МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ №2 (772)

ИЗДАЕТСЯ С 1992 г.

mat.1september.ru

Тема номера

Как рождается проект

Мастерская

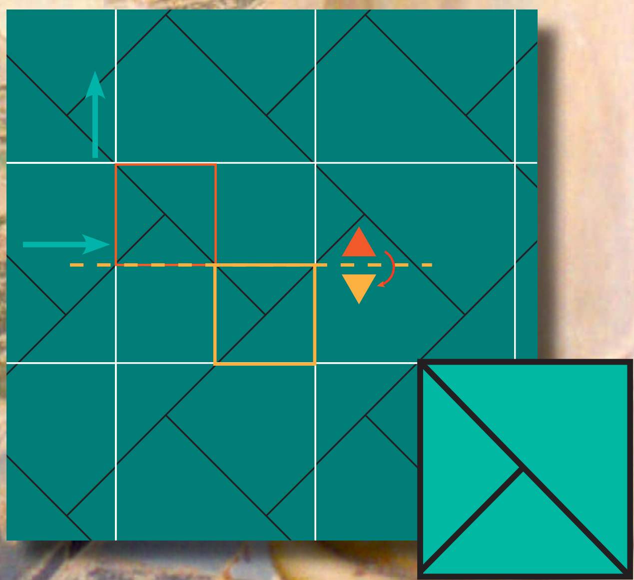
Проект для продуктивного ученика с. 11

Проект «Разбор урока»

Тема урока: «Обобщение понятия о показателе степени» с. 21

Проверь себя

XI Заочный творческий конкурс учителей математики с. 53



издательский дом
1september.ru

Первое сентября | февраль 2016

МАТЕМАТИКА Подписка на сайте www.1september.ru или по каталогу «Почта России»: 79073 (бумажная версия); 12717 (CD-версия)

В НОМЕРЕ

МЕТОДОБЪЕДИНЕНИЕ / МЕТОДИЧЕСКИЙ ПРАКТИКУМ
4 Как рождается проект?
А. Алфимова

МЕТОДОБЪЕДИНЕНИЕ / МАСТЕРСКАЯ
11 Проект для продуктивного ученика
Г. Карпова

МЕТОДОБЪЕДИНЕНИЕ / МЕТОДИЧЕСКАЯ КОНСУЛЬТАЦИЯ
15 Системный подход к учебным проектам
В. Янушевский

МЕТОДОБЪЕДИНЕНИЕ / МАСТЕРСКАЯ
18 Интегративный проект «История математики Германии в лицах»
Т. Пчелинцева, О. Волкова

ОТКРЫТЫЙ УРОК / НАШ ПРОЕКТ: «РАЗБОР УРОКА»
21 Тема урока: «Обобщение понятия о показателе степени»
А. Поздняк

МЕТОДОБЪЕДИНЕНИЕ / ПРОВЕРКА ЗНАНИЙ
26 Система критериального оценивания. Оцениваем предметные компетенции на уроках различных типов
О. Григорова, А. Евсеева, М. Зотова

В КАБИНЕТЕ ПСИХОЛОГА / КОНСУЛЬТАЦИЯ
31 О воспитании самостоятельности
М. Чибисова

МЕТОДОБЪЕДИНЕНИЕ / МЕТОДИЧЕСКИЙ ПРАКТИКУМ
33 Устные упражнения в старших классах. Часть 2
Д. Шноль

МЕТОДОБЪЕДИНЕНИЕ / ЗАРУБЕЖНЫЙ ОПЫТ
39 О преподавании элементов статистики в школах Чили. *Окончание*
Э. Соледад

45 Российский комментарий чилийского опыта
И. Высоцкий

ПОСЛЕ УРОКА / ОЛИМПИАДЫ, КОНКУРСЫ, ТУРНИРЫ
48 Турнир Архимеда. Московская математическая регата. 10 класс
А. Блинков, А. Иванищук, Н. Наконечный, П. Чулков

ПОВЫШЕНИЕ КВАЛИФИКАЦИИ / ПРОВЕРЬ СЕБЯ
53 XI Заочный творческий конкурс учителей математики

ПОВЫШЕНИЕ КВАЛИФИКАЦИИ / ЛЕКТОРИЙ
55 Как научить(ся) решать задачи по планиметрии. Лекция 2
В. Дятлов

В БИБЛИОТЕКЕ / КНИЖНАЯ ПОЛКА
60 Популяризируя математику
Н. Андреев, С. Коновалов, Н. Панютин

ПОСЛЕ УРОКА / В КЛАДОВОЙ ГОЛОВОЛОМОК
62 Кубик Рубика с шайбами
Н. Авилов

В КАБИНЕТЕ МАТЕМАТИКИ / НА СТЕНД
64 Симметрия мозаик Альгамбры. Орнамент второй

К материалам, обозначенным этим символом, есть дополнительные материалы в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru

УВАЖАЕМЫЕ ЧИТАТЕЛИ!

Все подписчики журнала имеют возможность получать электронную версию, которая не только является полной копией бумажной, но и включает дополнительные электронные материалы для практической работы.

Для получения электронной версии:

1. Откройте Личный кабинет на портале «Первое сентября» (www.1september.ru).
2. В разделе «Газеты и журналы/Получение» выберите свой журнал и кликните на кнопку «Я – подписчик бумажной версии».
3. Появится форма, посредством которой вы сможете отправить нам копию подписной квитанции.

После этого в течение одного рабочего дня будет активирована электронная подписка на весь период действия бумажной.

МАТЕМАТИКА. ПЕРВОЕ СЕНТЯБРЯ

Методический журнал для учителей математики

Издается с 1992 г.

Выходит один раз в месяц

РЕДАКЦИЯ:

Главный редактор: Л. Рослова
Отв. секретарь: Т. Черкавская
Редакторы: П. Камаев, О. Макарова, И. Коган
Дизайн макета: И. Лукьянов. Дизайн обложки: Э. Лурье
Корректор: Л. Громова. Верстка: Л. Кукушкина

Распространяется по подписке

Цена свободная
Тираж 22 000 экз.

Тел. редакции: **(499) 249-3460**
E-mail: **mat@1september.ru**
Сайт: **mat.1september.ru**

ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ДОМ «ПЕРВОЕ СЕНТЯБРЯ»
Главный редактор: Артем Соловейчик (генеральный директор)
Коммерческая деятельность: Константин Шмарковский (финансовый директор)
Развитие, IT и координация проектов: Сергей Островский (исполнительный директор)
Реклама, конференции и техническое обеспечение Издательского дома: Павел Кузнецов
Производство: Станислав Савельев
Административно-хозяйственное обеспечение: Андрей Ушков
Педагогический университет: Валерия Арсланьян (ректор)

ЖУРНАЛЫ ИЗДАТЕЛЬСКОГО ДОМА:
Английский язык – А. Громушкина,
Библиотека в школе – О. Громова,
Биология – Н. Иванова,
География – А. Митрофанов, и.о.
Дошкольное образование – Д. Тюттерин,
Здоровье детей – Н. Сёмина,
Информатика – С. Островский,
Искусство – О. Волкова,
История – А. Савельев,
Классное руководство и воспитание школьников – А. Полякова,
Литература – С. Волков,
Математика – Л. Рослова,
Начальная школа – М. Соловейчик,
Немецкий язык – М. Бузоева,
ОБЖ – А. Митрофанов,
Русский язык – Л. Гончар,
Спорт в школе – О. Леонтьева,
Технология – А. Митрофанов,
Управление школой – Е. Рачевский,
Физика – Н. Козлова,
Французский язык – Г. Чесновицкая,
Химия – О. Блохина,
Школа для родителей – Л. Печатникова,
Школьный психолог – М. Чибисова.

Иллюстрации: фотобанк Shutterstock
На с. 1 и 64 — фото Л. Рословой

УЧРЕДИТЕЛЬ:
ООО «ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ДОМ «ПЕРВОЕ СЕНТЯБРЯ»
Зарегистрировано ПИ №ФС77-58424 от 25.06.14 в Роскомнадзоре
Подписано в печать: по графику 16.11.15, фактически 16.11.15 Заказ №______
Отпечатано в ОАО «Первая Образцовая типография» филиал «Чеховский печатный двор»
ул. Полиграфистов, д. 1, Московская область, г. Чехов, 142300; Сайт: www.chpd.ru;
E-mail: sales@chpk.ru; факс: 8(496)726-54-10, 8(495)988-63-76

АДРЕС РЕДАКЦИИ И ИЗДАТЕЛЯ:
ул. Киевская, д. 24, Москва, 121165
Телефон/ факс: **(499) 249-3138**
Отдел рекламы: **(499) 249-9870**
Сайт: **1september.ru**
facebook.com/School.of.Digital.Age

ИЗДАТЕЛЬСКАЯ ПОДПИСКА:
Телефон: **(499) 249-4758**

ПОДПИСНЫЕ ИНДЕКСЫ:
Почта России: бумажная версия – **79073**; CD-версия – **12717**

ЧТО ТАКОЕ ХОРОШАЯ ШКОЛА?

Л. РОСЛОВА

Такой вопрос обсуждался на круглом столе, на который меня пригласили. И в строгом соответствии с содержанием школьного математического образования и ФГОС я решила применить математические знания на практике и провести опрос общественного мнения среди коллег-педагогов, а также юристов, компьютерщиков и секретарей, в общем, всех, кто оказался в зоне моего непосредственного доступа. Просила ответить на вопрос, вынесенный в заголовок, ограничившись одним предложением. Что же у меня получилось после обработки и анализа полученных ответов?

Несмотря на большой разброс в возрасте, образовании, наличии или отсутствии стажа педагогической работы и ученой степени, разброс в мнениях был невелик. Все высказывания оказались лежащими на небольшом отрезке AB. На конце A оказалось такое мнение: «Школа — это творческое познавательное пространство».

И как бы раскрывая это определение, мои респонденты говорили, что ученикам должно быть комфортно и интересно, подчеркивали важность дружелюбного отношения к детям как к личностям. И в отношении учителей были те же самые соображения, связанные с комфортом и интересом. Однако к взрослым предъявлялись и определенные требования, что вполне объяснимо, ведь именно они ответственны за выстраивание позитивных отношений с детьми, с их родителями, да и друг с другом, это они должны удовлетворять познавательные интересы учеников, которые и определяют сущность школьного пространства.

На другом конце отрезка оказалось высказывание B: «Школа — это грамотные, умные и тактичные учителя». В общем, социум продемонстрировал завидное единство и дружелюбное отношение.

Что же в реальности? Многие ли школы попадают под определение «хорошая» с точки зрения полученного результата? Например, с позиции «учитель». Нисколько не сомневаюсь, что подавляющее большинство «грамотные, умные и тактичные». А насчет комфорта и интереса? ..

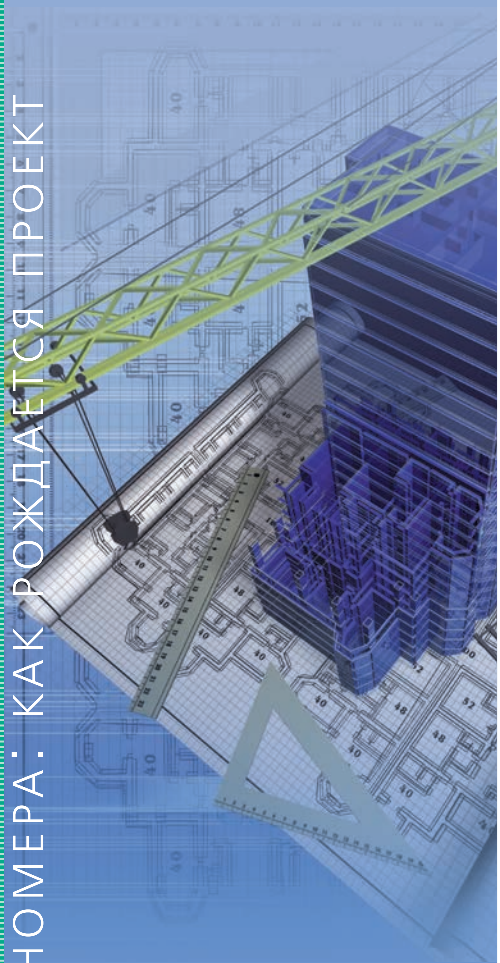
Однажды коллега посетовала на то, что для учителей сейчас характерно состояние профессионального выгорания. Я не удивилась, это объясняло практически полное отсутствие учителей на очень полезной (с точки зрения практической работы) конференции, на которой мы с ней встретились. И в общем-то ясно, что связан синдром выгорания с непрерывными преобразованиями в системе образования, которые продолжаются уже два десятилетия. Введение новых стандартов, появление новых учебников, внедрение новой системы аттестации — и все это в течение небольшого промежутка времени — не может пройти даром. А дарованное школе право самой определять, чем жить и как развиваться, свелось к сваливанию на нее всей полноты ответственности за качество образования и бюрократическому требованию создания многостраничного талмуда под названием «Основная образовательная программа образовательной организации». Вот и погас огонь!

А ведь жива школа, пока горит огонь в глазах ее учителей!

А. АЛФИМОВА,
alfimovaa@mail.ru
г. Москва

Фото предоставлены автором

КАК РОЖДАЕТСЯ ПРОЕКТ?



В настоящее время организации проектной и исследовательской деятельности школьников уделяется значительное внимание. Так, требования ФГОС среднего (полного) общего образования к метапредметным результатам освоения обучающимися основной образовательной программы включают в себя владение навыками учебно-исследовательской, проектной и социальной деятельности [3].

Под методом проектов Е.С. Полат [2] понимает способ достижения дидактической цели через детальную разработку проблемы, которая должна завершиться вполне реальным практическим результатом, оформленным в виде конкретного продукта деятельности.

Особенность метода проектов заключается в том, что он предусматривает применение полученных теоретических знаний, данных наблюдений, лабораторных и экспериментальных работ в создании конкретного продукта и его защите в процессе презентации и дискуссии.

С точки зрения вида учебной деятельности выделяют исследовательские, ознакомительно-ориентировочные (информационные), практико-ориентированные (прикладные), творческие и игровые проекты.

В школьной практике термином «исследование» обычно называют исследовательские и ознакомительно-ориентировочные (информационные) проекты, а термин «проект» применяют к практико-ориентированным (прикладным), творческим и игровым проектам. Такой же терминологии будем придерживаться и мы в дальнейшем.

Приведем примеры проекта и исследования, обратив внимание на методы, применяемые в работе: в первом случае это преимущественно практические, во втором — теоретические методы исследования [4].

1. Тема: «Перспектива в геометрии и искусстве» (проект с элементами исследования)

Методы, применяемые в работе над проектом:

– изучение научно-популярной и учебной литературы по геометрии и искусству;

– поиск информации в Интернете;

– изготовление и обработка собственных рисунков и фотографий;

– беседа с профессиональным фотографом;

– анкетирование и обработка результатов;

– создание фотоальбома «Перспектива в жизни».

Стенд для представления исследовательской работы «Автострахование: статистика и рекомендации»

2. Тема: «Автострахование: статистика и рекомендации» (исследовательская работа)

Методы исследования:

– анализ литературы и интернет-источников по вопросам страхования;

– проведение расчета стоимости «Каско» на сайтах различных страховых компаний;

– составление анкеты и анкетирование автовладельцев, анализ его результатов;

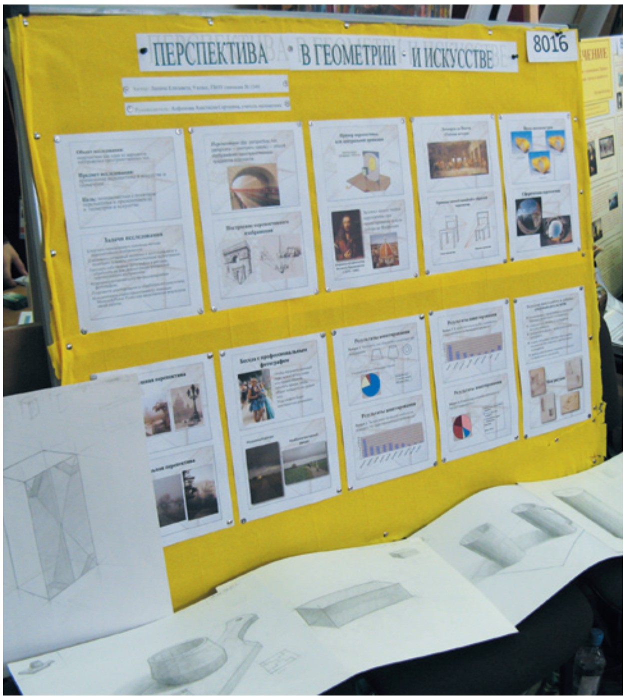
– составление рекомендаций страхователям по выбору страховой компании и условий страхования и страховщикам по привлечению клиентов;

– обоснование полезности знакомства школьников с вопросами страхования на уроках математики;

– составление задач, связанных со страхованием, которые можно предложить на уроках математики.

В первой работе в качестве проектного продукта выступают авторские рисунки и фотографии, выполненные по правилам создания перспективного изображения, а также созданный фотоальбом. Небольшое анкетирование, проведенное автором, и обработка его результатов не оказывают существенного влияния на структуру

Стенд, оформленный по результатам проекта



и содержание работы в целом, а потому относятся лишь к элементам исследования.

Во второй работе анкетированию автовладельцев уделено существенное влияние, проведен тщательный анализ его результатов с различных точек зрения с применением различных методов описательной статистики — это основная часть исследования.

Важно, что *дидактическая цель* любого проекта всегда познавательная — овладение новым знанием, практическими умениями, формирование критического мышления, то есть всей совокупностью интеллектуальных умений, присущих критическому (или направленному, как его иногда называют) мышлению через самостоятельную исследовательскую, поисковую деятельность. Это овладение умением работать с информацией, применять полученные знания на практике.

Поэтому в качестве ***требований к использованию метода проектов*** можно назвать следующие.

1. Наличие значимой в исследовательском, творческом плане проблемы, требующей для своего решения интегрированного знания из разных областей, исследовательского поиска.

2. Практическая, теоретическая, познавательная значимость предполагаемых результатов, наглядность их представления.

3. Самостоятельная (индивидуальная, парная, групповая) деятельность учащихся при обязательном разделении обязанностей между участниками проекта.

4. Структурирование содержательной части проекта (с указанием этапов работы, сроков выполнения, планируемых на каждом этапе результатов).

5. Использование исследовательских методов, предусматривающих определенную последовательность действий:

– знакомство с проблемной ситуацией;

– определение основной проблемы и способов ее решения для выхода из проблемной ситуации (использование для этих целей форматов круглого стола и мозговой атаки, выдвижение гипотез);

– обсуждение методов исследования (в малых группах сотрудничества);

– обсуждение способов оформления предполагаемых результатов (презентации, творческие отчеты, видеоклипы, рефераты);

– анализ и систематизация полученных данных;

– подведение итогов, оформление результатов для защиты проекта: презентация, выводы, выдвижение новых проблем исследования.

Подготовка ученического проекта или исследования существенно более сложна по сравнению с подготовкой реферата, а главное — требует непосредственного участия (руководства) со стороны учителя. Такая работа готовит старшеклассников к вузовскому обучению, в учебном процессе которого научно-исследовательским работам отводится важная роль [1].

