,

Библиотека в школе – О. Громова,

Биология – Н. Иванова,

География – А. Митрофанов, и.о.

Дошкольное

образование – Д. Тюттерин,

Здоровье детей – Н. Сёмина,

Информатика – С. Островский,

Искусство – О. Волкова,

История – А. Савельев,

Классное руководство

и воспитание школьников – М. Битянова,

Литература – С. Волков,

Математика – Л. Рослова,

Начальная школа – М. Соловейчик,

Немецкий язык – М. Бузова,

ОБЖ – А. Митрофанов,

Русский язык – Л. Гончар,

Спорт в школе – О. Леонтьева,

Технология – А. Митрофанов,

Управление школой – Е. Рачевский,

Физика – Н. Козлова,

Французский язык – Г. Чесновицкая,

Химия – О. Блохина,

Школа для родителей – Л. Печатникова,

Школьный психолог – М. Чибисова.

Иллюстрации: фотобанк Shutterstock

На с. 1 и с. 64 — коллаж из иллюстраций, взятых
с <http://www.bbc.com>,

www.youtube.com,

<http://commons.wikimedia.org>,

<https://theturingcentenary.wordpress.com>

УЧРЕДИТЕЛЬ:

ООО «ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ДОМ

«ПЕРВОЕ СЕНТЯБРЯ»

Зарегистрировано ПИ №ФС77-58424 от 25.06.14
в Роскомнадзоре

Подписано в печать: по графику 10.12.14,
фактически 10.12.14 Заказ №

Отпечатано в ОАО «Первая Образцовая типография»
филиал «Чеховский печатный двор»
ул. Полиграфистов, д. 1, Московская область,
г. Чехов, 142300; Сайт: www.chpd.ru;

E-mail: sales@chpk.ru; факс: 8(496)726-54-10,
8(495)988-63-76

АДРЕС РЕДАКЦИИ И ИЗДАТЕЛЯ:

ул. Киевская, д. 24, Москва, 121165

Телефон/ факс: (499) 249-3138

Отдел рекламы: (499) 249-9870

Сайт: 1september.ru

ИЗДАТЕЛЬСКАЯ ПОДПИСКА:

Телефон: (499) 249-4758

ПОДПИСНЫЕ ИНДЕКСЫ:

Почта России: бумажная версия – 79073;

CD версия – 12717

МАТЕМАТИКА | февраль | 2015

ТЕМА НОМЕРА: ЗАЧЕМ ИЗУЧАТЬ МАТЕМАТИКУ?

В НОМЕРЕ

МЕТОДОБЪЕДИНЕНИЕ /
ВОСПИТАНИЕ

4 Пять причин изучать
математику
С. Мугаллимова

6 Лоскутное одеяло
воспитательной системы
И. Каминская

8 Ох, уж эта математика
А. Буркова

10 Какова польза
от обучения математике?
У. Терстон

МЕТОДОБЪЕДИНЕНИЕ /
НАШ ПРОЕКТ:
«РАЗБОР УРОКА»

12 Тема урока: «Решение
неравенств второй степени
с одной переменной»
Л. Миронова,
М. Садовникова

ПРОВЕРКА ЗНАНИЙ /
ЭКЗАМЕНЫ

19 Между алгеброй и геометрией
О. Дмитриев

29 ЕГЭ-2015: профильный
уровень
С. Шестаков,
И. Яценко

ПОСЛЕ УРОКА / ОЛИМПИАДЫ,
КОНКУРСЫ, ТУРНИРЫ

41 Турнир Архимеда. Московская
математическая регата. 8 класс
А. Блинков, А. Банникова,
А. Иванищук, Н. Наконечный,
П. Чулков

ПОВЫШЕНИЕ КВАЛИФИКАЦИИ /
ПРОВЕРЬ СЕБЯ

46 XI Творческий конкурс
учителей математики
А. Блинков, Е. Гладкова,
Е. Горская, В. Гуровиц,
А. Иванищук, И. Раскина,
А. Хачатурян, Д. Шноль

ПОВЫШЕНИЕ КВАЛИФИКАЦИИ /
ЛЕКТОРИЙ

56 Решаем неравенства. *Продолжение*
С. Шестаков

В КЛАДОВОЙ ГОЛОВОЛОМОК

61 Куб-осьминог
Н. Авилов

В БИБЛИОТЕКЕ / КНИЖНАЯ ПОЛКА

62 Не бояться равносильных
переходов!

63 Пора готовиться к ОГЭ

64 В КАБИНЕТЕ МАТЕМАТИКИ /
НА СТЕНД
Кембридж

К материалам, обозначенным этим символом, есть дополнительные материалы в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru

ОБЛАЧНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ ОТ ИЗДАТЕЛЬСКОГО ДОМА «ПЕРВОЕ СЕНТЯБРЯ»

УВАЖАЕМЫЕ ПОДПИСЧИКИ БУМАЖНОЙ ВЕРСИИ ЖУРНАЛА!

Дополнительные материалы к номеру и электронная
версия журнала находятся в вашем Личном кабинете
на сайте www.1september.ru
Для доступа к материалам воспользуйтесь,
пожалуйста, кодом доступа, вложенным в № 1.
Срок действия кода с 1 января по 30 июня 2015 года.

Для активации кода:

- Зайдите на сайт www.1september.ru
- Откройте Личный кабинет (зарегистрируйтесь)
- Введите код доступа и выберите свое издание

Справки: podpiska@1september.ru или через службу
поддержки на портале «Первого сентября»

МАТЕМАТИКА. ПЕРВОЕ СЕНТЯБРЯ

Методический журнал для учителей математики

Издается с 1992 г.

Выходит один раз в месяц

РЕДАКЦИЯ:

Главный редактор: Л. Рослова

Отв. секретарь: Т. Черкавская

Редакторы: П. Камаев, О. Макарова, И. Коган

Дизайн макета: И. Лукьянов. Дизайн обложки: Э. Лурье

Корректор: Л. Громова. Верстка: Л. Кукушкина

Распространяется
по подписке

Цена свободная
Тираж 20 000 экз.

Тел. редакции: (499) 249-3460

E-mail: mat@1september.ru

Сайт: mat.1september.ru

РАДИКАЛЬНОЕ ЛЕЧЕНИЕ КАК СЛЕДСТВИЕ ДИАГНОЗА

Л. РОСЛОВА

■ Свершилось — началось проведение национальных исследований качества образования (НИКО). Это означает, что ЕГЭ теряет статус единственного инструмента для диагностики состояния школьного образования. Давно пора свергнуть его с пьедестала, сняв с него эту противоестественную и оказавшуюся вредной для общества функцию. Аттестационной достаточно.

Прошла и первая конференция по итогам НИКО. Сами по себе результаты меня не удивили. Во многом они подтвердили то, что и так было уже известно по результатам ГИА-ЕГЭ и PISA-TIMSS. Менее подготовленным читателям советую посетить сайт <http://www.eduniko.ru>, на котором обещано публиковать результаты и аналитику. Главный вывод: «имеется четко выраженная тенденция ухудшения математической подготовки от 5-го к 7-му классу».

Но я обратила внимание на один из результатов, полученных по результатам анкетирования. Вдумайтесь в цифры. Почти 85% пятиклассников и около 60% семиклассников говорят, что математика им нравится. И это при снижении успешности! Более 70% учащихся 5–7-х классов изучают математику потому, что считают, что она нужна им для жизни, а около 60% считают, что она будет нужна им для будущей профессии. Согласитесь, что мотивация очень высокая, однако за два года — от 5-го класса к 7-му — мотивация снижается на 25%. И здесь та же негативная тенденция!

Полученные результаты превращают в факт то, что в целом-то ощущает каждый учитель: основная потеря желания и старания в изучении математики происходит у учащихся на рубеже 6–7-х классов. В чем же проблема? Или это естественный процесс взросления? Не думаю, ведь понимание важности и значимости математики для будущего остается в их сознании. Значит, надо с выявленным негативным явлением бороться. Необходимо вскрыть проблему, дойти до самых истоков, найти и распространить положительный опыт. И силами учителя здесь не справиться. Проблема шире его зоны ответственности. Нужны и целенаправленные и на разных уровнях исследования системы образования, углубляющие полученные выводы, и советы психологов, и обновление программ и методик в русле идей стандарта. В общем, вслед за проведенным исследованием надо в заинтересованном сообществе организовывать реальное обсуждение проблемы. А не чаты в Интернете, имитирующие бурную деятельность по обсуждению, что стало практикой в последнее время, взять хотя бы эрзац-обсуждение примерных программ. И нельзя откладывать все это в долгий ящик. Здесь вспоминается великая фраза из «Покровских ворот»: «Резать к чертовой матери, не дожидаясь перитонита!»

С. МУГАЛЛИМОВА,
пос. Белый Яр, Тюменская обл.



Фото А. Гилевой



Фото Л. Егоровой



Фото Ю. Хаматовой



Фото И. Третьяк



Фото О. Петровой

Литература

1. Жохов А.Л. Мировоззрение: становление и развитие, воспитание через образование и культуру: Монография. — Архангельск: ННОУ «Институт управление»; Ярославль: Ярославский филиал ИУ, 2007.
2. Локхард П. Плач математика // Математика в школе, 2014, № 2—3.
3. Успенский В.А. Апология математики. — СПб.: Амфора, 2010.
4. Хазанкин, Р.Г. Какая красивая задача! // Народное образование, 1990, № 9.

ПЯТЬ ПРИЧИН ИЗУЧАТЬ МАТЕМАТИКУ

■ «Зачем вообще надо изучать эту математику?»

Знаком ли вам этот вопрос? Уверена, да. Его задают дети, разочаровываясь временами в своих силах. Его задают и родители наших учеников в более мягкой форме («Зачем вообще нужны эти производные?»). Его задают и государственные мужи, дипломатично добавляя «в таком объеме».

Пытаясь ответить на этот вопрос, апеллируя к великому М.В. Ломоносову, мол, математика ум в порядок приводит, мы часто наталкиваемся на возражения-контрпримеры — мощнейшее оружие самих же математиков! — из жизни знаменитых людей, оказавшихся не совсем успешными учениками, особенно в изучении той самой математики. Оказывается, можно стать успешным, не зная доказательства теоремы Пифагора и даже не помня этой самой теоремы.

То, что математика может пригодиться в жизни, тоже не самый убедительный аргумент. Знакомы ли вам люди, которые на улице или где-то еще вынуждены решать логарифмическое уравнение? Большинству из наших знакомых приходится разве что в магазине считать сдачу или помнить курс валюты, идя в обменный пункт. И так далее и тому подобное...

Однако любой спорящий согласится, что, говоря об образовании личности, представляя образованного, культурного человека, нельзя представить его без математического образования. И редко кто поспорит, что «математики — ужасно умные люди». Каковы же те разумные доводы, те причины, которые требуют от общества обязательного математического образования для всех?

Причина первая — «игра в математику». Все мы играем в разные игры, в серьезные и не очень: в шахматы, в дочки-матери, в бизнес, в науку... Разные сферы жизни по большому счету — это разные игры, со своими правилами, которые надо освоить. Почему бы не попробовать поиграть и в потрясающе трудную и оттого весьма азартную игру — математику?

Игра эта прекрасно описана в эссе П. Локхарда «Плач математика» [2]. Проходит она под лозунгом «Математика для математики», поскольку является самодостаточным явлением. К тому же игра эта, будучи игрой интеллектуальной, имеет не только свои объекты (математические понятия), правила (теоремы, свойства), процедуры (доказательства и опровержения), хитрости (методы и эвристики). У нее есть своя история, и даже в ней случались революции, есть свои герои — выдающиеся математики, свой язык и свои символы.

В.А. Успенский [3] проводит параллель между математикой и искусством, показывая, насколько схожи между собой эти грани человеческой культуры. Не потому ли многие, «поигравшие» в математику, чувствуют в ней особую силу и притягательность? И не потому ли она интересна малышам?

Причина вторая — «практическая польза». Значение математики как науки определено ее ролью в жизни общества и отдельной личности, предполагает реализацию внутри- и межпредметных связей математики: способность к решению бытовых, житейских задач (вычислительный аспект), использование статистических данных («Числа

правят миром»!), способность к применению математического аппарата в различных областях науки (математическое моделирование). Математика идет в ногу со временем, с другими науками, обогащает их и сама обогащается за их счет. Поэтому успешность в самых различных областях зависит и от того, насколько хорошо освоена связь профессиональной области с математическим аппаратом. Математика ищет экономные и при этом обоснованные решения в любой области, к тому же помогая перевести специфические проблемы на язык вычислительной техники.

Не принижая роли математики до уровня «обслуживающей науки», можно показать ее практическую целесообразность так, как это показано в увлекательнейших книгах Я.И. Перельмана «Живая математика», «Геометрия на воздухе» и других.

Причина третья — «развитие ума». Чтобы быть здоровым, находиться в хорошей форме, нужно регулярно заниматься физическими упражнениями, вести здоровый образ жизни. Тогда организм будет исправно служить тебе многие годы. А что нужно для того, чтобы твой мозг работал исправно? Надо владеть различными способами мышления (аналитическим, пространственным, критическим, творческим), обладать развитой устной и письменной речью, быть готовым к решению нестандартных проблем, иметь хорошую скорость мыслительных операций. Какая область, как не математика, может научить всему этому? Как пишет В.А. Успенский [3], цель обучения математике — расширение психологии учащегося, привитие ему дисциплины мышления: умение отличать достоверное от недостоверного, смысл от бессмыслицы, понятное от непонятного.

Причина четвертая — «любовь к мудрости», философия. Как мы познаем мир во всем его многообразии, как формируется наше мировоззрение? Видимо, через крупницы опыта, через разнообразие понятий и отражающих их терминов. Видимо, в соединении, в синтезе всего, с чем нам приходится сталкиваться. Как пишет А.Л. Жохов [1], именно под воздействием естественных наук (и в частности, математики) зародились элементы научно-мировоззренческого потенциала.

Математика открывает нам мир через призму специфического знания: систему математических понятий (бесконечное, невозможное, протяженность, мера, истинное и ложное и т.п.), цепочки логических выводов, приобщение к языку формул и обозначений, к графическим моделям. Все это позволяет формировать эвристические представления о закономерностях окружающего мира. В процессе обучения математике происходит воспитание ее средствами морально-этических норм и общечеловеческих культурных ценностей (честность, объективность, настойчивость, трудолюбие).

Причина пятая — «чувство прекрасного». У знаменитого педагога-новатора Р.Г. Хазанкина есть статья «Какая красивая задача!» ([4]). В математике есть своя красота. И красота эта — в поиске.

Можно всю жизнь слушать музыку сомнительного качества, смотреть одинаковые шоу, а можно пойти в театр и рыдать, испытывая при этом счастье. Так и в обучении математике можно постоянно выполнять однотипные упражнения, не задумываясь о тонкостях решения, а можно ходить две недели с «зубной болью» от одной нерешенной задачи, и решив ее, испытать колоссальное удовольствие! Победа мысли, победа духа — что может быть более вдохновляющим?

В отечественной педагогике есть замечательные традиции организации внеурочной деятельности, работы с одаренными детьми, проведения различных мероприятий математической направленности. Написано много книг о нестандартных методах решения задач. Как говорится, больше задач красивых и разных! Но многим ли удастся почувствовать, что значит «красивая задача»?

Итак, автор перечислил пять направлений в обучении математике: предметное, утилитарно-прикладное, психолого-педагогическое, философско-культурное, познавательно-эстетическое. Заметим, что акцент в обучении делается на предметном направлении. Именно «игра в математику» на уроках математики в школе — в ее крайних проявлениях — породила множество поклонников и даже фанатов аксиоматического изложения геометрии в школе.

Компетентностный подход актуализирует утилитарно-прикладное направление. Соображения практической ценности и применимости математического знания (безусловно, разумные) не должны, однако, оттеснять необходимость обучения методам логического вывода и доказательствам. Но и пренебрегать ими не следует. Не потому ли мы часто слышим упреки коллег-нематематиков в том, что, изучая математику в объеме, большем среди всех других школьных предметов, дети так и не могут определить диагональ в спортзале?

Деятельностный подход рассматривает преимущественно психолого-педагогическое направление. Видимо, философско-культурное направление должно превалировать с позиций культуросообразного обучения, аксиологического подхода.

Какое направление главное, какая причина самая-самая? Можно ли получить полноценное математическое образование, пренебрегая каким-то из рассмотренных аспектов? Обучая подрастающего человека, уважаемый читатель, говорим ли мы ему об этих причинах? Помним ли мы о них в бумажной круговерти поурочных планов, технологических карт урока, планов воспитательной работы, в цейтноте подготовки к разным ЕГЭ? И почему нам задают этот вопрос: «Зачем вообще надо изучать эту математику?»

И. КАМИНСКАЯ,
Воронежская обл.

Автор статьи — лауреат
Всероссийского конкурса
«Учитель года России-2014».
Предлагаемое вниманию
читателей эссе написано в качестве
конкурсного задания

ТЕМА НОМЕРА: ЗАЧЕМ ИЗУЧАТЬ МАТЕМАТИКУ?

МЕТОДОБЪЕДИНЕНИЕ / ВОСПИТАНИЕ



ЛОСКУТНОЕ ОДЕЯЛО ВОСПИТАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

Самое трудное — познать самого себя, самое
легкое — давать советы другим.

Фалес

■ Иногда в жизни наступает такой момент, когда требуется остановиться, замереть и подумать: кто я? на верном ли пути? зачем делаю то, что делаю? Конкурс для меня — это прежде всего не состязание, а попытка личностного самоопределения.

Я — учитель. И на этом месте проживаю множество ролей, овладеваю множеством профессий.

Я — учитель-транслятор знаний. Некий старейшина племени, передающий опыт предыдущих поколений следующим.

Я — учитель-доктор. Диагностирую пробелы, назначаю консультации, купирую приступы лени, прививаю культуру интеллектуального труда.

Я — учитель-лицедей. Каждый урок — маленький спектакль с точно выписанным сценарием, продуманной режиссурой, не всегда благодарными зрителями и всегда долгим послевкусием.

Я — учитель-эквилибрист. Все время балансирую на грани между стремлением сохранить традиции и необходимостью инноваций, между вдохновенным творчеством (своим и учеников) и достижением обязательных результатов обучения, между индивидуальным подходом и стандартами образования.

Я — учитель-строитель. Закладываю фундамент развития каждого ребенка и государства в целом, налаживаю коммуникации между всеми участниками процесса обучения. Прорубаю окна в неведомое и открываю двери в будущее. Из маленьких кирпичиков складываю здание научного познания.

Эти маленькие кирпичики не дают мне покоя. Образ чего-то большого, глобального, складывающегося из маленьких деталей, — такой видится мне педагогика. Что это? Пазл? Скорее, пэчворк.

Я люблю рукодельничать и последнее время увлекаюсь шитьем лоскутных одеял. Удивительно, как много педагогического смысла можно вложить в каждое изделие.

Придумать такое одеяло несложно. В ход идет все: лоскутки и обрезки, старое любимое платье и специально купленная модная ткань. И, планируя урок, мы также выбираем лучшее из насыщенного банка учебных материалов, из огромного арсенала форм, методов и приемов обучения. Главное, разрозненные вначале фрагменты расположить в логически правильном порядке, грамотно чередовать различные способы действий, красной нитью пустить главную мысль урока — и тогда получится целостное учебное занятие. Как подобрать нужный лоскуток? Основной критерий — органичность и гармония. И поэтому еще до начала работы нужно ясно представлять себе, каким мы хотим видеть будущее изделие.

Чему я хочу и чему могу научить своих детей? Может быть, красоте? Ведь математика — самая красивая наука. В ней прекрасно все: стройность логических умозаключений, строгость алгебраических формул, изящество доказательств, геометрическая выразительность, богатство приложений. А невозможные объекты Эшера? А фракталы? А замечательные свойства и философичность ленты Мёбиуса? И пусть кому-то из детей трудно даются математические преобразования, решение уравнений и дифференцирование, но если они смогли удивиться необычному приему счета, получить эстетическое удовольствие от выполненного построения, то встреча с математикой прошла для них не зря.

Я хочу научить познанию. Роджер Бэкон говорил, что «тот, кто не знает математики, не может узнать никакой другой науки и даже не может обнаружить своего невежества». Богатство идей, универсальность методов, умение анализировать ситуацию, делать невероятные предположения, умение определять границы своего незнания — вот что дает математика. А геометрия — это вообще единственный школьный предмет, демонстрирующий аксиоматическое построение научной теории.

Я хочу научить мысли. Это не многовариантную геометрическую задачу мы исследуем, а учимся понимать, что любое явление нужно рассматривать с разных сторон, что необходимо предвидеть и прогнозировать разные направления вектора развития ситуации, что, получив некий результат, нельзя останавливаться, а нужно продолжать исследование дальше. Логика и критичность, внимание и наблюдательность, сравнение и выбор лучшего требуются не только на уроках математики.

Я хочу научить общению. Это не задачу с параметром мы решили несколькими способами, а осознали, что на любую проблему может быть несколько точек зрения, что обсуждение методов решения и выбор наилучшего из них — это и есть умение договариваться, это и есть толерантность. Математика — это один из языков описания действительности, и, овладев этим языком, мы усиливаем способность к эффективной коммуникации.

Я хочу научить ответственности. Доведенное до конца решение, устранение малейших вычислительных недочетов, аккуратность в построении чертежа помогают в развитии самодисциплины. Математика — наука строгая и объективная. Умения логически и критически мыслить, искать подвох в представленной информации, аргументировать свою точку зрения и не принимать на веру чужую формируют в том числе человека с четкими нравственными принципами и установками. Такой человек скорее всего не пойдет на поводу у сомнительных политических партий, не станет

жертвой интернет-мошенников и организаторов финансовых пирамид, его не заманят в секты и террористические организации.

Я хочу научить доброте. Решая вместе какую-нибудь заковыристую задачку, мы учимся слышать каждого, а анализируя чье-то решение, признаем за другим человеком право на ошибку.

Вокруг нас так много злобы, мир просто сошел с ума. Религиозные распри, войны, санкции... Может быть, пора вернуть добро хотя бы в школу? Мне кажется, для этого в школу надо вернуть ребенка. Складывается такое ощущение, что школа наша существует для Инструкции, Отчета, Результатов ЕГЭ, Репутации учебного заведения, Ремонта...

А ведь главное действующее лицо в школе — это Ученик. Вот этот конкретный ученик, со своими достоинствами и недостатками, с феноменальной памятью или заиканием, с невероятными математическими способностями или абсолютной функциональной неграмотностью, дисциплинированный или непослушный. Катя с белыми бантами, ангельскими голубыми глазами и пятерками в дневнике. Саша — половина пуговиц отсутствует, дужка очков примотана проволокой, руки в саже (порох изобретал), больше пяти минут высидеть на уроке не способен, победитель всех математических олимпиад. Карен — дико задавлен мамиными требованиями; умница, а слово боится вымолвить. Женя — патологический лентяй. Даша — гиперответственная девочка. Такие разные дети! Действующие лица... Личности!

...Я сажусь к столу и начинаю подбирать к каждому лоскутку ткани пряжу своего особенного цвета и фактуры (индивидуальный и личностно ориентированный подход), обвязываю лоскутки крючком (инновационное использование традиционных методов), скрепляю их белой ниткой (объединение разных элементов в единое целое) — и новое одеяло готово! Чем не модель воспитательной системы!

Я работаю в школе больше 20 лет. Столько всего изменилось за это время! Технологии развиваются с необычайной скоростью; количество информации, обрушившейся на головы детей, возросло в разы; сами дети изменились: они стали более открытыми, более любознательными, не боятся задавать вопросы и высказывать свое мнение, они по-другому воспринимают и перерабатывают информацию. Конечно, и мы меняемся вслед за временем и за детьми. Но все-таки в школе должно быть что-то неизменяемое, что обеспечивает комфорт, уют и защиту.

Помните, каким уютным было старенькое бабушкино лоскутное одеяло? И пока такое одеяло есть у каждого учителя, нашему образованию ничего не грозит. Потому что это — Любовь.

А. БУРКОВА,
г. Москва

ОХ, УЖ ЭТА МАТЕМАТИКА

МЕТОДОБЪЕДИНЕНИЕ / ВОСПИТАНИЕ
ТЕМА НОМЕРА: ЗАЧЕМ ИЗУЧАТЬ МАТЕМАТИКУ?



Николай Ключев стремительно ворвался в свою комнату и швырнул портфель под стол.

— Надо запретить такой трудный предмет в школе, как математика, — думал он, роясь в шкафу и забрасывая в сумку бутсы и свою футбольную форму. — Эта математика жизнь портит!

Сегодня утром у Коли была контрольная по математике и он получил по ней двойку.

Игорь Сергеевич, их учитель математики, предложил тем, кто хочет исправить плохие отметки, прийти к нему после шести часов переписывать. А потом добавил, что это касается особенно тех, кто почувствует неблагоприятные последствия отсутствия математических знаний на себе.

— Не надо быть астрологом, чтобы предвидеть отрицательные последствия двойки по контрольной по математике, — думал Колька. — Мама с папой будут недовольны. И папа, наверно, скажет, чтобы на выходных я занимался математикой, и не возьмет меня на футбольный матч, на который он собирался с друзьями, на настоящий большой стадион.

— Что же делать? — продолжал размышлять Колька, не находя ответа. — Ладно, приду домой после футбола и подумаю.

Он забросил сумку за плечо и поспешил на автобус, так как еще немного, и он опоздает на матч против команды из соседней школы... Двери автобуса закрылись, и автобус отъехал от остановки.

Однако вместо того, чтобы ехать быстро, автобус поехал медленно-медленно. Даже прохожие шли быстрее.

Колька какое-то время молчал, а потом, когда увидел, что малыш четырех лет уверенно обогнал автобус, направился к водителю.

— Можно ли побыстрее? — попросил он.

— Да я жму на газ со всей силой, — обернулся водитель к Кольке, — но автобус все равно медленно двигается.

— Поломался что ли?

— Поломали, — тяжело вздохнул водитель, — какой-то Николай Ключев.

— Это как? — удивился Колька.

— Он так решил задачу про автобус сегодня.

— Какую задачу?

— От дома до футбольного поля автобус едет 6 минут и за это время проходит 6 километров. Какова скорость автобуса? Ключев поделил $6 : 6$, получилось 1 км/ч, поэтому мы так медленно едем.

— Но это же правильно, — недоуменно начал оправдываться Коля. — Для того, чтобы определить скорость, нужно расстояние разделить на время.

— Так-то так, только Ключев искал скорость в километрах в час, а делил километры на минуты.

— И что?

— А то, что если делить, то надо делить одинаковые величины. Если делишь конфеты, дели их на конфеты, а не на мороженое.

— Да, — припомнил Николай, — учитель математики нам что-то говорил об этом. Дайте подумать: автобус идет 6 минут; 6 минут — это 0,1 часа. Теперь делим километры на время: $6 : 0,1 = 60$ км/ч.

И автобус рванул вперед.

Колька выскочил из автобуса на нужной ему остановке — и бегом к футбольному полю. А там уже начался матч. Но что это?

На стороне противника играет 11 игроков, а на стороне их команды — 5 игроков.

— Где остальные? — удивленно повернулся Колька к тренеру.

— Это я хотел у тебя спросить, — возмутился тренер. — Судья не выпустил часть наших игроков на поле, сказав, что это было твое указание.

Колька рванул к судье:

— В команде должно быть 11 игроков, почему выпустили только 5?

Судья невозмутимо посмотрел на Кольку:

— Так ведь сегодня ты так решил эту задачу. В футбол хотели играть 55 мальчиков, а отобрали только каждого пятого. Сколько человек отобрали играть в футбол? Ты написал, что 5.

— Так, — Колька задумался, — желающих было 55; отобрали каждого пятого. То есть $55 : 5 = 11$.

Судья почесал затылок:

— Значит, сколько я еще человек должен выпустить на поле?

— 11 минус 5 равно 6, — прокричал Колька.

— Сейчас будут.

Николай выскочил на поле спасти команду.

— Давай, давай, веди мяч, — про себя твердил Колька. — Пас!

И он направил мяч в то место, где обычно находился на тренировках Димка Макеев, но увидел боковым зрением, что никто его мяч не подхватил. Колька удивленно завертел головой. На месте Димки стоял какой-то старичок, но в Димкиной форме.

— Ты кто? — спросил Николай.

— Я Димка Макеев.

— Неправда! Димке 10 лет, а вам намного больше.

— Так это ты дал мне 85 лет! Помнишь задачу на контрольной: бабушке Димы было 85 лет, дедушке на 5 лет больше, а Дима был в 9 раз моложе дедушки. Сколько лет было Диме? И ты написал в ответе 90. Поэтому мне теперь бегать очень трудно — видишь, какой я дряхлый.

— Как я мог такое написать? — удивился Колька. — Дай подумать. Бабушке 85 лет, дедушка на 5 лет ее старше, то есть дедушке 90 лет, а Дима в 9 раз моложе, то есть разделить 90 на 9, получим 10! Тебе должно быть 10 лет! Я, наверно, неаккуратно делал задачу, до конца не дочитал условие.

Глядь, а рядом уже нормальный Димка бежит — его сверстник.

— Быстрей за мячом, а то мы проиграем в пух и прах!

Ребята бросились за мячом. И уже казалось: один удар — и мяч влетит в ворота, как вдруг все резко потемнело и ничего не стало видно, налетел резкий ветер, раздались раскаты грома, за сверкали молнии и пошел дождь.

— Ну и погода, — простонал Колька.

— По-моему, это наша сегодняшняя задача по математике! — прокричал сквозь ветер Дима. — Помнишь ее? «На третьем уроке, который начался в 10:20, учительница предупредила ребят, что через 510 минут после уроков, которые заканчиваются в 13:40, ожидается сильный ливень с резкими порывами ветра. Когда начнется этот дождь?» Что ты написал?

— Я написал, что в 15:30.

— Так сейчас и есть 15:30.

— Кошмар! — воскликнул Колька, а потом задумался на минутку: — Так я эту задачу также неправильно решил. Дай вспомнить. Урок начался в 10:20, через 510 минут должен был начаться дождь. Я тогда решил так: $1020 + 510 = 1530$, то есть 15:30.

— Неправильно, — возмутился Димка. — Дождь должен был начаться через 510 минут после окончания всех уроков в 13:40, а не после начала третьего урока. Кроме того, ты складывал часы и минуты, а вначале надо перевести в единую систему измерения: все в часы или все в минуты.

— Давай в часы, их легче считать. Итак, в каждом часе 60 минут, 510 минут разделить на 60 минут, получим 8 часов 30 минут. Уроки заканчиваются в 13:40, прибавляем 8 часов 30 минут, получаем 22:10.

Тут тучи разошлись, ветер и дождь прекратились и вновь засияло солнце.

— Ох, уж эта математика, — вздохнул Колька и ногой послал мяч в ворота противника.

— Гол!!!

А вечером после 6 часов пошел Николай к Игорю Сергеевичу переписывать контрольную по математике. Там он встретил Кирилла Тяпкина, у которого не заладились сегодня его любимые компьютерные игры, а также Матвея Горченко, который взмыленный прибежал из магазина и со вздохом сообщил, что все продавцы сегодня очень странные, как будто бы и не учили математику в школе.