Приняв решение о руководстве проектной или исследовательской работой, особое внимание учитель должен уделить созданию авторской группы или принятию решения о том, что работа будет выполняться учащимся индивидуально. Здесь многое зависит от конечной цели выполнения работы. Если работа выполняется старшеклассником с расчетом на участие в вузовских конкурсах, то, согласно их условиям, в большинстве случаев она должна быть индивидуальной. Если же такого ограничения нет, то возможно выполнение работы в парах и группах, тогда возникает задача формирования групп так, чтобы учащиеся могли эффективно сотрудничать. Кроме того, между ними необходимо четко разделить обязанности, что, как правило, достаточно сложно сделать. Однако в случае, если учащиеся недостаточно взрослые и/или не имеют опыта представления работ, более психологически комфортной, а потому и удобной может оказаться именно работа с группой из 2–3 человек.

Отметим, что любая работа по изучению внепрограммного материала по математике, особенно выполненная под грамотным руководством учителя, будет полезной для ученика. Однако далеко не при каждом выборе темы такая работа сможет выйти за пределы реферата и стать проектом или исследованием. Опыт показывает, что выполнить именно проект по математике, предполагающий создание некоего продукта, достаточно затруднительно. Исследование организовать проще, однако далеко не всегда темы, предлагаемые учащимися, удачны с этой точки зрения. На наш взгляд, наиболее выигрышны с точки зрения организации исследования межпредметные темы и темы, основанные на явлениях из реальной жизни (примеры таких тем будут приведены ниже [4]). Однако в этом случае часто необходимы консультации грамотного специалиста в затронутой предметной области, отличной от математики. В противном случае руководитель должен быть готов в значительной степени погружаться в ее изучение, поскольку доверять найденной детьми информации и ее интерпретации можно не всегда, а выполненная работа должна быть научной, по меньшей мере в том смысле, чтобы не содержать ложных сведений.

Начиная работу над проектом или исследованием, целесообразно познакомить учащегося с ***основными этапами, характерными для научной работы***. К ним относятся:

– постановка проблемы;

– ознакомление с литературой по данной проблематике;

– овладение методикой исследования;

– сбор собственного материала;

– его анализ и обобщение;

– выводы.

Поскольку в качестве результата работы (вне зависимости от того, выполняется проект или исследование) предполагается получить в первую очередь ее описание (текст работы), то консультирование по работе над проектом наиболее эффективно проводить по электронной почте. При этом для получения консультации учащийся должен прислать учителю текст работы или его фрагмент с указанными в нем вопросами.

Текст работы, как правило, ***состоит из следующих разделов***:

– титульный лист;

– аннотация;

– оглавление;

– введение;

– теоретическая часть (возможно, разбитая на параграфы, подпункты);

– практическая (исследовательская) часть;

– заключение;

– список литературы;

– приложения (для исследования необязательны, для проекта разработанный продукт представляется в качестве одного из приложений).

В результате анализа требований различных конкурсов были сформулированы ***примерные критерии оценивания проектных и исследовательских работ***, с позиции которых мы рекомендуем учащимся оценивать себя в процессе работы над своей темой.

1. Постановка цели работы.
2. Планирование путей достижения цели (задачи, внутренняя логика).
3. Глубина раскрытия темы.
4. Разнообразие источников информации, культура работы с ними.
5. Анализ хода работы, наличие самостоятельных выводов.
6. Личная заинтересованность автора, степень самостоятельности работы.
7. Соответствие требованиям оформления письменной части.
8. Качество проведения защиты.
9. Общая оценка результата работы (или качество проектного продукта).
10. Степень участия в исследовании. Прилежание (на основе отзыва руководителя).

Участие в проектной деятельности полезно для школьников с разных точек зрения. Такая работа позволяет максимально интенсифицировать самостоятельную деятельность учащихся, в частности, предоставляет им возможность самостоятельного планирования поисковой деятельности и решения поставленной проблемы, учит взаимодействию с членами команды и педагогом, то есть способствует развитию информационных и организационных общеучебных умений.

Представление работы на различных конкурсах не является обязательной частью работы над проектом, однако полезно для учащихся как с точки зрения получения новых предметных знаний в процессе знакомства с работами других конкурсантов, так и с точки зрения получения опыта публичного выступления и подготовки к нему.

На практике работа начинается с составления примерного плана работы и сбора доступной информации по выбранной теме. Уже на этапе ее систематизации и анализа важно понимать, каким образом будет построена практическая часть работы — это будет скорее проект или исследование.

Важно отметить, что даже у студентов при написании дипломной работы вызывает сложность четкое понимание и формулирование целей, задач, гипотез и других неотъемлемых атрибутов исследования. В связи с этим мы предлагаем ученику подсказку по работе над проектом или исследованием (табл. 1).

Таблица 1

Этап работы	Место в тексте работы	Подсказка ученику
1. Выбор темы и обоснование ее актуальности	Введение	Из рассматриваемых тем я выбрал... Эта тема привлекла меня тем, что... Работа над этой темой позволит...
2. Формулировка проблемы	Введение	Определи ключевой вопрос темы. *Проблема* — это противоречия между существующей ситуацией и твоим представлением об идеальной ситуации, которые нужно решить. Проблема обязательно должна быть взята из реальной жизни, знакома тебе и значима для тебя
3. Определение предмета и объекта исследования	Введение	*Объект исследования* — это процесс или явление, порождающее проблемную ситуацию и избранное для изучения. *Предмет исследования* — более узкое понятие, чем объект, он является частью, элементом объекта
4. Выбор методов исследования	Введение	Некоторые *методы исследования*: анализ литературы, поиск информации, опросы (анкетирование, интервью), наблюдение, эксперимент
5. Выдвижение гипотез — путей решения проблемы	Введение	В ходе работы нужно подтвердить или опровергнуть гипотезу (мы сделали и получили то, что хотели, или не то, что хотели; мы исследовали вопрос и поняли, что наше предположение было верным или неверным)
6. Определение цели и задач, значимости работы	Введение	*Цель* помогает ответить на вопрос «Зачем мы хотим выполнить эту работу?». Она звучит емко и отражает тему: написать, составить, сделать, выяснить, доказать, разработать и т.п. *Задачи* — это шаги, которые необходимо сделать для достижения поставленной цели: изучить, описать, установить, проанализировать и т.п. *Значимость*: «если я сделаю запланированное, то научусь, приобрету, получу...; люди получат, узнают, смогут использовать...»
7. Составление плана работы	Введение	На этапе *планирования* необходимо: а) определить источники информации; б) определить способы сбора и анализа информации; в) определить способы представления результатов; г) выработать критерии оценки результатов и процесса работы; д) разделить задачи (обязанности) между членами команды
8. Сбор и обработка информации	I глава (теоретическая). Если не писать больше ничего, то получится *реферат*	Что ты знаешь об объекте своего исследования? Что было написано до тебя о предмете? Определи ключевые слова темы, изучи информацию, связанную с ними. Какие книги и другие источники информации ты изучил, чтобы узнать вышеперечисленное? Какие выводы можешь сделать?
	II глава (практическая). Это собственно *исследование* (ты изучил) или *проект* (ты создал)	*Исследование.* Какие опыты ты провел? Что нового ты узнал? Какие анкетирования, исследования ты провел? Какие открытия сделал? Как ты проводил опыты и исследования? Как обрабатывал результаты? Какие выводы можешь сделать? *Проект.* Что ты построил, сделал, написал, создал? Как ты это делал? Как к этому отнеслись люди? Работает ли это так, как ты планировал?
9. Подведение промежуточного итога работы	Заключение	Достиг ли ты цели работы? Ты подтвердил или опроверг свою гипотезу? Что еще можно сделать в данном направлении (перспективы исследования)?
10. Оформление продукта		*Узнай* требования конкретного конкурса, *оформляй* работу в соответствии с ними. Не забудь про грамотное оформление библиографии (интернет-источники тоже указываются в библиографии в соответствии с ГОСТ). *Создай* презентацию работы (стендовую, компьютерную)
11. Сбор отзывов и рецензий		Порадуйся похвалам и внеси исправления в работу в соответствии с замечаниями
12. Создание текста выступления		За 5–7 минут выступления ты сможешь рассказать и показать только самое основное: Что и зачем ты исследовал? Чего достиг? Почему твое исследование заслуживает внимания?
13. Защита работы и ее публикация		Подготовься отвечать на вопросы членов жюри. Узнай требования к публикации работы, оформи работу (или тезисы работы) и сопроводительные документы к ней в соответствии с требованиями

Трудились не зря!
Есть заинтересовавшиеся!

Приведем несколько примеров [4] описания этапов работы.

Пример обоснования актуальности темы

Тема: «Основы сокрытия информации»

То, что информация имеет ценность, люди осознали очень давно — недаром переписка сильных мира сего издавна была объектом пристального внимания их недругов и друзей. На протяжении всей своей многовековой истории, вплоть до совсем недавнего времени, это искусство служило немногим, в основном верхушке общества, не выходя за пределы резиденций глав государств, посольств и, конечно же, разведывательных миссий. И лишь несколько десятилетий назад все изменилось коренным образом — информация приобрела самостоятельную коммерческую ценность и стала широко распространенным, почти обычным товаром. Ее производят, хранят, транспортируют, продают и покупают, а значит, воруют и подделывают. Следовательно, ее необходимо защищать.

В современном обществе успех любого вида деятельности все сильнее зависит от обладания определенными сведениями и от отсутствия их у конкурентов. И чем сильнее проявляется указанный эффект, тем больше потенциальные убытки от злоупотреблений в информационной сфере и тем больше потребность в защите информации.

Меня же привлекла эта тема потому, что я с детства интересовался шифрованием. Я люблю читать детективы и смотреть захватывающие фильмы, в которых часто встречаются шифры.

Примеры выделения объекта и предмета исследования

Тема: «Математические закономерности в игре ”Домино“»

Объект исследования: игра домино.

Предмет исследования: выявление математических закономерностей в игре домино.

Тема: «Правильные паркеты»

Объект исследования: правильные многоугольники и паркеты, построенные на их основе.

Предмет исследования: вычисление углов правильных многоугольников; способы их построения и закономерности укладывания на поверхности, расчет возможности их укладки в виде правильных паркетов.

Пример формулировки цели и задач исследования

Тема: «Оптимальный алгоритм разложения натуральных чисел на простые множители»

Цель: разработать оптимальный алгоритм разложения натуральных чисел на простые множители.

Задачи исследования:

– познакомиться с литературой по данной и смежным темам;

– сформулировать все определения, так или иначе используемые при решении данной задачи;

– изучить разновидности простых чисел;

– принять участие в нахождении новых простых чисел;

– найти и описать признаки делимости натуральных чисел;

– разработать оптимальный алгоритм разложения числа на простые множители;

– подготовить компьютерную презентацию результатов работы.

Остановимся подробнее на реализации в работе сформулированных задач. В приведенном примере рассматривается тип работы «исследование».

Тема: «Математические закономерности в биологии: наследование группы крови»

Гипотеза исследования. Наследование групп крови подчиняется определенным математическим закономерностям: данные о наследовании групп крови, полученные в результате опроса людей, практически совпадают с данными, полученными в результате математических вычислений.

Цель исследования: сравнить данные о наследовании групп крови, взятые из информационных источников, с данными, полученными опытным путем и в результате математических расчетов.

Реализация задач исследования представлена в таблице 2.

Литература

1. *Алфимова А.С.* Об обучении будущих учителей математики и информатики организации проектной и исследовательской деятельности учащихся // Актуальные проблемы обучения математике и информатике в школе и вузе / Материалы II Международной научной конференции 2–4 октября 2014 г., ФГБОУ ВПО МПГУ / Под ред. А.Л. Семенова, Л.И. Боженковой. — М.: ФГБОУ ВПО МПГУ, ИП Стрельцов И.А. (Эйдос), 2014. **2.** *Полат Е.С., Моисеева М.В., Петров А.Е.* и др. Педагогические технологии дистанционного обучения: учебное пособие для студентов высших учебных заведений / Под. рук. Е.С. Полат. — М.: Издательский центр «Академия». **3.** Федеральный государственный образовательный стандарт среднего (полного) общего образования. [Электронный ресурс]. Дата обновления: 11.09.2012. — Режим доступа: http://www.ug.ru/new_standards/5 (дата обращения: 15.09.2015). **4.** Работы, выполненные под руководством автора, фрагменты которых приводятся в тексте статьи. [Электронный ресурс]. Дата обновления: 11.02.2014. — Режим доступа: http://project.1september.ru/persons/206-726-602 (дата обращения: 15.09.2015).

Таблица 2

Реализация в работе сформулированных задач исследования

Формулировка задачи	Реализация в работе
Проанализировать литературу и интернет-источники, подобрать необходимый материал по биологии. Познакомиться с основными фактами теории вероятностей, научиться вычислять вероятности событий с помощью классического определения	***Теоретическая часть работы*** 1. Краткое изложение необходимых сведений из биологии и теории вероятностей. 2. Примеры вычисления вероятностей с помощью классического определения
Провести анкетирование сотрудников гимназии о группах крови членов их семьи. Проанализировать полученные данные. Представить полученную информацию в виде таблиц. Вычислить вероятность появления той или иной группы крови. Сравнить полученные результаты и сделать выводы	***Практическая часть работы*** 1. Описание соображений, исходя из которых составлена анкета. План проведения анкетирования, описание выборки. 2. Анализ результатов анкетирования: представление обобщенных данных в виде таблиц, диаграмм, формулирование выводов. 3. Математический расчет вероятностей появления каждой из групп крови, представление результатов в табличном виде. 4. Сравнение результатов, полученных в пунктах 2 и 3. Выводы. *Приложения* 1. Полный список вопросов составленной анкеты. 2. Первичные данные, полученные в результате анкетирования (заполненные анкеты или таблица со списком опрошенных и данными ими ответами)
Подготовить слайд-презентацию или оформить стенд для представления результатов своей работы	***Представление работы***

Г. КАРПОВА,
karpova29@mail.ru,
г. Санкт-Петербург

ПРОЕКТ ДЛЯ ПРОДУКТИВНОГО УЧЕНИКА

В учебниках М.И. Башмакова есть специальные задания исследовательского характера, которые называются «сюжеты», «проекты» или «исследовательские работы». Их можно использовать как основу для проектной работы. Разработанная автором технология предъявления этих заданий позволяет каждому учащемуся достичь результата при их выполнении, проявить себя на своем уровне: кому-то в решении стандартных задач, кого-то привлекут задания эксперимента, а кто-то пойдет дальше, заинтересуется проблемой и выйдет на уровень проектной работы. Конечно, каждому ученику на этом пути потребуется деликатная поддержка и направляющая помощь учителя.

По традиции, эти материалы считаются дополнительными, поэтому не всегда у учителя, как говорят, доходят руки до них. Выбирая жанр рассказа от ученика, хотелось ярче представить смысл и ценность и заданий, и устройства проекта, которые не всегда видны при прочтении стандартных комментариев и решений, привлечь внимание к важности выполнения заданий исследовательского стиля для развития учащихся.

Итак, проект из главы «Уравнения». Это пятая, последняя, глава учебника «Алгебра» для 7-го класса, издательство «БИНОМ. Лаборатория знаний».

Проект «Решение уравнений в целых числах»

Постановка задачи

Из линейного уравнения вида $ax + by = c$ нельзя однозначно определить неизвестные x и y. Для этого надо иметь еще одну зависимость, еще одно уравнение, связывающее x и y. В то же время если по смыслу задачи x и y должны быть натуральными числами, то существует только конечное число решений, и их удается все перечислить. Уравнения, в которых ищутся решения, являющиеся целыми числами, называются диофантовыми уравнениями в честь греческого математика Диофанта, решившего много таких уравнений.

Цель работы: научиться решать линейное уравнение с двумя неизвестными в целых числах.

Ученик. Узнал новое: еще один вид уравнений и его название. А запись уравнения в общем виде та же, что и уравнения прямой. Диофант!? Решал уравнения в далекие от нас годы. Интересно, какие сведения о нем сохранились? Что его побудило решать такие уравнения? (*Проблема № 1.*) Видимо, придумал, как их можно решать, иначе бы не было в математике темы «Диофантовы уравнения», молодец!

Обдумывание условия

Рассмотрим такую задачу.

Куплено a карандашей и b ручек, причем истрачено c рублей. Сколько стоит один карандаш и одна ручка?

1. Обозначив стоимость одного карандаша через x, а стоимость одной ручки через y, составьте уравнение, связывающее a, b, c, x и y.

2. Решите это уравнение, зная, что $a = 7$, $b = 9$, $c = 125$ и что ручка стоит вдвое дороже карандаша.

3. Найдите x и y при тех же значениях a, b и c, но при условии, что три карандаша и 10 ручек стоят 72 рубля.

Ученик. Задание понятно, и стало немного понятнее, что вынудило математиков окунуться в проблему решения уравнений в целых числах.

Пункт 1. Задача нетрудная. Легко (5-й класс!) получится уравнение $ax + by = c$.

Пункт 2. Тоже несложно. Составим два уравнения и решим систему

$$\begin{cases} 7x + 9y = 125, \\ y = 2x. \end{cases}$$

Система легкая. Метод подстановки; можно и устно решить: $x = 5$, $y = 10$.

Пункт 3. Зачем-то еще одну систему просят решать. В чем смысл еще одной задачи? Ладно, посмотрим. Система

$$\begin{cases} 7x + 9y = 125, \\ 3x + 10y = 72 \end{cases}$$

посложнее предыдущей. Лучше решать вычитанием:

$$4x - y = 53,\ \ y = 4x - 53.$$

А теперь подстановка во второе уравнение. Решено:

$$x = 14,\ y = 3.$$

О, ручки стали дешевле карандаша. Ничего, видно, и такое бывает.

Численный эксперимент

1. Сколько могут стоить один карандаш и одна ручка, если истрачено 125 рублей и известно, что стоимости — целые числа? Вы убедились в том, что уравнение $7x + 9y = 125$ имеет лишь два решения, являющихся натуральными числами.

2. Постройте график зависимости между x и y при указанных выше значениях a, b и c. Убедитесь по графику в том, что прямая, являющаяся графиком, проходит лишь через две точки, координаты которых — натуральные числа.

Ученик.

Пункт 1. Странный вопрос, или я чего-то не понимаю? И следующее предложение сильно смущает. Не убедился я. Два решения есть, они из задач предыдущего пункта. А почему лишь два? Как я мог в этом убедиться? Решал задачи, да и все. И почему автор такие задачи придумал, наобум, или в них есть какой-то смысл? А может, чтобы ответить на вопрос, нужно свои задачи придумывать? Оставлю это на потом. (*Проблема № 2.*)

Пункт 2. Строим прямую $7x + 9y = 125$. Вот и сгодятся ответы из предыдущего пункта. Это координаты точек для прямой, через которые она проходит. А я молодец, догадался об этом. Теперь легко построить прямую по двум точкам: (5; 10), (14; 3). Если бы не догадался, пришлось бы возиться с дробными числами. Ведь нас учили для построения прямой брать значения x, равные 1 или 0, и вычислять y. А при $x = 1$ и при $x = 0$ значение y будет дробным. Интересно, автор рассчитывал, что задания — решение задач системами и построение прямой — связаны и что ученики догадаются об этом? Значит, вторые условия в задачах взяты не с бухты-барахты, а чтобы уравнению $7x + 9y = 125$ удовлетворяли целые значения x и y.

Прямую построил. Ура, несколько точек с натуральными координатами почти лежат на прямой. Ну-ка, координаты подставим в уравнение. Их равенство не выполняется! Хорошо, что бумага в клеточку, эти точки видны. А если без клеточек, то как быть? Перепроверять все точки, близкие к прямой? Надо подумать. (*Проблема № 3.*) Может, в этом случае можно обойтись без вычислений, а если найду такой способ — это будет научное открытие?

А вторая проблема разрешилась, не надо придумывать других задач про карандаши и ручки. Уже ясно, что для первого уравнения других целых ответов не получится.

Пункт «Численный эксперимент» выполнен.

Анализ эксперимента

1. Составьте таблицу целых значений $0 \le c \le 47$, для которых уравнение $7x + 9y = c$ имеет хотя бы одно решение в целых неотрицательных числах ($x = 0$ или $y = 0$ считаются возможными). Проверьте, что у вас должно быть в этой таблице 24 значения c, начиная с 0, 7, 9 и т.д.

2. Проверьте, что если некоторое $c \le 47$ содержится в составленной таблице, то число $47 - c$ в этой таблице отсутствует.

Ученик. Поторопился с анализом. Тут есть специальный пункт. Ай-ай-ай, а там совсем другое задание. Трудоемкие, но есть подсказки.

Уравнение $7x + 9y = c$, где $0 \le c \le 47$.

А как же искать целые решения? Работы на месяц, пока на них наткнешься. Придется потеть.

Составлю таблицу, как просят.

Итак, подбираем решения уравнения $7x + 9y = c$. Понял, что вместо x или y надо подставлять числа, начиная с нуля.

Увидел, что $7x + 9y \ge 7$, поскольку x и y — натуральные и 0.

Итак, подбираю.

Значения	c	0	7	9	14	16	18	21	23	25
Значения	x; y	0; 0	1; 0	0; 1	2; 0	1; 1	0; 2	3; 0	2; 1	1; 2

Продолжаю.

Значения	c	27	28	30	32	34	35	36	37	39
Значения	x; y	0; 3	4; 0	3; 1	2; 2	1; 3	5; 0	0; 4	4; 1	3; 2

Заканчиваю!

Значения	c	41	42	43	44	45	46
Значения	x; y	2; 3	6; 0	1; 4	5; 1	0; 5	4; 2

Все сошлось! И 24 значения c получилось, и второе условие задания соблюдается. Было страшно приниматься за это задание, первые примеры тяжело подбирались, потом приспособился, даже понравилось, как игра. Заодно потренировался в сложении и вычитании, и даже делении.

Хорошо, что проверить наличие решений требовалось только до $c = 47$, а не до $c = 125$. Интересно, в чем загадка числа 47, не похоже, что оно взято просто так. (*Проблема № 4*.)

Есть идея! Построю график уравнения $7x + 9y = 47$. Ура! Нужно было догадаться построить его сразу, потому что все 24 ответа под прямой «как на ладони» — бери координаты узелков точек под прямой и вычисляй c. Да! Как говорят, «умная мысля приходит опосля». Теперь я знаю, что при $c < 47$ уравнения или не имеют натуральных решений, или имеют только одно, то, которое я нашел, поэтому можно не мучиться с ответом на вопрос, есть ли другие решения, кроме найденных. Значит, все, кто выполняет этот проект, подберут для x и y те же ответы. А еще я понял, что прямые $7x + 9y = c$ при разных значениях c будут параллельными.

Проведение доказательства

Докажите, что начиная с $c = 48$ в этой таблице будут все целые числа, то есть что при любом целом $c \ge 48$ уравнение $7x + 9y = c$ имеет решение в целых неотрицательных числах.

Возьмем одно из найденных решений уравнения $7x + 9y = 125$, например, $x = 5$, $y = 10$, запишем числовое равенство $7 \cdot 5 + 9 \cdot 10 = 125$ и вычтем из уравнения. Получим:

$$7(x - 5) + 9(y - 10) = 0,\ \ 7(x - 5) = -9(y - 10).$$

Число справа, $9(y - 10)$, делится на 7, число 9 с ним взаимно просто, следовательно, $(y - 10)$ делится на 7. Можно записать:

$$y - 10 = 7t,\ \ y = 10 + 7t,$$

где t — целое число. Подставим $y - 10 = 7t$ и получим:

$$7(x - 5) = -9 \cdot 7t,\ \ x - 5 = -9t,\ \ x = 5 - 9t.$$

Проверим, что пары чисел $x = 5 - 9t$, $y = 10 + 7t$ являются решением исходного уравнения при любом t. Подставляя целые значения t, мы найдем все целочисленные решения. При $t = -1$ получится второе из найденных решений в натуральных числах.

Ученик. Автор сам и доказал. Мне остается только сделать проверку решений уравнения $7x + 9y = 125$. Это легко: беру выражения для x и y и подставляю в уравнение, потом преобразовываю:

$$x = 5 - 9t,\ y = 10 + 7t,$$
$$7(5 - 9t) + 9(10 + 7t) = 35 - 63t + 90 + 63t = 125.$$

Верно.

И зачем этот пункт? Наверное, чтобы понимать, что решений в целых числах может быть бесчисленное множество и их можно вычислять по формуле. А еще я понял вот что: приводя доказательство, автор учил, как получить формулу для вычисления x и y, называется это — алгоритм решения уравнения, и его нужно запоминать.

Заключительные вопросы

Число 47 получено из $a = 7$, $b = 9$ по формуле $47 = ab - a - b$.

Наше исследование можно продолжить дальше и доказать, что диофантово уравнение $ax + by = c$ (a и b — положительные, взаимно простые числа) при любом $c > ab - a - b$ имеет решение в целых неотрицательных числах.

Докажите, что для $a = 7$, $b = 9$ числа c между 0 и $ab - a - b$, для которых уравнение разрешимо и не разрешимо, расположены симметрично. Если при некотором c уравнение разрешимо, то для числа $ab - a - b - c$ оно не разрешимо, и наоборот.

Но доказательство последнего утверждения в общем виде является трудной задачей.

Ученик. Вот чуть-чуть и приоткрылась тайна числа 47, оказывается оно связано с коэффициентами при x и y. Зная это, то есть наличие границы, заранее будешь знать: всегда есть натуральные решения и их может быть несколько или уравнение необязательно имеет натуральные решения, а если имеет, то только одно. Но, как и кто догадался, что есть такая зависимость? (*Проблема № 5*.)

А доказывать и не надо, просто проверить по таблице, а я уже проверял.

Задания проекта закончились. Можно сказать, что первый этап работы над проектом завершен, я вник в проблему решения диофантовых уравнений. Появились вопросы, на которые надо ответить, чтобы завершить работу над проектом. Кроме обозначенных проблем, есть еще и такие: научился ли я решать диофантовы уравнения? А что изменится, если один из коэффициентов имеет знак минус, такие уравнения реально возможны при решении задач, когда в задаче есть условие «на сколько одна величина больше другой». Да еще коэффициенты при x и y — обязательно ли они взаимно простые, о чем упоминается в пункте «доказательство»? В общем, надеюсь, что за лето и начало восьмого класса я работу над проектом закончу.

Итак:

I этап проекта: выполнение заданий из учебника.

II этап: разобраться в возникших проблемах.

Это:

1. Узнать о Диофанте и его времени.
2. Научиться решать и исследовать диофантовы уравнения типа $7x + 9y = c$, как в заданиях проекта. Например, $3x + 5y = 8$ или $4x + 11y = 15$.
3. Разобраться, чем отличается решение уравнения, если вместо сложения будет вычитание, например, $7x - 9y = 15$.
4. Что будет, если коэффициенты при x и y не взаимно простые числа, например, $4x + 6y = c$.
5. Разобраться, в чем секрет $(ab - a - b)$ — границы количества решений уравнения $ax + by = c$.

III этап: оформить проект и подготовиться к выступлению.

А поначалу, когда брался за работу над проектом, подумал, какая ерунда, выполню несколько заданий — и проект готов. Оказывается, не случайно для работы над проектом выделяют много времени, иногда даже два года.

От автора. Конечно, не всякий учащийся будет задавать себе дополнительные вопросы по содержанию, но ведь рядом с любым учеником есть учитель! А насколько работа над проектом полезна для учеников, решите сами.

КАК СТАТЬ АВТОРОМ ЖУРНАЛА «МАТЕМАТИКА»?

Сделать это несложно: надо лишь написать статью и прислать ее в редакцию журнала. И еще одно условие — она должна быть интересна и полезна вашим коллегам.

Требования к оформлению статьи таковы:

Материал должен быть напечатан на компьютере или на пишущей машинке.

Рисунки должны быть четкими, аккуратными, выполненными на белой нелинованной или клетчатой бумаге с помощью чертежных инструментов. Если вы хорошо владеете компьютером, можете воспользоваться для этого программой Corel Draw.

Рисунки надо пронумеровать, нумерация должна соответствовать их нумерации в тексте.

Фотографии должны быть цветными. Формат фотографий, отпечатанных на бумаге, не менее 10 × 15 см. Размер цифровых фотографий не менее 800 × 600 пикселей, формат JPG, качество, используемое при сохранении JPG-файлов, высокое (high).

Прислать статью можно по почте или по электронной почте. Всю необходимую для этого информацию вы найдете на странице 2 журнала.

Для получения сертификата о наличии печатной работы необходимо заполнить карточку автора.

Фамилия		
Имя		
Отчество		
Дата рождения		
Место рождения		
Адрес проживания		
Индекс	город	
Улица		
Дом	корпус	квартира
Телефон		
Информация о профессиональной деятельности		
Должность		
Место работы (полное официальное наименование образовательной организации)		
Стаж работы		

В. ЯНУШЕВСКИЙ,
г. Ульяновск

СИСТЕМНЫЙ ПОДХОД К УЧЕБНЫМ ПРОЕКТАМ

Это уже свершившийся факт: 1 сентября 2015 года Федеральные государственные образовательные стандарты пришли во все школы России в штатном режиме, правда, пока только в 5-е классы. Как известно, ФГОС предусматривают сочетание познавательной деятельности учащихся на уроках с учебным проектированием — так наши дети будут теперь осваивать образовательную программу на уровне начальной, основной и старшей школы. Первый опыт выполнения учебных проектов наши дети приобретают уже в младших классах. А вот широкое развертывание проектной и исследовательской работы должно произойти в классах основной школы, потому что именно подросткам присуще стремление экспериментировать на любом, в том числе учебном материале. А при организации учебного проекта чрезвычайно важно, чтобы учебный материал стал материалом прикладным, то есть таким, с которым дети имеют дело в повседневной жизни.

Руководители школ и учителя уже столкнулись с непростыми проблемами, связанными с организацией проектной деятельности пятиклассников. А к девятому классу этим школьникам предстоит полностью освоить практику учебного проектирования и выполнить итоговый индивидуальный проект, который, по сути, станет еще одним экзаменом. Во всяком случае, без защиты такого проекта нельзя будет получить свидетельство об окончании основной школы.

Однако метод проектов в наших школах новостью не является, немалая часть учителей давно и достаточно успешно применяет эту технологию. Но до нынешнего учебного года за выполнение учебных проектов брались наиболее способные и амбициозные ученики, с достаточно высоким уровнем учебной мотивации. А переход на ФГОС требует, чтобы в учебное проектирование были вовлечены ВСЕ ученики.

Даже не очень внимательное наблюдение за стихийно сформировавшейся практикой учебно-проектной деятельности школьников позволяет сделать вывод, что к настоящему времени организация и методическая проработка проектных работ ведется главным образом в соответствии с тематическим подходом, к тому же осуществляемым на авторитарной основе. Это означает, что и учитель начальных классов, и учитель-предметник в основной или старшей школе единолично определяют тему очередного проекта — группового или индивидуального, сами подбирают исполнителей из числа наиболее способных учеников и оказывают им консультационную поддержку. В результате, как правило, получаются очень даже неплохие детские работы, авторы которых в дальнейшем нередко участвуют в различных конкурсах и олимпиадах, получая дипломы и ценные призы. Но вот какая штука: одноклассники таких ребят про эти проекты подчас ничего не знают. В результате одни ученики приобретают немалый опыт выполнения школьных проектов, а другие — нет. Это не означает, что тематический подход к организации школьного проектирования никуда не годится. Грамотно выполненные отдельными учениками или группами школьников проекты по различным предметам позволяют разнообразить содержательно-дидактическую основу уроков по наиболее трудным темам, что можно и должно использовать и впредь. Однако тематический подход следует применять в сочетании с другим, назовем его системным, в соответствии с которым достаточно крупная учебная тема рассматривается именно как система — в совокупности всех своих элементов, находящихся в отношениях субординации и взаимной координации. Такая тема дает название для коллективного проекта, который выполняет весь класс, а элементы системы определяют содержание индивидуальных проектов.

Коллективный проект реализует весь класс или даже параллель, а каждый ученик в рамках коллективного выполняет свой индивидуальный проект. Разумеется, возможны и групповые проекты, выполняемые двумя-тремя учениками. Темой коллективного проекта может стать любая учебная тема программы. Вот, к примеру, темы коллективных проектов в 5-м классе: география — «Мировой океан», биология — «Грибы», история — «Древний Египет», русский язык — «Лексика», литература — «Рассказ “Кавказский пленник” Л.Н. Толстого» и т.п. А в рамках изучения математики можно всем классом выполнить проект по теме «Десятичные дроби».

Технологической моделью всего проекта предлагаю считать *арбуз* — бахчевую культуру семейства тыквенных. Ни один человек не способен съесть арбуз целиком — предварительно его надо разрезать на дольки или скибы. Точно так же один отдельно взятый ученик не способен постичь любую, даже небольшую по объему учебную тему. Но у нас много учеников — целый класс! Вместе мы и будем осуществлять коллективный проект (в этом случае проявятся все сильные стороны классно-урочной системы, которую у нас почему-то принято ругать на чем свет стоит).

Сегментацией большой учебной темы (*разрезанием арбуза*) и должен заняться учитель (а вот в старших классах это уже могут делать сами школьники). И тут правило простое: если класс состоит, к примеру, из 20 учеников, то надо предложить не менее 25 тем индивидуальных проектов, потому что распределяться темы будут на основе свободного выбора детей, и этот выбор должен быть достаточно широким. В итоге, на *тарелке* обязательно останется несколько невостребованных *ломтиков*, которые, впрочем, могут взять себе некоторые страдающие повышенным познавательным аппетитом ребята.

Именно системный подход к организации учебного проектирования, во-первых, позволит всем без исключения школьникам стать проектировщиками, а во-вторых, обеспечит максимальное использование преимуществ классно-урочной системы, в частности, в том, что даст возможность школьникам коллективно — всем классом! — решать учебные проблемы. И тогда становится очевидным, что в современном образовательном процессе есть место не только индивидуальному усвоению знаний, но и коллективным формам овладения универсальными учебными действиями. И с учебной мотивацией будет все в порядке, потому что никто из ребят не сможет сказать: «А почему именно я?» В реализации коллективного проекта участвуют ВСЕ без исключения.

Современные дидактические принципы организации урока, в основе которых лежит системно-деятельностный подход, во главу угла ставят опору на ведущую деятельность детей. А она с возрастом меняется: у дошкольников — это игра, для учащихся начальной школы — познание, учебная деятельность, а для подростков — общение. Именно поэтому на уроках в основной школе так часто используется работа в группах: у школьников есть возможность поговорить и даже поспорить, но в рамках изучаемой темы. А проектная деятельность учащихся просто немыслима без общения: это и *взаимодействие* с учителем, *совместная работа* с одноклассниками при выполнении групповых проектов, а также *контакт* с аудиторией в ходе презентации проекта и его обсуждения.

Технология структурирования темы коллективного проекта (сегментации ее на частные темы, которые впоследствии станут у нас темами индивидуальных проектов) довольно проста. Рассмотрим такое структурирование коллективного проекта темы «Десятичные дроби». Данный тематический перечень соответствует УМК по математике для 5-го класса авторов Н.Я. Виленкина и др.

Учебный проект «Десятичные дроби»

Темы индивидуальных проектов

1. Десятичная система счисления.
2. История десятичной дроби.
3. Зачем нужны десятичные дроби?
4. Запятая в математике.
5. Роль запятой при переводе величин в другие единицы измерения.
6. Как обыкновенную дробь превратить в десятичную?
7. Как десятичную дробь превратить в обыкновенную?
8. Разряды чисел.
9. Младший и старший разряды дроби.
10. Умножение и деление десятичных дробей.
11. Смешанные числа.
12. Среднее арифметическое. Проценты и десятичные дроби.
13. Нахождение числа по его процентам.
14. Десятичная дробь в жизни человека.
15. Использование десятичных дробей в бухгалтерских расчетах.
16. Использование десятичных дробей в подсчетах голосов на выборах.
17. Использование десятичных дробей в кредитовании клиентов банков.
18. Использование десятичных дробей при расчетах в налоговых органах.
19. Использование десятичных дробей при покупке продуктов и приготовлении пищи.
20. Использование десятичных дробей при подсчете калорий еды.
21. Использование десятичных дробей при расчете цены товара. Скидка.
22. Десятичные дроби в счетчиках потребленной электроэнергии, горячей и холодной воды.
23. Десятичные дроби в музыке.
24. Десятичные дроби в искусстве.
25. Десятичные дроби в медицине.
26. Использование десятичных дробей при выведении итоговой отметки за четверть, полугодие, учебный год.

Когда темы индивидуальных проектов распределены, начинается самостоятельная работа каждого ученика по сбору необходимой информации: помимо учебника, будем использовать научно-популярную литературу, энциклопедии, справочники. Можно использовать и поисковые системы Интернета. На этом этапе работы учитель консультирует учеников-проектировщиков, определяет формы итоговой презентации проектов. Если целостное представление коллективного проекта будет происходить в форме конференции, то учитель задает инвариантную структуру докладов. Она, к примеру, может быть такой:

1) тема доклада;
2) мотивация выбора темы;
3) расчетное время продолжительности доклада (фактическое время будет фиксировать специально подготовленный ученик — «хранитель времени»);
4) краткое указание источников информации;
5) сам доклад по теме проекта;
6) выводы.

Ученическая конференция — наиболее приемлемая форма целостной презентации коллективного проекта. Такая конференция может быть как распределенной, то есть растянутой на 2–3 урока, так и концентрированной — проходящей в течение нескольких объединенных уроков по принципу «Здесь и сейчас» (пятиклассникам необходим опыт достаточно высоких интеллектуальных нагрузок).

Доклады должны быть короткими, эмоциональными, лаконичными, но достаточно информативными. Докладчикам разрешается пользоваться конспектами, цитировать по тексту научно-популярных книг, зачитывать значимые отрывки из справочной литературы, а вот чтение докладов «с листа» недопустимо. После устной презентации своих проектов ученикам полезно будет выполнить их текстовую версию. Сборник таких текстов наверняка послужит неплохим учебным пособием, которым смогут воспользоваться следующие поколения школьников.