И Николай понял, что, оказывается, математика очень важна. Без нее ни в футбол погонять невозможно, ни в магазин сходить, ни даже в компьютерные игры поиграть.

КАКОВА ПОЛЬЗА ОТ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ?

Полный текст статьи: <http://mi.mathnet.ru/mp2113>У. ТЕРСТОН,
США

В 1990 году в американском журнале «Notices of the AMS» вышла статья Уильяма Терстона «Об обучении математике». Автор статьи — американский математик, тополог, получивший в 1982 г. премию Филдса за глубокий и оригинальный вклад в математику, профессор математики и информатики в Корнелльском университете — разбирает существовавшие на тот момент в США проблемы школьного математического образования, разбирается в их причинах, а где-то и предлагает выходы. Соображения автора настолько актуальны, что кажется порой, что написано про нашу страну и настоящее время. Мы знакомим читателей лишь с небольшим фрагментом, переключаясь с темой нашего номера.

Математика в жизни. Во-первых, математика — это важный инструмент в повседневной жизни. Предположим, что вы не торопясь проходите мимо магазинной полки, на которой стоит кофе в пакетах по 13 унций и в жестяных банках по 16 унций; можете ли вы, переработав эту информацию вкупе с ценами и яркими объявлениями «Содержит на 23% больше!», решить, кофе в какой упаковке обойдется вам дешевле, и все это — пока вы идете вдоль полки? Когда вы покупаете новую машину, вы хорошо понимаете все хитрости с кредитом и скидками? Собственно, если бы большинство покупателей это понимало, то хитрости бы и не применялись.

Во-вторых, умение математически рассуждать важно для того, чтобы быть сознательным гражданином. Можете ли вы разобраться в суждениях об опасности для здоровья различных веществ и решить, насколько эти суждения обоснованы? Когда вы слушаете выступление политического деятеля, способны ли вы проанализировать, насколько разумны приводимые им статистические данные и что они на самом деле доказывают? Сможете ли вы правильно провести измерения и вычисления, необходимые для простых плотницких и швейных работ? Умеете ли вы планировать расходы? Если вы видите в газете или журнале диаграмму, понимаете ли вы, что она означает, и знакомы ли вы с нехитрыми уловками, позволяющими скрыть или подчеркнуть какое-то обстоятельство?

В-третьих, математика — инструмент, необходимый на множестве рабочих мест в нашем все более сложном и технологическом обществе. Она используется повсюду и по-всякому. Зубной техник, мастер по ремонту факсов, менеджер в «Макдональдсе», риэлтор, консультант по компьютерам, бухгалтер, банкир, няня, адвокат — все они для выполнения своих профессиональных обязанностей нуждаются в каком-то овладении математикой.

В-четвертых, математика интенсивно используется (порой неправильно) в большинстве отраслей науки. Многое в теоретической науке является на самом деле математикой. Многие ученые пользу-

ются широко распространенными компьютерными программами для статистических вычислений, что облегчает им вычисления. Однако же те, кто использует такие программы, зачастую нетвердо понимают, на чем основана работа этих программ, и часто применяют статистические тесты и графическое представление результатов некорректным образом.

Математика жива. Для меня эти практические применения важны, но вторичны. Математика обладает замечательной красотой, силой и стройностью в большей степени, чем можно было бы ожидать. Она все время меняется; на каждом новом повороте мы обнаруживаем новые прекрасные и неожиданные связи с тем, что нам уже знакомо. Перемены в математике быстры — потому что математические рассуждения базируются на очень прочной основе.

Математика похожа на полет фантазии — но такой, при котором фантастическое становится реальным, и оказывается, что оно было всегда. Занятия математикой похожи на фантазирование, но на самом деле они состоят в том, что наше восприятие обостряется, в результате чего мы открываем закономерности, присутствующие вокруг нас. В своей знаменитой книге «Апология математики» Г.Х. Харди воздал хвалу теории чисел за чистоту, абстрактность и полную невозможность применить ее на практике — а сейчас этот же раздел математики применяется очень широко, особенно в задачах кодирования и декодирования.

Мой опыт математика убеждает меня в том, что цели эстетические и практические оказываются для математика очень близки друг к другу. Наше чувство прекрасного влечет нас к той математике, что обладает глубиной и стройностью. А затем сами по себе глубина и красота математических конструкций приводят к тому, что они неожиданным образом проявляются в других частях математики и в окружающем мире.

Поделиться с учащимися прелестью и интеллектуальным опытом математики, дать возможность полетать там, где мы ранее ходили пешком, — вот в чем цель математического образования.

МАТЕМАТИКА. ПОДГОТОВКА К ОГЭ (ГИА) 2015

Издательство



«ЭКЗАМЕН»

представляет

● ОГЭ (ГИА) 2015. Типовые тестовые задания

Возможность активной подготовки
к обязательному экзамену по математике.
Полностью соответствуют действующей демоверсии **ОГЭ 2015**.

Созданы реальными разработчиками вариантов **ОГЭ 2015**.



Под редакцией И. В. Яценко



Под редакцией И. В. Яценко



Подробная информация на сайте издательства «ЭКЗАМЕН» – ЭКЗАМЕН.РФ

Отдел оптовых продаж: тел.: (495) 641-00-30; e-mail: sale@examen.biz

Отдел комплектации школ г. Москвы и Московской области:
тел.: 8-905-773-43-83; e-mail: rodionov@examen.biz

При заказе учебных пособий на класс бесплатная доставка по г. Москве.

Интернет-магазины: www.labirint.ru; www.ozon.ru; www.umlit.ru

1 Презентация публикуется в авторской редакции

2

3

алгебра 9 класс

Решение неравенств второй степени с одной переменной

Вопросы

Что называется квадратным трехчленом?

Что надо сделать, чтобы найти корни квадратного трехчлена?

Как называется функция вида $y = ax^2 + bx + c$?

Что является графиком квадратичной функции?

От чего зависит направление ветвей параболы?

Ответы

$ax^2 + bx + c$

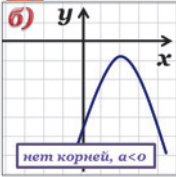
квадратный трехчлен приравнять к нулю и решить уравнение $ax^2 + bx + c = 0$

квадратичная

парабола

от коэффициента a , если $a > 0$, то ветви вверх, если $a < 0$, то ветви вниз

Что можно сказать о количестве корней уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ и знаке коэффициента a , если график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ расположен следующим образом:

б)  нет корней, $a < 0$

в)  нет корней

Сегодня в рубрике «Разбор урока» мы обсуждаем урок в 9-м классе.

Урок проводят учителя математики и информатики

Лилия Николаевна МИРОНОВА и Марина Георгиевна САДОВНИКОВА, г. Ленск, Республика Саха (Якутия)

Урок обсуждают: главный редактор журнала «Математика»

Лариса Олеговна РОСЛОВА,

редакторы — Петр Михайлович КАМАЕВ и

Ольга Васильевна МАКАРОВА

9 класс

ТЕМА УРОКА: «РЕШЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ»

Цели урока:

образовательные: ввести понятие неравенства второй степени с одной переменной, дать определение; познакомить с алгоритмом решения неравенств на основе свойств квадратичной функции; сформировать умение решать неравенства данного вида;

развивающие: выработать умения анализировать, выделять главное, сравнивать, обобщать; формировать графическую и функциональную культуру учащихся;

воспитательные: воспитывать прилежание, трудолюбие, аккуратность, точность.

Оборудование: медиапроектор, экран, презентация к уроку.

Учебник: Макарычев Ю.Н. и др. Алгебра, 9 класс. — М.: Просвещение.

План урока

1. Организационный момент (1 минута).
2. Актуализация знаний (7 минут).
3. Изучение нового материала (15 минут).
4. Закрепление изученного материала (17 минут).
5. Постановка домашнего задания (2 минуты).
6. Подведение итогов урока (3 минуты).

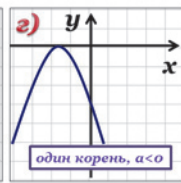
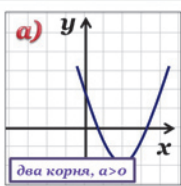
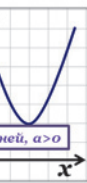


К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru (презентация в авторской редакции)

12

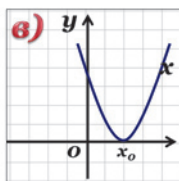
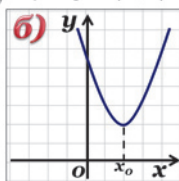
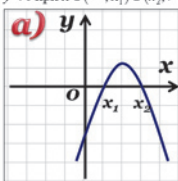
МАТЕМАТИКА | февраль | 2015

естее
= 0
ли
ции
ен



Назовите промежутки знакопостоянства функции $y = ax^2 + bx + c$, если её график расположен указанным способом:

$y > 0$ при $x \in (x_1; x_2)$
 $y < 0$ при $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$
 $y > 0$ при $x \in (-\infty; +\infty)$
 $y > 0$ при $x \in (-\infty; x_0) \cup (x_0; +\infty)$



Определение:

Неравенства вида $ax^2 + bx + c > 0$ и $ax^2 + bx + c < 0$, где x - переменная, a, b, c - некоторые числа, причем $a \neq 0$, называют **неравенствами второй степени с одной переменной**.

Ход урока

Организационный момент

Учитель. Сегодня на уроке нам предстоит знакомство с неравенствами второй степени с одной переменной. А находить решения неравенств мы будем, опираясь на уже известные нам понятия и свойства из темы «Квадратичная функция».

Актуализация знаний

Работа по готовым рисункам.

Слайд 2 (Ответы появляются по щелчку мыши на вопросе.)

1. Что называется квадратным трехчленом?
2. Что надо сделать, чтобы найти корни квадратного трехчлена?
3. Как называется функция вида $y = ax^2 + bx + c$?
4. Что является графиком квадратичной функции?
5. От чего зависит направление ветвей параболы?

Слайд 3 (Ответы появляются по щелчку мыши на кнопке с соответствующим заданием.)

Что можно сказать о количестве корней уравнения и знаке коэффициента a , если график квадратичной функции расположен следующим образом...

Слайд 4 (Ответы появляются по щелчку мыши на кнопке с заданием.)

Назовите промежутки знакопостоянства функции, если ее график расположен указанным способом.

Изучение нового материала

Учитель. Используя промежутки знакопостоянства функции, мы с вами будем решать неравенства второй степени с одной переменной. Сначала давайте дадим определение.

Слайд 5. (Учащиеся предлагают различные варианты, учитель корректирует и структурирует предложенное.)

Итак, выполним в тетрадях следующие задания (№ 1–6).

Слайд 6. Решить неравенство

№ 1: $x^2 - 5x - 50 < 0$.

Выполнение задания разбито на этапы.

1. Учащиеся устно отвечают на вопросы.

– Какая квадратичная функция соответствует данному неравенству?

– Что является ее графиком?

– Выясним, как расположена парабола относительно оси x : пересекает ось x , находится выше оси x , ниже оси x , касается оси x .

– Как это определить? (Нужно найти нули функции, решив квадратное уравнение.)

2. Один учащийся работает у доски, остальные в тетрадях.

Нули функции находят из условия $y = 0$.

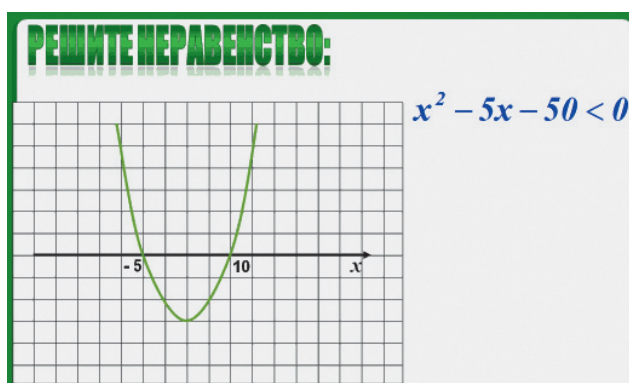
Решим квадратное уравнение $x^2 - 5x - 50 = 0$.

По формуле корней или по теореме Виета:

$x_1 = -5, x_2 = 10$.

3. Покажем схематически, как расположена парабола относительно оси x . (Учитель осуществляет демонстрацию слайдов, затем учащиеся работают в тетрадях.)

4. $y < 0$ при $x \in (-5; 10)$.

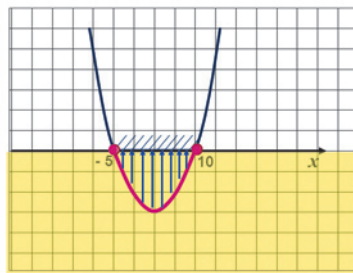


Учитель. Что изменится, если знак неравенства поменять? Давайте рассмотрим различные случаи.

№ 2. $x^2 - 5x - 50 \leq 0, y \leq 0$ при $x \in [-5; 10]$.

Решите неравенство:

№1



$$x^2 - 5x - 50 < 0$$

Ответ: $(-5; 10)$

№2

$$x^2 - 5x - 50 \leq 0$$

Ответ: $[-5; 10]$

Решите неравенство:

№3

$$x^2 - 5x - 50 > 0$$

Ответ:

$(-\infty; -5) \cup (10; +\infty)$

№4

$$x^2 - 5x - 50 \geq 0$$

Ответ:

$(-\infty; -5] \cup [10; +\infty)$

Решите неравенство:

Слайд 7.

№ 3. $x^2 - 5x - 50 > 0$, $y > 0$ при $x \in (-\infty; -5) \cup (10; +\infty)$.

№ 4. $x^2 - 5x - 50 \geq 0$, $y \geq 0$ при $x \in (-\infty; -5] \cup [10; +\infty)$.

Слайд 8.

№ 5. $x^2 - 5x + 50 > 0$, $y > 0$ при $x \in (-\infty; +\infty)$.

№ 6. $x^2 - 5x + 50 < 0$. Ответ: $\emptyset$.

Слайд 9. Сформулируем алгоритм решения неравенств второй степени с одной переменной.

Чтобы решить квадратное неравенство достаточно посмотреть на график функции

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Какие знания о квадратичной функции нам понадобятся для составления алгоритма решения неравенств?

(Учащиеся предлагают различные варианты, учитель корректирует и структурирует предложенное. Затем шаги алгоритма появляются на слайде презентации.)

Слайд 10. Продемонстрируем алгоритм решения неравенств второй степени с одной переменной. (Каждый шаг алгоритма сопровождается показом презентации и записывается учащимися в тетрадь как образец решения.)

1. Привести неравенство к виду $ax^2 + bx + c > 0$ ($ax^2 + bx + c < 0$).

2. Решив уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, найти его корни (абсциссы точек пересечения параболы с осью x , если они есть).

3. Изобразить схематически параболу в координатной плоскости.

4. Выбрать нужные промежутки.

5. Записать ответ.

Первичное осмысление и применение изученного материала

Слайды 11–13. Выполняется упражнение № 114 (а, б). Используя схему графика функции $f(x)$, заполните таблицу (фронтальная работа с классом).

Слайд 14. Решите неравенства. Перенесите в таблицу буквы, соответствующие найденным ответам.

(Учащиеся решают неравенства в тетрадях по вариантам, а затем один из учащихся выполняет вторую часть задания у доски.)

Ответ: ПАВЛОВ.

Слайд 15. Портрет ученого и его высказывание.

Слайд 16. Учащиеся выполняют самостоятельную работу с последующей проверкой.

Постановка домашнего задания

Слайд 17. П. 8, № 116 (а–в), 130 (а, б).

Подведение итогов

- Какова была цель нашего урока?
- Сформулируйте определение неравенства второй степени с одной переменной.
- Как решать такие неравенства?
- Сформулируйте алгоритм решения неравенства второй степени с одной переменной.

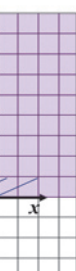
Обсуждение урока

Л.Р. Урок, который мы сегодня обсуждаем, может показаться необычным, поскольку в нем нет ярких, бросающихся в глаза внешних атрибутов в виде средств обучения или новейших методик или технологий.

П.М. Мне урок понравился тем, что он соответствует логике учебника. Это можно встретить не так часто, как может показаться. Я бы сказал, что для урока характерна методическая аккуратность и деликатность.

№5
Задача: $x^2 - 5x + 50 > 0$

Ответ: $(-\infty; +\infty)$



№6
 $x^2 - 5x + 50 < 0$

Ответ: $\emptyset$

Решите неравенство:

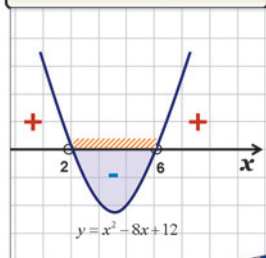
$x^2 - 8x + 12 < 0$

$x^2 - 8x + 12 = 0$

$x_1 = 2; x_2 = 6$



$ax^2 + bx + c > 0$ и $ax^2 + bx + c < 0$



$x \in (2; 6)$

Алгоритм

Для решения неравенств вида $ax^2 + bx + c > 0$ и $ax^2 + bx + c < 0$ поступают следующим образом:

1. Находят дискриминант квадратного трехчлена и выясняют, имеет ли трехчлен корни;
2. Если трехчлен имеет корни, то отмечают их на оси x и через отмеченные точки проводят схематически параболу, ветви которой направлены вверх при $a > 0$ или вниз при $a < 0$; если трехчлен не имеет корней, то схематически изображают параболу, расположенную в верхней полуплоскости при $a > 0$ и в нижней при $a < 0$;
3. Находят на оси x промежутки, для которых точки параболы расположены выше оси x (если решают неравенство $ax^2 + bx + c > 0$) или ниже оси x (если решают неравенство $ax^2 + bx + c < 0$).

Л.Р. Согласна, это пример традиционного урока, выстроенного в русле учебника. Однако в нем использованы возможности современных технологий в плане усиления наглядности. В данном случае наглядность играет ключевую роль, ведь предлагаемый учащимся способ решения квадратных неравенств основан именно на использовании наглядного функционально-графического подхода.

Замечу, что я тоже являюсь сторонником следования той логике изложения материала, которая дается в учебнике. Во-первых, потому что современные учебники, имеющие необходимые разрешения на использование в учебном процессе, прошли за последние годы такое количество всевозможных экспертиз, методических и математических, что любые изменения в логике изложения однозначно означают нарушение всех выстроенных и увязанных авторами логических связей. А во-вторых, я убеждена в том, что надо учить учащихся работать с учебником, и прежде всего потому, что это ключевое умение, без которого невозможно никакое учение. Кроме того, оно полезно в тех случаях, когда ученик затрудняется выполнить домашнее задание или пропустил занятие в школе и ему надо самостоятельно ознакомиться с новым содержанием, пройденным на уроке.

О.М. А данную презентацию можно назвать универсальной: она может быть полезна не только учителю, но и ученикам, которые по какой-либо причине отсутствовали при изучении темы.

П.М. Кстати, урок подготовлен двумя учителями, которые являются не только учителями математики, но и учителями информатики. Наверное, поэтому у них получилась хорошая, качественная презентация. Мне понравилась и сама презентация, и то, как пошагово показан алгоритм решения квадратного неравенства.

Л.Р. Ну, в алгоритмах информатики действительно специалисты. И мы уже сказали о вни-

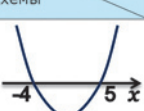
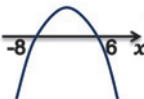
мании к каждой мелочи, каждому нюансу. Посмотрите, как дотошно на слайдах отображены все логические шаги в решении неравенства, расставлены логические акценты с помощью анимации: падающие точки, заливка областей, стрелки, изменение цвета участков. Здорово!

О.М. Я тоже хочу подчеркнуть, что в данном случае использование авторами анимации оправдано. Анимация не только не является лишней, а наоборот, акцентирует внимание учеников на учебном материале (посмотрите, например, на слайды 6–8). А на слайде 14 ученик при ответе у доски сам может передвинуть буквы в нужную ячейку таблицы. Хочу похвалить авторов за применение на слайдах 11–13 управляющих кнопок: они не преобладают над основной информацией и являются однотипными.

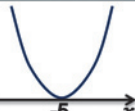
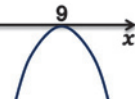
Л.Р. Меня этот урок навел на мысль вот о чем. Началось создание нового средства обучения — электронного учебника. Никто еще не знает, каким он должен быть. В мире нет аналогов, которые можно было бы взять за образец. Но совершенно понятно, что в электронном учебнике можно показать то, что в бумажном было невозможно. Бумажные объекты лишены динамики и развития. Думаю, что это и будет сделано в первую очередь, а пока учителя делают это сами, прежде всего с помощью анимационных возможностей, заложенных в презентациях. Авторами, урок которых мы сегодня рассматриваем, это сделано на очень хорошем уровне. Им удалось продемонстрировать и ключевые идеи, и показать мелочи. Поэтому я эту историю рассматриваю как шаг в будущее. Шаг в направлении создания новых технологий обучения. В общем, сегодня — презентации и интерактивные доски, а завтра — электронные среды, включающие электронные учебники.

П.М. А еще мне понравилось соотношение письменной и устной работы учащихся.

Используя схему графика функции $f(x)$, заполните таблицу

Значения x , для которых Схемы	$f(x)=0$	$f(x)>0$	$f(x)\leq 0$
	$x_1 = -4$ $x_2 = 5$	$x \in (-\infty; -4) \cup (5; +\infty)$	$x \in [-4; 5]$
	$x_1 = -8$ $x_2 = 6$	$x \in (-8; 6)$	$x \in (-\infty; -8] \cup [6; +\infty)$

Используя схему графика функции $f(x)$, заполните таблицу

Значения x , для которых Схемы	$f(x)=0$	$f(x)>0$	$f(x)\leq 0$
	$x = -5$	$x \in (-\infty; -5) \cup (-5; +\infty)$	$\{-5\}$
	$x = 9$	$\emptyset$	$x \in (-\infty; +\infty)$

Используя схему графика функции $f(x)$, заполните таблицу

Значения x , для которых Схемы	$f(x)=0$
	$\emptyset$
	$\emptyset$

Л.Р. Да, соотношение удачное. Но я не очень люблю опрос «по определениям». Это формально. Конечно, работа с определениями, утверждениями и прочее — это часть работы по формированию логического мышления и овладению математическим языком. Но это не должно переходить в заучивание, развивающее память и ничего более. Кстати, в учебнике явных определений не так много, и мне не представляется целесообразным множить их число. Скажем, как это сделано здесь.

П.М. Я не понимаю, зачем давать определение, если достаточно сформировать понятие о неравенстве второй степени. На мой взгляд, такая формализация не нужна.

Л.Р. Идея авторов понятна — они идут от родного языка, от понимания и увязывания в единое целое всех слов, входящих в определяемое понятие. И они не обрушивают готовое определение на головы учеников, а заставляют их рассуждать, думать, анализировать и самих формулировать утверждение. Это хорошо. Но в результате получается неработающее определение. А определение, если оно дается, должно работать. Я бы поступила иначе. Проговорив, над чем мы будем работать на уроке, дала бы штук 10–12 различных неравенств (в том числе и неполных) и предложила выбрать те, которые, как им кажется, попадают в сферу наших интересов. И уже после обсуждения предложила записать неравенство в общем виде. Кстати, такие задания помогают формировать заявленное в целях урока умение делать обобщения.

П.М. Вы упомянули о целях урока. Обычно презентации учителя начинают со слайдов, в которых указывают цели и задачи урока, а в этот раз авторы этого не сделали, и совершенно правильно. Это цели, которые ставит учитель перед собой, а не перед учеником. Цели урока остались в его конспекте, и я обратил на них внимание. Очень часто цели и задачи урока мы выписываем

для администрации, выписываем их формально, не сильно задумываясь над ними. А жаль. Вот и здесь, смотрите, записана такая образовательная цель, как «сформировать умения решать неравенства данного вида». Сформировать за один единственный урок? Наверное, за один урок мы не добьемся этого от каждого ученика, тогда правильнее будет сказать: начать формировать такое-то умение. Аналогично и с развивающей целью «выработать умение анализировать». Ах, если бы можно было достичь этого за один урок, но нет — мы еще долго будем вырабатывать у наших учеников умения анализировать, выделять главное, сравнивать, обобщать, пока не научим их хоть немного, хоть чуть-чуть анализировать, выделять главное, сравнивать, обобщать. Это цель многих лет обучения, а не одного данного урока.

А вот с воспитательными целями ситуация несколько иная. Воспитывать прилежание, трудолюбие, аккуратность, точность — эти цели мы преследуем, наверное, на каждом уроке. Но где именно на этом уроке мы обращаемся непосредственно к воспитанию этих качеств? В чем видят авторы воспитание, например, точности? Точности в чем?

Л.Р. Точность — это степень соответствия какому-нибудь образцу, плану или представлению. Давайте подумаем, где на нашем уроке требовалось такое соответствие. Наверное, при работе с алгоритмом; в значении соответствия плану: точность в соблюдении алгоритма. При этом если говорить о воспитании точности, то хорошо бы показать, к чему может привести неточное выполнение алгоритма. В общем, если хотим воспитывать точность у учеников, давайте и цели формулировать точнее: «формировать», «вырабатывать», «воспитывать».

Теперь о воспитании. Что можно сказать о воспитании трудолюбия на этом уроке? Ничего. Трудолюбие — это *любовь к труду, стремление много и усердно работать, трудиться*. Учеба,

Графика функции те таблицу

$f(x) > 0$	$f(x) < 0$
$x \in (-\infty; +\infty)$	$\emptyset$
$\emptyset$	$x \in (-\infty; +\infty)$

Решите неравенства. Перенесите в таблицу буквы, соответствующие найденным ответам.

А

$$x^2 - 9x + 20 > 0$$

Л

$$x^2 \leq 16$$

О

$$-x^2 - x + 20 \geq 0$$

П

$$(x-4)^2 \leq 0$$

{4}	$(-\infty; 4) \cup (5; +\infty)$	$[-\frac{4}{5}; 0]$	$[-4; 4]$	$[-5; 4]$	$[-0,8; 0]$

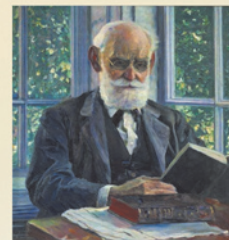
Оставшиеся клетки таблицы
заполняются буквой В

В

В

Академик И.П.Павлов:

**«Никогда не берись за
последующее, не усвоив
предыдущее»**



14

15

конечно, труд, причем тяжелый. На этом уроке пришлось много трудиться? Как на любом другом. Не больше и не меньше. Я согласна с вами, что если заявлена в целях урока какая-то воспитательная цель, то хорошо бы указать, в каких моментах урока идет воспитание этого качества и какими средствами.

П.М. Кстати, об алгоритме. Алгоритм решения неравенства каждый ученик должен знать, наверное, наизусть, но это не подчеркнуто в домашнем задании. И будет ли проверка знания самого алгоритма на следующем уроке? Я бы проверил. Если уж говорить о воспитании. Тут надо быть последовательным.

Л.Р. Я бы высказалась еще по одному поводу. Это мотивация изучения нового материала. Мне кажется, что здесь авторы уж слишком точно и аккуратно проложили нить между старым и новым материалом, сделали акцент с такой технологической точностью, что за кадром осталась главная математическая идея, которая заключается в том, что для решения квадратных неравенств используются свойства квадратичной функции. То есть «не заиграла» связь между чисто алгебраическим понятием неравенства и одним из основных математических понятий — понятием функции. Здесь можно было поговорить (ну хотя бы пару минут!) о единстве математики, о связи между различными ее разделами, о методах. А мне кажется, что это мог быть очень красивый, полезный и запоминающийся момент урока, момент осознания учеником какой-то большой и важной идеи, присущей математике. Это к вопросу о мотивации учеников, которую надо создавать на каждом уроке, а сделать это ой как нелегко, да еще 5 раз в неделю. Такие жемчужинки не хочется терять.

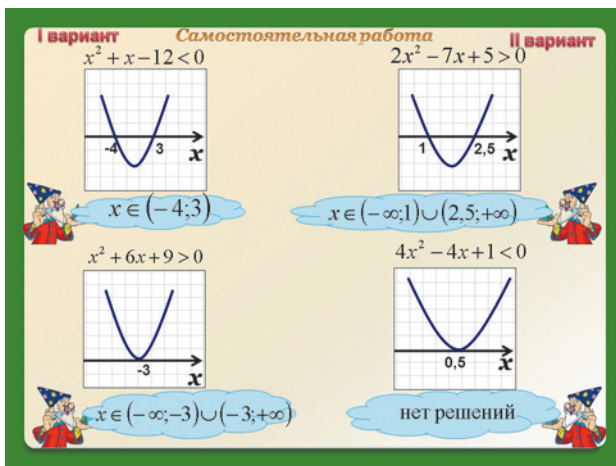
Но давайте еще раз вернемся к презентации, о которой мы уже высказали хорошие слова, прежде всего о методической ее стороне. А есть ли в ней недостатки с точки зрения оформления?

О.М. Конечно, оформление — это часто дело вкуса, но есть несколько технологических моментов, которые явно пошли бы на пользу внешнему виду и улучшили восприятие. Во-первых, отмечу, что в презентации реализовано единое оформление, но нарушен макет — расположение основных или повторяющихся элементов. Касается это в первую очередь заголовков. Если быстро пролистать, например, слайды 6–8 или слайды 11–13, то можно заметить, что заголовки слайдов «прыгают». Добиться единообразия можно простым способом: скопировать объект в буфер обмена на одном слайде и вставить его из буфера обмена на другой слайд, объект займет в точности то же место и будет иметь тот же размер, что и на слайде-источнике.

Во-вторых. При создании слайдов авторы использовали аж четыре стандартных шрифта: Georgia, Arial, Times New Roman, Verdana. Чем это плохо? Создается впечатление, что слайды взяты из разных презентаций. Рекомендую использовать максимум два шрифта, и желательно без засечек (например, Arial, Verdana, Calibri), их легче читать с большого расстояния. Для выделения информации следует менять только их написание (курсив, жирный и т.д.), размер и цвет. И старайтесь следить за единым оформлением текста (слайды 2, 4, 9).

В-третьих. Хочу обратить ваше внимание на слайд 5. Информация, размещенная на нем, очень трудно воспринимается: такая радуга цветов, что глаза разбегаются. В данном случае лучше использовать два цвета: черный — основной текст определения и, например, красный — для выделения фразы «неравенствами второй степени с одной переменной». Что касается цветовой гаммы всей презентации, то мне кажется, что использованы слишком яркие цвета. Надо помнить, что это повышает утомляемость.

В-четвертых. Очень хорошо сделано, что каждый слайд несет свою информационную нагрузку



16



17

ку. Единственно, слайд 9 перегружен текстом. Плотный текст с маленькими промежуточными строками читается трудно. Каждый шаг алгоритма появляется на слайде по мере обсуждения и формулирования его учениками. Авторы понять можно: хочется, чтобы был виден алгоритм целиком. Как поступить? Я бы порекомендовала следующее: после появления первого шага предложить ученикам записать его в тетради, а затем вывести на место первого шага второй. Также поступить и с третьим шагом. Не забывайте, что наибольшая эффективность усвоения достигается, когда ключевые пункты отображаются по одному на отдельном слайде.