К статье "Интегрированный проект. История математики Германии в лицах" (с. 18–19)
Главное, историческое здание Университета Эрлангена

Т. ПЧЕЛИНЦЕВА, О. ВОЛКОВА,
pchelintsewata@yandex.ru,
г. Владимир

ИНТЕГРАТИВНЫЙ ПРОЕКТ «ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ ГЕРМАНИИ В ЛИЦАХ»

Один из авторов статьи, О.Ю. Волкова, в музее гимназии им. Э. Нетер в г. Эрлангене (Германия)

В программу учебного предмета «Математика. Алгебра. Геометрия» по стандартам второго поколения введен новый методологический раздел «Математика в историческом развитии» [2]. Мы работаем в лингвистической гимназии № 23 им. А.Г. Столетова, в которой немецкий язык является вторым иностранным языком и изучается учащимися с 5-го класса. В этой связи у нас возникла идея: создать условия для развития проектных и учебно-исследовательских умений гимназистов, проявляющих повышенный интерес к математике и немецкому языку.

По мнению российского математика А.В. Дорофеевой, «для формирования мировоззрения учащихся важно ознакомить их не только с развитием идей, но и с биографиями творцов этих идей. В воображении школьников должны предстать живые люди с их прозрениями и ошибками, глубокие мыслители, преданные своему делу, отдающие ему всю жизнь, вступающие друг с другом в споры, смело борющиеся за распространение новых идей…» [1].

С этой целью учителями двух предметов (немецкого языка и математики) был разработан интегративный проект «История математики Германии в лицах», работа над которым осуществлялась в рамках деятельности научного общества учащихся «Грани» и подготовки к проведению в гимназии Дня науки по теме «Гармония окружающего мира».

В начале учебного года разработчиками проекта была проведена вводная беседа с учащимися с целью формирования первичного представления о проекте, формирования интереса к данной теме, создания условий и возможностей для дальнейшей творческой деятельности.

В ходе совместного обсуждения была сформулирована проблема проекта: как связана жизнь и научная деятельность немецких математиков с Россией?

Ребята решили разработать дополнительное учебное пособие по немецкому языку и математике и разместить его в гимназической библиотеке.

В ходе реализации проекта решались следующие задачи:

– формирование навыков работы с литературой (из гимназической библиотеки, областной научной библиотеки, личных библиотек учителей и обучающихся, из сети Интернет), в том числе и иноязычной, умения пользоваться мультимедийными средствами;

– формирование навыков безопасной работы в сети Интернет;

– изучение программ для создания брошюр и презентаций;

– создание проектных продуктов (брошюр и презентаций);

Литература

1. *Дорофеева А.В.* Гуманитарные аспекты преподавания математики // Математика в школе, 1990, № 6. 2. Примерная основная образовательная программа образовательного учреждения. Основная школа / Сост. Е.С. Савинов. — М.: Просвещение, 2011. — (Стандарты второго поколения). 3. *Поливанова К.Н.* Проектная деятельность школьников: Пособие для учителя. — М.: Просвещение, 2008. 4. *Пчелинцева Т.А., Львова А.Г.* Сетевой проект как средство формирования у учащихся целостной картины мира // Математика в школе, 2013, № 1. 5. *Пчелинцева Т.А., Львова А.Г., Мишина Г.С.* Математическое многоборье // Математика, 2013, № 2. 6. *Сергеев И.С.* Как организовать проектную деятельность учащихся: Практическое пособие для работников общеобразовательных учреждений. — 8-е изд., испр. и доп. — М.: АРКТИ.

– формирование навыков публичного выступления учащихся;

– формирование одного из базовых интеллектуальных качеств личности — дисциплинированности ума (способности строить свою интеллектуальную деятельность по плану);

– совершенствование практических навыков проектной деятельности.

В проекте принимала участие группа учащихся 9-го класса в составе восьми человек. Анализ образовательной программы курсов математики и немецкого языка позволил выделить 10 немецких ученых-математиков: Г. Лейбниц, Х. Гольдбах, Л. Эйлер, К. Гаусс, П. Дирихле, Ф. Клейн, Г. Вебер, Д. Гильберт, Г. Кантор, Э. Нётер. Началась самостоятельная работа участников проекта.

Прежде всего ребята обратились к личности Эмми Нётер. На это была особая причина. Лингвистическая гимназия № 23 им. А.Г. Столетова г. Владимира имеет давние партнерские отношения с гимназией им. Э. Нётер в г. Эрлангене (Германия). Ежегодно группа учащихся гимназии бывает в гостях у немецких друзей и посещает музей, посвященный Эмми Нётер.

Работа над проектом, посвященном в том числе и Эмми Нётер, которую А. Эйнштейн причислил к величайшим творческим деятелям математики, была интересна не только знакомством с личностью такого масштаба, но и отдельными фактами ее биографии. К сожалению, имя этой женщины мало известно в России, и в поисках материала пришлось обращаться к немецким коллегам, например, Маргит Хорн — учителю гимназии-партнера в Германии, она предоставила эксклюзивный материал.

В ходе поиска, сбора и анализа информации об Эмми Нётер ребята выяснили, что жизнь и научная деятельность Э. Нётер и её брата, тоже талантливого математика, Фритца Нётера тесно связана с Россией. После прихода к власти нацистов в 1933 году Эмми и Фритц Нётеры вынуждены были эмигрировать, Эмми — в США, а Фритц был приглашен преподавать в Томский университет. Судьба его была трагична: после участия в Международном математическом конгрессе в Осло, где жил в то время политический противник сталинского режима Лев Троцкий, Фритц Нётер попал под подозрение и оказался в застенках НКВД, был осужден, через 3 года расстрелян, а в 1988 году реабилитирован.

Работа над проектом продолжалась четыре недели. На протяжении этого времени постоянно проводились промежуточные обсуждения полученных данных — как на уроках, так и во внеурочное время в рамках занятий в НОУ «Грани».

В результате учащимися были созданы продукты проектной деятельности:

– дополнительное учебное пособие для обучающихся в гимназии на русском и немецком языках;

– компьютерные презентации на немецком и русском языках.

Предварительная защита проекта состоялась на уроках математики и немецкого языка в классе, где обучаются участники проекта.

Итоги проекта были представлены учащимися на двух языках на учебно-исследовательской конференции старшеклассников НОУ «Грани» по теме «Гармония окружающего мира», где получили высокую оценку и заняли призовые места (второе место на секции иностранного языка и третье место на секции математики).

Результаты изучения немецкого языка выпускниками основной школы включают в себя формирование социокультурной компетенции. Она предполагает знания о выдающихся людях страны изучаемого языка и их вкладе в мировую культуру и науку. Тексты, составленные участниками проекта, использовались учителем на следующий учебный год на уроках немецкого языка.

Участники проекта научились выражать на немецком языке русскую математическую терминологию, подбирать наиболее подходящие определения, избегать языковых нестыковок.

Изучение биографий великих людей произвело большое впечатление на участников проекта.

«Работая над проектом, я получил хороший опыт поиска, сбора и обобщения необходимого материала, работы в большой команде, что помогло мне позже играть в КВН; я научился использовать не известные мне до этого функции программы Word, попробовал себя в роли оратора. Я считаю, что этот проект был увлекателен и очень полезен».

Денис Трушечкин

«Интересным, лично для меня, стало то обстоятельство, что Эмми Нётер, с большой самоотдачей первоначально изучавшая языки, планируя стать преподавателем английского и французского, оказалась не просто способным, а выдающимся математиком мирового уровня. Я же всю школьную жизнь не очень дружил с математикой, всегда оправдывал этот факт склонностью к изучению языков; открывшаяся деталь биографии госпожи Нётер сделала это оправдание относительным».

Василий Максим

Сегодня в нашей рубрике «Разбор урока» мы обсуждаем урок математики в 11-м классе, проведенный студенткой магистратуры Московского городского педагогического университета Анной Вячеславовной ПОЗДНЯК. В обсуждении участвуют ее сокурсники Наталия ФАЙБЫШЕНКО, Ирина КОРЫСТИНА, Александр ЖУРАВЛЕВ, Александра ФРАНЕВА и редактор журнала «Математика» Петр Михайлович КАМАЕВ. Ведет обсуждение руководитель практики Лариса Олеговна ДЕНИЩЕВА

11 класс

ТЕМА УРОКА: «ОБОБЩЕНИЕ ПОНЯТИЯ О ПОКАЗАТЕЛЕ СТЕПЕНИ»

Учебник: Мордкович А.Г. Алгебра и начала математического анализа. Учебник для 10–11 классов общеобразовательных учреждений (базовый уровень).
Тип урока: обобщение и введение нового понятия.

Предварительная подготовка

Накануне урока выдать учащимся домашнее задание.

1. Вы взяли кредит в банке 200 тыс. рублей под 13% годовых. Сколько денег вы должны будете вернуть банку через год? Через два года?

2. В банке взяли в кредит *a* рублей под *p*% годовых. Какую сумму нужно выплатить банку через год? Через два года? Через 5 лет?

Ход урока

Приветствие (1 мин.)

Здравствуйте! Мы с вами изучили довольно большой блок теоретического материала, и нам нужно его как-то осознать и обобщить. Но перед тем, как мы этим займемся, напишите небольшую диагностическую работу.

Актуализация знаний (5 мин.)

Диагностика: Проверить знание свойств степени с целым показателем и свойства корней.

Вариант 1

Базовый уровень

1. Упростите: $(xy^2z^{-3})^{-3}$.

2. Вычислите: $\sqrt[7]{2^2\cdot 5^4}\cdot\sqrt[7]{2^5\cdot 5^3}$.

Повышенный уровень

3. Упростите выражение

$$\sqrt[3]{10+\sqrt{73}}\cdot\sqrt[3]{10-\sqrt{73}}.$$

К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru (Карточка с домашним заданием.)

Высокий уровень

4. Вычислите: $\dfrac{2\cdot 4^{15}-6\cdot 4^{14}+10\cdot 4^{13}}{4^{11}+7\cdot 4^{12}-5\cdot 4^{12}}$.

Вариант 2

Базовый уровень

1. Упростите: $(xy^2z^{-3})^2$.

2. Вычислите: $\sqrt[7]{4^3\cdot 7^2}\cdot\sqrt[7]{4^4\cdot 7^5}$.

Повышенный уровень

3. Упростите выражение

$$\sqrt[4]{10-\sqrt{19}}\cdot\sqrt[4]{10+\sqrt{19}}.$$

Высокий уровень

4. Вычислите: $\sqrt[4]{10\,000\cdot\dfrac{81}{64}}:\sqrt[4]{\dfrac{625}{1024}}$.

Проверка диагностики (1 мин.)

Поменяйтесь друг с другом листочками. Проверьте работу одноклассника по ответам. (*Ответы проецируются на доску.*)

У кого отметка «5»? У кого «4»? Есть те, кто не справился с работой? Сдайте листочки.

Введение понятия (7 мин.)

Мы с вами умеем вычислять степень числа с любым целочисленным показателем, руководствуясь определением степени с целым показателем. А именно (*определение степени дают учащиеся, учитель записывает их на доску.*):

1) если $n = 1$, то $a^1 = a$;
2) если $n = 0$ и $a \neq 0$, то $a^0 = 1$;
3) если $n = 2, 3, \ldots$, то $a^n = \underbrace{a\cdot a\cdot\ \ldots\ \cdot a}_{n\text{ раз}}$;
4) если $n = 1, 2, \ldots$ и $a \neq 0$, то $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$.

Как вы помните, понятие степени с натуральным показателем сформировалось еще у древних народов. Степени некоторых чисел использовались при решении отдельных задач учеными Древнего Египта и Вавилона. Но наиболее бурное развитие понятие степени получило с развитием банковского дела.

На дом вам была задана **задача.** В банке взяли в кредит a рублей под p% годовых. Какую сумму нужно выплатить банку через год? Через два года? Через 5 лет?

Кто решил задачу? (*Один из учащихся пишет формулу на доске.*)

Через год банку нужно выплатить:

$$a+a\cdot\frac{p}{100}=a\left(1+\frac{p}{100}\right).$$

Через два года:

$$a\left(1+\frac{p}{100}\right)+a\left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot\frac{p}{100}=a\left(1+\frac{p}{100}\right)^2.$$

И так далее.

Хорошо. А если мы берем кредит не на целый год? Сколько мы должны вернуть, допустим, через 3,5 года?

(*Один из вариантов ответа учащихся: использовать степень с показателем* 3,5.)

То есть мы видим, что решение этой проблемы привело к необходимости рассматривать не целый показатель степени.

Скажите мне, пожалуйста, какая у нас сегодня будет тема урока?

(«*Понятие степени с рациональным показателем*».)

Что мы должны с вами узнать?

(*Определение степени и ее свойства.*)

Понятие степени с дробным положительным показателем ввел французский математик Оресли. Рассуждения его были примерно такими:

Рассмотрим, например, число $4^{\frac{2}{5}}$. Существует ли оно? И что обозначает такая запись?

Допустим, что такое число существует. Хотелось бы, чтобы и для этой степени с дробным показателем выполнялись известные нам свойства степени. Например, степень степени. Тогда будет верным следующее равенство:

$$\left(4^{\frac{2}{5}}\right)^5=4^2.$$

Обозначив $4^{\frac{2}{5}}=a$, получим равенство $a^5 = 4^2$, откуда по определению корня получим:

$$a=\sqrt[5]{4^2}\ \text{ или }\ 4^{\frac{2}{5}}=\sqrt[5]{4^2}.$$

Сможете ли вы дать определение степени с рациональным показателем? Сформулируйте его (*возможный ответ учащихся*):

Степенью числа a с рациональным показателем, называется корень степени знаменателя из a в степени числителя. (*Учитель записывает определение на доске.*)

Если $\dfrac{p}{q}$ — обыкновенная дробь ($q \neq 1$) и $a \geq 0$, то под $a^{\frac{p}{q}}$ понимают $\sqrt[q]{a^p}$.

(*Аналогично дается определение степени с отрицательным рациональным показателем.*)

Первичное закрепление (14 мин.)

Фронтальная работа с классом (устно)

1. Представьте в виде степени или произведения степеней с дробными показателями:

а) $\sqrt[3]{x}$; б) $\sqrt[6]{b^5}$; в) $\sqrt[7]{\dfrac{a^5}{2b^4}}$;

г) $\sqrt[4]{y}$; д) $\sqrt[7]{a^2b^3}$; е) $\sqrt[7]{\dfrac{3c^8}{x^5}}$;

ж) $\sqrt[5]{a^3}$; з) $\sqrt[3]{bc^2}$; и*) $\sqrt[6]{-y^5}$.

2. Представьте в виде корня или произведения корней:

а) $a^{\frac{2}{7}}$; б) $b^{\frac{5}{9}}$; в) $c^{1\frac{2}{3}}$;

г) $b^{-1\frac{1}{2}}$; д*) $2^{-\frac{3}{4}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}$; е*) $3^{-\frac{1}{2}}\cdot 5^{\frac{2}{3}}$.

3. Вычислите (*письменно, один ученик решает первые два примера, второй — остальные*):

а) $27^{\frac{1}{3}}$; б) $32^{-\frac{1}{5}}$; в) $0,001^{-\frac{2}{3}}$; г) $0,0001^{-\frac{3}{4}}$.

Решение учащихся:

а) $27^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{3^3}=3;$

б) $32^{-\frac{1}{5}}=\dfrac{1}{32^{\frac{1}{5}}}=\dfrac{1}{\sqrt[5]{32}}=\dfrac{1}{2};$

в) $0,001^{-\frac{2}{3}}=\dfrac{1}{0,001^{\frac{2}{3}}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{0,001^2}}=$

$=\dfrac{1}{\left(\sqrt[3]{0,001}\right)^2}=\dfrac{1}{0,1^2}=\dfrac{1}{0,01}=100;$

г) $0,0001^{-\frac{3}{4}}=\dfrac{1}{0,0001^{\frac{3}{4}}}=\dfrac{1}{\sqrt[4]{0,0001^3}}=$

$=\dfrac{1}{\left(\sqrt[4]{0,1^4}\right)^3}=\dfrac{1}{0,1^3}=\dfrac{1}{0,001}=1000.$

(*Номера «а–г» можно решить несколькими способами — в зависимости от используемых свойств степени и корня.*)

А теперь две минуты поработайте в парах. У вас на карточках два задания, выполнив задания, проверьте друг друга.

Работа в парах с взаимопроверкой

1. Прочитайте:

а) $a^{\frac{7}{6}}$; б) $x^{\frac{5}{11}}$.

2. Вычислите:

а) $64^{\frac{1}{6}}$; б) $27^{\frac{2}{3}}$;

в) $0^{\frac{51}{4}}$; г) $(-8)^{\frac{1}{3}}$.

А теперь, пользуясь определением степени с рациональным показателем, решите уравнения (*один ученик решает у доски*):

а) $x^{\frac{2}{3}}=1;$ б) $x^{-\frac{2}{3}}=4.$

При решении первого уравнения обратите внимание на лишние корни.

Запись ученика на доске:

$$x^{\frac{2}{3}}=1,\quad \sqrt[3]{x^2}=1,\ x^2=1^3,\quad x=\pm\sqrt{1}.$$

Ответ: $x=1$, $x=-1$.

После ответа следует спросить у класса, где ошибка. Обратить внимание, что по определению степени с рациональным показателем $x\ge 0$.

Работа в группах (12 мин.)

Вспомните свойства степени с целым показателем.

(*Учащиеся выписывают на доске свойства степени с целым показателем.*)

$$a^x\cdot a^y=a^{x+y};\qquad \frac{a^x}{a^y}=a^{x-y};\qquad (a^x)^y=a^{xy}.$$

Можем ли мы пользоваться этими свойствами и для степени с рациональным показателем? Прежде чем ответить на этот вопрос, необходимо доказать выполнение этих свойств для степени с рациональным показателем. Разделитесь на три группы и докажите выполнение этих свойств, если $x=\dfrac{m}{n}$, $y=\dfrac{p}{q}$. Для этого вспомните определение степени с рациональным показателем, свойства корней и степеней с целым показателем.

Группы доказывают свойства. Далее одна из групп доказывает свое свойство у доски. Проводится аналогия с доказательством остальных свойств.

Закрепление материала (4 мин.)

Упростить выражение:

а) $\left(b^{\frac{5}{12}}\right)^4$; б) $\dfrac{\sqrt[3]{xy}}{\sqrt[3]{x}}:\dfrac{2}{\left(\sqrt[3]{y}\right)^{-1}}$;

в*) $\left(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}\right)^2-2\sqrt[3]{xy}-\dfrac{1}{\left(\sqrt[3]{y}\right)^{-2}}$.

Дозированное домашнее задание (1 мин.)

В зависимости от своей оценки за диагностику, запишите себе домашнее задание.

Обсуждение урока

Л.Д. Уважаемые коллеги, сегодня мы обсуждаем урок, который проводился в 11-м классе. При его разборе, кроме частных впечатлений от урока, прошу обратить внимание еще на два важных аспекта. Как известно, стандарт второго поколения еще не вошел в старшую школу, но учителя уже реализуют его идеи, касающиеся подготовки и проведения урока. Попробуем отметить те элементы или приемы работы учителя, которые отвечают ФГОС. Кроме того, урок строился в рамках технологии обучения, разработанной доктором педагогических наук, членом-корреспондентом РАО В.М. Монаховым. Эта технология, аккумулируя все положительные достижения методики, ориентирована на получение гарантированных образовательных результатов школьников. Базируется она на самостоятельной деятельности учащихся и мотивированности на получение положительных результатов в процессе обучения, а также на определенных элементах подготовки каждого урока: диагностика, коррекция, дозирование домашнего задания и пр.

А.П. Работая в школе, я часто сталкиваюсь с проблемой мотивации учащихся, особенно при изучении тем, применение которых на практике не очевидно. При разработке этого урока мне хотелось показать, что понятия математики, даже такие отвлеченные, как степень с дробным показателем, возникают из практики, и тем самым заинтересовать учащихся.

Н.Ф. Мне понравилось, что актуализация знаний прошла в форме диагностической работы с заданиями разных уровней сложности. Но почему были выбраны именно такие элементы контроля?

А.П. Понятие степени с рациональным показателем вводится и изучается на основании свойств степени с целым показателем и свойств корней. Поэтому именно эти свойства мне и нужно было повторить в начале урока.

П.К. А не кажется ли вам, что такая актуализация малоэффективна? Во-первых, повторены не все свойства степени. Во-вторых, они не прозвучали четко, в виде формулировок, вслух. Ведь часто наши ученики на вопрос, а почему ты так делаешь, отвечают: нас так учили.

А.П. Нет, я считаю, что такой актуализации достаточно. Понятие степени изучается с 7-го класса, эти свойства учащиеся повторяют достаточно часто еще в основной школе. Так что такой актуализации на данном уроке достаточно.

А.Ф. А почему в диагностике были даны именно четыре задания?

А.П. Урок строился по технологии В.М. Монахова, которая предполагает разноуровневые самостоятельные работы, состоящие именно из четырех заданий: двух заданий базового уровня, одного повышенного уровня и одного высокого.

И.К. Мне понравилось, что проверка домашнего задания проводилась не совсем обычным образом. И выполнение домашнего задания способствовало успешности на этом уроке. Мне кажется, что объяснение решения домашней задачи учащимися можно было бы оценить отдельной оценкой.

Н.Ф. Я тоже согласна, что домашнее задание, данное на предыдущем уроке, помогло подвести учеников к постановке проблемы, связанной с введением нового понятия. Они сами увидели необходимость его введения, потребность, связанную с реальной жизнью, что очень важно для учащихся. Часто мы, учителя, не находим времени на то, чтобы хотя бы коснуться истории происхождения математических понятий, а потому ученики и не понимают роли математики в повседневной жизни.

А.Ж. Хочу высказать замечание по работе в парах. Здесь были даны задания «прочитать» и «вычислить». А что если оба ученика ошибутся? Возможности выявить ошибку нет. Не следовало ли опросить учеников? Тем более что задание у всех пар одинаковое.

А.П. Да, вы правы. Надо было выполнить и фронтальную проверку для предотвращения возможных ошибок.

П.К. На мой взгляд, работа в парах была не обязательна. Она дублирует фронтальную работу с классом и, конечно же, требует итоговой проверки. И еще одно замечание. В устных упражнениях во втором задании пункты «ж» и «з» сложноваты для восприятия на слух, их следовало бы записать на доске. А в задании 3 пункты «д» и «е» допускают по два представления в указанном виде. К сожалению, внимания учащихся на это не было обращено.

А.П. Я все-таки считаю, что работа в парах должна быть. При фронтальной работе невозможно опросить всех присутствующих в классе. А поработать с определением, проговорить его должны все ученики. Работая в парах, каждый ученик выступает и в роли учителя, и в роли ученика. При этом важно, чтобы учитель активно наблюдал за работой в парах. Возможно, у меня это не вполне получилось. Что касается второго замечания, то тут я с вами соглашусь.

А.Ф. Мне понравились упражнения на закрепление понятия, работа в группах. Но не понравилось, что учитель не всегда поправлял учеников, когда они неверно прочитывали математические выражения.

П.К. Совершенно с вами согласен. И это идет у нас с 5-го класса. Мы плохо учим детей чтению математических выражений, не требуем запоминания названий законов и допускаем буквально чтение «по слогам» (например, для $a + b = b + a$) вместо словесных формулировок свойств: от перестановки слагаемых... То есть мы не подключаем к зрительной памяти слуховую, не учим следить ребенка за текстом, а от этого страдает понимание.

Н.Ф. Хотелось бы обратить внимание на организацию групповой формы работы. Мне понравилось, что учащиеся по группам доказывали свойства степени с дробным показателем. То есть они не получили «готовые» свойства, а проверили, можно ли их применять для дробного показателя степени? Единственное замечание: не было фронтальной проверки доказательств, их следовало бы провести со всем классом. У доски было рассмотрено доказательство только одного свойства. А как же остальные?

А.П. Все свойства доказываются аналогичным образом. Поэтому рассмотрение всех доказательств лишь отнимет время.

А.Ж. Но, возможно, надо было не писать у доски, а заранее дать оформить доказательство на плакате, тогда рассмотрение работы всех групп прошло бы быстрее.

А.П. Может быть, вы правы. Я подумаю над этим замечанием.

Н.Ф. В целом урок был достаточно динамичным, учащиеся не устали. Хорошо, что новое понятие вводится с опорой на предыдущий опыт учащихся: постоянно идет аналогия с уже известными им понятиями и свойствами степени с целым показателем. Таким образом, проводится и повторение материала, и закрепление нового.

И.К. Урок, на мой взгляд, получился интересным, были использованы различные формы работы: фронтальная, индивидуальная, групповая. Был подготовлен раздаточный материал (карточки) и задания с применением видеопроектора. Поскольку виды деятельности периодически менялись, учащиеся продуктивно работали в течение всего урока.

П.К. Да, урок неплохо подготовлен, судя по работе учащихся и их вниманию к происходящему. Но это типичный, достаточно грамотно выстроенный урок, и говорить, что «виды деятельности периодически менялись», я бы не стал. Эта игра слов, порожденная нашими образовательными реформами, здесь не уместна.

А.Ф. Еще мне хотелось бы отметить разноуровневое домашнее задание и то, что оно дается в зависимости от полученной оценки за самостоятельную работу. Там есть и материал на повторение, а материал на закрепление нового понятия предлагается именно на уровне подготовленности ученика.

П.К. А мне домашнее задание показалось очень маленьким и простым. Выполнить его можно минут за десять. Практически все задания базового уровня, и подумать ученику не над чем. Наверное, следовало бы дать задания и более сложные.

А.П. Позвольте не согласиться с вами. При составлении домашнего задания следует учитывать нормы, по которым время выполнения домашнего задания не должно превышать 30% времени работы на уроке. Тем более что на этом уроке было лишь введено новое понятие, и домашнее задание направлено именно на закрепление понятия степени с дробным показателем и на умение вычислять степень с дробным показателем.

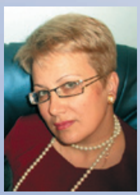
Л.Д. Сегодня мы посмотрели урок в старшей школе. Хотелось бы еще раз подчеркнуть его сильные стороны:

– обращение к истории математики позволило показать потребность в введении нового математического понятия, что послужит развитию мировоззрения учащихся, а также позволило ученикам самостоятельно сформулировать тему и цели урока, что мотивировало их к продуктивному изучению нового материала (это отражают требования ФГОС второго поколения);

– применение различных форм обучения (фронтальной, групповой, индивидуальной) способствовало усвоению нового материала и вместе с тем обеспечивало формирование универсальных учебных действий, в частности, коммуникативных УУД, что также заложено в новом образовательном стандарте;

– применение выбранной учителем технологии было направлено на овладение предметными требованиями к математической подготовке различными группами старшеклассников (разноуровневая диагностика, коррекция и дозирование домашнего задания), что дает реальную методическую базу для успешной подготовки к обязательной государственной аттестации.

О. ГРИГОРОВА,
А. ЕВСЕЕВА,
М. ЗОТОВА,
drakosha976@yandex.ru,
г. Москва,
фото предоставлены авторами



ОЦЕНИВАЕМ ПРЕДМЕТНЫЕ КОМПЕТЕНЦИИ НА УРОКАХ РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ

УРОК ОТКРЫТИЯ НОВЫХ ЗНАНИЙ

В обсуждении принимает участие главный редактор журнала "Школьный психолог", кандидат психологических наук, доцент МГППУ М. Чибисова.

Изучение нового материала начинается с урока открытия новых знаний. Уроку этого типа присущи две цели: деятельностная, при достижении которой учащиеся овладевают новыми способами действий, и содержательная, когда к уже имеющимся понятиям учащиеся добавляют новые элементы. Хотелось бы, чтобы наши ученики четко понимали, какое новое знание, понятие было открыто ими на данном уроке, какому новому способу действий они научились.

Для структуры урока открытия новых знаний характерны следующие этапы:

1) мотивации (самоопределения) учебной деятельности;
2) актуализации и фиксирования индивидуальных затруднений в действии, которого ранее на уроках не было;
3) выявления мест и причин затруднений;
4) построения путей выхода из затруднений;
5) реализации построенного пути выхода из затруднений;
6) первичного закрепления с проговариванием во внешней речи;
7) самостоятельной работы с проверкой по эталонам;
8) включения в систему знаний и повторения;
9) рефлексии учебной деятельности на уроке.

Важно, чтобы ученик на уроке не просто прошел каждый из этих этапов, но и следил за их прохождением, осознавал важность каждого, мог оценить степень своего включения в процессы, происходящие на уроке. Важно все: от участия в целеполагании до рефлексии в конце урока. До тех пор, пока ученик не пропустит всю информацию, весь процесс через себя, новое знание не будет им присвоено.

Урок открытия новых знаний может проходить в разных формах. Остановимся сначала на **фронтальной форме работы.** Когда учитель работает со всем классом, то ему трудно определить и проконтролировать, каждый ли ученик участвует в процессе урока. Существенную помощь в этом вопросе может оказать критериальная система оценивания. С ее помощью, как мы говорили в предыдущих статьях, можно оценивать не только решения задач, но и этапы урока. И мы можем предложить ученикам план самооценивания в процессе урока открытия новых знаний. Фронтальная форма не исключает ин-

К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru (Приложения 1–5.)

дивидуальной самооценки. А баллы нам в этом помогут! К тому же план поэтапного оценивания урока сделает его более технологичным, поможет четче выстроить урок, соблюдая все этапы, необходимые для открытия новых знаний. Причем на каждом этапе с помощью критериев можно расставить акценты, которые помогут грамотной и глубокой рефлексии. Покажем, как критериальная система оценивания встраивается в этапы урока.

Предлагая ребенку оценивать себя по этапам урока, удобно представить это в виде таблицы, которая выдается каждому ученику. В ней должна быть видна структура урока, его этапы, а в отдельной колонке должны быть указаны баллы за выполнение заданий. Эта таблица, назовем ее «таблицей движения по уроку открытия новых знаний», не является конспектом урока и не обязана содержать все его этапы.

Вот как может выглядеть такая таблица по теме «Первичные представления о решении дробно-рациональных уравнений», 8-й класс, учебник А.Г. Мордковича. Между этапами поместим комментарии для учителя.

Таблица движения по уроку открытия новых знаний

№ этапа	Название этапа	Содержание этапа	Баллы
1	Постановка проблемы урока	Решите уравнения: а) $x^2 + 3x = 0$; б) $\frac{x^2+3x}{3}=0$; в) $\frac{x^2+3x}{x}=0$	 3 4 5

Комментарий

Уравнение «а» оценивается тремя баллами, потому что содержит три шага решения: вынесение за скобку общего множителя, нахождение первого корня, нахождение второго корня.

Уравнение «б» оценивается четырьмя балла, так как добавляется шаг умножения обеих частей уравнения на 3.

Уравнение «в» оценивается пятью баллами, потому что, помимо описанных шагов, применяется условие равенства дроби нулю. При решении этого уравнения дети обычно испытывают затруднения, поэтому возникает необходимость вывода нового для них алгоритма решения этого типа уравнений, что и является целью первого этапа урока.

2	Целеполагание и планирование	1) Сформулировать цель; 2) составить план достижения цели	1 1

Комментарий

Примерная цель урока, к которой хорошо бы подвести детей в проблемном диалоге, — создать и применить алгоритм решения дробно-рациональных уравнений.

Примерный план достижения цели:

1. Выделить из множества уравнений дробно-рациональные (дать определение).

2. Создать алгоритм решения дробно-рациональных уравнений.

3. Показать применение алгоритма решения на нескольких примерах.

3	Реализация плана	1) Определение дробно-рациональных уравнений; 2) алгоритм решения дробно-рационального уравнения; 3) решить по алгоритму уравнение $\frac{x-2}{x+2}=\frac{x+3}{x-4}$ с комментариями	1 3 5

Комментарий

Теперь даем точные определения и описание алгоритма по учебнику.

Определение:

Если $p(x)$ — рациональное выражение, то $p(x) = 0$ — рациональное уравнение.

Алгоритм решения дробно-рационального уравнения:

1) перенести все члены уравнения в одну часть;

2) преобразовать эту часть к виду алгебраической дроби $\frac{p(x)}{q(x)}$;

3) воспользоваться условием равенства дроби нулю: $\begin{cases} p(x)=0, \\ q(x)\neq 0; \end{cases}$

4) исключить посторонние корни;

5) записать ответ.

4	Самостоятельная работа с самопроверкой	Решите уравнение: а) $\frac{x-1}{x-3}=\frac{x+2}{x+4}$; б) $\frac{3x}{x-1}+\frac{x+3}{x+1}=3$; в) $\frac{3}{x-4}-\frac{25}{x^2-16}=\frac{x+1}{x+4}$	 5 6 7

Комментарий

После окончания решения уравнений учащимися на экране показываются эталоны решений. После чего становится понятно, почему уравнения имеют разный «вес» в баллах. Например, в уравнении «в» на втором этапе алгоритма используется несколько умений: применение формулы сокращенного умножения, приведение к общему знаменателю, раскрытие скобок, приведение подобных слагаемых.

5	Первичное закрепление	1) Определение дробно-рационального уравнения; 2) алгоритм решения дробно-рациональных уравнений	1 3

Комментарий

Происходит первичное закрепление нового определения и алгоритма, составленного на уроке. Оно может быть проведено различными способами: при помощи устного опроса, заданий на распознавание, ответа у доски и т.д.

6	Рефлексия	1) Подсчитайте сумму баллов за урок; 2) оцените себя по критериям: 42–45 баллов — отметка «5», 34–41 балл — отметка «4», 24–33 балла — отметка «3»; 3) сделайте выводы	

Комментарий

В выводах следует попросить учащихся озвучить цель урока, затруднения в процессе достижения цели, назвать ранее изученные правила, которые понадобились для решения дробно-рациональных уравнений, отметив степень овладения алгоритмом, перспективу развития данной темы. Учащиеся уже знают, что уравнения служат инструментом для описания реальных процессов (задач), поэтому видят перспективу применения решения дробно-рациональных уравнений в задачах.

Покажем, как можно конструировать урок, используя эту таблицу в качестве основы.

Рассмотрим *первый этап* — этап постановки проблемы урока. Здесь учитель может использовать различные формы работы: уравнения могут решаться учениками индивидуально, у доски, в парах с взаимопроверкой, в группах. Сумма баллов за этап может меняться в зависимости от формы работы, от количества и сложности предложенных уравнений.

На *втором этапе* учитель подводит детей к самостоятельному формулированию цели и задач по ее достижению.

На *третьем этапе* под контролем учителя учащимися дается определение и составляется алгоритм решения дробно-рационального уравнения.

На *четвертом этапе* происходит самостоятельная работа с самопроверкой по эталону.

На *пятом этапе,* этапе первичного закрепления, ребятам могут быть предложены задания на распознавание, карточки с разными уравнениями для классификации, может быть проведен математический диктант и т.п. Важно, чтобы дети несколько раз проговорили определение дробно-рационального уравнения.

Так можно менять, комбинировать и расширять любой этап урока, превращая таблицу в конспект или сценарий урока.

Но не потеряли ли мы контроль над усвоением материала учеником на таком уроке? Ведь весь урок ученик оценивает себя сам, без контроля со стороны педагога. Но оказывается, что именно в такой ситуации ученик наиболее адекватно оценивает себя. Это можно объяснить тем, что он идет по этапам урока не один, а вместе с классом и учителем, и оценивает свое участие в этапах урока вместе с классом. Ученик видит себя в процессе, из-за чего неотрывно в нем участвует. Это несложно, и поэтому завышать себе оценку не стоит. Ученики действительно достаточно адекватны в самооценке на таких уроках.

На этом уроке начинает формироваться каталог умений по блоку № 5. «Дробно-рациональные уравнения» и темы «Алгебраические дроби». Это необходимо для того, чтобы уже на первом уроке ученики начали понимать «цену» того или иного уравнения, четко фиксировали этапы решения и привыкали к необходимости следовать алгоритму. Это дополнительная мотивация. Список умений ученика растет, и он все более четко осознает, что это список его личных знаний и умений в предмете.

Остановимся чуть подробнее на формировании «Каталога умений». Он готовится учителем по каждой учебной теме при составлении плана на учебную четверть. «Каталог умений» по теме начинается с перечисления умений, которые уже освоены, но будут применяться при работе с новым материалом (их можно назвать *общие* или *универсальные умения*). Учитель вписывает эти умения в каталог. На уроках каталог не предлагается детям в готовом виде, он формируется в процессе урока, общие умения обогащаются примерами, дети начинают активно выполнять задания по теме, понимая, сколько баллов «стоит» задание. Происходит это на уроках рефлексии, а в готовом, завершенном виде требуется на уроке подготовки к контрольной работе.

На уроках открытия новых знаний по следующей теме детям выдается каталог, в котором описаны общие умения, а новый блок пока пуст. Он начинает заполняться списком умений на первом уроке и дополняется примерами на последующих. Понятно, что на уроке сложно аккуратно и правильно заполнить много разных бумаг, поэтому мы предъявляем к «Каталогу умений» в электронном виде. Его можно прикреплять к электронному журналу, использовать любые порталы дистанционного обучения. Например, мы используем социальную сеть ВКонтакте для дистанционного обучения детей. Там же создана папка, где собираются все «каталоги умений» в формате фотографий. С их примерами для восьмиклассников вы можете ознакомиться здесь: http://vk.com/club101424480. В классе же каталог постоянно висит на стенде. К нему можно обратиться в любое время на любом уроке (см. с. 30).

В блоке «Рациональные уравнения» используются все ранее перечисленные умения из блоков 1–4 и добавляется только одно новое умение: применение алгоритма решения дробно-рационального уравнения.

Блок № 5. Рациональные уравнения			
19	Применять алгоритм решения рациональных уравнений	Решите уравнение: а) $\frac{5-x}{4x}=0;$ б) $\frac{x^2-8x}{x-8}=0;$ в) $\frac{2x^2-1}{x+7}=2x$	4 5 6

На этом работа с блоком № 5 не заканчивается. Он расширяется умениями для решения задач с помощью рациональных уравнений.

20	Составлять математическую модель и проводить анализ результатов решения	Расстояние 40 км скутерист преодолевает на 2 ч быстрее, чем велосипедист. Найдите скорость скутериста, если она больше скорости велосипедиста в 4 раза	10

Законченный каталог умений используется при подготовке и анализе контрольной работы.

На этом уроке особенности оценивания предметных компетенций были указаны в комментариях для учителя на 1-м и 4-м этапах, а на остальных этапах оценивались межпредметные компетенции. Например, постановка цели и формулирование задач на втором этапе, следование алгоритму на 3-м и 4-м этапах, умение провести самооценку на всех этапах.