Л.Р. Мне нравится такое решение: и акцент на каждом шаге сделан, и алгоритм целиком появился в тетради, причем записан учеником собственноручно.

О.М. И последнее. Еще один момент, уважаемые читатели, о котором не могу не сказать. В презентациях могут использоваться чужие материалы: текст, фото, изображение. Это нормально. Но при этом обязательно приводите ссылку на автора и первоисточник.

Л.Р. Что ж, наше обсуждение подошло к концу. Спасибо авторам урока, он натолкнул нас на очень интересные, как мне кажется, размышления.



Общероссийская Малая академия наук
«Интеллект будущего»

future4you.ru
(484) 399-72-94



«Smart Elephant» – «Умный слон»
Математика для всех!
4 марта 2015 г.

Стоимость участия в конкурсах – 100 рублей.

Интересные задания • Быстрое подведение итогов • Дипломы участникам
• Благодарственные письма педагогам-кураторам и учреждениям

«Class Olympiad» – «Классная олимпиада»
23 апреля 2015 г.

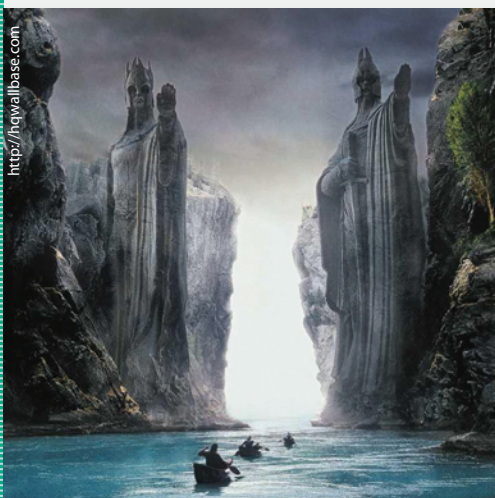
Ваш первый шаг – зарегистрироваться
на сайте IQ-champion.ru

✉ smart@future4you.ru



Другие конкурсы-олимпиады – на сайте future4you.ru

О. ДМИТРИЕВ,
г. Саратов



*Ошибки
сбивают
нас с курса,
но позволяют
двигаться вперед.*

19

МАТЕМАТИКА | февраль | 2015

9 класс

МЕЖДУ АЛГЕБРОЙ И ГЕОМЕТРИЕЙ

С каждым годом унификация всех экзаменов все больше и больше входит в школьную жизнь. Страсть к переименованию привела к тому, что ГИА стали называть ОГЭ, страсть к регламентации привела к тому, что в тестах появился модуль «Алгебра» и модуль «Геометрия». Слово «модуль» должно подчеркивать, что ничего отрицательного в тестах нет. Но под знаком модуля, как мы знаем, могут скрываться отрицательные числа и явления. Вот об этих ошибках, которые были спрятаны внутри заданий и которые проявились во время экзамена, мы и поговорим сегодня.

Задание 21. Модуль «Алгебра»

Пример 21.1. Решите уравнение $\frac{2x^2+7x-4}{x^2-16}=1$.

Типичное решение связано со стремлением учеников побыстрее избавиться от дроби:

$$\frac{2x^2+7x-4}{x^2-16}=1 \Rightarrow 2x^2+7x-4=x^2-16 \Leftrightarrow x^2+7x+12=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ x=-4. \end{cases}$$

Отсутствие определения ОДЗ ($x \neq 4$, $x \neq -4$) приводит к самой популярной ошибке — приобретению лишнего корня. Психологически это связано с тем, что люди гораздо легче запоминают свои права (право умножать обе части на одно и то же выражение) и хуже помнят о своих обязанностях (обязанности проверить, что данный множитель отличен от нуля). Другие учащиеся любят кавалерийским наскоком сократить дробь, а потом о проверке даже и не вспомнить (ведь уравнение может совсем не иметь корней). Встречаются также вычислительные ошибки при приведении подобных слагаемых и при использовании формулы корней квадратного уравнения.

Пример 21.2. Решите уравнение $x^2-2x+\sqrt{3-x}=\sqrt{3-x}+8$.

Здесь опять стремление к упрощениям приводит к приобретению лишних корней:

$$x^2-2x+\sqrt{3-x}=\sqrt{3-x}+8 \Rightarrow x^2-2x-8=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=-2. \end{cases}$$

Теперь на ОДЗ влияет квадратный корень ($3-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 3$). Если его учитывать, то получим правильный ответ: $x=-2$.



К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru

Пример 21.3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 36, \\ 8x^2 + 4y^2 = 36x. \end{cases}$$

Чаще всего решают систему методом подстановки, реже — методом сложения. Вычислительные ошибки на этом этапе не столь многочисленны, хотя числа уже достаточно велики и доставляют некоторым ученикам неудобства. Основная ошибка встречается в самом конце решения:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2x^2 + y^2 = 36, \\ 8x^2 + 4y^2 = 36x \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 36 - 2x^2, \\ 8x^2 + 4(36 - 2x^2) = 36x \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 4, \\ x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2, \\ x = 4. \end{cases} \end{aligned}$$

Здесь происходит потеря корня $y = -2$ при решении простейшего квадратного уравнения. Это связано с тем, что если полное квадратное уравнение вызывает соответствующие ассоциации и воспоминания о том, что «там» бывает два корня, то более простая ситуация отключает критическое мышление и отправляет память в «доквадратный» период изучения алгебры. Другие ученики помнят, что надо ставить знаки плюс-минус, но на этом их знания заканчиваются и в их версии ответ выглядит так: $\begin{cases} y = \pm 2, \\ x = 4. \end{cases}$ Здесь уже появляются лишние корни. Некоторые не понимают сути системы и, найдя $y = \pm 2$, пишут в ответе $(2; -2)$, забывая про переменную x навсегда.

Пример 21.4. Решите уравнение $x^4 = (x - 20)^2$.

Ошибки, аналогичные тем, что были в примере 21.3, возникают и здесь:

$$\begin{aligned} x^4 &= (x - 20)^2 \Rightarrow x^2 = x - 20 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 - x + 20 = 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset (D = 1 - 80 < 0). \end{aligned}$$

Часть участников экзамена все-таки вспоминает правило извлечения квадратного корня и пишет модуль (если он есть даже в названии, то куда от него денешься!):

$$\begin{aligned} x^4 &= (x - 20)^2 \Leftrightarrow x^2 = |x - 20| \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = x - 20 \\ -x^2 = x - 20 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x + 20 = 0 \\ x^2 + x - 20 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -5. \end{cases} \end{aligned}$$

Но многие раскрывают знак модуля по определению и путаются в рассматриваемых случаях. Стоит заметить, что в школе модуль изучают недостаточно подробно, особенно уравнения с модулем, отсюда и возникают ошибки. Поэтому ученики чаще всего боятся иметь дело с модулем и стараются обходиться без него. Самая малочисленная группа учащихся применяют формулы сокращенного уравнения (ФСУ):

$$\begin{aligned} x^4 &= (x - 20)^2 \Leftrightarrow (x^2)^2 - (x - 20)^2 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x^2 - x + 20)(x^2 + x - 20) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x + 20 = 0 \\ x^2 + x - 20 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -5. \end{cases} \end{aligned}$$

Пример 21.5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x-6)(y-5) = 0, \\ \frac{y-2}{x+y-8} = 3. \end{cases}$$

Проблемы с ОДЗ встречаются и в системах. Здесь возникает проблема перебора случаев как и в задачах с модулем. Самое короткое «решение»:

$$\begin{cases} (x-6)(y-5) = 0, \\ \frac{y-2}{x+y-8} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-6 = 0, \\ y-5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6, \\ y = 5. \end{cases}$$

Это типичный подход для тех, кто не имеет глубоких знаний: из всех уравнений выбирается то, что решать проще. Но и более «ветвистое» решение не гарантирует успеха:

$$\begin{aligned} \begin{cases} (x-6)(y-5) = 0, \\ \frac{y-2}{x+y-8} = 3 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 6, \\ \frac{y-2}{y-2} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6, \\ \frac{3}{x-3} = 3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 6, \\ y - 2 = 3y - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6, \\ y = 2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 5, \\ 3 = 3x - 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5, \\ x = 4. \end{cases} \end{aligned}$$

Здесь ОДЗ показывает, что первое решение — лишнее.

Пример 21.6. Решите неравенство

$$(x-3)^2 < \sqrt{5}(x-3).$$

Поклонники ФСУ и дискриминанта, которых большинство, решают так:

$$\begin{aligned} (x-3)^2 < \sqrt{5}(x-3) &\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 - \sqrt{5}x + 3\sqrt{5} < 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 - (6 + \sqrt{5})x + (9 + 3\sqrt{5}) < 0. \end{aligned}$$

При этом сразу возникают почти непреодолимые трудности, связанные с подсчетом дискриминанта, и лишь единицы добираются до ответа. Любители рубить с плеча сокращают на бросающееся в глаза выражение, забывая о правилах изменения знака неравенства. И только самые ответственные переносят все в одну сторону и раскладывают на множители:

$$\begin{aligned} (x-3)^2 < \sqrt{5}(x-3) &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x-3)(x-3-\sqrt{5}) < 0 &\Leftrightarrow 3 < x < 3 + \sqrt{5}. \end{aligned}$$

Здесь ошибки возникают при выборе верных интервалов для ответа. Необходимо заметить, что последний пример гораздо сложнее, чем первые пять, что делает варианты неравнозначными.

Задание 22. Модуль «Алгебра»

Пример 22.1. Расстояние между пристанями А и В равно 48 км. Из А в В по течению реки отправился плот, а через час вслед за ним отправилась моторная лодка, которая, прибыв в пункт В, тотчас повернула обратно и проплыла еще треть расстояния от В до А. К этому времени плот прошел 25 км. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 5 км/ч.

В задаче смешаны арифметический и алгебраический способы решения. Сначала надо вычислить время движения лодки. Для этого вычисляем время движения плота: $25 : 5 = 5$ часов, а затем, учитывая условие, время движения лодки $5 - 1 = 4$ часа. Уже здесь появлялись ошибки: одни вводили много неизвестных — время движения лодки по течению, время движения против течения; другие забывали, что лодка вышла не одновременно с плотом. Проблема составления математической модели стоит очень остро в школе, поэтому процент решивших задание 22 сильно отличается в меньшую сторону от процента решивших задание 21. Тех, кто верно составил уравнение, проблемы ждали в конце:

$$\frac{48}{x+5} + \frac{16}{x-5} = 4 \Rightarrow 12x - 60 + 4x + 20 = x^2 - 25 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 - 16x + 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 15. \end{cases}$$

Поскольку оба значения x (скорость лодки в неподвижной воде) получились больше нуля, то стандартная ссылка на то, что скорость не может быть отрицательной, не работала. Надо было вычислить скорость движения лодки против течения: $1 - 5 = -4$, только тогда появлялась возможность отбросить лишний корень. Некоторые выбирали просто больший корень, ничем этот выбор не мотивируя.

Пример 22.2. Два велосипедиста одновременно отправляются в 60-километровый пробег. Первый едет со скоростью на 10 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 3 часа раньше второго. Найдите скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым.

Типичной ошибкой в задачах такого рода является путаница с понятиями «больше» и «меньше».

Вот образец псевдорешения. Пусть скорость первого велосипедиста равна x км/ч, тогда скорость второго равна $(x + 10)$ км/ч. Получаем уравнение:

$$\frac{60}{x} - \frac{60}{x+10} = 3 \Rightarrow 20x + 200 - 20x = x^2 + 10x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 + 10x - 200 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ x = -20. \end{cases}$$

Отбросив отрицательный корень, многие записывали в ответ 10. Таким образом, совершив три (!) ошибки — неверно вычислив скорость

второго, неверно составив уравнение и перепутав, скорость какого велосипедиста была обозначена за переменную, — ученики получали верный ответ. Здесь необходимо заметить, что порой при составлении уравнения из меньшей дроби вычитают большую, не понимая, что чем больше знаменатель, тем меньше дробь.

Решим задачу правильно. Пусть скорость первого велосипедиста равна x км/ч, тогда скорость второго равна $(x - 10)$ км/ч. Получаем уравнение:

$$\frac{60}{x-10} - \frac{60}{x} = 3 \Rightarrow 20x - 20x + 200 = x^2 - 10x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 - 10x - 200 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20 \\ x = -10. \end{cases}$$

Но в задаче спрашивается скорость второго велосипедиста: $20 - 10 = 10$ км/ч. Естественно, что можно было сразу обозначить за переменную скорость второго велосипедиста. Но здесь часто срабатывает стереотип: ту величину, которая первой попадает в условии, ту и обозначаем за переменную.

Пример 22.3. Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 148 км/ч, проезжает мимо пешехода, идущего в том же направлении параллельно путям со скоростью 4 км/ч, за 10 секунд. Найдите длину поезда в метрах.

Даже если пешеход будет стоять столбом, который не движется, задача поставит в тупик многих, ведь надо уметь различать начало и конец поезда.

Для осознавших этот факт основной ошибкой является отсутствие учета движения пешехода, ведь тогда все получается очень просто: $148 \cdot 10 = 1480$. При этом еще возникает, как и в других решениях, ошибка в размерностях.

Даже исправив ее ($\frac{148\,000}{3600} \cdot 10 = 411 \frac{1}{9}$ метров),

некоторые не понимали, что надо делать с расстоянием, пройденным пешеходом. Избавляясь от этих ошибок, получим верное решение:

$$\frac{148\,000}{3600} \cdot 10 - \frac{4000}{3600} \cdot 10 = 400 \text{ метров.}$$

Пример 22.4. Первая труба пропускает на 6 литров воды в минуту меньше, чем вторая труба. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объемом 140 литров она заполняет на 3 минуты дольше, чем вторая труба?

После задач «на движение» другая популярная тема — это задачи «на работу». Типичным способом решения здесь является составление системы уравнений. Пусть производительность первой трубы x л/мин, тогда производитель-

ность второй трубы $(x + 6)$ л/мин. Пусть время работы первой трубы t мин., тогда время работы второй трубы $(t - 3)$ мин. Как и в предыдущем примере, вероятность перепутать знаки в этих выражениях очень высока. Тогда составим и решим систему уравнений:

$$\begin{aligned} \begin{cases} xt = 140, \\ (x + 6)(t - 3) = 140 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} xt = 140, \\ xt + 6t - 3x - 18 = xt \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (2t - 6)t = 140, \\ x = 2t - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 - 3t - 70 = 0, \\ x = 2t - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t = 10, \\ x = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -7, \\ x = -20. \end{cases} \end{aligned}$$

Многие в процессе вычислений не проводили сокращения на подходящие множители и получали очень большие числа. Это приводило к вычислительным ошибкам в дискриминанте. Другие, обозначив за переменную производительность второй трубы, записывали в ответ значение этой переменной, не пересчитывая по формуле нужную производительность.

Пример 22.5. Игорь и Паша красят забор за 18 часов. Паша и Володя красят этот же забор за 20 часов, а Володя и Игорь — за 30 часов. За сколько минут мальчики покрасят забор, работая втроем?

Одной из ошибок здесь является сложение времени, а не производительностей. То есть

$$\begin{aligned} \begin{cases} t_1 + t_2 = 18, \\ t_2 + t_3 = 20, \\ t_3 + t_1 = 30 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} t_2 = 18 - t_1, \\ t_3 = 20 - (18 - t_1), \\ 2 + t_1 + t_1 = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_2 = 4, \\ t_3 = 16, \\ t_1 = 14 \end{cases} \\ &\Rightarrow t_1 + t_2 + t_3 = 34. \end{aligned}$$

При правильном решении надо вводить единицу измерения объема работы и складывать производительности. Тогда получим следующую систему:

$$\begin{aligned} \begin{cases} p_1 + p_2 = \frac{1}{18}, \\ p_2 + p_3 = \frac{1}{20}, \\ p_3 + p_1 = \frac{1}{30} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} p_1 + p_2 = \frac{1}{18}, \\ p_2 + p_3 = \frac{1}{20}, \\ p_3 + p_1 = \frac{1}{30} \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{18} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} \right) = \frac{25}{360} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} p_1 = \frac{7}{360}, \\ p_2 = \frac{13}{360}, \\ p_3 = \frac{5}{360}. \end{cases} \end{aligned}$$

То есть время совместной работы равно $\frac{360}{25} = \frac{72}{5}$ часа. Теперь здесь видна другая ошибка,

которая связана с размерностью, — отсутствие перевода часов в минуты. Поэтому окончательный *ответ* — это 864 минуты.

Пример 22.6. Свежие фрукты содержат 88% воды, а высушенные — 30%. Сколько сухих фруктов получится из 35 кг свежих фруктов?

Типичной ошибкой являлись неправильные манипуляции с процентами содержания воды:

$$\begin{aligned} 88 - 30 &= 58\%; \quad 0,58 \cdot 30 = 20,3 \text{ кг}; \\ 30 - 20,3 &= 14,7 \text{ кг}. \end{aligned}$$

Возникали сложности и с введением переменных, так как их можно ввести целых две — массу сухих фруктов и массу испарившейся воды. Самым простым способом решения является все-таки арифметический способ. Надо вычислить массу сухих фруктов, учитывая, что сухой остаток остается неизменным:

$$\begin{aligned} 100 - 88 &= 12\%; \quad 0,12 \cdot 35 = 4,2 \text{ кг}; \\ 100 - 30 &= 70\%, \quad 4,2 : 0,7 = 6 \text{ кг}. \end{aligned}$$

Частое отсутствие в работах решения задания 22 говорит о больших проблемах на самом основном этапе — этапе составления математической модели текстовой задачи.

Задание 23. Модуль «Алгебра»

Пример 23.1. Постройте график функции

$$y = |x(x - 1) - 2x|$$

и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Задание предполагает работу с модулем, что и приносит основную долю ошибок. Раскрываем знак модуля, рассматривая два случая.

1-й случай: если $x < 0$, то

$$y = -x(x - 1) - 2x \Leftrightarrow y = -x^2 - x.$$

При неправильном раскрытии получается так:

$$x < 0 \Rightarrow y = -x(x - 1) + 2x \Leftrightarrow y = -x^2 + 3x.$$

2-й случай: если $x \geq 0$, то

$$y = x(x - 1) - 2x \Leftrightarrow y = x^2 - 3x.$$

Здесь уже ошибок не делают. После этого переходят к построению парабол.

Следующий тип ошибок — при построении графика не отбрасывается лишняя часть. Это приводит к 0 баллов, так как для получения 3 баллов надо построить верный график. Некоторые учащиеся не умеют отмечать на чертеже те части парабол, которые не входят в окончательный график. В результате эксперт только по косвенным признакам (окончательному ответу для параметра) может определить принадлежность кривых к графику.

Третий этап возникновения ошибок — вычисление координат вершин парабол. Должно полу-

читься $m = 0,25$ и $m = -2,25$. Некоторые ученики добавляют в ответ еще и все промежуточные значения, не обращая внимания на слово «ровно» в условии.

Пример 23.2. Постройте график функции

$$y = |x^2 - 6x + 5|.$$

Какое наибольшее число общих точек график данной функции может иметь с прямой, параллельной оси абсцисс?

В данном задании рассмотрение знака выражения, стоящего под модулем, только усложняет задачу и ведет к дополнительным ошибкам. Многие при построении графика используют правила преобразования графиков функций, отображая график функции $y = x^2 - 6x + 5$ симметрично относительно оси абсцисс. Но, как и в предыдущем примере, многие учащиеся, не различая оставленные и отброшенные части парабол, получают неверный график. При этом по ответу — «четыре точки» — в данном случае уже нельзя судить о правильности рассуждений. Поэтому эксперт вынужден в случае плохого чертежа ставить 0 баллов.

Пример 23.3. Постройте график функции

$$y = \begin{cases} 1,5x - 3, & \text{если } x < 2, \\ -1,5x + 3, & \text{если } 2 \leq x \leq 3, \\ 3x - 10,5, & \text{если } x > 3 \end{cases}$$

и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

При построении графиков кусочно-непрерывных функций типичной ошибкой является приближенное построение линий, которое приводит к расхождению частей графика и появлению точек разрыва. Это в первую очередь связано с неправильным выбором точек, по которым строятся части графика. При правильном решении получаем: $m = 0$ и $m = -1,5$. Как и в первом примере, слово «ровно» влияет на правильность ответа. Как и во втором примере, можно получить 0 баллов при правильном ответе, нарисовав одну из прямых не с тем угловым коэффициентом. Следует отметить и такую ситуацию: график построен правильно, а вот работать с ним начинают не все учащиеся, так как параметр в уравнении $y = m$ многих пугает. В результате график в решении присутствует, а остальное не сделано совсем.

Пример 23.4. Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x^2 + 8x + 10, & \text{если } x \geq -5, \\ x, & \text{если } x < -5 \end{cases}$$

и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Появление в условии квадратичной функции способствует появлению новых типичных ошибок. Попытка найти точки пересечения с осью абсцисс приводит к вычислительным ошибкам или к неправильному определению местоположения точки на оси, хотя координаты этой точки никак не влияют на ответ. Важным этапом решения является поиск координат вершины параболы, поэтому, даже выполнив все необходимые вычисления верно, некоторые ошибаются и выписывают в ответ абсциссу, а не ординату вершины. Правильный ответ: при $m = -5$ и $m = -6$.

Пример 23.5. Постройте график функции

$$y = \frac{(x-5)(x^2-6x+8)}{x-2}$$

и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

В примерах этого типа возникает принципиально новая ошибка — потеря выколотой точки. Это связано с отсутствием понимания принципиальной роли области определения. Ученикам очень трудно понять, что одна и та же формула может задавать разные функции, если указывать разные области определения. Некоторые ученики найти ОДЗ могут, но не понимают, как отметить этот факт на графике. Приведем краткое решение:

$$y = \frac{(x-5)(x^2-6x+8)}{x-2} \Leftrightarrow y = \frac{(x-5)(x-2)(x-8)}{x-2} \Leftrightarrow \begin{cases} y = (x-5)(x-8), \\ x \neq 2. \end{cases}$$

В результате появления выколотой точки получается два ответа: при $m = 6$ и $m = -0,25$.

Пример 23.6. Постройте график функции

$$y = \frac{3,5|x| - 1}{|x| - 3,5x^2}$$

и определите, при каких значениях m прямая $y = mx$ не имеет с графиком ни одной общей точки.

Это наиболее сложный пример. Здесь собрано сразу несколько трудностей. Для рационального решения необходимо использовать свойство модуля: $x^2 = |x|^2$. Тогда

$$y = \frac{3,5|x| - 1}{|x| - 3,5x^2} \Leftrightarrow y = \frac{3,5|x| - 1}{|x| - 3,5|x|^2} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{|x|}, \\ 3,5|x| \neq 1. \end{cases}$$

Наличие модуля часто приводит к потере одного случая. А появление гиперболы добавляет еще трудности: необходимо помнить о ее горизонтальной асимптоте. Иначе теряется значение $m = 0$. Здесь включается еще другой психологический фактор: в стрессовой ситуации многие учащиеся забывают, что угловой коэффициент может равняться нулю. Типичные

неправильные ответы: при $m = \pm 1$ или $m = \pm \frac{2}{7}$. Правильным является достаточно сложный ответ: $m = \pm \frac{49}{4}$ и $m = 0$.

Из вышесказанного следует, что варианты, содержащие пример 23.6, являются на порядок сложнее всех остальных, что не способствует сбалансированности системы оценок за экзамен.

Задание 24. Модуль «Геометрия»

Пример 24.1. Биссектрисы углов A и D параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке, лежащей на стороне BC (рис. 1). Найдите BC , если $AB = 30$.

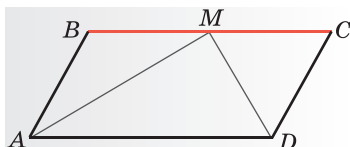


Рис. 1

Используя свойство параллельных прямых, получаем равенство накрест лежащих углов MAD и AMB . По определению биссектрисы равны углы BAM и DAM . Поэтому получаем равенство углов BAM и BMA . Следовательно, треугольник ABM равнобедренный и $BM = AB = 30$. Аналогично получаем, что $CM = CD = AB = 30$ и $BC = 60$. Можно было и просто сослаться на теорему: биссектриса параллелограмма отсекает от него равнобедренный треугольник. Типичной ошибкой является рассмотрение частных случаев или подмена теорем. Некоторые утверждают, что треугольники равносторонние, а не равнобедренные. Другие рассматривают вместо произвольного параллелограмма прямоугольник и доказывают равенство треугольников ABM и DCM . Третьи «применяли» теорему о биссектрисе треугольника, утверждая, что $BM : MC = AB : CD = 1 : 1$. Причем надо заметить, что все эти неверные утверждения приводят к верному числовому ответу.

Пример 24.2. Найдите боковую сторону AB трапеции $ABCD$, если углы ABC и BCD равны соответственно 30° и 120° , а $CD = 29$ (рис. 2).

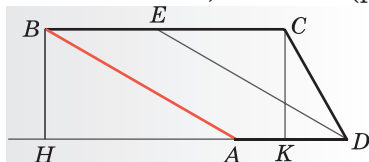


Рис. 2

Первой трудностью, с которой сталкивались здесь учащиеся, был чертеж. Привычный вид трапеции, когда оба указанных в условии угла тупые, здесь не подходил. Следующей трудностью являлось дополнительное построение. Более популярным приемом было проведение двух высот трапе-

ции: BH и CK . Тогда по свойству прямоугольного треугольника с углом в 30° находим $DK = 14,5$. Затем по теореме Пифагора находим $CK = 14,5\sqrt{3}$. Еще раз применяя свойство прямоугольного треугольника с углом в 30° , находим $AB = 29\sqrt{3}$. Другое дополнительное построение — провести прямую DE , параллельную AB , и применить теорему синусов для треугольника CDE . Типичными здесь были вычислительные ошибки и неправильные табличные значения синуса.

Пример 24.3. Прямая, параллельная основаниям трапеции $ABCD$, пересекает ее боковые стороны AB и CD в точках E и F соответственно (рис. 3). Найдите длину отрезка EF , если $AD = 45$, $BC = 27$, $CF : DF = 5 : 4$.

Снова необходимо дополнительное построение: надо провести прямую CK , параллельную AB и пересекающую EF в точке M . Тогда по свойству параллелограмма $BC = EM = AK = 27$. Затем используем подобие треугольников CMF и CKD , откуда получаем: $MF : DK = 5 : 9$. Так как $DK = 18$, то $MF = 10$. Отсюда $EF = EM + MF = 27 + 10 = 37$. Здесь ошибки были связаны с неверным подсчетом коэффициента подобия. Некоторые применяли «магическую» формулу:

$$EF = \frac{5 \cdot 27 + 4 \cdot 45}{5 + 4} = 35,$$

по-видимому, вспоминая похожие формулы из темы «Векторы».

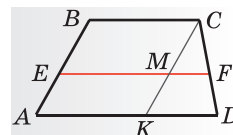


Рис. 3

Пример 24.4. Окружность с центром на стороне AC треугольника ABC проходит через вершину C и касается прямой AB в точке B (рис. 4). Найдите диаметр окружности, если $AB = 9$, $AC = 12$.

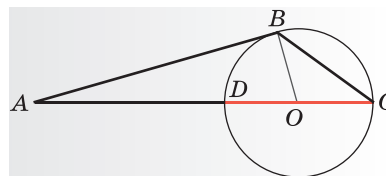


Рис. 4

Самый короткий способ решения использует теорему о секущей и касательной: $AB^2 = AC \cdot AD$, где CD — диаметр окружности. Тогда

$$9^2 = 12(12 - d) \Leftrightarrow d = 5,25.$$

Самым популярным был способ, использующий теорему Пифагора, так как по свойству ка-

сательной треугольник ADO прямоугольный, где O — центр окружности.

$$AO^2 = AB^2 + BO^2 \Rightarrow (12 - R)^2 = 9^2 + R^2 \Leftrightarrow R = \frac{21}{8}.$$

При этом возникали, как всегда, вычислительные ошибки и ошибки, связанные с невнимательностью: в ответ записывали радиус, а не диаметр или подставляли в формулу вместо радиуса диаметр.

Пример 24.5. Вершины треугольника делят описанную около него окружность на три дуги, длины которых относятся как $2 : 3 : 7$. Найдите радиус окружности, если меньшая из сторон равна 16.

Первый этап решения — счет углов:

$$2x + 3x + 7x = 360^\circ \Leftrightarrow x = 30^\circ.$$

На втором этапе чаще использовалась специфика конструкции, так как из двух радиусов получился равнобедренный треугольник с углом в 60° , который становился равносторонним. Гораздо реже использовалось общее свойство вписанного угла и теорема синусов. В этом случае появлялись ошибки, связанные с табличным значением синуса. Поэтому задача становилась проще, чем, по видимому, задумывалась составителями.

Пример 24.6. Высота AH ромба $ABCD$ делит сторону CD на отрезки $DH = 8$ и $CH = 2$ (рис. 5). Найдите высоту ромба.

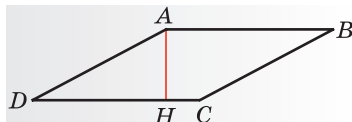


Рис. 5

Тоже достаточно простая задача, особенно по сравнению с примерами 24.2 и 24.3. Те, кто смог вспомнить, что все стороны в ромбе равны между собой, сразу получали прямоугольный треугольник, подобный египетскому. В крайнем случае ученики могли использовать теорему Пифагора и получить правильный ответ $AH = 6$. Редко попадались те, кто перепутал диагонали и стороны ромба и, считая, что диагональ AC перпендикулярна AD , вычислял высоту прямоугольного треугольника: $AH = \sqrt{DH \cdot HC} = \sqrt{8 \cdot 2} = 4$.

Самым сложным из приведенных задач является пример 24.3, который превышает трудность, предполагающуюся в задании 24.

Задание 25. Модуль «Геометрия»

Пример 25.1. На средней линии трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC выбрали произвольную точку K . Докажите, что сумма площа-

дей треугольников BKC и AKD равна половине площади трапеции.

В задачах на доказательство еще ярче проявляется тяга учащихся рассматривать вместо общей ситуации те частные случаи, в которых доказательство становится более легким или просто очевидным. В первом примере ими обычно рассматривается равнобедренная трапеция с точкой K , делящей среднюю линию пополам. Некоторые даже вводят конкретные значения длин оснований и высоты трапеции. Недочетом в серьезных доказательствах является отсутствие обоснования того факта, что средняя линия делит высоту трапеции пополам (здесь необходима ссылка на теорему Фалеса). Ведь и рассмотрение частного случая можно обосновать ссылкой на теорему о равенстве площадей треугольников с одинаковыми высотами и общим основанием. Но этого никто (что удивительно!) не делает.

Пример 25.2. Докажите, что отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, делит ее на две равные по площади части.