Остановимся подробнее на четвертом этапе. Главной особенностью оценивания предметных компетенций является то, что количество баллов за одно задание определяется не учителем, а степенью сложности самого задания. Навык разбиения задания на отдельные умения вырабатывается у учеников постепенно, от урока к уроку. Такой способ оценивания знаний позволяет избежать субъективности, предельно прозрачен как для учителя, так и для ученика. При этом большинство компетенций переходит из темы в тему, и на более поздних этапах «мелкие» компетенции могут объединяться в более «крупные». Например, если на начальном этапе решения дробно-рациональных уравнений приведение к общему знаменателю с учетом разложения на множители может оцениваться до трех баллов, то на заключительном этапе объединится в одну компетенцию с оцениванием в один балл.

Мы рассмотрели фронтальную форму работы на уроке открытия новых знаний, если же мы хотим провести урок открытия новых знаний **в групповой форме**, то таблица движения по уроку трансформируется под конкретный сценарий урока. Пример конспекта такого урока и таблицу движения по уроку вы найдете в своем личном кабинете в приложениях 1–5.

Вот так можно применить систему критериального оценивания на уроке открытия новых знаний в двух формах: фронтальной и групповой. В обоих случаях ученики постоянно, на протяжении всего урока, принимают участие в активной деятельности. Поэтапная самооценка в процессе урока увлекает детей и дает им ощущение участия в творческом, а не рутинном процессе. Нами замечено, что дети гораздо меньше отвлекаются, поэтому и успевают сделать больше. Они самостоятельны в процессе урока, существенно повышается их мотивация, ученики становятся соавторами урока.

В следующей статье мы расскажем об особенностях критериального оценивания на уроках рефлексии.

8 класс. Каталог умений по теме «Алгебраические дроби»

№	Умение	Пример	Балл
	Блок № 1. Повторение (общие умения)		
1	Выполнять действия с рациональными числами		1
2	Применять свойства степени		1
3	Решать линейные уравнения		1–5
4	Решать уравнения, приводимые к линейным		1–7
5	Выполнять действия над одночленами и многочленами		1–5
6	Применять формулы сокращенного умножения		1
7	Применять правило определения порядка действий		1
8	Находить значение многочлена		1
9	Доказывать тождества		1–5
	Блок № 2. Основное свойство дроби. Сокращение дробей		
10	Находить ОДЗ алгебраической дроби	Определите, при каких значениях переменной алгебраическая дробь имеет смысл. Ответ запишите в виде числовых промежутков: а) $\frac{2x+4}{5}$; б) $\frac{a+a^2-2}{a}$; в) $\frac{x^2-5}{x^2-4}$ 2 2 3	
11	Находить значение алгебраической дроби	Найдите значение алгебраической дроби $\frac{a+a^2-2}{2}$ при $a=-3$	2
12	Сокращать алгебраическую дробь	Сократите дробь: а) $\frac{15a^2b^3}{18a^3b^2}$; б) $\frac{b^2-9}{b^2+3b}$; в) $\frac{a^2-25}{a^2-10a+25}$ 1 3 3	
13	Приводить дроби к наименьшему общему знаменателю	Приведите к наименьшему общему знаменателю дроби: а) $\frac{p^4}{3a}$ и $\frac{a^3}{pc}$; б) $\frac{9-2x}{9-x^2}$ и $\frac{x^2}{18+2x}$ 3 5	
	Блок № 3. Сложение и вычитание алгебраических дробей		
14	Складывать и вычитать дроби с одинаковыми знаменателями	Упростите выражение: а) $\frac{4b+9}{6b}+\frac{2b-3}{6b}$; б) $\frac{x+2}{x-2}-\frac{6-x}{x-2}$	3 4
15	Складывать и вычитать дроби с разными знаменателями:	Выполните действия: а) $\frac{a}{b}-\frac{b}{a}$; б) $\frac{9-2x}{9-x^2}+\frac{x^2}{18+2x}$	1 6
	Блок № 4. Умножение и деление алгебраических дробей		
16	Умножать алгебраические дроби	$\frac{ab^4}{9pc^6}\cdot\frac{12cp^7}{ab}$	3
17	Делить алгебраические дроби	$\frac{x+7y}{28xy}:\frac{x+7y}{7x^4y^6}$	3
18	Возводить алгебраическую дробь с степень	$\left(\frac{5a^2b^3}{8a^3b^2}\right)^2$	3

О ВОСПИТАНИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОСТИ

М. ЧИБИСОВА,
г. Москва

При обсуждении этой статьи мне бы хотелось несколько отвлечься от темы оценивания и рассмотреть, как в логике предложенной схемы происходит формирование метапредметных компетенций.

ФГОС основного общего образования особое внимание уделяет учебной самостоятельности учеников: в числе метапредметных результатов перечислены и «умение самостоятельно определять цели своего обучения», и «умение самостоятельно планировать пути достижения целей» и многое другое.

Давайте спросим себя: откуда эта самостоятельность возьмется? Очень часто в педагогической практике мы сталкиваемся с такой ситуацией. Педагоги и родители часто напоминают школьникам о важности самостоятельности, приводят множество примеров, но ситуация никак не меняется. Причина этого в том, что самостоятельность предполагает не только понимание, но и умение. Говорить о необходимости учебной самостоятельности мало, ее необходимо целенаправленно формировать.

Какое отношение имеет самостоятельность к обучению? Учебная деятельность, как мы знаем, включает в себя не только содержание, которое ученик должен освоить, но и смысловую составляющую, без которой невозможно осуществить контроль и оценку. Профессор Л.Ф. Обухова пишет: «Процесс развития учебной деятельности — это процесс передачи от учителя к ученику отдельных ее звеньев». Конечно, в первую очередь мы передаем исполнительскую часть — учебные действия и учебные задачи. Однако для воспитания настоящей самостоятельности этого недостаточно. Г.А. Цукерман, которая изучала развитие учебной деятельности у школьников, пришла к такому выводу: пока учитель остается центром учебной ситуации, пока контроль и последнее слово остаются за ним, полноценного развития учебной деятельности не происходит. Иными словами, если не дать ученикам возможности формулировать учебные цели и оценивать полученные результаты, учебной самостоятельности взяться неоткуда.

Возникает вполне естественное возражение: если просто так «отдать» ученикам целеполагание и контроль, это приведет к полному коллапсу учебного процесса? Часто действительно получается замкнутый круг: мы прекращаем контроль — дети не справляются с заданиями — мы снова возвращаемся к контролю.

Но ведь учебная самостоятельность не появляется одномоментно, она, как любое новое действие, развивается пошагово. Когда ребенок учится ходить, мы же не требуем от него, чтобы он сразу побежал. Наоборот, мы сначала водим его за руку, хвалим за первые самостоятельные шаги. Нечто подобное предполагает формирование самостоятельности. Между работой ученика под контролем учителя и полностью самостоятельной работой есть промежуточный этап: когда учитель оказывает ребенку организующую помощь. Учитель уже не контролирует ребенка, но и не отказывает в помощи. Его функция становится организующей: он не указывает напрямую, а помогает ребенку организовать свою работу. При этом основным инструментом работы учителя становится вопрос: он не подсказывает детям готовые ответы, а помогает найти их самостоятельно.

Посмотрим, как происходит эта «передача» целей и контроля в предложенном нам уроке.

Во-первых, учитель не называет тему урока, а предлагает детям назвать ее самим. Подчеркну, что дети не угадывают тему, они логически анализируют полученное задание.

Во-вторых, дети сами планируют достижение этой цели. При этом крайне важно, чтобы учитель не просто подводил учеников к заранее имеющемуся правильному ответу, но поддерживал их высказывания и предположения относительно плана.

В-третьих, в конце урока учитель вновь возвращается к цели и помогает проанализировать, что и как было достигнуто. То есть цель имеет определенный смысл, ее не просто назвали и забыли.

И в этой ситуации абсолютно обоснованным является вывод, к которому приходят авторы, — дети действительно становятся соавторами урока. Потому что на таком уроке учитель создает условия для развития их учебной самостоятельности.

Общероссийский проект

Школа цифрового века

Министерство образования Московской области ● Издательский дом «ПЕРВОЕ СЕНТЯБРЯ»

Электронные учебники — каждому ученику!

В 2016 году Министерство образования Московской области совместно с Издательским домом «Первое сентября» в рамках контракта с длинным, но значимым для современной школы названием: **«Оказание услуги по обеспечению доступа обучающихся общеобразовательных организаций Московской области к электронным учебникам и электронным приложениям к учебникам»** реализует проект по предоставлению современных электронных учебников всем ученикам и учителям Московской области.

В течение 2016 года педагоги и ученики 5–11-х классов Московской области будут обеспечены (за счёт бюджета Московской области) электронными учебниками ведущих издательств по всем предметам школьной программы.

Это первый для нашей страны проект такого масштаба по предоставлению электронных учебников всем ученикам региона.

Рано или поздно этот опыт будет подхвачен и другими регионами.

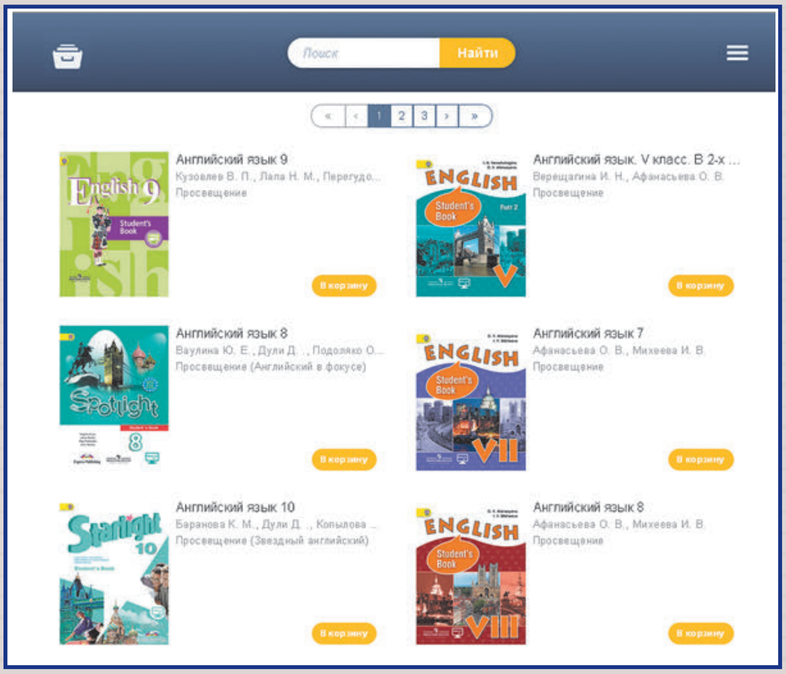
Следите за проектом!

Наверняка ваш регион планирует переход на ЭУ в будущем!

Включайтесь в проект,

если вы работаете в школе Московской области!

Витрина проекта: ibook.1september.ru



Подробности на сайте digital.1september.ru в разделе «Электронные учебники»

Д. ШНОЛЬ,
г. Москва

УСТНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ В СТАРШИХ КЛАССАХ

В первой части статьи, посвященной устным упражнениям в старших классах, мы говорили, что одной из главных целей их регулярного применения является поддержание в «активной форме» всего изученного материала. Разумеется, это не единственная цель. Обсудим еще две важные задачи, которые они позволяют решить в той или иной степени.

Тренинг внимания

Рассеянное внимание — очень распространенное явление у современных детей и особенно подростков. Ошибки «из-за невнимательности» делают сплошь и рядом как слабые, так и сильные ученики. Эти ошибки огорчают всех: и учителей, и учеников, и родителей. Но «рецепт», который учителя дают своим ученикам, как правило, абстрактен: «будь внимателен», «проверяй свою работу». Как это «быть внимательным»? Что значит быть в состоянии сосредоточенности? Как этому можно научиться? Как при проверке увидеть свою собственную ошибку? Все эти насущные вопросы мы по большей части оставляем в стороне и ограничиваемся общими призывами. Между тем внимательности можно и нужно учиться. Устная работа — одно из отличных упражнений на внимание.

Чем решение задачи в уме отличается от решения на бумаге? Тем, что при решении в уме вы ни на мгновение не можете отвлечься. В противном случае вам придется решать заново — ход мысли и промежуточные результаты будут потеряны. Когда вы решаете задачу письменно, вы можете в любой момент переключить свое внимание на что-то постороннее — вы ничего не потеряете, у вас есть возможность вернуться к своим записям и продолжить. В нашей школьной традиции математика, а особенно алгебра, преимущественно письменный предмет. Ученик может целый урок что-то бездумно писать, переписывать с доски, якобы решать задачу, параллельно посылая эсемески и т.п. Понять, сосредоточен ученик или нет, пока он глядит в тетрадь, а рука его водит по бумаге, крайне затруднительно. При устной же работе, когда все головы подняты и все глаза перед вами, вы прекрасно видите, кто, что и насколько понимает.

Множество типичных заданий из любого учебника средний ученик может решить устно. Например, опыт показывает, что сократить в уме дробь $\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}$ при определенном навыке может

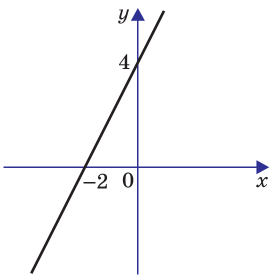


Рис. 1

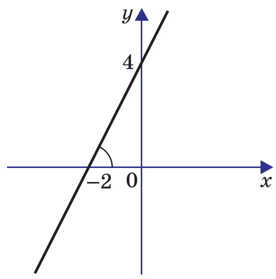


Рис. 2

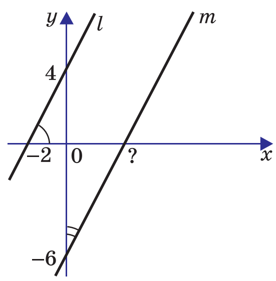


Рис. 3

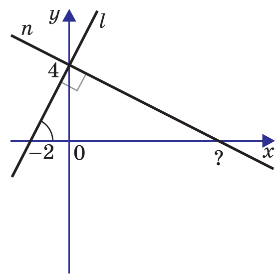


Рис. 4

практически каждый. В сильном классе мне удавалось добиваться того, что гораздо более сложную дробь $\dfrac{x^2-4x+3}{x^2+4x-5}$ большинство сокращало в уме (корень 1 виден и в числителе и в знаменателе, дальше нетрудно «сообразить» другие корни по теореме Виета).

Таким образом, вместо благих, но невыполнимых призывов «стать внимательным», мы создаем на уроке регулярную ситуацию, позволяющую ученику приобрести навык произвольной сосредоточенности.

Устные упражнения позволяют также «собрать» класс в начале урока, задать правильный рабочий ритм.

Связь между темами курса

Устные упражнения позволяют обсуждать изученные темы в связи с новыми и выстраивать различные связи между темами курса. Приведем один пример. Линейная функция, как правило, изучается в 7-м классе. Однако то, что угловой коэффициент равен тангенсу угла наклона прямой, ученик узнает только в 10-м или 11-м классе при изучении производной. У большинства школьников складывается впечатление, что «тангенс угла наклона — это что-то про касательную», а не про любую прямую: настолько прочно связаны у него определение производной, касательная и знание про тангенс. Почему так происходит? Понятно почему. В 7-м классе школьники еще не знают, что такое тангенс. В 8-м классе, когда изучают тангенс острого угла, линейную функцию «уже изучили» — и о ней в курсе алгебры уже ни слуху, ни духу. Да к тому же непонятно, как быть с тупыми углами. Когда тангенс вводится для тупого угла (9-й класс), связать его с линейной функцией также некогда и негде. Между тем это легко делается на устных упражнениях. И начинать стоит уже в 8-м классе; с одной стороны, это будет прекрасной пропедевтикой идеи, как обобщить понятие тангенса для тупых углов, с другой — в геометрии практически нет содержательных задач про тангенс и применить новое понятие к линейной функции — это дополнительно «узаконить» его введение. Приведем пример серии задач на эту тему.

Серия 1

1. Задайте формулой функцию, график которой изображен на рисунке 1.

Напомним «технологию» (подробно она описана в первой части статьи). Сначала все предложенные ответы выписываются учителем на доске и никак не комментируются. Потом идет обсуждение, какой из предложенных ответов верный и почему. Для всех неверных ответов учеников рисуется соответствующий график.

2. Найдите синус, косинус и тангенс угла, обозначенного на рисунке 2.

Среди возможных ошибок будет отрицательный косинус. Здесь следует сказать, что для острых углов так не бывает, а для других очень даже бывает (но об этом мы узнаем в 9-м классе). То, что тангенс угла «совпадет» с угловым коэффициентом, может привести к вопросу, случайно ли это. Дальше (в зависимости от класса) можно действовать по-разному. Можно взять и изучить на уроке это «неожиданное совпадение», можно дать задание на дом посмотреть другие примеры и подумать и т.д.

Для большего понимания связи углового коэффициента прямой, подобия и тригонометрических функций полезно решить следующую задачу.

3. Прямые m и l на рисунке 3 параллельны. Найдите уравнение прямой m, точку ее пересечения с осью абсцисс и тригонометрические функции отмеченного двумя дугами угла.

Эта нетрудная задача связывает сразу несколько тем: линейная функция, углы при параллельных прямых, подобие, тригонометрические функции острого угла.

4. В сильном классе можно решить задачу о взаимно перпендикулярных прямых.

Прямая n на рисунке 4 перпендикулярна прямой l. Найдите точку пересечения прямой n с осью абсцисс и ее уравнение.

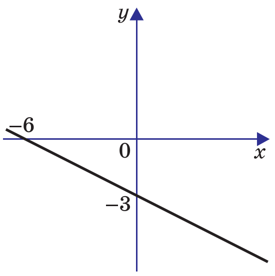


Рис. 5

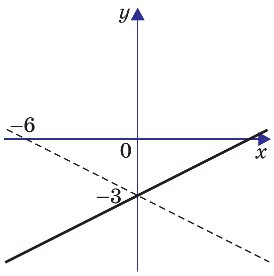


Рис. 6

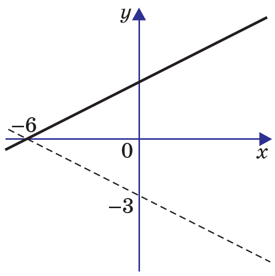


Рис. 7

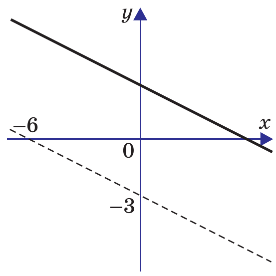


Рис. 8

Здесь устные упражнения легко могут перерасти в общее исследование, результаты которого будут потом записаны.

Если в классе только несколько достаточно сильных учеников, то задачу можно поставить всему классу, а решение отложить на домашнее задание как задачу «на отдельную пятерку».

Покажем еще один пример связывания «далеких» тем курса на устных упражнениях. Во время изучения темы «Преобразования плоскости» хорошо бы подключить эту тему к задачам о графиках функций при устной работе. При этом если отражение относительно осей координат графиков функций к этому моменту уже могло быть изучено, так как это необходимо для построение графиков с модулем, то центральная симметрия в разговорах о графиках, как правило, еще не упоминалась.