И здесь с поражающей воображение частотой появляются равнобедренные трапеции. Далее одни ученики заявляют о равенстве трапеций, а другие считают отрезок, соединяющий середины оснований, высотой. Правильное применение формулы площади трапеции встречается достаточно редко.

Пример 25.3. Основания BC и AD трапеции $ABCD$ равны соответственно 6 и 24, $BD = 12$. Докажите, что треугольники CBD и ADB подобны.

Заметить равенство отношений

$$\frac{BC}{BD} = \frac{6}{12} \text{ и } \frac{BD}{AD} = \frac{12}{24}$$

удается многим, но отсутствие правильной ссылки на признак подобия не дает возможности получить баллы. Для полного решения необходимо воспользоваться тем условием, что данный четырехугольник является трапецией, и обосновать равенство соответствующих углов (по свойству накрест лежащих углов).

Пример 25.4. Через точку O пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, пересекающая стороны AB и CD в точках E и F соответственно (рис. 6). Докажите, что $AE = CF$.

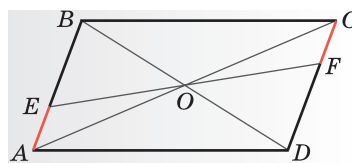


Рис. 6

Снова возникают две типичные логические ошибки. Первая — рассмотрение частного случая: прямая, проходящая через точку O пересечения диагоналей параллелограмма, оказывается еще и параллельной сторонам параллелограмма. Отсюда делается вывод, что точки делят стороны параллелограмма пополам, значит, $AE = CF$. Вторая ошибка более тонкая — бездоказательно утверждается, что равны отрезки: $OE = OF$. И с использованием этого факта доказывается равенство треугольников $AOE = COF$, откуда уже следует, что $AE = CF$. Правильный признак равенства по стороне и двум прилежащим к ней углам находят немногие.

Пример 25.5. Сторона AB параллелограмма $ABCD$ вдвое больше стороны BC . Точка N — середина стороны AB . Докажите, что CN — биссектриса угла BCD .

При доказательстве этого факта ученики делают меньше ошибок. Встречаются три способа доказательства этого утверждения. Первый — с использованием свойства равнобедренного треугольника (углы при основании равны) и свойства накрест лежащих углов. Второй — методом обратного хода: в решении проводится биссектриса данного угла и определяется точка пересечения со стороной, которая и совпадает с точкой N . Третий — с использованием дополнительного построения: через точку N проводится прямая, параллельная стороне параллелограмма, и получается ромб, а затем используется свойство диагоналей ромба.

Пример 25.6. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ углы DAC и DBC равны. Докажите, что углы CDB и CAB также равны.

Данный пример решается на порядок хуже всех предыдущих, поскольку требует использования прямой и обратной теоремы о вписанных углах. Как всегда, многие не умеют рисовать произвольный выпуклый четырехугольник, и у них получаются прямоугольники, параллелограммы или равнобедренные трапеции. Это позволяет им «доказать» утверждение, но не позволяет получить баллы.

Подводя итоги проверки данного задания, можно заметить, что обманчивая простота формулировок провоцирует учеников на слишком краткие и необоснованные доказательства.

Задание 26. Модуль «Геометрия»

Пример 26.1. В равнобедренную трапецию, периметр которой равен 120, а площадь равна 540, можно вписать окружность (рис. 7). Найдите

расстояние от точки пересечения диагоналей трапеции до ее меньшего основания.

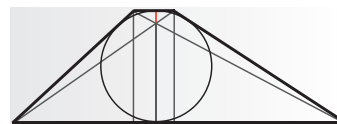


Рис. 7

Очень трудно описывать ошибки в задачах, которые решают единицы. Поэтому отметим только ключевые этапы решения и типовые приемы.

1-й этап. Используя формулу площади описанного многоугольника, находим радиус вписанной окружности:

$$S = rp \Rightarrow 540 = 60r \Leftrightarrow r = 9.$$

2-й этап. Находим высоту трапеции и боковую сторону, используя теорему об описанном четырехугольнике:

$$h = 2r \Rightarrow h = 18,$$

$$a + b = 2c \Rightarrow c = 30, a + b = 60.$$

3-й этап. Используя теорему Пифагора (или египетский треугольник), находим основания трапеции:

$$\frac{a-b}{2} = 24, a + b = 60 \Leftrightarrow a = 54, b = 6.$$

4-й этап. Используя подобие треугольников, находим, в каком отношении делит высоту точка пересечения диагоналей, и вычисляем искомое расстояние:

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{9} \Rightarrow l = 1,8.$$

Самой типичной является ошибка на четвертом этапе, когда высоту делят не на 10, а на 9 частей.

Пример 26.2. В параллелограмме $ABCD$ проведена диагональ AC . Точка O является центром окружности, вписанной в треугольник ABC . Расстояния от точки O до точки A и прямых AD и AC соответственно равны 25, 8 и 7 (рис. 8). Найдите площадь параллелограмма $ABCD$.

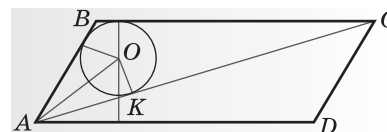


Рис. 8

1-й этап. Используя теорему Пифагора, вычислим отрезок касательной из точки A :

$$AK = \sqrt{25^2 - 7^2} = 24.$$

2-й этап. Используя свойство биссектрисы (точки биссектрисы равноудалены от сторон угла), находим высоту параллелограмма: $h = 7 + 8 = 15$

3-й этап. Вычислим площадь треугольника ABC по формуле с использованием радиуса впи-

санной окружности и по формуле с использованием высоты треугольника:

$$S = pr \Rightarrow S = (24 + BC) \cdot 7,$$

$$S = \frac{1}{2} h \cdot a \Rightarrow S = \frac{15}{2} BC \Rightarrow 15BC = 14(24 + BC) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow BC = 336.$$

Теперь находим площадь параллелограмма $ABCD$:

$$S = a \cdot h \Rightarrow S = 336 \cdot 15 = 5040.$$

Сложность задачи в том, что необходимо составить уравнение, вычисляя площадь треугольника двумя способами. Вычисления длин различных отрезков только уведут решение в сторону.

Пример 26.3. Биссектриса CM треугольника ABC делит сторону AB на отрезки $AM = 7$ и $MB = 9$. Касательная к описанной окружности треугольника ABC , проходящая через точку C , пересекает прямую AB в точке D (рис. 9). Найдите CD .

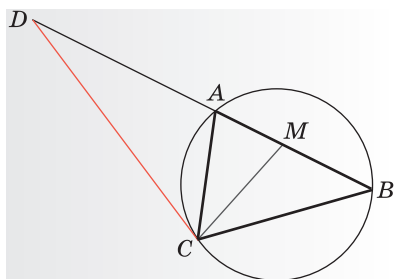


Рис. 9

1-й этап. Используя свойство биссектрисы угла треугольника, находим отношение сторон:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AM}{BM} = \frac{7}{9}.$$

2-й этап. Используя равенство угла между касательной и хордой и вписанного угла, находим подобные треугольники и получаем систему уравнений:

$$\frac{AD}{CD} = \frac{AC}{CB} = \frac{CD}{DB},$$

следовательно,

$$\frac{y}{x} = \frac{7}{9} = \frac{x}{y+16} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 9y = 7x, \\ 7(y+16) = 9x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 31,5, \\ y = 24,5. \end{cases}$$

Ответ: 31,5.

Типичными в этой задаче были вычислительные ошибки, связанные с дробями.

Пример 26.4. Из вершины прямого угла C треугольника ABC проведена высота CP . Радиус окружности, вписанной в треугольник BSP , равен 60, тангенс угла BAC равен $\frac{4}{3}$ (рис. 10).

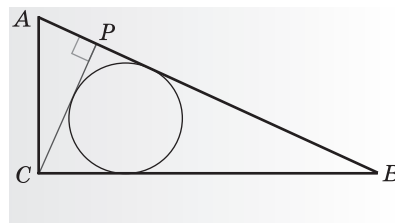


Рис. 10

Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC .

1-й этап. Используя определение тангенса и теорему Пифагора (или опять египетский треугольник), найдем длины всех сторон треугольника:

$$\operatorname{tg} \angle A = \frac{4}{3} \Rightarrow BC = 4x, AC = 3x \Rightarrow AB = 5x.$$

2-й этап. Используя подобие прямоугольных треугольников, найдем коэффициент подобия и с его помощью радиус вписанной окружности:

$$k = \frac{AB}{BC} = \frac{5}{4} \Rightarrow r = 60k = 75.$$

Этот пример является самым легким из предложенного списка, так как требует использования самых простых теорем.

Пример 26.5. Биссектрисы углов A и D параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке K (рис. 11).

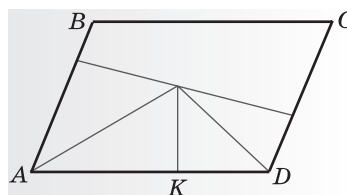


Рис. 11

Найдите площадь параллелограмма, если $DC = 2$, а расстояние от точки K до стороны AB равно 1.

1-й этап. Используя свойство биссектрисы (точки биссектрисы равноудалены от сторон угла), находим высоту параллелограмма:

$$h = 1 + 1 = 2.$$

2-й этап. Находим площадь параллелограмма:

$$S = ah = 2 \cdot 2 = 4.$$

Несмотря на простоту решения, здесь используется свойство биссектрисы, которое встречается в школе редко, поэтому эта задача вызывает большие трудности, чем пример 26.4.

Пример 26.6. В треугольнике ABC известны длины сторон $AB = 8$, $AC = 64$, точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC . Прямая BD , перпендикулярная прямой

АО, пересекает сторону АС в точке D (рис. 12). Найдите CD.

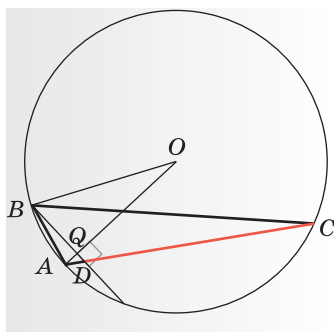


Рис. 12

1-й этап. Используя свойство вписанных углов, вычислим угол треугольника ABD:

$$\begin{aligned} \angle ACB = \gamma &\Rightarrow \angle AOB = 2\gamma \Rightarrow \\ \Rightarrow \angle OAB = 90^\circ - \gamma &\Rightarrow \angle ABQ = \angle ABD = \gamma. \end{aligned}$$

(Ответ и решение задачи не зависят от различных конфигураций построения. — *Прим. ред.*)

2-й этап. Из равенства углов (угол $\angle A$ — общий) следует подобие треугольников ABD и ACB. Используя его, сначала вычисляем длину AD, а потом и CD:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AD = \frac{AB^2}{AC} = \frac{8^2}{64} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CD = AC - AD = 64 - 1 = 63.$$

На втором этапе также возможно использование теоремы синусов. Сложность задачи определяется в первую очередь трудностью вычисления углов и нахождением подобных треугольников.

Геометрические задачи традиционно выполняются гораздо меньшим числом учащихся по сравнению с алгебраическими заданиями. Это вызвано несколькими причинами: недостаточным временем на изучение геометрии, большим разнообразием возникающих в геометрии моделей, неумением находить знакомые объекты на новом чертеже и собственно неумением выполнять правильные чертежи. Наличие множества простых задач в варианте настраивает учащихся на определенный стиль работы, и переключиться на другой, более серьезный уровень, они часто уже не в состоянии. Только расширение в варианте количества задач, требующих письменного обоснования всех логических шагов, может сохранить математически строгий стиль мышления.



**ИНТЕЛЛЕКТ
БУДУЩЕГО**
малая академия наук

**Всероссийский конкурс проектных работ
«Созидание и творчество»**

Работы принимаются в феврале – марте 2015 г.

На конкурс принимаются учебные проекты по всем школьным предметам. Продуктом проекта могут быть: презентации к уроку, учебные пособия, дидактические материалы, описание учебной игры, учебные сайты и т.п.

По итогам автору проекта присваивается звание Лауреата (+ диплом I, II или III степени) либо статус Участника (+ свидетельство). Для научных руководителей – сертификаты.

Подробнее: unk.future4you.ru (раздел «Созидание и творчество»).
Задать вопрос kr@future.org.ru

Публикация на сайте
vd.future4you.ru

**Всероссийская открытая интернет-выставка
«Достижения учащихся»**

Принимаются учебные, экологические, социальные, научные и другие проекты. Все участники получают свидетельства, приглашаются на турнир на Чёрном море.

**Всероссийские конкурсы и предметные олимпиады
на сайте www.future4you.ru**

С. ШЕСТАКОВ,
И. ЯЩЕНКО,
г. Москва

11 класс

ЕГЭ-2015: ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

■ В экзамене профильного уровня задач с кратким ответом станет на одну меньше (задания В2 пополнят банк заданий В1; т.е. задание 1 в варианте 2015 года — это задание вида В1 или В2 в варианте 2014 года), а задач с полным решением — на одну больше: после планиметрической задачи 18 (бывшая С4) добавляется текстовая задача с экономическим содержанием. Кроме того, убрана маркировка заданий буквами: теперь задания маркируются только номером, означающим позицию в варианте. Таким образом, как и в 2014 году, экзаменационная работа 2015 года состоит из двух частей, включающих в себя 21 задание. Часть 1 содержит 9 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 8 заданий повышенного уровня сложности с кратким ответом и 4 задания высокого уровня сложности с развернутым ответом. Правильное решение каждого из заданий 1–14 оценивается 1 баллом. Правильное решение каждого из заданий 15–17 оценивается 2 баллами; заданий 18 и 19 — 3 баллами; 20 и 21 — 4 баллами. Максимальный первичный балл за выполнение всей работы — 34 балла.

Часть 1

Общие рекомендации к заданиям с кратким ответом

Ответом к заданиям 1–14 варианта экзамена профильного уровня является число или конечная десятичная дробь. При решении этих задач и проверке решений важно помнить следующее.

Проверка ответов осуществляется компьютером после сканирования бланка ответов и сопоставления результатов сканирования с правильными ответами. Поэтому цифры в бланке ответов следует писать разборчиво и строго в соответствии с инструкцией по заполнению бланка (с тем, чтобы, например, 1 и 7 или 8 и В распознавались корректно). К сожалению, ошибки сканирования полностью исключить нельзя, поэтому выпускнику, если он уверен в решении задачи, за которую получил минус, нужно идти на апелляцию.

Ответом к задаче может быть только целое число или конечная десятичная дробь. Ответ, зафиксированный в иной форме, будет распознан как неправильный. Поэтому если результатом решения задачи явилась обыкновенная дробь (например, $\frac{1}{8}$), перед записью ответа в бланк ее нужно обратить в десятичную, то есть в ответе написать 0,125.

Единицы измерения (в каких именно единицах должен быть дан ответ, указывается в условии задачи) в бланке ответов писать не нужно, в противном случае сканер, вероятно, распознает ответ как неправильный.

Задание 1

Тип задания по КТ. Задание на использование приобретенных знаний и умений в практической деятельности и повседневной жизни: анализ реальных числовых данных и информации статистического характера; осуществление практических расчетов по формулам, использование оценки и прикидки при практических расчетах.



К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru

Характеристика задания. Несложная арифметическая текстовая задача, моделирующая реальную или близкую к реальной ситуацию.

Комментарий. Для решения задачи достаточно уметь выполнять арифметические действия с целыми числами и дробями, делать прикидку и оценку.

Пример с решением. Одна таблетка лекарства весит 20 мг и содержит 9% активного вещества. Ребенку в возрасте до 6 месяцев врач прописывает 1,35 мг активного вещества на каждый килограмм веса в сутки. Сколько таблеток этого лекарства следует дать ребенку в возрасте четырех месяцев и весом 8 кг в течение суток?

Решение. Поскольку процент — это одна сотая часть числа, активного вещества в каждой таблетке содержится $20 \cdot 0,09 = 1,8$ мг. Ребенку указанного в условии задачи возраста и весом 8 кг требуется $8 \cdot 1,35 = 10,8$ мг активного вещества в сутки. Искомое число таблеток будет равно $10,8 : 1,8 = 6$.

Ответ: 6.

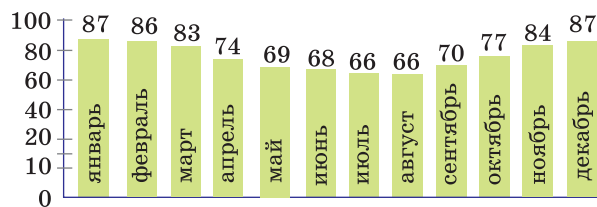
Задание 2

Тип задания по КТ. Задание на использование приобретенных знаний и умений в практической деятельности и повседневной жизни: описание с помощью функций различных реальных зависимостей между величинами и интерпретация их графиков; извлечение информации, представленной в таблицах, на диаграммах, графиках; определение значения функции по значению аргумента при различных способах задания функции; описание поведения и свойств функции по ее графику, нахождение по графику функции наибольшего и наименьшего значений; построение графиков изученных функций.

Характеристика задания. Задание на чтение графика функции (диаграммы), моделирующего реальную или близкую к реальной ситуацию. График (диаграмма) характеризует изменение в зависимости от времени некоторой величины (температуры, стоимости акций и т.д.). Как правило, в задании требуется найти наибольшее (наименьшее) значение этой величины, разность между наибольшим и наименьшим значением (возможно, за определенный период времени), время, когда величина достигает данного значения, вычислить среднее значение величины.

Комментарий. Простейшее задание на считывание информации, представленной в виде диаграммы или графика, возможно, требующее незначительных вычислений, например, нахождения среднего значения некоторой величины.

Пример с решением. На диаграмме показано распределение относительной влажности воздуха (в процентах) в городе Ейске по месяцам года. Определите среднюю относительную влажность воздуха в Ейске осенью.



Решение. Средняя относительная влажность воздуха в Ейске осенью равна среднему арифметическому значений относительной влажности (в процентах) в сентябре, октябре и ноябре, то есть

$$\frac{70 + 77 + 84}{3} = 77.$$

Ответ: 77.

Задание 3

Тип задания по КТ. Задание на использование приобретенных знаний и умений в практической деятельности и повседневной жизни: анализ реальных числовых данных и информации статистического характера; осуществление практических расчетов по формулам, использование оценки и прикидки при практических расчетах; описывание с помощью функций различных реальных зависимостей между величинами и интерпретация их графиков; извлечение информации, представленной в таблицах, на диаграммах, графиках; решение прикладных задач, в том числе социально-экономического и физического характера, на наибольшее и наименьшее значение, на нахождение скорости и ускорения.

Характеристика задания. Несложная текстовая задача (возможно, с табличными данными) на оптимальное решение, связанная с анализом практической деятельности и моделирующая реальную или близкую к реальной ситуацию.

Комментарий. Чтобы решить задачу, достаточно вычислить стоимость услуги или товара (иногда с транспортировкой), рейтинг прибора и т.п. для каждого из указанных в условии возможных вариантов и в ответе указать наименьшее из найденных чисел. Требуется аккуратность при записи ответа, поскольку числа могут оказаться довольно большими и неправильная запись одной разрядной единицы приведет к неправильному ответу. В некоторых случаях подсчет можно оптимизировать, проанализировав условие.

Пример с решением. Независимая экспертная лаборатория определяет рейтинг R бытовых приборов на основе коэффициента ценности, равного 0,01 средней цены P , показателей функциональности F , качества Q и дизайна D . Каждый из показателей оценивается целым числом от 0 до 4. Итоговый рейтинг вычисляется по формуле

$$R = 4(2F + 2Q + D) - 0,01P.$$

В таблице даны средняя цена и оценки каждого показателя для нескольких моделей вафельниц. Определите наивысший рейтинг представленных в таблице моделей вафельниц.

Модель вафельницы	Средняя цена	Функциональность	Качество	Дизайн
А	4100	3	2	4
Б	4700	0	2	2
В	5500	3	1	1
Г	5400	0	2	0

Решение. Задачу можно решить двумя способами, первый из которых состоит в прямом подсчете рейтингов:

рейтинг модели А равен

$$R_A = 4(2 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 4) - 0,01 \cdot 4100 = 15;$$

рейтинг модели Б равен

$$R_B = 4(2 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 2) - 0,01 \cdot 4700 = -23;$$

рейтинг модели В равен

$$R_V = 4(2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 1) - 0,01 \cdot 5500 = -19;$$

рейтинг модели Г равен

$$R_G = 4(2 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 0) - 0,01 \cdot 5400 = -38.$$

Второй способ основан на анализе условия, оценке и прикидке: очевидно, что при данных в таблице значениях в выражении для R уменьшаемое $4(2F + 2Q + D)$ максимально, а вычитаемое $0,01P$ минимально именно для модели А. При таком решении считать придется только один — наилучший рейтинг, то есть рейтинг модели А.

Ответ: 15.

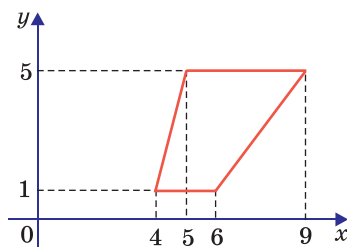
Задание 4

Тип задания по КТ. Задание по планиметрии на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей), связанное с проверкой умений вычислять значения числовых и буквенных выражений, осуществляя необходимые подстановки и преобразования, проводить по известным формулам и правилам преобразования буквенных выражений, включающих тригонометрические функции.

Характеристика задания. Задание на вычисление площади треугольника, четырехугольника, круга и его частей, в том числе по данным рисунка, представляющего собой изображение фигуры, площадь которой требуется найти, на координатной плоскости или клетчатой бумаге (сетке) со стороной клетки 1×1 .

Комментарий. Площадь искомой фигуры может быть найдена по известной формуле. Например, для треугольника или параллелограмма во многих случаях достаточно провести мысленно высоту к одной из сторон. Выбирать в качестве стороны и высоты нужно те, длины которых выражаются целым числом делений сетки, либо те, которые параллельны осям координат. В некоторых случаях для вычисления недостающих элементов можно использовать теорему Пифагора. Ряд задач можно решить, разбив фигуру на части, вычисление площадей которых не представляет труда, или заметив, что фигура сама является частью другой фигуры, а площадь последней можно найти почти сразу.

Пример с решением. Найдите площадь трапеции, изображенной на рисунке.



Решение. Основания трапеции равны 2 и 4, а высота равна 4. Поэтому искомая площадь равна

$$\frac{1}{2}(2+4) \cdot 4 = 12.$$

Ответ: 12.

Задание 5

Тип задания по КТ. Задание на построение и исследование простейших математических моделей: моделирование реальных ситуаций на языке теории вероятностей и статистики; вычисление в простейших случаях вероятности событий.

Характеристика задания. Несложная задача по теории вероятностей или статистике.

Комментарий. Для решения задачи достаточно уметь находить отношение числа благоприятных для наступления некоторого события исходов к числу всех равновероятных исходов.

Пример с решением. Перед началом первого тура чемпионата по настольному теннису участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 26 спортсменов, среди которых 7 спортсменов из России, в том числе Георгий Бочкин. Найдите вероятность того, что в первом туре Георгий Бочкин будет играть с каким-либо спортсменом из России.

Решение. Поскольку искомая вероятность P равна отношению числа $n = 6$ благоприятных для данного события исходов к числу $N = 25$ всех равновероятных исходов, находим $P = \frac{6}{25} = 0,24$.

Ответ: 0,24.

Задание 6

Тип задания по КТ. Задание на решение уравнения или системы уравнений, проверяющее умение решать рациональные, иррациональные, показательные, тригонометрические и логарифмические уравнения, их системы.

Характеристика задания. Несложное рациональное, показательное, логарифмическое, тригонометрическое или иррациональное уравнение.

Комментарий. Уравнение сводится в одно действие к линейному или квадратному (в последнем случае, в зависимости от условия, в ответе нужно указать только один из корней — меньший или больший).

Пример с решением. Найдите корень уравнения $4^{-5+x} = 64$.

Решение. Для решения уравнения достаточно знания того, что $64 = 4^3$. Тогда $-5 + x = 3$, откуда $x = 8$.

Ответ: 8.

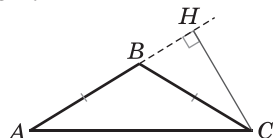
Задание 7

Тип задания по КТ. Задание по планиметрии на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей), моделирование реальных ситуаций на языке геометрии, исследование построенных моделей с использованием геометрических понятий и теорем, аппарата алгебры либо практическая задача, связанная с нахождением геометрических величин.

Характеристика задания. Несложная планиметрическая задача, в том числе по готовому чертежу.

Комментарий. Для решения задачи достаточно знать основные формулы и теоремы планиметрии.

Пример с решением. В треугольнике ABC $AB = BC$, $AC = 14$, высота CH равна 7. Найдите синус угла ACB .



Решение. Поскольку $\angle ACB = \angle CAB$, то и синусы этих углов равны:

$$\sin \angle ACB = \sin \angle CAB = \frac{CH}{AC} = \frac{7}{14} = 0,5.$$

Ответ: 0,5.

Задание 8

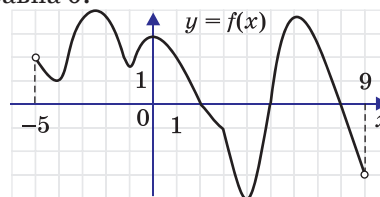
Тип задания по КТ. Задание на выполнение действий с функциями и производными функций, исследование функций.

Характеристика задания. Ставшая традиционной для ЕГЭ по математике задача на чтение графика функции для ответа на вопрос о каком-то из свойств производной этой функции либо на чтение графика производной функции для ответа на вопрос о каком-то из свойств самой функции.

Комментарий. Для решения задачи достаточно знать, что в каждой точке интервала возрастания дифференцируемой на этом интервале функции ее производная положительна; в каждой точке интервала убывания дифференцируемой на этом интервале функции ее производная отрицательна; в каждой точке экстремума производная либо равна нулю, либо не существует («угол» на графике функции). Обратно, если дан график производной функции, то на тех интервалах, где он расположен выше оси абсцисс (то есть производная положительна), функция возрастает; на тех интервалах, где он расположен ниже оси абсцисс (то есть производная отрицательна), функция убыва-

ет; общие точки графика производной и оси абсцисс (то есть точки, в которых производная равна нулю) либо являются точками максимума, если график производной пересекает ось абсцисс «сверху вниз» (то есть производная меняет знак с плюса на минус: возрастание функции сменяется убыванием), либо являются точками минимума, если график производной пересекает ось абсцисс «снизу вверх» (то есть производная меняет знак с минуса на плюс: убывание функции сменяется возрастанием), либо не являются точками экстремума (график производной не пересекает ось абсцисс, а лишь касается ее; в этом случае не происходит смены знака производной и характер монотонности функции не меняется).

Пример с решением. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной и дифференцируемой на интервале $(-5; 9)$. Найдите число точек, в которых производная $f'(x)$ функции $y = f(x)$ равна 0.



Решение. Условие задачи предполагает подсчет точек экстремума, то есть общего числа точек максимума и точек минимума данной непрерывной функции. Таких точек в данном случае ровно 6.

Ответ: 6.

Задание 9

Тип задания по КТ. Стереометрическая задача на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей, объемов).

Характеристика задания. Несложное задание по стереометрии на применение основных формул, связанных с вычислением площадей поверхностей или объемов многогранников (пирамид и призм) или тел вращения (цилиндров, конусов, шаров), в том числе вписанных или описанных около других многогранников или тел вращения.

Комментарий. Для решения задачи достаточно знать формулы площадей поверхности и объемов пирамиды, призмы, цилиндра, конуса и шара.

Пример с решением. В цилиндрический стакан налили 2,4 литра воды. После того как в стакан положили камень, уровень воды повысился на $\frac{1}{6}$ по сравнению с тем, который был до этого. Найдите объем камня, если известно, что он погрузился в воду полностью. Ответ дайте в кубических сантиметрах (1 литр равен 1000 см^3).

Решение. Объем камня равен объему вытесненной воды, то есть объему цилиндра, высота

которого в шесть раз меньше высоты данного цилиндра (объем которого, как следует из условия, равен 2400 см^3), а радиус основания тот же. Поэтому искомый объем равен $\frac{1}{6} \cdot 2400$, то есть 400 см^3 .

Ответ: 400.

Часть 2

Задание 10

Тип задания по КТ. Задание на выполнение вычислений и преобразований.

Характеристика задания. Задача на вычисление значения числового или буквенного выражения.

Комментарий. Для решения задачи достаточно уметь выполнять действия с числами, знать определение и простейшие свойства степеней, корней, логарифмов, синуса, косинуса, тангенса.

Пример с решением. Найдите значение выражения $\log_6 135 - \log_6 3,75$.

Решение. Поскольку основания логарифмов одинаковы, данное выражение приводится к логарифму частного:

$$\log_6 135 - \log_6 3,75 = \log_6 \frac{135}{3,75} = \log_6 36 = 2.$$

Ответ: 2.

Задание 11

Тип задания по КТ. Задание на использование приобретенных знаний и умений в практической деятельности и повседневной жизни: описание с помощью функций различных реальных зависимостей между величинами и интерпретация их графиков; извлечение информации, представленной в таблицах, на диаграммах, графиках; решение прикладных задач, в том числе социально-экономического и физического характера, на наибольшее и наименьшее значение, на нахождение скорости и ускорения.

Характеристика задания. Текстовое задание на анализ практической ситуации, моделирующее реальную или близкую к реальной ситуацию (например, экономические, физические, химические и другие процессы).

Комментарий. По условию задачи требуется составить уравнение или неравенство, сводимое к линейному или квадратному, решением которого (для неравенств — наибольшим или наименьшим решением либо их разностью) и является искомая величина.

Пример с решением. Локатор батискафа, равномерно погружающегося вертикально вниз, испускает ультразвуковые импульсы частотой 558 МГц . Скорость погружения батискафа, выражаемая в м/с, определяется по формуле $v = c \cdot \frac{f - f_0}{f + f_0}$, где $c = 1500 \text{ м/с}$ — скорость звука в воде, f_0 — частота испускаемых импульсов (в МГц), f — частота отраженного от дна сигнала,

регистрируемая приемником (в МГц). Определите наибольшую возможную частоту отраженного сигнала f , если скорость погружения батискафа не должна превышать 12 м/с . Ответ выразите в МГц.

Решение. Из условия задачи следует, что

$$1500 \cdot \frac{f - 558}{f + 558} \leq 12,$$

откуда

$$125(f - 558) \leq f + 558, \quad f \leq \frac{126 \cdot 558}{124},$$

то есть $f \leq 567$.

Ответ: 567.

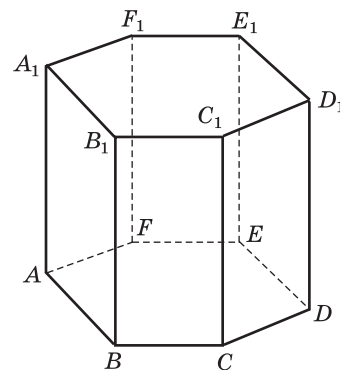
Задание 12

Тип задания по КТ. Стереометрическая задача на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей, объемов).

Характеристика задания. Несложное задание по стереометрии на применение основных формул, связанных с вычислением площадей поверхностей или объемов многогранников (пирамид и призм) или тел вращения (цилиндров, конусов, шаров), в том числе вписанных или описанных около других многогранников или тел вращения.

Комментарий. Для решения задачи достаточно знать формулы площадей поверхности и объемов пирамиды, призмы, цилиндра, конуса и шара.

Пример с решением. Найдите объем многогранника, вершины которого совпадают с вершинами A, B, C, D, E, F, D_1 правильной шестиугольной призмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, площадь основания которой равна 8, а боковое ребро равно 6.



Решение. Многогранник, вершинами которого являются точки A, B, C, D, E, F, D_1 , представляет собой пирамиду с основанием $ABCDEF$ и высотой $D_1 D$. Объем пирамиды равен трети произведения площади основания на высоту, то есть

$$\frac{1}{3} \cdot 8 \cdot 6 = 16.$$

Ответ: 16.

Задание 13

Тип задания по КТ. Построение и исследование простейших математических моделей: моделирование реальной ситуации на языке алгебры, составление уравнения или неравенства по условию задачи;

исследование построенной модели с использованием аппарата алгебры.

Характеристика задания. Традиционная текстовая задача (на движение, работу и т.п.), сводящаяся к составлению и решению уравнения.

Комментарий. В качестве неизвестной, как правило, лучше выбирать искомую величину. Составленное уравнение является рациональным и сводится в большинстве случаев к квадратному или линейному.

Пример с решением. Байдарка в 10:00 вышла из пункта А в пункт В, расположенный в 15 км от А. Пробыв в пункте В 1 час 20 минут, байдарка отправилась назад и вернулась в пункт А в 18:00 того же дня. Определите (в км/ч) собственную скорость байдарки, если известно, что скорость течения реки равна 3 км/ч.

Решение. Пусть собственная скорость байдарки равна x км/ч ($x > 3$). Тогда время (в часах) ее движения по течению реки равно $\frac{15}{x+3}$, а время ее движения против течения реки равно $\frac{15}{x-3}$. Составим по условию задачи уравнение

$$\frac{15}{x+3} + \frac{15}{x-3} + 1 \cdot \frac{1}{3} = 8, \quad \frac{3}{x+3} + \frac{3}{x-3} = \frac{4}{3}.$$

Умножив обе части последнего уравнения на $3(x-3)(x+3)$, приходим к уравнению

$$18x = 4(x^2 - 9),$$

откуда

$$2x^2 - 9x - 18 = 0.$$

Корнями уравнения являются числа $-1,5$ и 6 , из которых только второе больше 3 .

Ответ: 6.

Задание 14

Тип задания по КТ. Задание на выполнение действий с функциями и производными функций, исследование функций.

Характеристика задания. Задание на вычисление с помощью производной точек экстремума данной функции или наибольшего (наименьшего) значения данной функции на данном отрезке. Производная в некоторых задачах может быть задана графиком.

Комментарий. Решение задания связано с нахождением при помощи производной точек минимума (максимума) заданной функции или ее наименьшего (наибольшего) значения на отрезке. При этом возможны два основных случая: либо производная задана графиком, либо функция задана формулой. Если производная задана графиком, то на тех промежутках, где он расположен выше оси абсцисс (то есть производная положительна), функция возрастает; на тех промежутках, где он расположен ниже оси абсцисс (то есть производная отрицательна), функция убывает. Точки, в которых график производной пересекает ось абсцисс (то есть точки, в которых производная меняет знак), являются точками экстремума. Если функция

задана формулой, то при нахождении наибольшего (наименьшего) значения функции на отрезке можно использовать стандартный алгоритм.

Пример с решением. Найдите наибольшее значение функции $y = \frac{x^2 + 25}{x}$ на отрезке $[-12; -1]$.

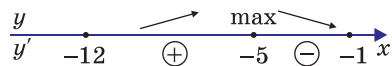
Решение. Традиционное для школьника решение предполагает вычисление наибольшего значения данной функции с помощью производной. Найдем производную данной функции, считая, что $x < 0$, и воспользовавшись формулой производной частного

$$y' = \frac{2x - (x^2 + 25)}{x^2},$$

откуда

$$y' = \frac{(x-5)(x+5)}{x^2}.$$

При $x < 0$ производная обращается в нуль, если $x = -5$, причем $y' > 0$ при $x \in (-12; -5)$ и $y' < 0$ при $x \in (-5; -1)$. Таким образом, непрерывная при $x < 0$ функция $y = \frac{x^2 + 25}{x}$ возрастает на отрезке $[-12; -5]$ и убывает на отрезке $[-5; -1]$.



Значит,

$$\max_{[-12; -1]} y(x) = y(-5) = -10.$$

Ответ: -10 .

Общие рекомендации к заданиям с полным решением

Каждое из заданий 15–21 оценивается 2, 3 или 4 баллами. Максимальный балл выставляется за полное обоснованное решение. При этом можно использовать любые утверждения и факты из школьных учебников без дополнительных обоснований или пояснений. Нужно постараться оформить решение так, чтобы оно было понятно не только его автору, но и любому другому компетентному человеку, в частности, проверяющему.

Даже если полностью решить задачу не удастся, нужно постараться продвинуться в ее решении, сделать хотя бы часть задачи: вполне вероятно, что потраченные усилия окажутся оцененными разумеется, не максимальным числом баллов, но на Едином экзамене и один балл за задачу будет далеко не лишним.

Задание 15

Тип задания по КТ. Уравнение или система уравнений.

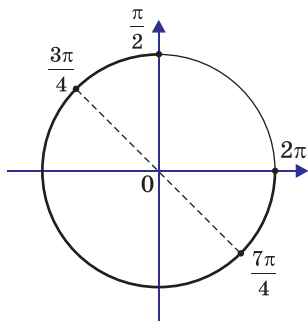
Характеристика задания. Относительно несложное уравнение или система уравнений с отбором корней. Может содержать тригонометрические функции, логарифмы, степени, корни.

Комментарий. Как правило, решение задачи требует замены переменной, позволяющей свести уравнение к квадратному, и отбора корней, связанного с условием задачи или с ограниченностью новой переменной, наличием выражений с переменной в знаменателях алгебраических дробей, под знаками корней четной степени и логарифмов.

Пример с решением.

а) Решите уравнение $14^{\cos x} = 2^{\cos x} \cdot 7^{-\sin x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.



Решение. а) Представим левую часть уравнения, используя свойства степеней, в виде произведения

$$2^{\cos x} \cdot 7^{\cos x} = 2^{\cos x} \cdot 7^{-\sin x}.$$

Поскольку $2^{\cos x} \neq 0$, получаем уравнение $7^{\cos x} = 7^{-\sin x}$. Таким образом, $\cos x = -\sin x$, откуда $\operatorname{tg} x = -1$ и $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберем корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$. Это числа $\frac{3\pi}{4}$ и $\frac{7\pi}{4}$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{3\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}$.

Задание 16

Тип задания по КТ. Стереометрическая задача на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей, объемов).

Характеристика задания. Задание на вычисление отрезков, площадей, углов, связанных с многогранниками и телами вращения.

Комментарий. Традиционная задача по стереометрии, связанная с вычислением длин, площадей (в том числе площадей сечений многогранников и тел вращения), углов (между двумя прямыми, между прямой и плоскостью, между двумя плоскостями), связанных с призмой, пирамидой, цилиндром, конусом или шаром.

Пример с решением. В правильной четырехугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона основания равна 10, а боковое ребро AA_1 равно 2. Точка O принадлежит ребру $A_1 B_1$ и делит его в отношении 4 : 1, считая от вершины A_1 .

а) Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точки A, C и O .

б) Найдите площадь сечения этой призмы плоскостью, проходящей через точки A, C и O .

Решение. а) Поскольку две параллельные плоскости пересекаются третьей плоскостью по параллельным прямым, для построения сечения достаточно провести в плоскости верхнего основания призмы прямую, параллельную AC , до пересечения с ребром $B_1 C_1$ в точке P . Искомое сечение — трапеция $ACPO$ (рис. 1).

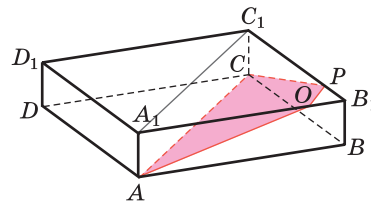


Рис. 1

б) Поскольку прямая AC параллельна $A_1 C_1$, то прямая OP параллельна прямой $A_1 C_1$. Отсюда следует, что треугольники $P B_1 O$ и $C_1 B_1 A_1$ подобны, причем

$$B_1 P : B_1 C_1 = B_1 O : B_1 A_1 = OP : A_1 C_1 = 1 : 5.$$

Значит,

$$AC = A_1 C_1 = 10\sqrt{2}, \quad OP = 2\sqrt{2}.$$

В равных прямоугольных треугольниках $CC_1 P$ и $AA_1 O$

$$CP = AO = \sqrt{AA_1^2 + A_1 O^2} = \sqrt{68},$$

значит, трапеция $ACPO$ равнобедренная.

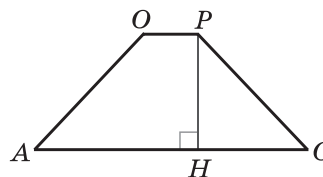


Рис. 2

Пусть PH — высота трапеции $ACPO$, проведенная к основанию AC (рис. 2), тогда:

$$CH = \frac{AC - OP}{2} = 4\sqrt{2}, \quad PH = \sqrt{CP^2 - CH^2} = 6,$$

$$S_{ACPO} = \frac{AC + OP}{2} \cdot PH = 36\sqrt{2}.$$

Ответ: $36\sqrt{2}$.

Задание 17

Тип задания по КТ. Неравенство или система неравенств.

Характеристика задания. Неравенство или система неравенств, содержащих степени, дроби, корни, логарифмы (в том числе с переменным основанием).

Комментарий. Обратим внимание на преобразования, с которыми связана значительная часть

ошибочных решений задания типа С3. При решении неравенств, содержащих сумму двух и более логарифмов, следует помнить о том, что равенство $\log_a f(x) + \log_a g(x) = \log_a (f(x) \cdot g(x))$ выполняется не при любых значениях переменной, поскольку области определения его левой и правой частей различны. Левая часть определена при $f(x) > 0, g(x) > 0$ (каждое из выражений положительно). Правая часть определена при $f(x) \cdot g(x) > 0$ (каждое из выражений положительно либо каждое из выражений отрицательно). Таким образом, область определения правой части равенства $\log_a f(x) + \log_a g(x) = \log_a (f(x) \cdot g(x))$ шире области определения его левой части. Поэтому переход от суммы логарифмов к логарифму произведения может привести к приобретению посторонних решений. Чтобы этого не случилось, нужно в самом начале решения выписать необходимые ограничения (как иногда говорят, найти ОДЗ неравенства). Преобразование же логарифма произведения в сумму логарифмов (то есть переход от $\log_a (f(x) \cdot g(x))$ к $\log_a f(x) + \log_a g(x)$) таит еще больше опасностей: в этом случае область допустимых значений переменной сужается и можно просто потерять решения неравенства. Поэтому, если такое преобразование все-таки необходимо, часто приходится рассматривать два случая:

а) $f(x) > 0, g(x) > 0$ (при этом $\log_a (f(x) \cdot g(x)) = \log_a f(x) + \log_a g(x)$);

б) $f(x) < 0, g(x) < 0$ (при этом $\log_a (f(x) \cdot g(x)) = \log_a (-f(x)) + \log_a (-g(x))$).

Сделанные рекомендации остаются в силе и для случая преобразования разности логарифмов в логарифм частного и наоборот. Если есть выбор, лучше преобразовывать сумму (разность) логарифмов в логарифм произведения (частного), выписав необходимые ограничения (это позволит исключить посторонние решения), а не наоборот (при таком преобразовании решения будут потеряны). Так, при упрощении левой части неравенства $\log_a (f(x) \cdot g(x)) + \log_a \frac{f(x)}{g(x)} < p(x)$ переход к логарифму произведения с последующим сокращением алгебраической дроби при учете необходимых ограничений, то есть переход к системе

$$\begin{cases} \log_a f^2(x) < p(x), \\ f(x) \cdot g(x) > 0, \end{cases}$$

будет равносильным, а упрощение путем преобразования логарифмов произведения и частного в сумму и разность логарифмов приведет к потере решений.

При решении неравенств, содержащих выражения вида $\log_a f^{2n}(x)$, следует использовать формулу $\log_a f^{2n}(x) = 2n \cdot \log_a |f(x)|$. Если не поставить знак модуля, то получится равенство, в котором левая часть определена при всех x , для которых $f(x) \neq 0$, а правая часть — при всех x , для которых $f(x) > 0$, то есть область определения левой части окажется шире, что может привести к потере решений соответствующего неравенства. Так, например, при решении неравенства $\log_5 f^2(x) > 2$ переход к неравенству $2\log_5 f(x) > 2$

будет означать потерю решений; правильным в этом случае будет переход к неравенству $2\log_5 |f(x)| > 2$ или сразу к неравенству $f^2(x) > 5^2$.

Особое внимание следует также уделить применению метода интервалов и методам решения логарифмических неравенств. Логарифмические неравенства с переменным основанием можно решать традиционным способом, рассматривая два случая (основание больше 1, основание положительно и меньше 1). Второй способ — применение метода интервалов. Третий способ основан на следующих простых утверждениях.

Утверждение 1. Если числа p и q одного знака (то есть $p \cdot q > 0$), то и числа pr и qr ($r \neq 0$) — одного знака; обратно, если числа pr и qr — одного знака, то и числа p и q — одного знака.

Утверждение 2. Если $a > 0, b > 1$, то числа $\log_b a$ и $a - 1$ — одного знака.

Утверждение 1 означает, что если числа p и q одного знака, то неравенства $pr > 0$ и $qr > 0$ равносильны. Вместе с утверждением 2 это позволяет при решении логарифмических неравенств вида $r(x) \cdot \log_{c(x)} a(x) > 0$ переходить (разумеется, записав необходимые ограничения) сначала к неравенству $r(x) \frac{\log_b a(x)}{\log_b c(x)} > 0$ (где b — любое число, большее 1), а затем к неравенству $r(x) \frac{a(x)-1}{c(x)-1} > 0$.

Таким образом, неравенство $r(x) \frac{\log_b a(x)}{\log_b c(x)} > 0$ равно-

$$\text{сильно системе } \begin{cases} r(x) \frac{a(x)-1}{c(x)-1} > 0, \\ a(x) > 0, \\ c(x) > 0. \end{cases} \quad \text{При необходимости}$$

такой переход можно сделать несколько раз. Описанный алгоритм справедлив и для неравенств противоположного знака, и для нестрогих неравенств. Кроме того, при решении логарифмических неравенств часто оказывается полезным и следующее утверждение.

Утверждение 3. Если $a > 0, b > 0, c > 1$, то числа $\log_c a - \log_c b$ и $a - b$ — одного знака.

Сформулированные утверждения применимы к неравенствам, правая часть которых равна нулю, а левая представляет собой произведение или частное нескольких алгебраических множителей. В некоторых случаях такие множители можно заменить более простыми, имеющими те же знаки (точнее, те же промежутки знакопостоянства), что и заменяемые (поэтому такой метод решения неравенств будем называть методом знакотожественных множителей). Кроме указанных выше, к таким парам можно отнести следующие:

а) $|a| - |b|$ и $a^2 - b^2$, $\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}$ и $a - b$ (при условиях $a \geq 0$ и $b \geq 0$),
 б) $\sqrt[n+1]{a} - \sqrt[n+1]{b}$ и $a - b$, $\sqrt[n+1]{a} + \sqrt[n+1]{b}$ и $a + b$, $l^a - l^b$ и $a - b$ (при условии $l > 1$).

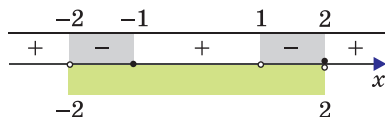
Пример с решением. Решите неравенство

$$\log_{2-x}(x+2) \cdot \log_{x+3}(3-x) \leq 0.$$

Решение. Применим метод знакотожественных множителей, перейдя к произвольному основанию, большему 1. Для более компактной записи будем здесь и далее использовать переход к основанию 10:

$$\begin{aligned} \log_{2-x}(x+2) \cdot \log_{x+3}(3-x) \leq 0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{\lg(x+2)}{\lg(2-x)} \cdot \frac{\lg(3-x)}{\lg(x+3)} \leq 0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x+1)(2-x)}{(1-x)(x+2)} \leq 0, \\ -2 < x < 2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)} \leq 0, \\ -2 < x < 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Последняя система легко решается методом интервалов:



Ответ: $(-2; -1] \cup (1; 2)$.

Задание 18

Тип задания по КТ. Планиметрическая задача на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей).

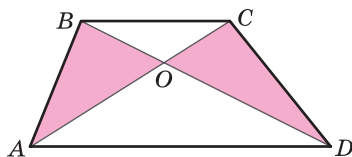
Характеристика задания. Задача на вычисление длин, площадей, углов, связанных с плоскими фигурами.

Комментарий. Довольно сложная задача либо с двумя вопросами (один из которых на доказательство), либо требующая рассмотрения двух случаев и приводящая к двум разным ответам.

Пример с решением. Диагонали AC и BD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O . Площади треугольников AOD и BOC равны соответственно 49 см^2 и 36 см^2 .

а) Докажите, что площади треугольников AOB и COD равны.

б) Найдите площадь трапеции.



Решение. а) В условии задачи не сказано, какие стороны трапеции являются ее боковыми сторонами, а какие — основаниями. Докажем вначале, что площади двух треугольников, общая вершина которых находится в точке пересечения диагоналей трапеции, а основаниями

служат боковые стороны, равны. Площади треугольников ABD и ACD равны, поскольку эти треугольники имеют общее основание AD , их высоты, проведенные к этому основанию, равны как высоты трапеции. Но тогда

$$S_{AOB} = S_{ABD} - S_{AOD} = S_{ACD} - S_{AOD} = S_{COD},$$

что и требовалось. По условию $S_{AOD} \neq S_{BOC}$, поэтому AD и BC являются не боковыми сторонами, а основаниями трапеции. Следовательно, треугольники AOB и COD являются треугольниками, общая вершина которых находится в точке пересечения диагоналей данной трапеции, а основаниями служат ее боковые стороны. Значит, их площади равны.

б) Треугольники AOD и BOC подобны по двум углам, и отношение их площадей равно квадрату коэффициента подобия k . Поэтому $k = \frac{7}{6} = \frac{AO}{OC}$. Поскольку треугольники ABO и CBO имеют общую высоту, проведенную из вершины B , то отношение их площадей равно отношению их оснований, то есть

$$\frac{S_{ABO}}{S_{CBO}} = \frac{AO}{OC} = \frac{7}{6}.$$

Значит,

$$S_{ABO} = \frac{7}{6} S_{CBO} = \frac{7}{6} \cdot 36 = 42.$$

Поэтому и $S_{COD} = 42$. Но тогда

$$S_{ABCD} = 49 + 36 + 42 + 42 = 169 \text{ см}^2.$$

Ответ: 169 см^2 .

Задание 19

Тип задания по КТ. Задание на использование приобретенных знаний и умений в практической деятельности и повседневной жизни: анализ реальных числовых данных и информации статистического характера; осуществление практических расчетов по формулам, использование оценки и прикидки при практических расчетах.

Характеристика задания. Текстовая задача на использование приобретенных знаний и умений в практической деятельности и повседневной жизни, обычно с экономическим содержанием.

Комментарий. Относительно сложная текстовая задача, связанная с банковскими кредитами, оптимизацией производства или затрат на него.

Пример с решением. Денис планирует взять ипотечный кредит (кредит на покупку квартиры под залог квартиры) в банке на несколько лет под 10% годовых. Это означает, что каждый год он должен возвращать банку часть кредита (погашать кредит), равную сумме кредита, деленной на число лет пользования кредитом, и выплачивать банковские проценты за пользование кредитом, сумма выплат по которым подсчитывается по следующей схеме: ежегодная сумма процентов, выплачиваемых Денисом, равна

10% от непогашенной суммы кредита. Так, если кредит взят на 5 лет, то за первый год пользования кредитом Денис должен выплатить 10% от всей суммы кредита, за второй год — 10% от непогашенной суммы кредита, то есть от $\frac{4}{5}$ суммы

кредита, и т.п. При оформлении кредита банк предложил Денису выплачивать кредит ежемесячными равными платежами (аннуитетные платежи). Ежемесячный платеж по такой схеме рассчитывается следующим образом: сумма кредита и сумма процентов за все время пользования кредитом суммируются и делятся на число месяцев пользования кредитом. Денис принял предложение банка. Чему равна сумма кредита, взятого Денисом, если известно, что сумма ежемесячного платежа равна 30 000 рублей, а сумма выплачиваемых процентов оказалась равной сумме кредита?

Решение. 1. Пусть сумма кредита равна S , годовые составляют $k\%$, число лет кредита равно n . Тогда сумма выплат по процентам равна

$$S \frac{k}{100} + \left(S - \frac{S}{n}\right) \frac{k}{100} + \left(S - \frac{2S}{n}\right) \frac{k}{100} + \dots + \left(S - \frac{(n-1)S}{n}\right) \frac{k}{100}.$$

Вынесем за скобку $S \frac{k}{100n}$. Получим:

$$S \frac{k}{100n} (n + (n-1) + (n-2) + \dots + 1).$$

В скобках осталась сумма первых n натуральных чисел, которую можно найти по формуле суммы арифметической прогрессии. Эта сумма равна $\frac{n(n+1)}{2}$. Таким образом, сумма процентов, которые Денис должен выплатить банку, равна $S \frac{k(n+1)}{200}$ рублей.

2. По условию сумма процентов равна сумме кредита. Следовательно,

$$S \frac{k(n+1)}{200} = S,$$

откуда $k(n+1) = 200$. Поскольку $k = 10$, получим, что $n = 19$.

3. Сумма l ежемесячного платежа по аннуитетной схеме равна

$$\frac{S + S \frac{k(n+1)}{200}}{12n},$$

откуда

$$l = \frac{S(kn + k + 200)}{2400n}, \quad S = \frac{2400ln}{kn + k + 200}.$$

Так как $k = 10$, $n = 19$, $l = 30\,000$, находим, что

$$S = \frac{2400ln}{400} = 6ln = 6 \cdot 19 \cdot 30\,000 = 3\,420\,000 \text{ рублей.}$$

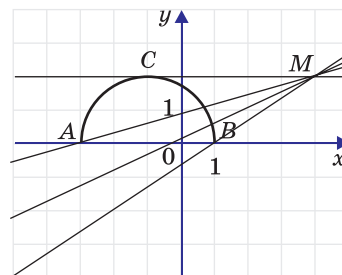
Ответ: 3 420 000 рублей.

Задание 20

Тип задания по КТ. Уравнение, неравенство или система уравнений или неравенств.

Характеристика задания. Задача с параметром, требующая уверенного владения материалом и применения нескольких свойств и теорем.

Комментарий. Это задание, как и следующее за ним, является одним из самых сложных заданий Единого государственного экзамена по математике. Оно рассчитано прежде всего на тех, кто собирается продолжать образование в вузах с повышенными требованиями к математической подготовке абитуриентов (это не обязательно вузы, готовящие математиков, физиков, программистов — к ним относятся, например, и некоторые экономические вузы). Если вы претендуете на высокий балл, то нужно постараться решить эту задачу или хотя бы продвинуться в решении этой задачи как можно дальше. Для успешного решения задачи важно свободно оперировать изученными определениями, свойствами, теоремами, применять их в различных ситуациях, анализировать условие и находить возможные пути решения. Особое внимание следует уделить задачам с параметром, решение которых основывается на таких свойствах функций как ограниченность, монотонность, четность и нечетность, требует умения находить область определения, множество значений и строить графики основных элементарных функций.



Пример с решением. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$ax + \sqrt{3 - 2x - x^2} = 4a + 2$$

имеет единственный корень.

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$\sqrt{3 - 2x - x^2} = -ax + 4a + 2$$

и рассмотрим графики функций

$$y = \sqrt{3 - 2x - x^2} \text{ и } y = -ax + 4a + 2.$$

Поскольку правая часть в формуле $y = \sqrt{3 - 2x - x^2}$ неотрицательна, то и левая ее часть не может быть отрицательной. Поэтому

$$\begin{cases} y^2 = 3 - 2x - x^2, \\ y \geq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} (x+1)^2 + y^2 = 4, \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Значит, графиком функции $y = \sqrt{3 - 2x - x^2}$ является та часть окружности $(x+1)^2 + y^2 = 4$, ординаты точек которой неотрицательны, то есть полуокружность радиуса 2 с центром в точ-

ке $(-1; 0)$, расположенная не ниже оси абсцисс. Эта полуокружность имеет с осью абсцисс общие точки $A(-3; 0)$ и $B(1; 0)$. Графиком функции $y = -ax + 4a + 2$ является прямая, которая при любом значении параметра проходит через точку $M(4; 2)$. Данное уравнение имеет единственный корень в том и только том случае, если прямая $y = -ax + 4a + 2$ пересекает полуокружность в единственной точке. Последнее возможно, если эта прямая касается полуокружности либо расположена между прямыми MA и MB так, что ее угловой коэффициент $-a \in (a_1; a_2]$, где a_1 и a_2 — угловые коэффициенты прямых MA и MB соответственно. Поскольку наиболее удаленная от оси абсцисс точка C имеет ту же ординату, что и точка M , то прямая MC , параллельная оси абсцисс, будет касательной к полуокружности. В этом случае $a = 0$. Найдем теперь a_1 и a_2 . Поскольку точка $A(-3; 0)$ принадлежит прямой $y = -ax + 4a + 2$, то ее координаты удовлетворяют уравнению этой прямой. Поэтому $0 = 3a + 4a + 2$, откуда $a = -\frac{2}{7}$. Таким образом, $a_1 = -\frac{2}{7}$. Поскольку точка $B(1; 0)$ принадлежит прямой $y = -ax + 4a + 2$, то ее координаты удовлетворяют уравнению этой прямой. Поэтому $0 = -a + 4a + 2$, откуда $a = -\frac{2}{3}$. Таким образом, $a_2 = \frac{2}{3}$, то есть единственное решение уравнения может быть получено при всех $-\frac{2}{3} \leq a < -\frac{2}{7}$.

Ответ: $\left[-\frac{2}{3}; -\frac{2}{7}\right); 0$.

Задание 21

Тип задания по КТ. Уметь строить и исследовать простейшие математические модели.

Характеристика задания. Задача, связанная со свойствами делимости целых чисел, логическим перебором.

Комментарий. Задание олимпиадного типа, рассчитанное на сильных учащихся. Чтобы продвинуться в его решении, не требуется никаких специальных знаний, выходящих за рамки стандарта математического образования, однако необходимо проявить определенный уровень математической культуры, логического мышления, который формируется при решении задач профильного уровня на протяжении всего обучения в школе. Ответ на первый вопрос задачи по силам большинству успевающих учеников, главное

здесь — не испугаться условия, дочитать его до конца и немного подумать.

Пример с решением. Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если какое-то число n , выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n , а остальные числа, равные n , стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 18, 19, 20, 22?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 5, 6, 8, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 18, 19, 21, 23, 24, 29.

Решение. а) Задуманные числа 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 дают требуемый набор, записанный на доске.

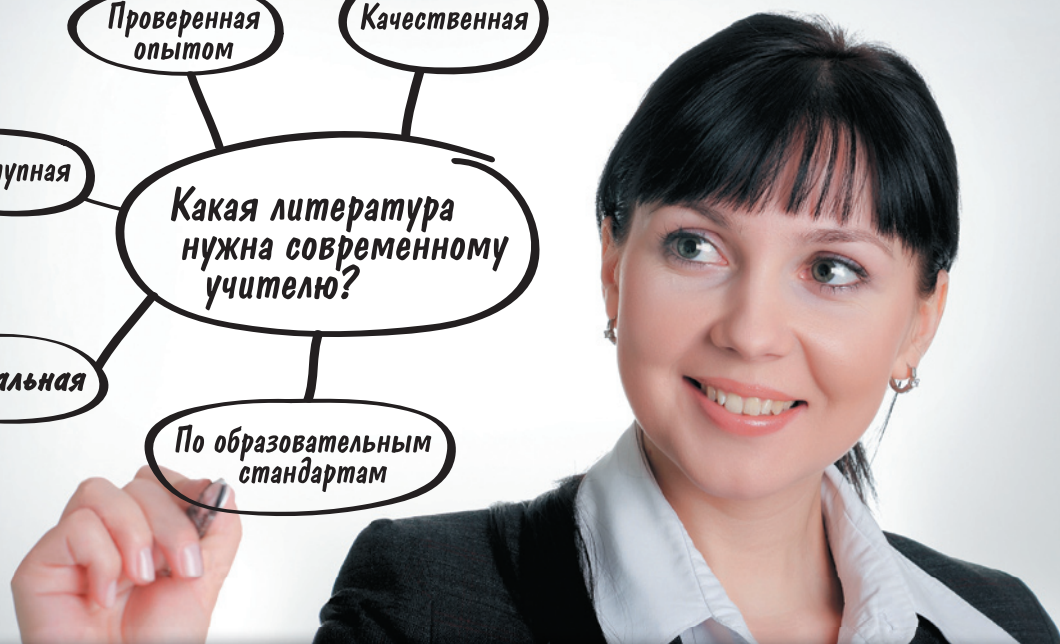
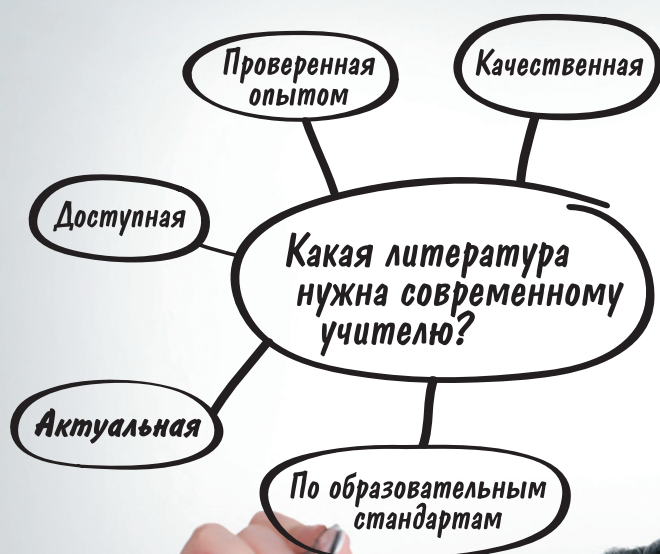
б) Поскольку задуманные числа натуральные, то наименьшее число в наборе — это наименьшее из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Среди чисел записанного набора должна быть сумма всех чисел, кроме наименьшего, то есть $22 - 1 = 21$. Но этого числа нет в наборе, поэтому не существует примера таких задуманных чисел, для которого на доске будет выписан набор из условия.