Серия 2

1. Задайте формулой функцию, график которой изображен на рисунке 5.

2. Прямую, изображенную на рисунке 5, отразили относительно оси Oy, задайте формулой новую функцию (рис. 6).

3. Прямую, изображенную на рисунке 5, отразили относительно оси Ox, задайте формулой новую функцию (рис. 7).

Мы получаем прекрасный повод обсудить, почему прямые, полученные на рисунках 6 и 7, оказались параллельны друг другу (это непростой вопрос). Это подводит нас к четвертой задаче про центральную симметрию.

4. Прямую, изображенную на рисунке 5, отразили относительно начала координат, задайте формулой новую функцию (рис. 8).

Эта задача актуализирует свойство центральной симметрии, переводящей любую прямую либо саму в себя, либо в параллельную ей прямую.

Аналогичную задачу можно решить, если сначала задать график квадратичной функции.

Заметим, что в этих задачах везде есть как конкретное числовое решение, так и общее рассуждение (с заменой x на $-x$, y на $-y$ и т.д.). Решив пару конкретных задач, можно провести (уже письменно) решение в общем виде для функции $y = kx + b$: задать все функции, графики которых получаются при различных симметриях данной прямой.

Покажем еще несколько примеров устных упражнений на различные темы.

Неравенства

Разумеется, решать устно не самые простые неравенства в обычном классе невозможно. Однако решать «обратную задачу» — восстановить неравенство по картинке, отражающей его решение, можно, полезно и довольно увлекательно. Начнем с простой серии.

Серия 1

1. Задайте неравенство, решение которого изображено на рисунке 9.

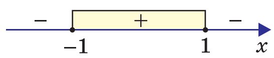


Рис. 9

Разумеется, здесь возможны различные варианты. Предположим, ученики предложили такие:

а) $x^2 < 1$;
б) $1 - x^2 \geq 0$;
в) $|x| - 1 \leq 0$;
г) $1 - |x| \geq 0$;
д) $-(x - 1)(x + 1) \geq 0$;
е) $x^2 - 1 \geq 0$;
...

Выписав все их на доску, начнем разбирать предложенные учениками неравенства.

Неравенства «а» и «е» имеют другие решения, в первом случае точки выколотые, во втором — решением является объединение двух лучей. Благодарим тех, кто предложил эти неравенства (так как они сделали типичную ошибку и позволили нам все хорошо повторить) и по словесным описаниям учеников рисуем картинки, изображающие решения этих неравенств.

У остальных четырех неравенств ответ общий: $[-1; 1]$. Однако посмотрим внимательно на рисунок. На отрезке $[-1; 1]$ стоит знак «+». Традиционно так обозначают знак выражения, стоящего в левой части неравенства. Для неравенств «а», «г» и «д» — это верно, а для неравенства «в» — нет, для него правильная картинка с противоположными знаками, но таким же ответом.

Далее мы можем двигаться в разных направлениях: менять точки на выколотые, менять значения нулей или менять знаки. В несильном классе можно, например, двигаться так.

2. Задайте неравенство, решение которого изображено на рисунке 10.

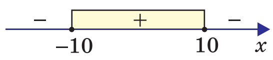


Рис. 10

Здесь возможна такая ошибка: $10 - x^2 \geq 0$. *Как обычно, рисуем соответствующую предложенному неравенству картинку.*

3. Задайте неравенство, решение которого изображено на рисунке 11.

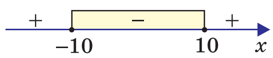


Рис. 11

Здесь нужно поменять и знак неравенства, и знаки левой части. Наверняка будут ошибки, которые полезно обсудить.

Серия 2

В более сильном классе можно пропустить задание 2, а после задания 3 пойти так.

4. Задайте неравенство, решение которого изображено на рисунке 12.

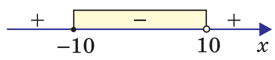


Рис. 12

Здесь придется вводить дробь. Это повод обсудить, какое выражение должно быть в знаменателе.

5. Возвращаемся к первоначальному неравенству и выкалываем дополнительную точку (рис. 13):

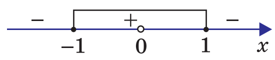


Рис. 13

Наверняка будут предложения вида $\frac{1-x^2}{x} \geq 0$.

Как обычно, рисуем к ним верную картинку и вспоминаем, от чего зависит смена знака.

6. Теперь добавляем отдельную точку (рис. 14):

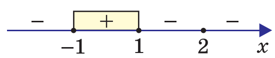


Рис. 14

7. Вернемся еще раз к первому заданию серии 1. Но для этой же картинки добавим условие, например, задайте неравенство 6-й степени. Не всякий класс быстро сообразит, что подходит $(1 - x^2)^3 \geq 0$ или $-(x - 1)(x + 1)^5 \geq 0$.

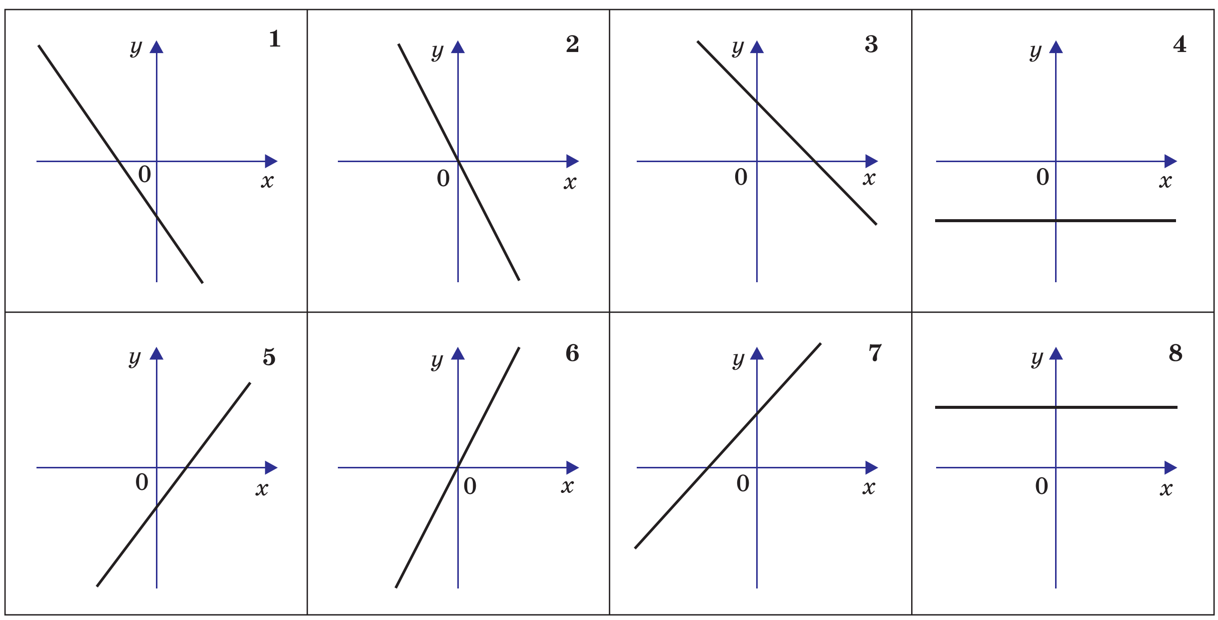


Рис. 15

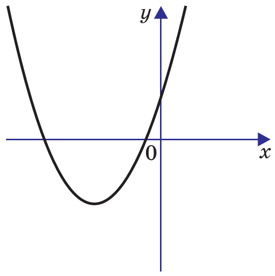


Рис. 16

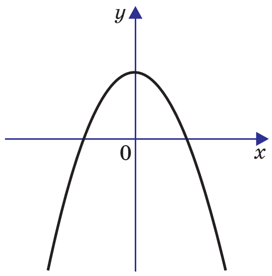


Рис. 17

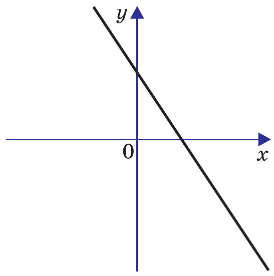


Рис. 18

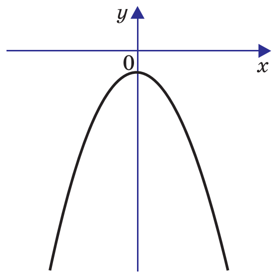


Рис. 19

В сильном классе можно попросить придумать тригонометрическое неравенство, имеющее такое же решение. Один из возможных и неожиданных ответов такой: $\arcsin x + 2 \geq 0$.

Производная

В этой теме нам необходимо добиться, чтобы каждый ученик в простых случаях умел соотносить график функции и график ее производной. Очень важно и непросто для школьника то, что производная «отвечает» за экстремумы, но «ничего не знает» про нули функции. Серия задач на нахождение нужной пары графиков функции и ее производной позволяет эти знания закрепить.

Правда, здесь придется заранее, на перемене нарисовать табличку графиков либо воспользоваться заготовкой на интерактивной доске.

Итак, у нас есть 8 прямых — графиков линейной функции (рис. 15):

Это кандидаты на то, чтобы быть графиком производной функций, которые мы будем последовательно предъявлять. Разумеется, важно не только назвать номер «кандидата», но и объяснить, почему он подходит.

1. Рассмотрим рис. 16. *Производная меняет знак с минуса на плюс, точка минимума, она же нуль производной, отрицательна, следовательно, производная изображена на рисунке* 15.7.

2. Рассмотрим рис. 17. *Ответ на рисунке* 15.2. *Нужны объяснения, аналогичные пункту* 1.

3. Рассмотрим рис. 18. *График производной — горизонтальная прямая, значения везде отрицательны. Ответ на рисунке* 15.4.

4. Рассмотрим рис. 19. *Конечно, производная такая же, как в пункте 2. А то, что нулей у функции нет, ни на что не влияет. Для слабых школьников — это нужно повторять и закреплять не единожды.*

5. Рассмотрим рис. 20. *Среди любых прямых «кандидата на график производной» этой функции нет. Важно обсудить, почему не подходит прямая на рисунке* 15.8. *Функция везде возрастает, и значения линейной функции на рисунке* 15.8 *везде положительны. Почему же она не может быть графиком подходящей производной? Потому что она постоянна и, значит, может быть производной только линейной функции.*

В более сильном классе можно заготовить разные виды квадратичных парабол (ветвями вверх и вниз, с нулями и без) и потом предъявлять различные кубические параболы с заданием найти из данного набора квадратичных парабол «кандидата на график производной».

Тригонометрические неравенства

1. Задайте неравенство, решение которого изображено на рисунке 21.

Это задание посильно любому классу. Ответ прост: $\operatorname{tg} x > 0$ *или* $\operatorname{ctg} x > 0$.

2. Добавим пару точек (рис. 22).

Теперь, чтобы задать нужное неравенство, нужно вспомнить области определения тангенса и котангенса. Верный ответ: $\operatorname{ctg} x \geq 0$. *А тангенс не подходит.*

3. Добавим еще пару точек (рис. 23).

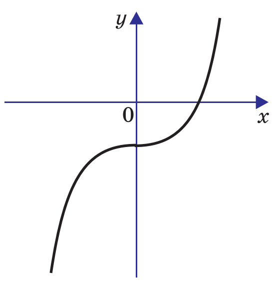


Рис. 20

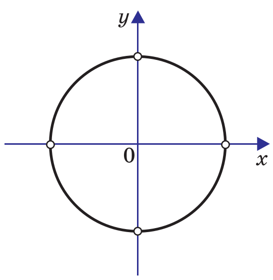


Рис. 21

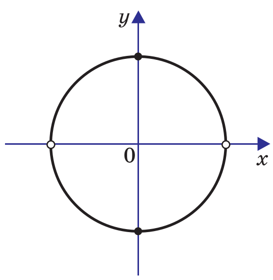


Рис. 22

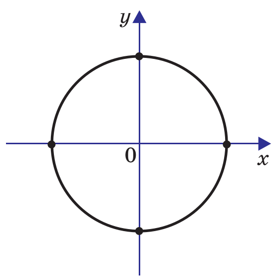


Рис. 23

Здесь ни тангенс, ни котангенс не годятся. Мысль о том, что у косинуса и синуса должны быть одинаковые знаки, приводит к решению: $\sin x \cos x \geq 0$ *или* $\sin 2x \geq 0$.

Понимание того, что знаки тангенса и синуса двойного угла совпадают везде, где оба существуют, хотя и вытекает прямо из формул, является довольно полезным, так как отсылает нас к общему утверждению про знак произведения и частного пары выражений.

4. Задайте неравенство, решение которого изображено на рисунке 24.

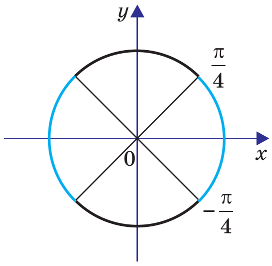


Рис. 24

Нетрудно придумать неравенство с тангенсом: $\mathrm{tg}^2 x \leq 1$. *Менее очевидно решение через косинус:* $\cos 2x \geq 0$, *оно получается из решения 3 сдвигом на* $\frac{\pi}{4}$ *(используя формулу приведения). Интересно обсудить, почему эти два неравенства равносильны, какими преобразованиями можно получить из первого неравенства второе.*

5. Последнее задание — трудное. Его можно дать в качестве домашнего необязательного задания.

Задайте неравенством знак радиоактивной опасности *рис. 25* (дуги, соответствующие обозначенным черным цветом секторам).

Рис. 25

В заключение покажем еще один тип задач для устного счета.

Задай вопрос по данной конструкции

Учитель пишет на доске некий «математический объект» и просит учеников задавать про него вопросы. Например, на доске написано выражение $\frac{x^2+2x}{x^2-4}$.

Школьники задают всевозможные вопросы и задания к этому выражению. Эти вопросы учитель переадресовывает классу, и получается диалог вроде такого:

– *Что это?*

– Это алгебраическая дробь.

– *Сократите ее.*

$-\frac{x}{2}$.

– *Интересно. Как так могло получиться?*

– Убрали одинаковые слагаемые сверху и снизу.

– *А так можно делать?*

– Нет, можно сокращать на общий множитель.

– *При каких x определена дробь?*

– При x неравном двум.

– И еще минус двум.

– *Как найти все значения?*

– Приравнять знаменатель к нулю и решить уравнение.

– *Решите уравнение* $\frac{x^2+2x}{x^2-4}=0$.

– $x = 0$.

– И еще $x = -2$.

– Нет, -2 запрещено.

– *Постройте график функции* $y=\frac{x^2+2x}{x^2-4}$.

– Мы таких еще не проходили!

– Если взять сокращенную дробь, то получим $y=\frac{x}{x-2}$, а это гипербола.

– И еще надо выколоть точку $x = -2$.

И так далее.

В виде конструкции может быть геометрическая фигура с набором данных. Самый простой пример — прямоугольный треугольник с заданными катетами. Ученики спрашивают все, что им хочется найти, и сами отвечают на эти вопросы. Довольно легко задать около десятка вопросов, ответы на которые можно получить в уме. Эту тему уместно повторять в первом полугодии 10-го класса, пока в курсе стереометрии изучается параллельность и знания по планиметрии практически не задействованы.

Подведем итог. Регулярные устные упражнения позволяют повторять изученные темы, обучают концентрации внимания, задают хороший темп и ритм урока, помогают находить связи разных тем курса. Это одна из самых динамичных, неожиданных (как для ученика, так часто и для учителя) и импровизационных частей урока. Желаем коллегам творческих успехов в его применении.

Окончание. Начало в № 1/2016

Э. СОЛЕДАД,
DR. SOLEDAD R.ESTRELLA,
soledad.estrella@ucv.cl,
Чили, г. Вальпараисо

Перевод: Ю.А. Тюрина, И.Р. Высоцкий

О ПРЕПОДАВАНИИ ЭЛЕМЕНТОВ СТАТИСТИКИ В ШКОЛАХ ЧИЛИ

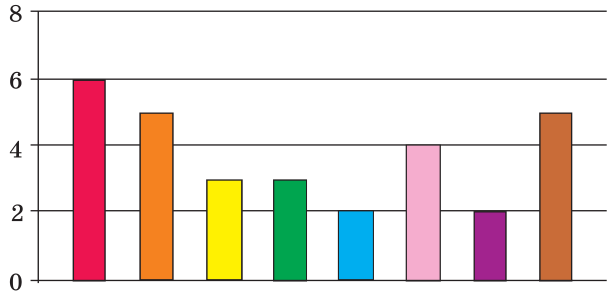
ТАБЛИЧНОЕ И ГРАФИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДАННЫХ

Тест для оценки знаний статистики и компетенций ее преподавания у учителей базового образования

Вопросы, отмеченные буквой **Ш**, предназначены для школьников, вопросы, отмеченные буквой **У**, предназначены только для учителей.

Задание 1. Конфеты

В коробке лежат конфеты разных цветов. Учитель разрешил Трини взять одну конфету из коробки, не заглядывая внутрь. Число конфет каждого цвета показано на диаграмме.



1Ш. Сколько в коробке оранжевых конфет?
1) 6 2) 4 3) 4,5 4) 5

2Ш. Конфет какого цвета в коробке ровно две штуки?
1) Желтого и зеленого; 2) Зеленого и синего;
3) Синего и фиолетового; 4) Оранжевого и фиолетового.

3Ш. Сколько синих конфет нужно добавить в коробку, чтобы количество синих и красных конфет стало одинаковым?
1) 6 2) 4 3) 2 4) Другое число

4Ш. Какова вероятность того, что Трини возьмет красную конфету?
1) 12,5% 2) 20% 3) 25% 4) 50%

1У. Приведите пример правильного и неправильного ответа, который могли бы дать ваши ученики.

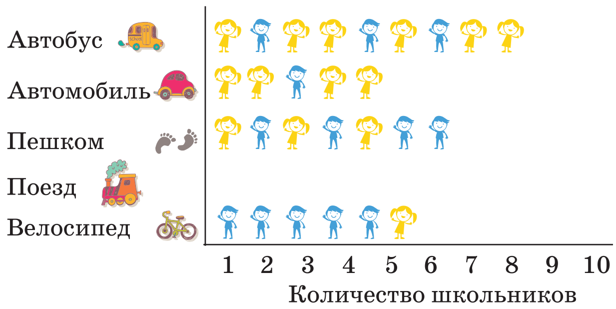
2У. Укажите в учебнике раздел, соответствующий данному заданию.

К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru (Тест.)

Задание 2. Том

Изучите диаграмму и ответьте на вопросы:

Как школьники добирались до школы сегодня



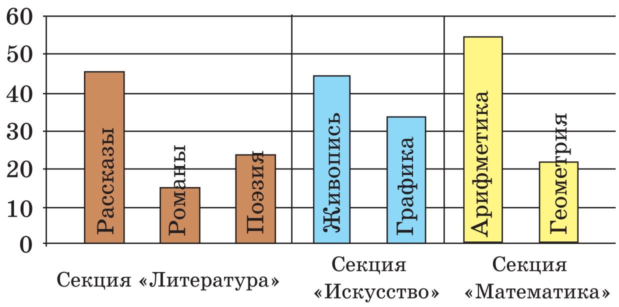
1Ш. Том не пошел в школу сегодня. Как, по вашему мнению, он будет добираться до школы завтра? Почему?