в) Число 5 — наименьшее число в наборе — является наименьшим из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Поэтому количество задуманных чисел не превосходит целой части $\frac{29}{5}$,

то есть 5. Кроме того, числа 6 и 8 меньше, чем сумма двух чисел 5, поэтому они также являются задуманными. Значит, сумма оставшихся задуманных чисел равна $29 - 5 - 6 - 8 = 10$. Таким образом, так как наименьшее задуманное число равно 5, оставшиеся задуманные числа — это 5 и 5 или 10. Для задуманных чисел 5, 5, 5, 6, 8 и 5, 6, 8, 10 на доске будет записан набор, данный в условии.

Ответ: а) 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1; б) нет; в) 5, 5, 5, 6, 8 или 5, 6, 8, 10.

■ 17 февраля 2015 года, во вторник, состоится школьный пригласительный тур олимпиады по теории вероятностей для учащихся 6–11-х классов. Школы, подключенные к телекоммуникационной системе СтатГрад, получают задания и смогут выслать результаты проверки, пользуясь сервисами системы. Школы, не подключенные к СтатГрад, могут принять участие по заявке, оставленной на сайте <http://ptlab.mcsme.ru>. Призеры и победители тура будут приглашены на основной тур VIII Заочной интернет-олимпиады: <http://www.mcsme.ru/terver/>.



КАЧЕСТВЕННАЯ ПОМОЩЬ ШКОЛЕ

РАБОЧИЕ ПРОГРАММЫ

ПРОМЕЖУТОЧНАЯ АТТЕСТАЦИЯ

ФГОС КОНТРОЛЬНО-ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

СБОРНИКИ ЗАДАНИЙ И РАБОЧИЕ ТЕТРАДИ

МАСТЕРСКАЯ учителя математики

Издательство Vako

www.vaco.ru

А. БЛИНКОВ,
А. БАННИКОВА,
А. ИВАНИЩУК,
Н. НАКОНЕЧНЫЙ,
П. ЧУЛКОВ
г. Москва

8 класс

ТУРНИР АРХИМЕДА

МОСКОВСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ РЕГАТА

В регате 8-х классов участвовало 80 команд. Гостями Москвы на этот раз были команды физико-математической школы № 5 г. Долгопрудного и ФМШ № 30 г. Санкт-Петербурга, а также городов Люберец, Подольска и Сарова.

14 лучших команд были награждены дипломами и математической литературой. Абсолютным победителем регаты стала одна из команд ФМШ № 2007 г. Москвы, набравшая максимально возможное количество баллов.

Материалы регат предыдущих лет опубликованы на сервере МЦНМО (<http://olympiads.mccme.ru/regata>). Подробно о том, как проводятся математические регаты и материалы всех прошедших регат, — см.: Московские математические регаты / Сост. А.Д. Блинков, В.М. Гуровиц, Е.С. Горская. — М.: МЦНМО, 2014 (в двух частях).

Условия задач

Первый тур

(10 минут; каждая задача — 6 баллов)

- 1.1. Найдите сумму цифр в десятичной записи числа $4^{12} \cdot 5^{21}$.
- 1.2. Диагональ BD параллелограмма $ABCD$ образует углы по 45° со стороной BC и высотой, проведенной из вершины D к стороне AB . Найдите угол ACD .
- 1.3. Может ли разность квадратов двух простых чисел быть квадратом натурального числа?

Второй тур

(15 минут; каждая задача — 7 баллов)

- 2.1. Для чисел a , b и c выполняется равенство $\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2} = \frac{a}{c}$. Следует ли из него, что $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$?

- 2.2. Полуокружность с диаметром AD касается катета BC прямоугольного треугольника ABC в точке M (рис. 1). Докажите, что AM — биссектриса угла BAC .

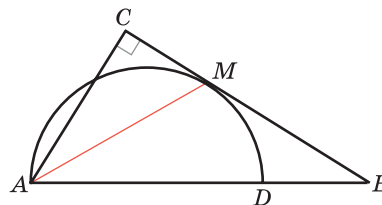


Рис. 1

2.3. Найдутся ли такие три натуральных числа, что сумма любых двух из них — степень тройки?

Третий тур

(20 минут; каждая задача — 8 баллов)

3.1. Три математика ехали в разных вагонах одного поезда. Когда поезд подъезжал к станции, математики насчитали на перроне 7, 12 и 15 скамеек. А когда поезд отъезжал, один из математиков насчитал скамеек в три раза больше, чем другой. А сколько скамеек насчитал третий?

3.2. В квадрате $ABCD$ со стороной 1 точка F — середина стороны BC , E — основание перпендикуляра, опущенного из вершины A на DF . Найдите длину BE .

3.3. Можно ли расставить шесть фотографий на площади таким образом, чтобы каждый из них мог сфотографировать ровно четырех других? (Фотографы A и B могут сфотографировать друг друга, если на отрезке AB нет других фотографий.)

Четвертый тур

(25 минут; каждая задача — 9 баллов)

4.1. На диске хранится 2013 файлов размером 1 Мб, 2 Мб, 3 Мб, ..., 2012 Мб, 2013 Мб. Можно ли их распределить по трем папкам так, чтобы в каждой папке было одинаковое количество файлов и все три папки имели один и тот же размер (в Мб)?

4.2. На равных сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки M и N соответственно так, что $AC = CM$ и $MN = NB$. Высота треугольника, проведенная из вершины B , пересекает отрезок CM в точке H . Докажите, что NH — биссектриса угла MNC .

4.3. Толя выложил в ряд 101 монету достоинством 1, 2 и 3 копейки. Оказалось, что между любыми двумя копеечными монетами лежит хотя бы одна монета, между любыми двумя двухкопеечными монетами лежат хотя бы две монеты, а между любыми двумя трехкопеечными монетами лежат хотя бы три монеты. Сколько трехкопеечных монет могло быть у Толи?

Ответы, решения, комментарии

1.1. 8.

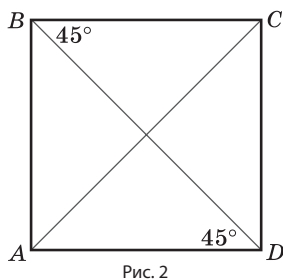
Преобразуем:

$$4^{12} \cdot 5^{21} = 2^{24} \cdot 5^{21} = 2^3 \cdot 2^{21} \cdot 5^{21} = 2^3 \cdot 10^{21} = 8 \cdot 10^{21} = 8 \underbrace{0 \dots 0}_{21}.$$

Сумма цифр полученного числа равна 8.

1.2. 45° .

Из условия задачи следует, что указанная высота параллельна стороне BC , следовательно, эта высота совпадает со стороной DA , значит, $ABCD$ — прямоугольник (рис. 2).



Так как $\angle ABD = \angle CBD = 45^\circ$, то BD — биссектриса угла B этого прямоугольника, значит, $ABCD$ — квадрат. Следовательно, CA — биссектриса угла C квадрата, то есть $\angle ACD = 45^\circ$.

1.3. Да, может.

Например,

$$5^2 - 3^2 = 4^2 \text{ или } 13^2 - 5^2 = 12^2.$$

Комментарий. Существуют и другие примеры, но найти их гораздо труднее. Используя

свойства пифагоровых троек, можно доказать, что во всех остальных случаях для выполнения равенства $p^2 - q^2 = n^2$ (p и q — простые числа, n — натуральное) число n должно быть кратно 60. Приведем еще два примера, учитывающих это соображение:

$$61^2 - 11^2 = 60^2 \text{ и } 181^2 - 19^2 = 180^2.$$

2.1. Нет, не следует.

Например, при $a = c = 1$, $b = 2$ первое равенство выполняется, а второе — нет. Значит, второе равенство не является следствием первого.

Комментарий. Существуют и другие примеры. Подобрать пример можно исходя из различных соображений. Приведем два возможных хода рассуждений.

1. Заметим, что при $a = c \neq 0$ равенство $\frac{a^2 + b^2}{b^2 + c^2} = \frac{a}{c}$ становится тождеством. Второе равенство в этом случае примет вид $\frac{a}{b} = \frac{b}{a}$ и будет выполняться, только если $|a| = |b| \neq 0$.

2. Из равенства $\frac{a^2 + b^2}{b^2 + c^2} = \frac{a}{c}$ следует, что

$$a^2c + b^2c = ab^2 + ac^2 \Leftrightarrow ac(a - c) = b^2(a - c) \Leftrightarrow (ac - b^2)(a - c) = 0 \Leftrightarrow b^2 = ac \text{ или } a = c.$$

Равенство $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ при $b \neq 0$ и $c \neq 0$ примет вид $b^2 = ac$.

Значит, выбрав ненулевые значения переменных так, чтобы $a = c$ и $b^2 \neq ac$, мы получим ситуа-

цию, при которой первое равенство выполняется, а второе — не выполняется.

2.2. Проведем радиус OM данной полуокружности, тогда $OM = OA$ (рис. 3). Следовательно, $\angle OAM = \angle OMA$. Кроме того, $OM \perp BC$, значит, $OM \parallel AC$, поэтому $\angle CAM = \angle OMA$. Таким образом, $\angle OAM = \angle CAM$, то есть AM — биссектриса угла BAC .

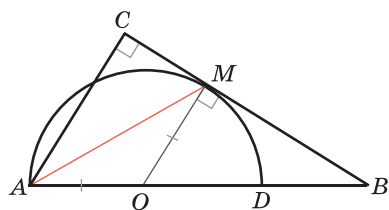


Рис. 3

2.3. Нет, не найдутся.

Пусть нашлось три числа, удовлетворяющих условию. Но среди любых трех чисел найдется два числа одинаковой четности. Их сумма — четное число, а любая степень тройки — нечетное число.

Полученное противоречие показывает, что требуемых чисел не существует.

3.1. 7.

Из условия задачи следует, что каждый из математиков в своих подсчетах учел все скамейки на станции ровно по одному разу, то есть в итоге они насчитали равное количество скамеек. Тогда если после отправления поезда третий математик насчитал n скамеек, то второй должен был насчитать $(n + 3)$ скамейки, а первый — $(n + 8)$ скамеек.

Таким образом,

$$\frac{n+8}{n+3} = 3, \text{ или } \frac{n+3}{n} = 3, \text{ или } \frac{n+8}{n} = 3.$$

Первые два уравнения не имеют натуральных корней, а решением третьего уравнения является $n = 4$. Следовательно, всего на станции 19 скамеек, а математик, о котором спрашивается в задаче, — тот, кто при подъезде к станции насчитал 12 скамеек. Значит, при отъезде от станции он насчитал 7 скамеек.

3.2. 1.

Способ I. Продолжим отрезок DF до пересечения с прямой AB в точке K (рис. 4). Прямоугольные треугольники KBF и DCF равны (по катету и острому углу), значит, $KB = DC$. Таким образом, EB — медиана прямоугольного треугольника $AЕК$, проведенная к гипотенузе, поэтому

$$BE = \frac{1}{2} AK = 1.$$

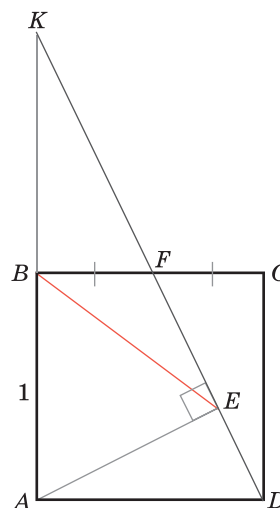


Рис. 4

Способ II. Так как $\angle ABF = \angle AEF = 90^\circ$, то около четырехугольника $ABFE$ можно описать окружность, значит, $\angle EAB = \angle CFD$ (рис. 5).

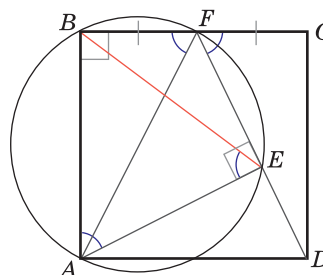


Рис. 5

Проведем отрезок AF , тогда из равенства треугольников ABF и DCF получим, что $\angle CFD = \angle AFB$. В свою очередь, $\angle AFB = \angle AEB$ (вписанные углы, опирающиеся на одну дугу). Таким образом, $\angle BAE = \angle AEB$, поэтому треугольник ABE равнобедренный: $BE = AB = 1$.

3.3. Да, можно.

Например, см. рисунок 6.

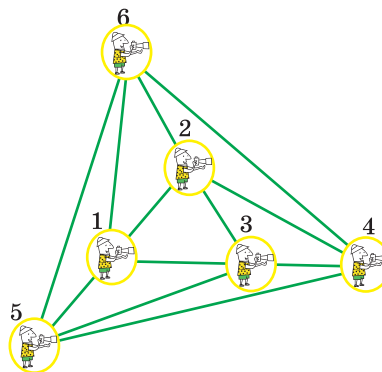


Рис. 6

Комментарий. Не смогут сфотографировать друг друга только фотографии 1 и 4, 2 и 5, 3 и 6.

4.1. Да, можно.

Способ I. Заметим, что

$$\begin{aligned} x + (x + 5) &= (x + 1) + (x + 4) = \\ &= (x + 2) + (x + 3), \end{aligned}$$

поэтому 6 файлов, размерами которых (в Мб) являются шесть последовательных натуральных чисел, можно распределить по трем папкам требуемым образом.

Аналогично, из равенства

$$\begin{aligned} y + (y + 5) + (y + 7) &= \\ &= (y + 1) + (y + 3) + (y + 8) = \\ &= (y + 2) + (y + 4) + (y + 6) \end{aligned}$$

следует, что 9 файлов, размерами которых в Мб являются девять последовательных натуральных чисел, также можно распределить по трем папкам требуемым образом.

Уравнение

$$6n + 9m = 2013 \Leftrightarrow 2n + 3m = 671$$

имеет натуральные решения, например, $m = 1$; $n = 334$. Это означает, что, разбивая числа от 1 до 2013 на одну «девятку» и 334 «шестерки» последовательных натуральных чисел (любым способом) и распределяя соответствующие файлы по трем папкам указанным выше образом, мы получим требуемое распределение.

Комментарий. Отметим, что указанное распределение можно осуществить многими способами. Действительно, уравнение $2n + 3m = 671$ имеет 112 натуральных решений, а для каждой пары решений существует много способов выбора «шестерок» и «девяток».

Способ II. Возьмем файлы парами и сначала разложим их в три папки следующим образом:

- 1) 1 + 2013, 4 + 2010, ...
- 2) 2 + 2012, 5 + 2009, ...
- 3) 3 + 2011, 6 + 2008, ...

В этих папках будет одинаковое количество файлов, и папки будут иметь один и тот же размер. Так как число 2013 при делении на 6 дает остаток 3, то в конце этого процесса останется три файла с размерами $2014 : 2 = 1007$ Мб, 1006 Мб и 1008 Мб.

Теперь поступим так: положим файл размером 1007 Мб в папку «3», а в папках «1» и «2» поменяем местами файлы размерами 1 Мб и 2 Мб и добавим в них файлы размерами 1006 Мб и 1008 Мб соответственно. Тем самым в каждую папку будет добавлено 1007 Мб и условие задачи будет выполнено.

Комментарий. Отметим, что в результате требуемого распределения каждая из трех папок будет иметь размер

$$\frac{1+2013}{2} \cdot 2013 : 3 = 675\,697 \text{ Мб.}$$

4.2. Пусть $\angle ABH = \alpha$ (рис. 7). Так как высота BD данного треугольника является и биссектрисой, то $\angle ABC = 2\alpha$. Треугольник BNM — равнобедренный, поэтому $\angle BMN = \angle ABC = 2\alpha$. Треугольник ACM также равнобедренный, значит, $\angle CMA = \angle CAM = 90^\circ - \alpha$.

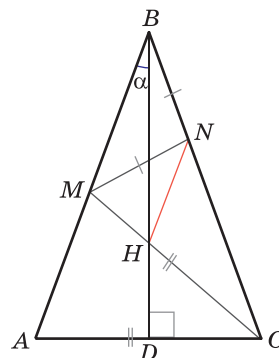


Рис. 7

Таким образом,

$$\begin{aligned} \angle CMN &= 180^\circ - \angle BMN - \angle CMA = \\ &= 180^\circ - 2\alpha - (90^\circ - \alpha) = 90^\circ - \alpha. \end{aligned}$$

Следовательно, MC — биссектриса угла AMN . Так как BD — биссектриса внутреннего угла треугольника BMN , а MC — биссектриса его внешнего угла, то точка H их пересечения является центром вневписанной окружности этого треугольника. Следовательно, NH — биссектриса внешнего угла MNC треугольника BMN .

4.3. 25 или 26.

Рассмотрим четыре монеты, лежащие подряд. Из условия задачи следует, что среди них не может быть более одной трехкопеечной монеты, более двух двухкопеечных и более двух копеечных монет.

Пусть нашлась такая четверка монет, среди которых вообще нет трехкопеечных, тогда в этой четверке копеечных и двухкопеечных монет должно быть ровно по две. Но это невозможно, так как между любыми двухкопеечными должны лежать две монеты, а копеечные монеты при этом лежать рядом не могут. Таким образом, среди любых четырех монет, лежащих подряд, есть ровно одна трехкопеечная монета.

Так как $101 = 4 \cdot 25 + 1$, то трехкопеечных монет может оказаться либо 25, либо 26.

Примеры:

1) для 25 монет:
1 3 1 2 | 1 3 1 2 | ... | 1 3 1 2 | 1
(25 групп вида 1312 и монета 1);

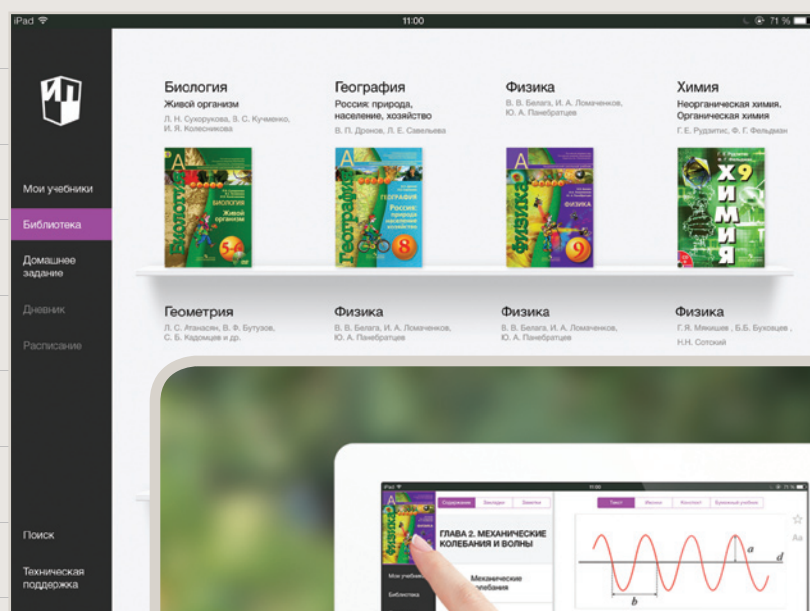
2) для 26 монет:
3 1 2 1 | 3 1 2 1 | ... | 3 1 2 1 | 3
(25 групп вида 3121 и монета 3).



ЭЛЕКТРОННЫЙ УЧЕБНИК

для учителя и ученика

К 1 сентября 2015 года издательство подготовит электронные учебники по всем предметам школьной программы. Электронные учебники будут доступны для апробации педагогам, образовательные организации которых участвуют в проекте «Школа цифрового века»



Технологические особенности:

- ✓ Работает на планшетах iOS, Android, Windows
- ✓ Многослойный (тексты, словари, мультимедийные объекты и др.)
- ✓ «Легкий» (30 секунд для скачивания и установки)

Особенности контента:

- ✓ Разные формы представления содержания параграфов
- ✓ Большая база интерактивных объектов и сервисов, в том числе для интерактивной доски
- ✓ Инструменты и сервисы для удобства работы учеников с ограниченными возможностями здоровья

А. БЛИНКОВ, Е. ГЛАДКОВА,
Е. ГОРСКАЯ, В. ГУРОВИЦ,
А. ИВАНИЦУК, И. РАСКИНА,
А. ХАЧАТУРЯН, Д. ШНОЛЬ,
г. Москва

XI ТВОРЧЕСКИЙ КОНКУРС УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

■ 21 сентября 2014 года в Москве состоялся XI Творческий конкурс учителей математики. Он был организован Московским центром непрерывного математического образования совместно с Центром педагогического мастерства, журналом «Математика» («Первое сентября»), Ассоциацией учителей математики г. Москвы и математическим факультетом Московского педагогического государственного университета при поддержке Департамента образования г. Москвы и негосударственного фонда Дмитрия Зимина «Династия».

В творческом конкурсе стимулируется проявление профессиональных качеств учителя математики. В ходе работы участники могут продемонстрировать умение решать задачи, умение найти ошибку в чужом решении и отличить верное решение от неверного, знание различных разделов школьной программы и свою математическую эрудицию.

Победители и призеры предыдущего конкурса не могли стать победителями или призерами этого, что не помешало некоторым из них принять участие вне конкурса и показать результаты на уровне победителей и призеров. Вместе с тем, как и в прошлые годы, для расширения рамок проведения конкурса на него были приглашены (за счет организаторов) победители и призеры IX заочного конкурса, который был проведен в первой половине года совместно с журналом «Математика», а также победители и призеры интернет-тура десятого очного конкурса. Поэтому среди участников очного тура конкурса, помимо учителей из Москвы и Подмоскovie, были учителя из Дагестана, Казахстана, Мордовии, Татарстана, Волгоградской и Кировской областей, Ставропольского края, Санкт-Петербурга, Саратова и Челябинска.

Вариант традиционно включал в себя 10 заданий, разбитых на два блока. Первый блок — задачи, которые требовалось решить; второй блок, методический, — «задачи», взятые из реальных математических источников, и их «решения», в которых требовалось найти ошибки, а также задания, требующие понимания логики построения школьного курса и владения методикой объяснения школьникам характера допущенной ошибки.

Каждое задание оценивалось из 10 баллов. На выполнение заданий очного тура отводилось 4,5 часа.

Для тех учителей, которые не имели возможности приехать на очный тур, как и в прошлые годы, был проведен заочный тур конкурса по Интернету. Одновременно с началом конкурса в Москве на портале МЦНМО были выложены задания конкурса и анкета для участников заочного интернет-тура. В интернет-туре приняли участие учителя из многих городов России, а также из Беларуси и Казахстана.



46

Творческий конкурс являлся открытым, для участия в очном туре достаточно было предварительно зарегистрироваться, а для участия в интернет-туре не требовалось и этого.

Всем участникам была обеспечена полная анонимность участия и объективность проверки, так как работы были зашифрованы. Каждый участник мог узнать результат проверки только своей работы. Победителями или призерами конкурса могли стать школьные учителя, имеющие в текущем учебном году не менее 9 часов в неделю преподавательской нагрузки. Возможность стать победи-

телем или призером интернет-тура не зависела от успешности участия в предыдущих конкурсах.

По итогам конкурса были выделены две номинации: победители (набравшие более 80 баллов) и призеры (набравшие не менее 60 баллов). Все они награждены специальными дипломами. Кроме того, победители очного тура конкурса получают индивидуальные денежные гранты фонда «Династия», а призеры очного тура (а также победители и призеры интернет-тура) — научно-популярную и методическую литературу, представленную МЦНМО.

Задания, ответы, решения, комментарии и критерии проверки

I. Решите задачи

1. Квадраты. (А. Шаповалов) Из клетчатой бумаги по линиям сетки вырезали большой квадрат. Из него, также по линиям сетки, вырезали меньший квадрат. После этого от большого квадрата осталось ровно 79 клеток. Обязательно ли вырезанный квадрат содержал одну из угловых клеток большого?

Ответ: да, обязательно.

Решение. Пусть большой квадрат содержал N^2 клеток, а вырезанный квадрат содержит M^2 клеток, тогда

$$N^2 - M^2 = 79, \text{ то есть } (N - M)(N + M) = 79.$$

Так как 79 — простое число, то

$$\begin{cases} N + M = 79, \\ N - M = 1. \end{cases}$$

Решением этой системы является $N = 40$, $M = 39$, следовательно, вырезанный квадрат примыкал к двум сторонам большого, то есть содержал одну из его угловых клеток.

Комментарий. Отметим, что заключительный вывод можно сделать, не решая системы. Он следует из равенства $N - M = 1$.

Критерии проверки:

полное обоснованное решение — 10 баллов;
приведено верное рассуждение, в котором есть мелкие пробелы или неточности, — 8 баллов;
приведен только верный ответ — 1 балл.

2. Прямые. (Фольклор, предложил Д. Шноль.) Даны две скрещивающиеся прямые. Все прямые, которые пересекают обе данные, красят в синий цвет. Укажите все точки пространства, которые останутся неокрашенными.

Ответ: неокрашенными останутся все точки двух параллельных плоскостей, каждая из которых содержит одну из данных прямых, за исключением точек, принадлежащих этим прямым.

Решение. Пусть даны скрещивающиеся прямые a и b . Проведем через прямую a плоскость

α , а через прямую b — плоскость β так, чтобы α и β были параллельны.

Пусть точка C лежит в плоскости α , но не принадлежит прямой a . Тогда любая прямая, проходящая через C и пересекающая a , лежит в плоскости α . Такая прямая не может пересечь b , поскольку $b \parallel \alpha$. Значит, все такие точки C будут неокрашенными.

Пусть точка C не лежит в плоскости α , тогда проведем плоскость γ через C и a . Так как γ пересекает α , то она пересекает и β по некоторой прямой c , причем $c \parallel a$ (рис. 1). Следовательно, прямая c не параллельна прямой b , но они лежат в одной плоскости, значит, c и b пересекаются в некоторой точке B . Тогда прямая BC , лежащая в плоскости γ , пересекает прямую a . Значит, все такие точки C будут окрашенными.

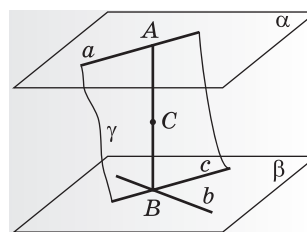


Рис. 1

Если же точка C принадлежит прямой a , то выбираем любую точку B на прямой b , и прямая BC будет окрашена.

Для плоскости β рассуждения аналогичны.

Таким образом, если точка C , не принадлежащая данным прямым, лежит в плоскости, содержащей одну из этих прямых и параллельной другой прямой, то точка C будет неокрашенной. В противном случае она будет окрашенной.

Критерии проверки:

полное обоснованное решение — 10 баллов;
приведено верное в целом рассуждение, получен верный ответ, но в обоснованиях есть пробелы или недочеты, — 7–9 баллов;

приведено верное рассуждение, но не рассмотрены точки, принадлежащие данным прямым, — 8 баллов;

доказано, что точки, лежащие в плоскостях α и β и не лежащие на данных прямых, не окрашены, но не доказано, что других неокрашенных точек нет, — 4 балла;

приведен только верный ответ — 2 балла.

3. График. (Д. Шноль) На рисунке 2 схематически изображен график многочлена (*график касается оси x в двух точках*). Какую наименьшую степень может иметь этот многочлен?

Ответ: шестую степень.

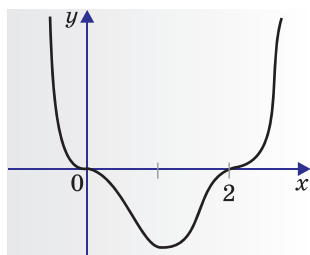


Рис. 2

Решение. График многочлена касается оси x в двух точках, но при переходе через каждую из них вид монотонности не изменяется. Значит, в этих точках производная многочлена имеет нули и при переходе не меняет знак, то есть это нули четной кратности. Еще один нуль производная имеет в точке минимума функции. Следовательно, производная имеет как минимум пять корней (с учетом кратности), то есть является многочленом степени не меньше пяти. Значит, исходный многочлен имеет степень не меньше шести.

Приведем пример многочлена шестой степени, удовлетворяющего условию задачи:

$$P(x) = ax^3(x-2)^3, a > 0.$$

Его производная равна

$$P'(x) = 6ax^2(x-2)^2(x-1).$$

Тогда $x = 1$ — точка минимума $P(x)$, а $x = 0$ и $x = 2$ — точки касания его графика с осью абсцисс, которые также являются его точками перегиба.

Комментарий. Оценку можно также сделать, рассмотрев вторую производную многочлена, график которого изображен на рисунке. Так как

данный график имеет четыре точки перегиба (две точки в нулях функции и две — между нулями и точкой минимума), то вторая производная является многочленом, степень которого не меньше четырех. Следовательно, степень исходного многочлена не меньше шести.

Критерии проверки:

полное обоснованное решение — 10 баллов;

приведено верное в целом рассуждение, но некоторые использованные и неочевидные утверждения не обоснованы — 8–9 баллов;

приведено верное рассуждение, но допущена арифметическая ошибка — 8–9 баллов;

доказано только, что степень многочлена не меньше шести, — 7 баллов;

приведены только верный ответ и пример — 3 балла;

приведен только верный ответ — 2 балла.

4. Уравнение. (Р. Хонсбергер) Докажите, что при всех натуральных n уравнение

$$1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} = n^2 \quad (*)$$

имеет хотя бы один рациональный корень, принадлежащий интервалу $(1; 2)$.

Решение. Докажем, что уравнение $(*)$ имеет корень $\frac{n+1}{n}$, принадлежащий интервалу $(1; 2)$.

Способ I. Разделим многочлен

$$nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + \dots + 3x^2 + 2x + 1 - n^2$$

на $x - \frac{n+1}{n}$, записав это деление в виде схемы Горнера (во второй строке таблицы показаны промежуточные вычисления).

Так как многочлен разделился без остатка, то $\frac{n+1}{n}$ — его корень, тогда этот же корень имеет и исходное уравнение.

Способ II. Преобразуем уравнение $(*)$, умножив обе его части на $x-1$ (это не приведет к появлению посторонних корней на интервале $(1; 2)$). Получим:

$$-1 - x - x^2 - x^3 - \dots - x^{n-1} + nx^n = n^2(x-1).$$

Далее используем формулу суммы геометрической прогрессии:

$$-\frac{x^n - 1}{x - 1} + nx^n = n^2(x-1).$$

Затем, умножив еще раз обе части на $x-1$, получим:

$$nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1 = n^2(x-1)^2.$$

	n	$n-1$	$n-2$	...	3	2	$1-n^2$
		$\frac{n+1}{n} \cdot n + n - 1$	$\frac{n+1}{n} \cdot 2n + n - 2$	...	$\frac{n+1}{n} (n-3)n + 3$	$\frac{n+1}{n} (n-2)n + 2$	$\frac{n+1}{n} (n-1)n + 1 - n^2$
$\frac{n+1}{n}$	n	$2n$	$3n$	...	$(n-2)n$	$(n-1)n$	0

При подстановке в это уравнение $x = \frac{n+1}{n}$ получим верное равенство, значит, это число является как его корнем, так и корнем исходного уравнения.

Способ III. Рассмотрим функцию

$$F(x) = x + x^2 + x^3 + \dots + x^n.$$

Так как

$$F'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + nx^{n-1},$$

то данное уравнение имеет вид:

$$F'(x) = n^2.$$

Используя формулу суммы геометрической прогрессии, получим, что на интервале (1; 2)

$$F(x) = \frac{x^{n+1} - x}{x - 1}.$$

Найдем ее производную:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{((n+1)x^n - 1)(x-1) - (x^{n+1} - x)}{(x-1)^2} = \\ &= \frac{n \cdot x^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}. \end{aligned}$$

Теперь уже несложно проверить, что $x = \frac{n+1}{n}$ является корнем уравнения $F'(x) = n^2$.

Комментарий. Можно также сразу подставить $x = \frac{n+1}{n}$ в исходное уравнение и доказать полученное равенство методом математической индукции.

Угадать корень уравнения помогает теорема о рациональных корнях многочлена с целыми коэффициентами и решение данного уравнения при $n = 2, 3, 4$.

Критерии проверки:

полное обоснованное решение — 10 баллов;

рациональный корень угадан верно, но не показано, что он действительно является корнем данного уравнения, — 3 балла;

доказано, что уравнение имеет корень на интервале (1; 2), но не доказано, что он рациональный, — 0 баллов.

Некоторые участники указывали, что при $n = 1$ уравнение становится числовым равенством, поэтому говорить о его корнях бессмысленно. Наличие или отсутствие этого соображения никак не влияло на оценку, выставляемую жюри.

5. Треугольник. (Фольклор) В треугольнике ABC выполняется равенство $3AC = AB + BC$. Вписанная в треугольник окружность касается сторон AB и BC в точках K и L соответственно; DK и EL — ее диаметры. Докажите, что точки пересечения прямых AE и CD с прямой KL равноудалены от середины отрезка AC .

Решение. Предварительно докажем две леммы.

Лемма 1. Пусть в треугольнике ABC вписанная и невписанная окружности касаются сто-

роны BC в точках K и M соответственно. Точки I и Q — центры этих окружностей, точка F на вписанной окружности диаметрально противоположна точке K (рис. 3). Тогда точки A , F и M лежат на одной прямой.

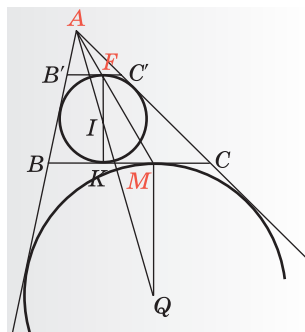


Рис. 3

Доказательство. Рассмотрим гомотегию с центром A , при которой образом точки Q является точка I . Тогда образом касательной BC к невписанной окружности является касательная $B'C'$ к вписанной окружности, причем $B'C'$ параллельна BC . Так как QM перпендикулярна BC , то QM параллельна KF , значит, образом точки M при этой гомотегии является точка касания $B'C'$ и вписанной окружности, которая совпадает с точкой F .

Лемма 2. Пусть окружность, вписанная в треугольник ABC , касается сторон AB и BC в точках K и L соответственно, а биссектриса угла BAC пересекает отрезок KL в точке P . Тогда $\angle APC = 90^\circ$.

Доказательство. Пусть I — центр вписанной окружности, тогда $IL \perp BC$ (рис. 4). Введем стандартные обозначения для углов треугольника:

$$\angle A = 2\alpha, \angle B = 2\beta, \angle C = 2\gamma.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \angle BKL &= 90^\circ - \beta, \\ \angle APK &= 90^\circ - \beta - \alpha = \gamma = \angle ICL. \end{aligned}$$

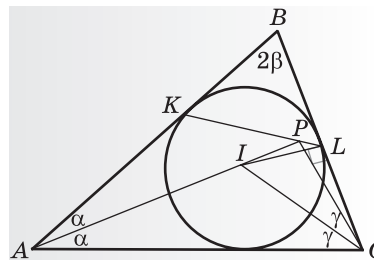


Рис. 4

Следовательно, четырехугольник $IPLC$ вписанный, значит,

$$\angle APC = \angle IPC = \angle ILC = 90^\circ.$$

Теперь — решение предложенной задачи.

Из условия $3AC = AB + BC$ следует, что

$$BK = BL = \frac{AB + BC - AC}{2} = AC.$$

Пусть лучи AE и CD пересекают стороны BC и AB в точках A' и C' соответственно (рис. 5). Из того, что DK и EL — диаметры окружности, по лемме 1 следует, что A' и C' — точки касания вневписанных окружностей треугольника ABC со сторонами BC и AB соответственно. Так как точки касания вписанной и вневписанной окружностей с одной и той же стороной треугольника симметричны относительно середины этой стороны, то $A'C = AC = AC'$, то есть треугольники ACA' и CAC' равнобедренные.

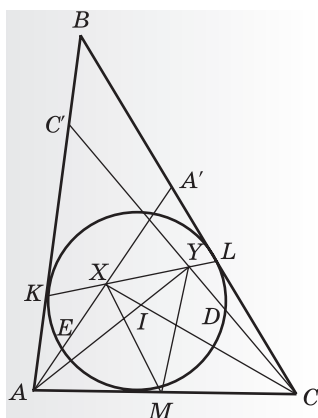


Рис. 5

Пусть CX — биссектриса треугольника ACA' , тогда $\angle AXC = 90^\circ$, то есть точка X лежит на отрезке KL (лемму 2). Аналогично, основание Y биссектрисы AY треугольника CAC' также лежит на KL . Так как $\angle AXC = \angle AYC = 90^\circ$, то четырехугольник $AXYC$ вписанный с диаметром AC . Середина M стороны AC — центр окружности, поэтому $MX = MY$.

Комментарий. Использованная лемма 2 — это задача № 255 из задачника И.Ф. Шарыгина «Геометрия, 9–11», на которую опирается решение многих геометрических задач.

Существуют и другие способы решения.

Критерии проверки:

полное обоснованное решение — 10 баллов;

приведено верное в целом рассуждение, а использованные леммы (или аналогичные утверждения) только сформулированы, но никак не обоснованы — 8 баллов;

приведены верные идеи решения, но до конца оно не доведено — 1–3 балла.

Отметим, что счетные решения (методом декартовых или барицентрических координат, векторным методом и пр.) оценивались положительно только в том случае, если были доведены до конца.

II. Методический блок

В заданиях № 6 и № 7 могут содержаться математические ошибки (как в условиях «задач», так и в «ответах» и «решениях»). Если некорректно условие «задачи», то объясните, почему это так. Если неверно только «решение», то укажите все ошибки и приведите верное решение.

6. Делители. (Предложил Д. Шноль.) «Задача». Сколько существует натуральных чисел, меньших 200, имеющих ровно 4 делителя и делящихся на 5?

«Ответ»: 10.

«Решение». У любого числа два делителя определяются однозначно: 1 и само число. Третий делитель по условию равен 5. Значит, четвертый должен быть простым числом: 3, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37. Таким образом, искомым чисел ровно 10.

Комментарий. «Решение» содержит две ошибки. Число, которое имеет ровно четыре делителя, представимо либо в виде $p \cdot q$, либо в виде p^3 (где p и q — различные простые числа). Последний случай в «решении» упущен и тем самым потеряно число $5^3 = 125$. Кроме того, среди простых чисел, меньших 40, пропущено число 2. Таким образом, верный ответ: 12.

Критерии проверки:

указаны оба пропущенных числа, объяснено, из-за чего пропущено число 125, и показано, что других решений нет, — 10 баллов;

указано, что пропущено число 125, объяснено, из-за чего это произошло, показано, что других решений не возникает, но пропущенный делитель 2 не замечен — 6 баллов;

указаны оба пропущенных числа, но никаких объяснений нет, то есть указана только ошибка в «ответе» — 4 балла;

указано только, что пропущен делитель 2 или пропущено число 125, — 2 балла;

приведен только верный ответ — 1 балл.

7. Значение выражения. (Использована идея задачи из математической регаты 9-го класса (2013/14 уч. г.). Предложил А. Блинков.) «Задача». Положительные числа x , y и z таковы, что

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} = 1.$$

Какие значения может принимать выражение

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} ?$$

«Ответ»: 0.

«Решение». Заметим, что

$$\frac{x^2}{y+z} + x = \frac{x^2 + xy + xz}{y+z} = \frac{x}{y+z} (x+y+z).$$

Аналогично,

$$\frac{y^2}{z+x} + y = \frac{y}{z+x} (x+y+z)$$

и

$$\frac{z^2}{x+y} + z = \frac{z}{x+y} (x+y+z).$$

Сложим почленно три полученных равенства, введя следующие обозначения:

$$A = \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y},$$

$$B = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y},$$

и вынося за скобки в правой части выражение $x+y+z$. Тогда

$$B + (x+y+z) = (x+y+z)A.$$

По условию $A = 1$, поэтому $B = 0$.

Комментарий. Заметим, что полученный «ответ» не может быть верным, так как при положительных значениях x , y и z выполняется неравенство

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} > 0.$$

При этом рассуждения в «решении» ошибок не содержат. Значит, некорректно условие «задачи». Это можно обосновать по-разному.

Способ I. Преобразуем равенство из условия «задачи»: при $x > 0$, $y > 0$ и $z > 0$

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} = 1,$$

следовательно,

$$x(z+x)(x+y) + y(y+z)(x+y) + z(y+z)(z+x) = (x+y)(y+z)(z+x).$$

После раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых получим равенство:

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz = 0,$$

которое не может быть верным при положительных значениях всех переменных.

Способ II. Докажем, что при $x > 0$, $y > 0$ и $z > 0$ выполняется неравенство

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \geq 1,5.$$

Пусть

$$x+y=a, y+z=b, z+x=c,$$

тогда

$$x+y+z = \frac{a+b+c}{2}.$$

Выразим x , y и z :

$$x = \frac{a+c-b}{2}, y = \frac{a+b-c}{2}, z = \frac{b+c-a}{2}.$$

Таким образом,

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} = \frac{a+c-b}{2b} + \frac{a+b-c}{2c} + \frac{b+c-a}{2a} =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{b} - 1 + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} - 1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} - 1 \right) \geq \frac{3}{2},$$

так как сумма двух взаимно обратных положительных чисел больше или равна двум.

Комментарий. Доказанное неравенство — это № 6.79 из задачника М.Л. Галицкого, А.М. Гольдмана, Л.И. Звавича для 8–9-х классов. Кроме того, использованная замена переменных имеет еще и геометрическую интерпретацию. Рассмотрим треугольник ABC (со сторонами a , b и c) и вписанную в него окружность, тогда $x = p - b$, $y = p - c$, $z = p - a$ ($2p$ — периметр ABC) — это расстояния от вершин треугольника до точек касания окружности с его сторонами (рис. 6).

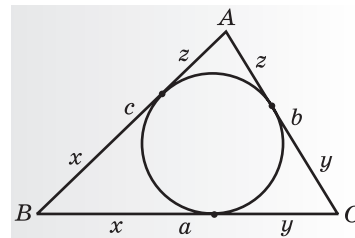


Рис. 6

В некоторых работах была приведена такая схема рассуждения «от противного»: обосновывалось, почему приведенный «ответ» не может быть верным, затем объяснялось, что в «решении» ошибок нет, после чего делался вывод о некорректности условия «задачи».

С формальной точки зрения это верное рассуждение, но оно никак не отражает «повседневную работу учителя», поскольку не показывает суть ошибки, допущенной в условии. Тем не менее жюри засчитывало такое решение, если оно не содержало логических ошибок (в частности, если не указывалось, что все преобразования в «решении» равносильны, что не соответствует действительности, так как на самом деле имеет место следствие).

Критерии проверки:

верно и полностью объяснено, почему условие «задачи» некорректно (любым из способов), — 10 баллов;

приведено рассуждение «от противного», содержащее незначительные пробелы или неточности, — 8 баллов;

доказано только, что приведенный «ответ» не может быть верным, — 3 балла;

некорректность условия указана без обоснования — 1 балл.

8. Неравенство Птолемея. (Предложил А. Блинков.) На уроке было предложено такое доказательство известного неравенства Птолемея: для любого четырехугольника $ABCD$ (в том числе и не плоского)

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD \geq AC \cdot BD.$$

«Доказательство». 1. «Лемма». Для любых точек A, B, C и D пространства верно равенство:

$$\overline{AB \cdot CD - AC \cdot BD + AD \cdot BC} = 0.$$

Действительно, так как

$$\overline{CD} = \overline{AD - AC}, \quad \overline{BD} = \overline{AD - AB}, \\ \overline{BC} = \overline{AC - AB},$$

то, подставив это в доказываемое равенство, получим:

$$\overline{AB \cdot (\overline{AD - AC}) - AC \cdot (\overline{AD - AB}) + AD \cdot \overline{AC - AB}} = \overline{AB \cdot AD - AB \cdot AC - AC \cdot AD + AC \cdot AB + AD \cdot AC - AD \cdot AB} = 0.$$

При раскрытии скобок все слагаемые в левой части сокращаются и получается верное равенство $0 = 0$.

2. Используем доказанное равенство и неравенство

$$|\overline{a + b}| \leq |\overline{a}| + |\overline{b}|.$$

Тогда

$$\overline{AC \cdot BD} = |\overline{AC}| \cdot |\overline{BD}| = |\overline{AB \cdot CD + AD \cdot BC}| \leq \\ \leq |\overline{AB \cdot CD}| + |\overline{AD \cdot BC}| \leq \\ \leq |\overline{AB}| \cdot |\overline{CD}| + |\overline{AD}| \cdot |\overline{BC}| = \\ = AB \cdot CD + BC \cdot AD,$$

что и требовалось.

Укажите все ошибки и недочеты этого «доказательства» (если таковые имеются).

Комментарий. 1. Приведенная в начале рассуждения лемма верна, но ее доказательство изложено неудачно. Верное равенство $0 = 0$ получено как следствие доказываемого равенства, однако верное следствие какого-либо утверждения, вообще говоря, не гарантирует справедливости самого утверждения (например, из неверного равенства $1 = -1$ следует верное равенство $1^2 = (-1)^2$). Надо либо сослаться на равносильность доказываемого и всех записанных равенств, либо преобразовать левую часть доказываемого равенства и привести ее к правой, записав это, например, так: поскольку

$$\overline{CD} = \overline{AD - AC}, \quad \overline{BD} = \overline{AD - AB}, \\ \overline{BC} = \overline{AC - AB},$$

то

$$\overline{AB \cdot CD - AC \cdot BD + AD \cdot BC} = \\ = \overline{AB \cdot (\overline{AD - AC}) - AC \cdot (\overline{AD - AB}) + AD \cdot (\overline{AC - AB})} = \\ = \overline{AB \cdot AD - AB \cdot AC - AC \cdot AD + AC \cdot AB + AD \cdot AC - AD \cdot AB} = 0,$$

что и требовалось.

Кроме того, допущена ошибка в терминологии: слагаемые не сокращаются, а взаимно уничтожаются.

2. Само «доказательство» неравенства содержит грубую ошибку. «Равенство»

$$|\overline{AC}| \cdot |\overline{BD}| = |\overline{AB \cdot CD + AD \cdot BC}|,$$

присутствующее в нем, означает, что

$$|\overline{AC}| \cdot |\overline{BD}| = |\overline{AC \cdot BD}|,$$

что, в общем случае, неверно. (Нас бы устроило даже неравенство

$$|\overline{AC}| \cdot |\overline{BD}| \leq |\overline{AC \cdot BD}|,$$

но тут как раз имеет место обратное неравенство

$$|\overline{AC}| \cdot |\overline{BD}| \geq |\overline{AC \cdot BD}|,$$

так что это рассуждение спасти не удастся.)

3. Можно придаться также и к неравенству

$$|\overline{AB \cdot CD + AD \cdot BC}| \leq \\ \leq |\overline{AB \cdot CD}| + |\overline{AD \cdot BC}|.$$

По логике автора «доказательства», оно получено применением неравенства

$$|\overline{a + b}| \leq |\overline{a}| + |\overline{b}|.$$

Однако реально это неравенство применяется не к векторам, а к числам — скалярным произведениям векторов. Разумеется, для чисел аналогичное неравенство также верно, поэтому это скорее недочет, а не ошибка.

Критерии проверки (баллы за 1–3 суммируются).

1. Указана основная ошибка в «доказательстве», см. пункт 2, — 6 баллов.
2. Указана логическая ошибка в доказательстве «леммы» — 2 балла.
3. Указаны недочеты терминологии, см. пункты 1 и 3 комментария, — по 1 баллу за каждый.

9. Ящики. (Использована задача из ОММО-2012. Предложили А. Иванищук и И. Раскина.) На олимпиаде была предложена следующая задача.

На первом складе в каждом ящике в среднем по 3 бракованных изделия, а на втором складе — по 6. С первого склада на второй перевезли 50 ящиков, и среднее количество бракованных изделий в ящике на каждом из складов уменьшилось на 1. Сколько всего ящиков на двух складах?

Из всего класса только Вася взялся за эту задачу и решил ее так.

«Решение». Пусть на первом складе было x ящиков, а на втором — y ящиков. Тогда на первом складе — $3x$ бракованных изделий, а на втором — $6y$. После перевозки пятидесяти ящиков число бракованных изделий на первом складе будет $3x - 50 \cdot 3$, и это равно $(x - 50) \cdot 2$, так как среднее число бракованных изделий стало 2. Из уравнения $3x - 150 = 2x - 100$ находим, что $x = 50$.

Аналогично, на втором складе стало $6y + 150$ бракованных изделий, что равно $(y + 50) \cdot 5$. Тогда $y = 100$. Общее количество ящиков: $x + y = 150$.

«Ответ»: 150.

1) В чем ошибся Вася?

2) Приведите верное решение.

3) Как убедить Васю и остальных учеников класса, что его «решение» неверное, не указывая конкретно, где ошибка? Как помочь школьникам найти ошибку, а затем и верное решение?

Комментарий. 1. Условие «в каждом ящике в среднем по 3 бракованных изделия» относится ко всем вместе взятым ящикам с первого склада. Вася же, умножая 50 на 3, применяет его к пятидесяти перевезенным ящикам. Но если бы в пятидесяти перевезенных ящиках среднее число бракованных изделий было таким же, как и на всем складе, то и в оставшихся ящиках оно бы тоже не изменилось. А по условию задачи оно уменьшилось. Поэтому в перевезенных пятидесяти ящиках было в среднем более чем по 3 бракованных изделия.

Отметим, что по данным задачи нельзя найти количество ящиков на каждом складе, а можно только найти общее количество ящиков на двух складах, которое действительно равно 150, то есть Вася получил верный ответ при неверном решении.

2. Пусть вначале на первом складе было x ящиков, а на втором — y ящиков. Тогда на первом складе $3x$ бракованных изделий, а на втором — $6y$. После перевозки на первом складе бракованных изделий стало $2(x - 50)$, а на втором складе $5(y + 50)$. Так как суммарное количество бракованных изделий на двух складах не изменилось, то

$$3x + 6y = 2(x - 50) + 5(y + 50).$$

Из этого уравнения следует, что $x + y = 150$.

3. Приведем возможную беседу со школьниками в форме вопросов и ответов.

— Как проверить решение?

— Подставить результаты в условие.

— Сколько ящиков было на складах до перевозки?

— На первом было 50, а на втором — 100 ящиков.

— А сколько стало после перевозки?

— На первом стало 0, на втором — 150 ящиков.

— Но какой смысл говорить о среднем числе бракованных деталей в НУЛЕ ящиков? Что-то здесь не так. Что именно?

— Вас не удивляет, что уменьшилось среднее число бракованных изделий в ящике НА ОБОИХ складах одновременно? Подумаем, по какой причине на складе могло уменьшиться среднее число бракованных изделий в ящике. Если бы в

каждом ящике было ровно по 3 бракованных изделия, оно бы изменилось?

— Нет.

— Значит, в каких-то ящиках их было больше трех, а в каких-то меньше трех, и увезли те ящики, в которых в среднем было более трех бракованных деталей. Например, в пятидесяти ящиках было по 2 детали, а в других пятидесяти ящиках — по 4. Что произойдет со средним числом бракованных изделий, если увезти по 25 ящиков каждого вида?

— Оно не изменится.

— А какие ящики надо увезти, чтобы оно уменьшилось до 2?

— Те, в которых по 4 бракованных изделия.

— А что происходит на втором складе?

— Там было в среднем по 6 бракованных изделий в ящике (проще всего считать, что ровно по 6 в каждом ящике). Привезли 50 ящиков, с четырьмя бракованными изделиями в каждом, и среднее число бракованных деталей уменьшилось до 5.

— Сколько же ящиков с 6 бракованными изделиями было?

— Столько же, сколько привезли, то есть 50 (можно считать, что из каждого такого ящика переложили по одному бракованному изделию во вновь привезенный ящик).

— Итак, мы подобрали пример, соответствующий условию задачи. В нем на первом складе было вначале 100 ящиков, на втором 50, а всего 150 ящиков.

С чего бы нам так повезло: стали строить какой попало пример — и все сошлось? Можно ли считать задачу решенной?

— Нет.

— Зато стало ясно, почему Вася не должен был умножать 50 на 3. Интересно, что произойдет при попытке построить другой пример? Например, пусть вначале на первом складе в 20 ящиках было по 2 бракованных изделия, в 20 ящиках — по 3 и в 20 ящиках — по 4. Оставили 10 ящиков, в которых было по два бракованных изделия, а остальные 50 ящиков увезли. Чтобы на втором складе после перевозки в каждом ящике стало по 5 бракованных изделий, надо в эти 50 ящиков доложить $10 \cdot 3 + 20 \cdot 2 + 20 = 90$ бракованных изделий. Откуда их взять?

— По одному из 90 ящиков, в которых раньше лежало по 6 бракованных изделий.

— Мы построили новый пример, в котором на первом складе вначале было 60 ящиков, а на втором 90, а всего 150.

Можно ли по условию задачи найти количество ящиков на каждом складе? Стоит ли составлять уравнение, содержащее только x или только y ?

Заметим, что нас и не просят находить x или y по отдельности. А что просят?

— Найти $x + y$.

— Это значит, что для решения может хватить и одного уравнения с двумя переменными. Какую величину можно посчитать двумя способами и приравнять?

— Общее количество бракованных деталей.

Комментарий. Любой из двух выделенных фраз достаточно, чтобы доказать, что Вася ошибся (но вторая фраза еще и показывает, в чем ошибка). Подбор конкретных примеров не нужен для поиска решения. Но если школьники не решили задачу, значит, они плохо понимают, что такое среднее значение, и числовые примеры могут здесь помочь. Кроме того, они помогают доказать, что найти количество ящиков на каждом складе по отдельности невозможно, а значит, довести Васиного «решение» до верного также невозможно. Учитель не должен настаивать на своих примерах, пусть их предложат ученики.

Разумеется, жюри не считает предложенную беседу заведомо наилучшей и не подразумевает, что участники конкурса будут писать столь обширный и подробный текст.

Критерии проверки (баллы за ответы на вопросы 1–3 суммируются).

1. Верно указана ошибка Васи и пояснена ее суть — 3 балла.

2. Приведено верное решение — 3 балла.

3. Приведены разумные наводящие вопросы, соображения и идеи — 1–4 балла (в зависимости от полноты и глубины).

10. Производная. (Предложил А. Блинков.)

На уроке был предложен следующий способ доказательства известного неравенства $\sin x \leq x \leq \operatorname{tg} x$ для любого x из промежутка $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$.

«Доказательство».

$(\sin x)' = \cos x$, $(x)' = 1$, $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$;
для любого x из промежутка $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ выполняется неравенство $\cos x \leq 1 \leq \frac{1}{\cos^2 x}$ и $\sin 0 = \operatorname{tg} 0 = 0$.

Следовательно, из трех рассматриваемых функций первая растет медленнее всех, а третья — быстрее всех.

Как вы считаете, имеет ли смысл знакомить школьников с таким рассуждением? Подробно аргументируйте свою позицию.

Комментарий. Само по себе приведенное рассуждение не содержит ошибок. Действительно, если значения функций $f(x)$ и $g(x)$ в точке a совпадают и на интервале $(a; b)$ выполняется неравенство $f'(x) < g'(x)$, то $f(x) \leq g(x)$ на проме-

жутке $[a; b)$. Для обоснования этого факта достаточно рассмотреть вспомогательную функцию $h(x) = g(x) - f(x)$ и применить к ней достаточное условие возрастания функции на интервале $(a; b)$.

Тем не менее приведенное рассуждение не может считаться доказательством неравенства

$$\sin x \leq x \leq \operatorname{tg} x, \quad (*)$$

так как в этом случае возникает логический круг. При доказательстве неравенства используется тот факт, что $(\sin x)' = \cos x$, однако при традиционном способе вывода формулы производной синуса используется первый замечательный предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, при доказательстве которого применяется неравенство (*).

Поэтому если обсуждать приведенное рассуждение со школьниками, то следует объяснить, почему его нельзя считать доказательством. При этом приведенное рассуждение является одной из самых простых и доступных иллюстраций метода доказательства неравенств с помощью производной, значит, в этом контексте знакомить с ним, на наш взгляд, вполне уместно.

Критерии проверки:

приведены разумные соображения как о «строгости» доказательства, так и о его «полезности» или «вреде» для школьников — 10 баллов;

приведено только объяснение, почему «доказательство» нестрогое, — 8 баллов;

приведены только аргументы о целесообразности или нецелесообразности использования приведенного рассуждения, не связанные с возникновением порочного круга, — 1–2 балла (в зависимости от подробности аргументации).

Отметим, что мнение о полезности или вреде для школьников приведенного рассуждения зависит от личных вкусов учителя и контингента учащихся. Поэтому в работах участников конкурса оценивалась только глубина и полнота аргументации.

РЕКЛАМА

«1С:Школа Онлайн»
Знания всегда рядом!
obr.1c.ru/online/

Лучшие разработки фирмы «1С» в области образования по всем основным школьным предметам: математика, биология, начальная школа и др. Педагогу «1С:Школа Онлайн» поможет подобрать обучающие материалы к урокам, сделать занятия ярче и динамичнее.

Ресурс содержит видеофрагменты, красочные анимированные рисунки, схемы и карты, динамические модели, виртуальные лаборатории, интерактивные задания и тесты. Материалы структурированы по оглавлениям вошедших в Федеральный перечень учебников.

Код для бесплатного доступа на 14 дней на сайте «1С:Школа Онлайн» активировать до 01.03.15:

addit2014Fsept





ДЕПАРТАМЕНТ ОБРАЗОВАНИЯ г. МОСКВЫ
ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ДОМ «ПЕРВОЕ СЕНТЯБРЯ»
МОСКОВСКИЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

2015

23 МАРТА – 17 АПРЕЛЯ

РАСПИСАНИЕ ДНЕЙ ПЕДАГОГИЧЕСКОГО МАРАФОНА

23 марта	День учителя технологии *	3 апреля	День учителя информатики
24 марта	Открытие Марафона День классного руководителя	4 апреля	День учителя физики
25 марта	День школьного психолога День учителя ОБЖ	5 апреля	День учителя математики
26 марта	День здоровья детей, коррекционной педагогики, логопеда, инклюзивного образования и лечебной физической культуры	7 апреля	День учителя истории и обществознания
27 марта	День учителя начальной школы (день первый)	8 апреля	День учителя МХК, музыки и ИЗО
28 марта	День учителя начальной школы (день второй)	9 апреля	День школьного и детского библиотекаря
29 марта	День дошкольного образования	10 апреля	День учителя литературы
31 марта	День учителя географии	11 апреля	День учителя русского языка
1 апреля	День учителя химии	12 апреля	День учителя английского языка
2 апреля	День учителя биологии	14 апреля	День учителя французского языка
		15 апреля	День школьной администрации
		16 апреля	День учителя физической культуры
		17 апреля	День учителя немецкого языка Заккрытие

marathon.1september.ru



Обязательная предварительная регистрация на все дни Марафона с 20 февраля 2015 года на сайте marathon.1september.ru



Каждый участник Марафона, посетивший три мероприятия одного дня, получает официальный именной сертификат (6 часов)

В дни Марафона ведущие издательства страны представляют книги для учителей

Начало работы каждого дня – 9.00. Завершение работы – 15.00

УЧАСТИЕ БЕСПЛАТНОЕ. ВХОД ПО БИЛЕТАМ

РЕГИСТРИРУЙТЕСЬ, РАСПЕЧАТЫВАЙТЕ СВОЙ БИЛЕТ И ПРИХОДИТЕ!

Место проведения Марафона: МПГУ, ул. Малая Пироговская, дом 1, стр. 1 (в 5 минутах ходьбы от ст. метро «Фрунзенская»)

* Место проведения Дня учителя технологии: ЦО № 293, ул. Касаткина, 1а (ст. метро «ВДНХ»)

По всем вопросам обращайтесь, пожалуйста, по телефону **8-499-249-3138** или по электронной почте marathon@1september.ru

С. ШЕСТАКОВ,
isser@yandex.ru,
г. Москва

9–11 классы. Начало см. в № 1/2015

РЕШАЕМ НЕРАВЕНСТВА

1.2. Метод интервалов

Перейдем теперь к описанию наиболее общих методов решения неравенств с одной переменной, применимых к решению неравенств каждой из шести функционально-алгебраических линий школьного курса математики, начав с метода интервалов.

Любое алгебраическое выражение $f(x)$ можно использовать для задания функции $y = f(x)$. Это обстоятельство позволяет иногда для краткости употреблять словосочетание «функция $f(x)$ » вместо «функция $y = f(x)$ » и делает возможной наглядную интерпретацию неравенства вида $f(x) \vee 0$ (здесь знаком « $\vee$ » обозначен один из четырех возможных знаков неравенств « $>$ », « $<$ », « $\geq$ », « $\leq$ »). Решить такое неравенство — значит найти все значения переменной x , при которых график функции $y = f(x)$ расположен выше (ниже, не выше, не ниже — в зависимости от знака неравенства) оси абсцисс. Так, для функции $y = f(x)$, график которой, состоящий из нескольких частей, изображен на рисунке 1, решением неравенства $f(x) \leq 0$ является множество $[x_1; x_2] \cup [x_3; x_4] \cup [x_5; x_6]$, а решением неравенства $f(x) > 0$ — множество $(-\infty; x_1) \cup (x_2; x_3) \cup (x_4; x_5) \cup (x_6; +\infty)$.

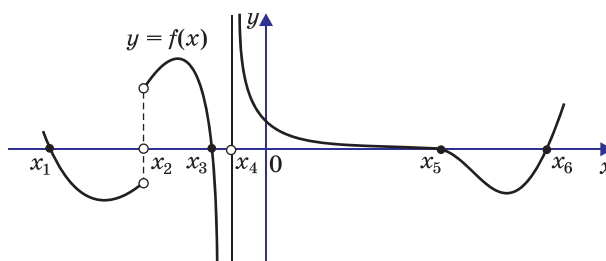


Рис. 1

Для функции $y = g(x)$, график которой (также состоящий из нескольких частей) изображен на рисунке 2, решением неравенства $g(x) \geq 0$ является множество $(-\infty; x_1] \cup (x_2; x_3] \cup \{x_4\} \cup [x_5; x_6] \cup [x_7; x_8] \cup [x_8; x_{10}]$, а решением неравенства $g(x) < 0$ — множество $(x_1; x_2) \cup (x_3; x_4) \cup (x_4; x_5) \cup (x_6; x_7) \cup (x_8; x_9) \cup (x_{10}; +\infty)$.

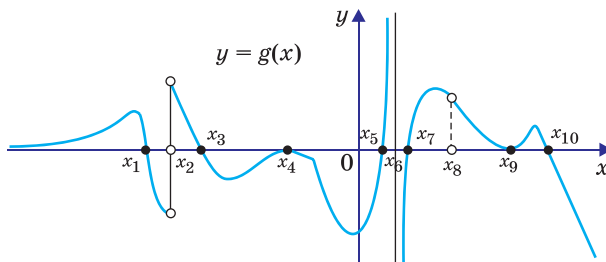


Рис. 2

Аналогичным образом, рассматривая графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, можно наглядно интерпретировать неравенство вида $f(x) \vee g(x)$ (здесь знак « $\vee$ » по-прежнему обозначает один из знаков « $>$ », « $<$ », « $\geq$ », « $\leq$ »). Так, для функций, графики которых изображены на рисунке 3, множеством решений неравенства $f(x) \leq g(x)$

является объединение отрезков $[-4; -1] \cup [4; 5]$, множеством решений неравенства $f(x) > g(x)$ является интервал $(-1; 4)$. Обратим внимание на то, что в данном случае области определения функций различны (это обстоятельство нужно обязательно учитывать при записи ответа): функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[-5; 6]$, функция $y = g(x)$ определена на отрезке $[-4; 5]$.

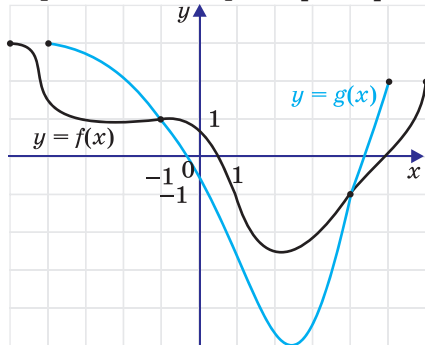


Рис. 3

Существенным при записи решений приведенных выше неравенств является тот факт, что каждая из функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ непрерывна в каждой части своей области определения. Понятие непрерывности — довольно сложное в смысле формального описания; для решения задач школьного курса достаточно представления о непрерывной функции как о функции, график которой в каждой части области определения может быть изображен непрерывной линией. Это означает, в частности, что изменить знак такая функция может только двумя «способами»: либо в тех точках, в которых функция не является непрерывной (в некоторых из таких точек ее график как бы перескакивает через ось абсцисс: на рис. 1 это точки x_2 и x_4 , на рис. 2 — точки x_2 и x_6), либо в тех точках, где ее график пересекает ось абсцисс (напомним, что эти точки являются корнями уравнения $f(x) = 0$ и называются *нулями функции* $y = f(x)$): на рис. 1 — это точки x_1, x_3, x_5, x_6 , на рис. 2 — это точки $x_1, x_3, x_4, x_5, x_7, x_9, x_{10}$). Отсюда вытекает общий для таких функций метод решения неравенств, называемый *методом интервалов*, алгоритм которого состоит из следующих шагов.

Алгоритм метода интервалов

1. Приводим, используя равносильные преобразования, данное неравенство к виду $f(x) \vee 0$, где знаком « $\vee$ » обозначен один из четырех знаков неравенств (такой вид неравенства будем называть *стандартным*). В случае, если неравенство сразу дано в стандартном виде, этот шаг пропускается.

2. Находим область определения функции $y = f(x)$ (напомним, что область определения функции обозначается $D_{f(x)}$, D_f , $D(f(x))$ или $D(f)$).

по первой букве слова «определение» на латыни или любом романском языке) и отмечаем ее на числовой прямой (числовой оси). Заметим, что часто бывает целесообразно в начале решения сразу найти ОДЗ данного неравенства, а потом уже приводить неравенство к стандартному виду, поскольку ОДЗ неравенства и D_f в данном случае являются одним и тем же множеством (разумеется, если для приведения неравенства к стандартному виду использовать равносильные преобразования).

3. Находим нули функции $y = f(x)$, то есть корни уравнения $f(x) = 0$, и отмечаем их на числовой оси. Если данное неравенство является строгим, то нули отмечаются особым образом («выкалываются») и обычно изображаются пустыми кружочками. Если неравенство является нестрогим, нули функции должны обязательно попасть в ответ; чтобы не забыть ни один из них, лучше изобразить их жирными, бросающимися в глаза кружочками (как своего рода «сигнальные фонари»). Нули функции разбивают ее область определения на несколько интервалов. В каждом из этих интервалов функция определена, непрерывна и не обращается в нуль, поэтому поменять знак ни в одной из точек интервала не может и, следовательно, принимает в каждом из полученных интервалов значения одного знака.

4. Решаем неравенство методом интервалов, определяя знак функции $y = f(x)$ в каждом из полученных интервалов, например, по ее знаку в одной из точек интервала (такие точки иногда называют *пробными*). Записываем ответ.

Замечание. Если точка является нулем функции или не принадлежит области определения функции, это не означает, что в такой точке функция автоматически меняет знак. Так, функция, график которой изображен на рисунке 2, не меняет знака ни в одной из точек x_4, x_8, x_9 . Таким образом, промежутки знакоположительности и промежутки знакоотрицательности функции не обязательно чередуются и на экзамене лучше подстраховаться и определить знак функции в одной из точек каждого интервала традиционно либо иными способами, например, так, как это сделано при решении следующих неравенств.

Пример 1. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x - 1} \leq \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x + 1}.$$

Решение. 1. Перенесем все алгебраические выражения в левую часть неравенства:

$$\frac{\sqrt{4 - x^2}}{x - 1} - \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x + 1} \leq 0.$$

Вынесем общий множитель:

$$\sqrt{4-x^2} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) \leq 0.$$

Приведем разность дробей в скобках к общему знаменателю:

$$\sqrt{4-x^2} \left(\frac{x+1-(x-1)}{(x-1)(x+1)} \right) \leq 0.$$

Выполним действия в числителе и запишем неравенство в виде

$$\frac{2\sqrt{4-x^2}}{(x-1)(x+1)} \leq 0. \quad (*)$$

Обозначим левую часть полученного неравенства через $f(x)$.

2. Найдем область определения функции $y = f(x)$. Она задается системой неравенств

$$\begin{cases} 4-x^2 \geq 0, \\ x \neq -1, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Первое неравенство системы можно переписать в виде $x^2 - 4 \leq 0$, откуда $(x-2)(x+2) \leq 0$, то есть $-2 \leq x \leq 2$. Таким образом, $D_f = [-2; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; 2]$.

3. Найдем нули функции $y = f(x)$, то есть корни уравнения $f(x) = 0$. В данном случае нулями являются числа $x = -2$ и $x = 2$.

4. Решим неравенство (*) методом интервалов.



Для рассматриваемого неравенства определение знака $f(x)$ на каждом из интервалов не представляет труда, ведь числитель $2\sqrt{4-x^2}$

дроби $\frac{2\sqrt{4-x^2}}{(x-1)(x+1)}$ неотрицателен в области определения, а знак знаменателя $(x-1)(x+1)$ легко определить, воспользовавшись свойствами квадратного трехчлена или пробными точками: очевидно, что, например, при $x = 1,5$ знаменатель положителен, при $x = 0$ — отрицателен, при $x = -1,5$ — положителен. В ответ записываем промежутки, помеченный знаком «-», и не принадлежащие ему нули $f(x)$, выделенные жирными точками.

Ответ: $\{-2; 2\} \cup (-1; 1)$.

Разумеется, при решении неравенств методом интервалов не обязательно в явном виде указывать каждый шаг алгоритма решения, главное, иметь ясное представление о том, что все его шаги сделаны.

Пример 2. Решить неравенство

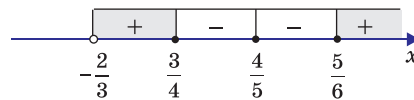
$$\lg(3x+2) + (4x-3)^3(5x-4)^4(6x-5)^5 \geq \lg(3x+2).$$

Решение. Левая и правая части неравенства определены при $x > -\frac{2}{3}$. При допустимых значениях переменной неравенство легко приводится к стандартному виду

$$(4x-3)^3(5x-4)^4(6x-5)^5 \geq 0. \quad (1)$$

Левая часть полученного неравенства (обозначим ее $f(x)$) обращается в нуль при $x = \frac{3}{4}$, $x = \frac{4}{5}$,

$x = \frac{5}{6}$. Эти числа разбивают луч $\left(-\frac{2}{3}; +\infty\right)$ на четыре интервала. Поскольку неравенство является нестрогим, каждое из этих чисел является его решением. Чтобы не забыть включить эти числа в ответ, отметим соответствующие им точки числовой оси жирными кружочками (теми самыми «сигнальными фонарями», о которых речь шла выше). Применим метод интервалов, определив знак $f(x)$ в каждом из полученных интервалов.



Ясно, что при $x > \frac{5}{6}$ (например, при $x = 100$) любой из множителей левой части неравенства (1) положителен, поэтому $f(100) > 0$. Следовательно, $f(x) > 0$ при всех $x > \frac{5}{6}$. Выбрать «хорошее» число для определения знака $f(x)$ на числовом промежутке $\left(\frac{4}{5}; \frac{5}{6}\right)$ затруднительно, поскольку он не содержит ни одного целого числа. В таких случаях обычно используют рассуждения вроде следующих.

Так как $x \in \left(\frac{4}{5}; \frac{5}{6}\right)$, то $x < \frac{5}{6}$. Поэтому $(6x-5)^5 < 0$.

Далее, если $x > \frac{4}{5}$, то $(5x-4)^4 > 0$ и $(4x-3)^3 > 0$.

Значит, $f(x) < 0$ на $\left(\frac{4}{5}; \frac{5}{6}\right)$ (как произведение трех множителей, один из которых отрицателен, а два — положительны). Дальнейшее определение знаков проводится аналогично. В ответ включаются промежутки, помеченные знаком «+» и не принадлежащие таким промежуткам нули $f(x)$ (выписываем их, смотря на «сигнальные фонари»: в данном случае, это $x = \frac{4}{5}$).

Ответ: $\left(-\frac{2}{3}; \frac{3}{4}\right] \cup \left\{\frac{4}{5}\right\} \cup \left[\frac{5}{6}; +\infty\right)$.

Замечание. С помощью рассуждений, аналогичных сделанным при решении примера 2, можно найти промежутки знакоположительности и знакоотрицательности функции, не опре-

деляя ее знак в конкретной точке каждого из полученных интервалов. Это обычно возможно для тех неравенств, левая часть которых представляет собой произведение или частное нескольких (как правило, линейных) множителей. Если же эти множители не являются линейными и имеют довольно сложный вид, целесообразно сначала определить знак каждого из них, а затем уже — знак произведения или частного. В таких случаях это удобно делать с помощью одного рисунка, на котором изображены одна под другой оси с отмеченной ОДЗ неравенства и нулями для каждого из множителей и для их произведения (частного), то есть для левой части неравенства, так, что получается своего рода таблица. В строчках этой таблицы расставляют знаки множителей, а затем по столбцам определяют знак их произведения или частного. Как это делается, проиллюстрируем примером.

Пример 3. Решить неравенство

$$\frac{(|x-3|-x-13)(\sqrt{x+6}-2x+3)}{x^2-16} \leq 0.$$

Решение. Неравенство дано в стандартном виде. Разложим знаменатель на множители по формуле разности квадратов и обозначим через $f(x)$ левую часть полученного неравенства

$$\frac{(|x-3|-x-13)(\sqrt{x+6}-2x+3)}{(x-4)(x+4)} \leq 0.$$

Область определения D_f или — что в данном случае то же самое — ОДЗ неравенства задается системой $\begin{cases} x \geq -6, \\ x \neq \pm 4. \end{cases}$ Найдем нули $f(x)$. Для этого решим уравнения

$$|x-3| = x+13 \text{ и } \sqrt{x+6} = 2x-3.$$

Первое уравнение приводится к виду

$$\begin{cases} x \geq -13, \\ \begin{cases} x-3 = x+13 & x = -5, \\ x-3 = -x-13, \end{cases} \end{cases}$$

Второе уравнение приводится к виду

$$\begin{cases} x \geq 1,5, \\ x+6 = 4x^2 - 12x + 9, \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 1,5, \\ 4x^2 - 13x + 3 = 0. \end{cases}$$

Корнями уравнения последней системы являются $x = \frac{1}{4}$ и $x = 3$, из которых только $x = 3$ удовлетворяет неравенству системы. Заметим, что для $x = -5$ и $x = 3$ выполняются неравенства $\begin{cases} x \geq -6, \\ x \neq \pm 4. \end{cases}$ Следовательно, эти числа и являются нулями $f(x)$. Теперь можно применить метод интервалов, изобразив соответствующую «таблицу», первые три строки которой, начиная с

верхней, предназначены для определения промежутков знакоположительности и знакоотрицательности алгебраических выражений

$$|x-3|-x-13, \sqrt{x+6}-2x+3, (x-4)(x+4),$$

а последняя (нижняя) — для определения промежутков знакоположительности и знакоотрицательности $f(x)$. При этом на каждой оси отмечаются не все нули, а только нули соответствующих множителей.

Поскольку единственным нулем алгебраического выражения $f_1(x) = |x-3|-x-13$ является $x = -5$, с помощью «пробных» точек легко определить, что $f_1(x) > 0$ при $x < -5$ (например, $f_1(-6) = |-6-3|-(-6)-13 = 2 > 0$) и $f_1(x) < 0$ при $x > -5$ (например, $f_1(100) = |100-3|-100-13 = -16 < 0$). Поскольку единственным нулем алгебраического выражения $f_2(x) = \sqrt{x+6}-2x+3$ является $x = 3$, аналогичным образом легко определить, что $f_2(x) > 0$ при $x < 3$ и $f_2(x) < 0$ при $x > 3$. Наконец, если $f_3(x) = (x-4)(x+4)$, то $f_3(x) < 0$ на $(-4; 4)$ и $f_3(x) > 0$ в остальных точках области определения (эти неравенства можно получить и без «пробных точек», воспользовавшись свойствами квадратичной функции).

$ x-3 -x-13$	+	-	-	-	-
$\sqrt{x+6}-2x+3$	+	+	+	-	-
$(x-4)(x+4)$	+	+	-	-	+
$f(x)$	+	-	+	-	+
	-6	-5	-4	3	4
	x				

Теперь, воспользовавшись «столбцами» таблицы, легко определить промежутки знакоположительности и знакоотрицательности $f(x)$,

учитывая, что $f(x) = \frac{f_1(x)f_2(x)}{f_3(x)}$. Заметим еще, что

$x = -6$ является граничной точкой области определения, но не нулем $f(x)$ (поэтому на рисунке эта точка никак не выделена). Поскольку $x = -6$ принадлежит промежутку знакоположительности $f(x)$, число -6 в ответ не включается. Таким образом, множеством решений данного неравенства является $[-5; -4) \cup [3; 4)$.

Ответ: $[-5; -4) \cup [3; 4)$.

Метод интервалов по сути сводит решение неравенства стандартного вида к решению уравнения (нахождению нулей функции) с последующим определением знаков функции на промежутках ее знакопостоянства. В принципе, он дает возможность при желании отказаться от изучения «специальных» схем решения неравенств (например, иррациональных, показательных, логарифмических) и упростить подготовку к экзаменам.

1.3. Разложение на множители и группировка

Решение неравенств методом интервалов или иным методом во многих случаях требует некоторых предварительных действий, прежде всего приведения неравенства к стандартному виду с помощью равносильных алгебраических преобразований. Одним из таких преобразований является вынесение общего множителя (не числа — на число обе части неравенства можно просто разделить, а алгебраического выражения), обычно после переноса всех алгебраических выражений в одну из частей неравенства и — при необходимости — группировки слагаемых. Один из таких примеров был рассмотрен ранее. Рассмотрим еще два.

Пример 4. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{2x-3}}{3x-1} \leq \frac{\sqrt{2x-3}}{2x+1}.$$

Решение. Перенесем дробь из правой части неравенства в левую и вынесем общий множитель $\sqrt{2x-3}$ за скобку:

$$\sqrt{2x-3} \left(\frac{1}{3x-1} - \frac{1}{2x+1} \right) \leq 0.$$

Приведем разность алгебраических дробей в скобках к общему знаменателю:

$$\sqrt{2x-3} \left(\frac{2x+1-(3x-1)}{(3x-1)(2x+1)} \right) \leq 0, \quad -\frac{\sqrt{2x-3}(x-2)}{(3x-1)(2x+1)} \leq 0.$$

Разделив или умножив обе части полученного неравенства на -1 , получим неравенство стандартного вида

$$\frac{\sqrt{2x-3}(x-2)}{(3x-1)(2x+1)} \geq 0. \quad (*)$$

Обозначим через $f(x)$ левую часть последнего неравенства. Область определения D_f или — что в данном случае то же самое — ОДЗ неравенства задается системой

$$\begin{cases} 2x-3 \geq 0, \\ 3x-1 \neq 0, \quad x \in [1,5; +\infty). \\ 2x+1 \neq 0, \end{cases}$$

Найдем нули $f(x)$: $x = 1,5$, $x = 2$. Далее можно применить метод интервалов, а можно заметить, что при $x \in [1,5; +\infty)$ знаменатель дроби (*) положителен, поскольку положителен каждый из множителей $3x-1$ и $2x+1$. Поэтому неравенство выполняется, только если

$$\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x=1,5, \end{cases} \quad x \in \{1,5\} \cup [2; +\infty).$$

Ответ: $\{1,5\} \cup [2; +\infty)$.

Пример 5. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} 4x^2 + 9 \cdot (0,5)^{-x} \geq x^2 \cdot 2^x + 36, \\ x^2 + 2x + \frac{2x+6}{x-4} \leq 3. \end{cases}$$

Решение. 1. Решим первое неравенство системы, переписав его в виде

$$x^2 \cdot 2^x + 36 - 4x^2 - 9 \cdot 2^x \leq 0.$$

Перегруппируем слагаемые в левой части полученного неравенства:

$$(x^2 \cdot 2^x - 4x^2) - (9 \cdot 2^x - 36) \leq 0.$$

Вынесем общий множитель в каждой из скобок:

$$x^2(2^x - 4) - 9(2^x - 4) \leq 0.$$

Еще раз вынесем общий множитель:

$$(2^x - 4)(x^2 - 9) \leq 0, \quad (2^x - 4)(x - 3)(x + 3) \leq 0.$$

Применим к полученному неравенству метод интервалов, учитывая, что его левая часть определена при любом действительном значении переменной, а ее нули легко найти устно:



Таким образом, решение первого неравенства системы: $(-\infty; -3] \cup [2; 3]$.

2. Решим второе неравенство системы, переписав его в виде

$$x^2 + 2x - 3 + \frac{2x+6}{x-4} \leq 0.$$

Заметим, что если просто привести слагаемые в левой части полученного неравенства к общему знаменателю, то в числителе получится многочлен третьей степени. Попробуем поступить иначе, попытавшись выделить общий множитель. Для этого разложим квадратный трехчлен $x^2 + 2x - 3$ на множители. Его нулями являются числа -3 и 1 , которые легко найти по формуле корней квадратного уравнения или формулам Виета. Поэтому неравенство можно переписать так:

$$(x+3)(x-1) + \frac{2(x+3)}{x-4} \leq 0.$$

Теперь вынесем за скобку общий множитель:

$$(x+3) \left(x-1 + \frac{2}{x-4} \right) \leq 0.$$

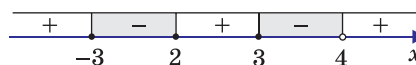
Приведем слагаемые в скобках к общему знаменателю:

$$(x+3) \left(\frac{(x-1)(x-4)+2}{x-4} \right) \leq 0, \quad \frac{(x+3)(x^2-5x+6)}{x-4} \leq 0.$$

Корнями квадратного трехчлена $x^2 - 5x + 6$ являются числа 2 и 3 . Разложив этот квадратный трехчлен на множители, получим неравенство

$$\frac{(x+3)(x-2)(x-3)}{x-4} \leq 0,$$

которое легко решается методом интервалов:



Значит, решение второго неравенства системы: $[-3; 2] \cup [3; 4)$.

3. Остается найти решение системы. В данном случае это не представляет труда — решениями системы являются всего три числа: -3 ; 2 ; 3 .

Ответ: $\{-3; 2; 3\}$.

Н. АВИЛОВ,
 avilow@rambler.ru,
 ст. Егорлыкская, Ростовская обл.



Ведущий рубрики — Николай Иванович Авилов — демонстрирует свою головоломку коллегам



Фото 1

КУБ-ОСЬМИНОГ

■ Совсем недавно, в декабре 2014 года, головоломка «Куб-осьминог» была представлена мною на ежегодной XXI встрече во Всероссийском клубе ценителей головоломок «Диоген». Это ее дебют в «головоломочном» сообществе, если можно так сказать про головоломку. Она вызвала неподдельный интерес у членов клуба новизной идеи, заложенной в ее основе.

Головоломка в разобранном виде действительно внешне напоминает морского обитателя, даже число ног-щупалец совпадает с числом 8.

Как же устроена головоломка? Ее основу составляет деревянный куб $2 \times 2 \times 2$, на поверхности которого имеются неглубокие каналы. Каналы пересекают квадратные грани куба, разбивая каждую их них на четыре равных квадрата. Кроме этого, каналы проделаны вдоль каждого ребра деревянного куба.

К каждой вершине этого куба прикреплена прочная нить. На каждую нить нанизано по шесть маленьких деревянных цилиндров. Высота каждого цилиндра чуть меньше ребра единичного куба, а диаметр подбирается таким образом, чтобы цилиндр с легким усилием мог поместиться в любой канал деревянной основы головоломки.

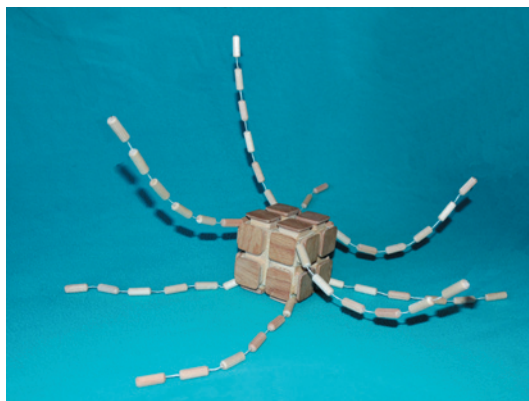


Фото 2

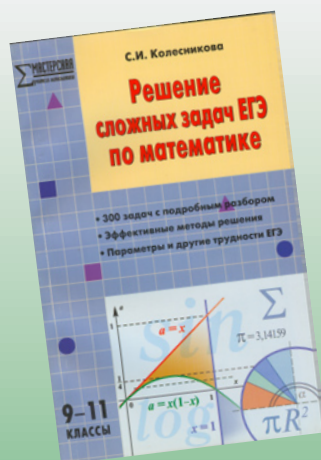
Ясно, что общее количество нанизанных цилиндров равно $6 \cdot 8 = 48$. Если посчитать общую длину всех каналов на поверхности куба $2 \times 2 \times 2$, то она тоже будет равна 48. Отсюда вытекает очевидная цель головоломки: вложить все цилиндры, нанизанные на нити, в каналы, расположенные на деревянной основе головоломки. Закрепленные концы нитей вносят ограничение в свободу размещения цилиндров в каналы, отчего задача играющего значительно усложняется.

На фото 2 головоломка находится в разобранном состоянии. На фото 1 головоломка находится в собранном виде, здесь во все каналы на поверхности куба вложены деревянные цилиндры.

Должен сказать, что изготовление головоломки очень кропотливое дело, но трудного ничего нет. Ведь для ее изготовления требуются обычные материалы: деревянные кубики, квадратики, нитки и клей, а роль цилиндров выполняют мебельные шканты. Если вы хотите порадовать своих учеников новой оригинальной головоломкой, то «куб-осьминог» самый подходящий вариант для этого.



К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru



НЕ БОЯТЬСЯ РАВНОСИЛЬНЫХ ПЕРЕХОДОВ!

Колесникова С.И. Решение сложных задач ЕГЭ по математике: 9–11 классы. — М.: ВАКО, 2011. — (Мастерская учителя математики).

В пособие включены разные задачи, встречавшиеся на выпускных или вступительных экзаменах. Они отличаются большим разнообразием идей и необходимостью применять разнообразные методы решения. В книге представлены авторские решения задач, выполненные с помощью равносильных преобразований. С помощью условий равносильности автор сводит решение многочисленных иррациональных, показательных, логарифмических неравенств и неравенств, содержащих модуль, к решению рациональных неравенств классическим методом интервалов для рациональных функций.

Основное внимание в книге уделяется методам решения неравенств, которые не относятся к стандартным школьным, но позволяют многие неравенства решить быстро и красиво. Ясно, что обобщенный метод интервалов для непрерывных функций является универсальным для решения неравенств, но он таит в себе неприятности. При его применении надо подставлять точки для выяснения знака функции на промежутке. Но иногда пробная точка бывает «плохой»; иногда при выяснении знака функции в пробной точке вычисления могут оказаться громоздкими и в результате арифметической ошибки знак может оказаться неверным. А в условиях экзамена на исправление, если даже ошибка замечена, нет времени. В этой ситуации школьники, да и авторы многих пособий, ограничиваются только фразой «применим обобщенный метод интервалов».

Многие из рассматриваемых методов на самом деле известны, но на них как-то не акцентируют внимание. Например, в школе довольно много времени уделяется построению графиков элементарных функций, но практического применения они почти не находят. Автор использует свойства и вид графиков элементарных функций для решения уравнений и неравенств.

Кроме того, последнее время почти совсем исчезли из преобразований так называемые сопряженные выражения. Автор показывает, как с их помощью можно упростить решение некоторых иррациональных неравенств и неравенств, содержащих модули.

В книге также рассмотрены свойства логарифмов, которые необходимы для решения задач, но отсутствуют в большинстве учебников. Особое внимание уделено показательным и логарифмическим неравенствам как с постоянным, так и с переменным основанием.

Книга поможет учителям научить школьников не бояться равносильных переходов. Да и сами школьники смогут в них разобраться самостоятельно.



ПОРА ГОТОВИТЬСЯ К ОГЭ

■ Начал прибывать день. Приближается весна, а с ней и экзамены. Пора всерьез задуматься о подготовке к ним. Слава богу, что каких-либо принципиальных инноваций и изменений в ОГЭ в этом году не будет и можно воспользоваться наработками и пособиями прошлого года. А если вы и ваши ученики не сдавали ОГЭ в прошлом или позапрошлом году, то тогда можно использовать пособия, которые подготовило издательство «Экзамен» специально к итоговой аттестации 2015 года. А подготовило оно ни много ни мало девять пособий, в этом номере мы расскажем о первых (по алфавиту) пяти.

1. **Глазков Ю.А., Гаиашвили М.Я.** ОГЭ (ГИА-9). Математика. Задачник. Сборник заданий и методических рекомендаций. — М.: Экзамен, 2015.

Пособие содержит: сведения о структуре и содержании экзаменационной работы, рекомендации по подготовке к экзамену, задания по всем темам курса математики 7–9-х классов с решениями и ответами, а также четыре варианта тренировочных работ.

2. **Глазков Ю.А., Варшавский И.К., Гаиашвили М.Я.** ОГЭ (ГИА-9). Математика. 9 класс. Основной государственный экзамен. Тематические тестовые задания. — М.: Экзамен, 2015.

Пособие предназначено для учителя. Оно содержит 13 тематических тестов (каждый в 4 вариантах) по курсу алгебры 9-го класса, которые могут быть использованы для проведения тематических контрольных работ, а в 14-м тесте, посвященном итоговому повторению курса алгебры, есть алгебраические задания из модуля «Реальная математика». Это дает учителю возможность одновременно вести контроль усвоения учащимися текущего материала и готовить учеников к ОГЭ.

3. **Латпо Л.Д., Попов М.А.** ОГЭ (ГИА-9) 2015. Математика: сборник заданий. — М.: Экзамен, 2015.

Пособие содержит: краткие справочные сведения и решения примеров базового уровня по 17 темам курса алгебры, большое количество задач для самостоятельного решения и 10 вариантов контрольных работ в формате ОГЭ.

4. **Латпо Л.Д., Попов М.А.** ОГЭ (ГИА-9) 2015. Математика. Основной государственный экзамен. 9 класс. Практикум по выполнению тестовых заданий. — М.: Экзамен, 2015.

Пособие содержит 10 вариантов типовых тестовых заданий и предназначено для отработки практических навыков учащихся при подготовке к ОГЭ.

5. **Латпо Л.Д., Попов М.А.** Основной государственный экзамен. 9 класс. Математика. 3 модуля. Тематические тестовые задания. — М.: Экзамен, 2015.

Пособие содержит задания, распределенные по 26 тематическим блокам, что, по мнению авторов, дает возможность поэтапной отработки и устранения пробелов в знаниях учащихся. Приведены также два варианта контрольных тестовых заданий.



Здесь расположен второй по старшинству Британский университет. Он младше старшего брата — Оксфорда — почти на сто лет, однако это уже не имеет значения, ведь и ему перевалило за 800. Как и Оксфордский университет, Кембриджский состоит из нескольких колледжей, плотно примыкающих друг к другу и растянувшихся вдоль тихой, прелестной речушки Кен, по которой можно проплыть на лодочках а-ля венецианские гондолы и послушать рассказ гидов-гондольеров. Кембридж дал миру многих великих ученых. Кембридж — это Бэкон, Кавендишская лаборатория, Максвелл, создание модели ДНК, 80 нобелевских лауреатов. Меккой для математиков это место делает уже одно только имя Ньютона. Здесь можно взглянуть на окна его комнаты (внутри нельзя, ведь в ней сейчас живет очередной преподаватель) и поискать ту самую яблоню, которой мы обязаны открытию великого закона.

Трудно представить, что под этими старинными сводами, которые помнят старика Ньютона, жил и работал гений современной математики. Я имею в виду Алана Тьюринга. Именно здесь, еще в статусе студента, он написал статью «О вычислимых числах», в которой изложил концепцию вычислений с помощью абстрактной машины, названной «машиной Тьюринга» и ставшей основой для компьютерных программ. Именно здесь в журнале «Mind» им опубликована статья, заложившая основы создания искусственного интеллекта и содержащая описание «теста Тьюринга». Еще он известен тем, что в годы Второй мировой войны сумел стать ведущим криптографом Великобритании и расшифровать коды немецкой машины «Энигма», чем фактически спас свою страну от поражения. Главное шифровальное подразделение Великобритании располагалось в городке Блетчли-Парк в центре Англии, там сейчас действует музей. Думаю, многих он заинтересует. Есть желающие добраться и рассказать?

Л. Рослова