1У. Приведите примеры правильного и неправильного ответов, которые могли бы дать ваши ученики.

2У. Укажите в учебнике раздел, соответствующий данному заданию.

Задание 3. Библиотека

Внимательно изучите диаграмму и ответьте на вопросы, отмечая правильные варианты ответа.



1Ш. В какой секции среднее число выданных по подсекциям книг наибольшее?
1) В секции литературы 2) В секции искусства 3) В секции математики 4) Во всех секциях

2Ш. Анита сказала, что в секции математики среднее число выданных книг равно $\frac{55+21}{2}=38$, поэтому наибольшее среднее число выданных книг — в секции математики.

Что вы думаете по поводу ответа Аниты?
1) Анита права, она выбрала секцию, где находится самый высокий столбик на диаграмме.
2) Анита ошибается, потому что общее число книг, выданных в секции литературы, больше всех.
3) Трудно сказать, почему Анита дала такой ответ.

1У. Предположим, что вы уже обсудили содержание учебника, относящееся к данной теме. Сколько ваших учеников сможет правильно ответить на этот вопрос?
1) Большинство 2) Больше половины 3) Чуть меньше половины 4) Меньше трети

2У. Успешная стратегия решения для ваших учащихся:
1) Ответить, пользуясь только числами, взятыми непосредственно из диаграммы.
2) Вычислить среднее по всем столбикам диаграммы.
3) Вычислить среднее число книг в каждой секции и сравнить их.
4) Вычислить сумму книг в каждой секции и сравнить их.

3У. По вашему мнению, для какого класса этот вопрос подходит лучше всего?
1) 5-й класс 2) 6-й класс 3) 7-й класс 4) 8-й класс
Обоснование: ______________________________

Задание 4. Собаки и кошки

Хуан опросил своих одноклассников, у кого дома есть кошка или собака. Он собрал информацию, отмечая питомцев галочками, и вот что получилось:

Домашние питомцы одноклассников		
Гектор: собака✓, кошка	Карла: собака✓, кошка	Росио: собака✓, кошка✓
Матиас: собака, кошка✓	Мария: собака, кошка	Диего: собака, кошка✓
Анита: собака, кошка	Кейко: собака, кошка✓	Консуэло: собака✓, кошка
Татьяна: собака✓, кошка	Фрэн: собака, кошка✓	Изабель: собака✓, кошка
Хуан: собака, кошка✓	Янет: собака✓, кошка✓	Себа: собака✓, кошка

	Есть собака	Нет собаки
Есть кошка		
Нет кошки		

1Ш. Заполнить таблицу Хуану помогали друзья. Получилось три таблицы. В каком случае помощь друга оказалась полезной?

(1)	Есть собака	Нет собаки
Есть кошка	2	6
Нет кошки	5	2

(2)	Есть собака	Нет собаки
Есть кошка	2	5
Нет кошки	6	2

(3)	Есть собака	Нет собаки
Есть кошка	8	7
Нет кошки	6	2

(4) другое

1У. В каком классе школьная программа предполагает изучать тему, соответствующую этому заданию?

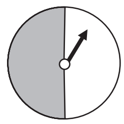
1) В 1-м 2) Во 2-м
3) В 4-м 4) В 5-м

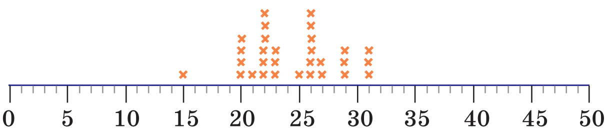
2У. Предположим, что вы уже обсудили содержание учебника, относящееся к данной теме. Сколько ваших учеников сможет правильно ответить на этот вопрос?

1) Большинство 2) Больше половины
3) Чуть меньше половины 4) Меньше трети

Задание 5. Крутящаяся стрелка

Ваш класс проводит эксперимент: все крутят стрелку, прикрепленную к диску, как на рисунке (каждый ученик крутит стрелку 50 раз). На числовой прямой каждый ученик отметил крестиком, сколько раз у него стрелка остановилась на закрашенной части круга:





1Ш. Каково наименьшее число раз, когда стрелка остановилась на закрашенной части круга?
1) 0 2) 25 3) 15 4) Не знаю.

2Ш. Каково наибольшее число раз, когда стрелка остановилась на закрашенной части круга?
1) 50 2) 22 3) 26 4) 31

3Ш. Каков диапазон количества раз, когда стрелка остановилась на закрашенной части круга?
1) 16 2) 50 3) 31 4) Не знаю

4Ш. Какова мода числа раз, когда стрелка остановилась на закрашенной части круга?
1) 22 2) 22 и 26 3) 23, 29 и 31 4) Не знаю

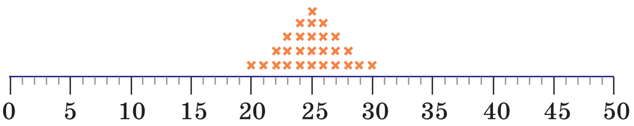
5Ш. Если вы раскрутите стрелку, чему равна вероятность того, что она остановится на закрашенной части?
1) 0,5 2) 80% 3) 20 из 50 4) Не знаю

1У. Чему вы научите своих учеников, дав им эту задачу? (Что следует выделить больше всего.)
1) Правильно получать данные и проводить вычисления.
2) Читать графики и отвечать на ответы группой.
3) Наблюдать, как распределены данные, пользуясь данной информацией.
4) Понимать содержание данной темы школьной программы.

Задание 6. Крутящаяся стрелка

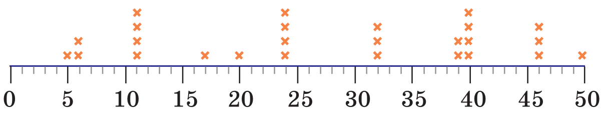
Представьте себе, что еще три класса провели эксперимент со стрелкой и кругом и составили диаграммы. При этом известно, что некоторые результаты сфабрикованы, а некоторые действительно получены в результате эксперимента.

1Ш. Внимательно изучите данный график. По вашему мнению, результаты эксперимента в классе А сфабрикованные или настоящие? Почему?



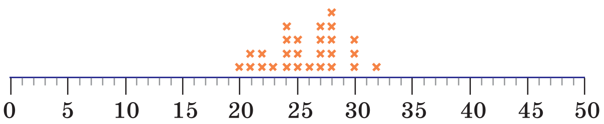
1) Сфабрикованные 2) Настоящие Потому что ______________________

2Ш. Внимательно изучите данный график. По вашему мнению, результаты эксперимента в классе В сфабрикованные или настоящие? Почему?



1) Сфабрикованные 2) Настоящие Потому что ______________________

3Ш. Внимательно изучите данный график. По вашему мнению, результаты эксперимента в классе С сфабрикованные или настоящие? Почему?

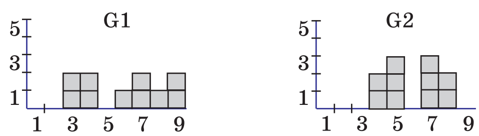


1) Сфабрикованные 2) Настоящие Потому что ______________________

1У. Какое из высказываний лучше всего объясняет, почему эту задачу нужно предлагать учащимся?
1) Чтобы они знали, что вы знаете, когда они жульничают.
2) Чтобы они могли принимать обоснованные решения, основываясь на понятии дисперсии.
3) Чтобы они могли наблюдать, как распределяются данные, и наблюдать дисперсию.
4) Чтобы улучшить их навыки чтения графиков и формирования правильных ответов.

Задание 7. Олимпийские игры

Двадцать школьников готовились к математической олимпиаде. Десять из них образовали команду 1 (G1), а остальные — команду 2 (G2). Очки, полученные на олимпиаде, показаны на графиках.



Каждый квадрат на диаграмме изображает число очков, полученных одним из участников. Например, в команде 1 два квадрата над цифрой 9 означают, что два члена этой команды получили по 9 очков.

1Ш. Какие из данных утверждений верны?

1) Команда 1 выступила лучше, чем команда 2, потому что участники, получившие наибольшее число очков, находятся в команде 1.

2) Команда 2 выступила лучше, потому что в ней нет участников, получивших меньше 4 очков.

3) Между двумя командами нет разницы, потому что средние значения очков в обеих командах одинаковы.

4) Хотя средние значения для обеих команд одинаковы, команда 2 более однородна, и поэтому она выступила лучше.

Задание 8. Опрос

В некотором государстве провели несколько опросов, чтобы определить уровень поддержки некоторого кандидата в президенты на будущих выборах. Четыре газеты проводили независимые друг от друга опросы по всей стране. Результаты опросов показаны ниже:

- **Газета 1.** 36,5% (6 января, опрошена случайная выборка из 500 граждан, имеющих право голоса).
- **Газета 2.** 41,0% (20 января, опрошена случайная выборка из 500 граждан, имеющих право голоса).
- **Газета 3.** 39,0% (20 января, опрошена случайная выборка из 1000 граждан, имеющих право голоса).
- **Газета 4.** 44,5% (20 января, опрошена выборка из 1000 граждан, позвонивших по телефону).

1Ш. Если выборы назначены на 25 января, опрос какой газеты покажет наилучший прогноз уровня поддержки для данного кандидата в президенты?

1) Опрос газеты 1, потому что он был проведен раньше других и в нем использовалась случайная выборка.

2) Опрос газеты 4, потому что в нем проголосовало 1000 человек и это был телефонный опрос.

3) Опрос газеты 3, потому что он проводился близко к дню выборов и в нем использовалась случайная выборка из 1000 голосовавших.

4) Опросы газет 3 и 4, потому что их провели в один и тот же день и в них использовались выборки одинакового размера.

1У. Каков, по вашему мнению, наилучший порядок изучения понятий, используемых в этой задаче?

1) Выборка, популяция, случайная выборка, случайность, составление выборки, размер выборки.

2) Случайность, выборка, популяция, случайная выборка, составление выборки, размер выборки.

3) Случайность, популяция, выборка, случайная выборка, составление выборки, размер выборки.

4) Выборка, популяция, случайность, случайная выборка, составление выборки, размер выборки.

Задание 9. Вопросы

Учитель хочет узнать, сколько вопросов задали ученики. Ниже дана таблица с числом вопросов, заданных 8 учениками за одно занятие:

Ученики	Хуан	Люсия	Роберто	Ана	Педро	Мария	Луис	Клара
Число вопросов	0	5	2	22	3	2	1	2

Учитель хочет подвести итог и вычислить типичное число вопросов, заданных в этот день.

1Ш. Какой из методов вы порекомендовали бы? (Выберите один из следующих ответов.)

1) Использовать наиболее часто встречающееся число, в данном случае 2.

2) Сложить все восемь чисел и поделить результат на 8.

3) Выбросить 22, а остальные семь чисел сложить и поделить результат на 7.

4) Выбросить 0, а остальные 7 чисел сложить и поделить результат на 7.

1У. Чему должны научиться ваши ученики, решая эту задачу? (На что нужно обратить особое внимание.)

1) Структурировать свои навыки и знания и верно решать такие задачи.

2) Сосредотачиваться на информации и организовывать систему понятий.

3) Актуализировать имеющиеся знания, оценить их применимость и использовать в данной ситуации.

4) Работать в группе, научиться аргументировать в споре.

Задание 10. Мальчики и девочки

Вероятность того, что новорожденный окажется мальчиком, равна вероятности того, что новорожденный окажется девочкой. В родильных домах некоторого города ведется запись новорожденных мальчиков и девочек. В роддоме A зафиксировано 50 рождений в день, а в роддоме B — в среднем 10 рождений в день. Тогда в произвольный день:

1Ш. В каком роддоме выше вероятность записать 80% или больше рождений девочек?

1) В роддоме A (где 50 рождений в день). 2) В роддоме B (где 10 рождений в день).

3) Вероятность данного события одинакова для обоих роддомов. 4) Не знаю.

1У. Что важно знать учащимся, чтобы решить эту задачу?

1) Дисперсия в малых выборках. 2) Равновероятность.

3) Закон больших чисел. 4) Не знаю.

Задание 11. Лотерея

В лотерее нужно угадать 6 чисел от 1 до 40. Вы выиграете, если угадаете все шесть выпавших чисел. Вероника выбрала 1, 2, 3, 4, 5, 6. Роза выбрала 39, 1, 17, 33, 8, 27.

1Ш. У кого больше вероятность выиграть?

1) У Вероники. 2) У Розы.
3) У Вероники и Розы одинаковая вероятность выиграть. 4) Не знаю.

1У. Какие ответы показывают ошибочные представления учеников о случайных последовательностях?

1) 1 и 2 2) 1 и 3 3) 2 и 3 4) Не знаю

Задание 12. Кости

Предположим, что одновременно бросают две симметричные игральные кости.

1Ш. У какого событий наибольшая вероятность?

1) Выпадет пара (5; 6). 2) Выпадет пара (6; 6).
3) У обоих вариантов одинаковая вероятность. 4) Не знаю.

1У. Что важно знать учащимся, чтобы решить эту задачу?

1) Построение таблицы частот и/или дерева пространства элементарных событий.
2) Понятие пространства элементарных событий и благоприятствующего элементарного события.
3) Понятия пространства элементарных событий, равновероятности и неравновероятности.
4) Понятие случайного эксперимента и пространства элементарных событий.

Задание 13. Землетрясение

В дебатах о возможности прогнозирования землетрясений один геолог сказал: «В течение следующих 20 лет вероятность землетрясения в городе Xyz равна двум третям».

1Ш. Какое из следующих утверждений лучше всего отражает значение утверждения, высказанного геологом?

1) $\frac{2}{3}\cdot 20$ приблизительно 13,33, следовательно, не раньше чем через 13, но не позже чем через 14 лет в городе Xyz случится землетрясение.

2) $\frac{2}{3}$ больше, чем $\frac{1}{3}$, следовательно, можно быть уверенным, что в какой-то момент в течение следующих 20 лет в городе Xyz случится землетрясение.

3) Вероятность того, что в городе Xyz случится землетрясение в течение следующих 20 лет, выше, чем вероятность, что землетрясения не произойдет.

4) Невозможно предсказать, что произойдет, поскольку нельзя быть уверенным, когда случится землетрясение.

1У. По вашему мнению, этот вопрос направлен на то, чтобы

1) Научить рассуждать и делать выводы о реальном значении вероятностных прогнозов.
2) Научить применять модель Лапласа, чтобы сделать вывод о значении вероятностной ситуации.
3) Заново осмыслить понятие неопределенности и неприменимости теории вероятности в некоторых случаях.
4) Подтвердить или опровергнуть утверждение, используя математические методы.

Задание 14. Домашние животные

Ученики второго класса записали данные о своих домашних животных в таблицу:

Животное	Число	Животное	Число
Птица	2	Рыба	2
Кошка	4	Белка	1
Черепаха	2	Дикобраз	3
Собака	7	Кролик	3
Утка	1		

Когда обсуждали таблицу, один из учеников сказал: «Мода – собака, медиана – утка, а диапазон от 1 до 7».

1У. Если вы считаете, что ученик неправ, напишите, в чем его ошибка (ошибки): ______________

РОССИЙСКИЙ КОММЕНТАРИЙ ЧИЛИЙСКОГО ОПЫТА

И. ВЫСОЦКИЙ,
г. Москва

Происходящее в России внедрение в школьные программы и в экзамены теории вероятности и статистики побуждает нас изучать опыт других стран. Судя по тексту статьи и прилагаемому аппарату исследования — тесту для школьников и учителей, доктор Соледад Ромеро Эстрелла задается теми же вопросами, что и мы: какое содержание курса статистики и вероятности существенно и для какого возраста оно оптимально или приемлемо.

Безусловно, культурные, образовательные, социально-экономические различия между Россией и Чили сказываются на впечатлении от статьи и тестовых материалов. Тем не менее ясно видно стремление обозначить круг вопросов, актуальных и для нас. Автор пишет: «*Введение статистики и теории вероятностей в ходе пересмотра школьных программ (Chile, 2009) произошло на десять лет позже, чем в других странах. Анализ показывает, что концепция изменчивости отсутствует в школьной программе и что важные понятия, такие как случайность и случайная величина, упоминаются вскользь. Кроме того, нет ясного намерения связать статистику и теорию вероятностей между собой, установить связь, которая может помочь в понимании дедуктивных методов в статистике*».

В статье содержится косвенное указание на важное обстоятельство, которое мы неоднократно отмечали: статистика знакомит школьников с рядом важных понятий и терминов: средними значениями, дисперсией и стандартным отклонением, рассеиванием, частотами и вероятностями. Для формирования рационального мышления и общей грамотности современного человека владение этими понятиями важнее, чем функция, уравнение или неравенство.

Описанное в статье исследование проводилось в Чили среди школьников 4-х и 7-х классов (возраст — 9 и 12 лет; 994 участника), а также среди их учителей. Вопросы для школьников и для учителей были разными. Но тест составлен таким образом, чтобы ответы учителей проливали свет на способы рассуждения, ожидаемый прогресс, успехи, неудачи и типичные ошибки учащихся.

К сожалению, работа профессора Эстрелла не содержит результатов тестирования. Интересно было бы получить их и сравнить с результатами аналогичного исследования в России, если таковое удастся провести.

Закончив общий комментарий, обсудим отдельные задания теста.

Задание 2 «Том» — про школьников, которые добираются до школы разными способами, представляет интерес и вызывает целый ряд обсуждений. Требуется построить прогноз относительно того, как завтра будет добираться до школы Том, который сегодня не пошел в школу. Прогноз требуется сделать с помощью диаграммы, показывающей, каким способом добирались до школы одноклассники Тома. При этом имеются данные отдельно о мальчиках и о девочках.

Из статьи следует, что задание подразумевает верные или неверные ответы. Составители значительно варьируют степень «верности ответа».

Наивысший балл (пять) предлагается ставить за прогноз «*Вероятнее всего, автобус, поскольку большинство детей пользуется автобусом*» или «*Вероятнее всего, велосипед, поскольку большинство мальчиков приезжает на велосипеде*».

Информации явно недостаточно, чтобы сделать определенный вывод, однако мы можем сравнить между собой шансы, что Том выберет тот или иной вид транспорта, при условии, что он вообще завтра собирается в школу. При этом нас не должно смущать то, что верных ответов несколько, поскольку ответом здесь является прогноз, а прогнозы всегда отличаются неопределенностью. Но не вполне понятно, почему эти два ответа предлагается оценивать одинаково. В первом случае прогноз делается без учета информации о половой принадлежности школьников, а во втором — эта важная информация используется, ведь есть основания считать, что Том — мальчик.

Проблема в том, что оба прогноза неудачны. Ведь, судя по диаграмме, *большинство* школьников не пользуются автобусом: пассажиров автобуса всего 9 из 27. Значит, на основании имеющихся данных вероятность того, что *случайно выбранный ученик* приедет на автобусе, оценивается числом $\frac{1}{3}$. Это плохой прогноз (он лучший из возможных, но полагаться на него трудно).

Если ограничиться только рассмотрением мальчиков, то ситуация не улучшается: оценка вероятности того, что *случайно взятый мальчик* приедет на велосипеде, равна $\frac{5}{13}$. Это меньше $\frac{1}{2}$, так что нельзя сказать, что велосипед наиболее вероятен. Он вероятнее любого другого способа, но менее вероятен, чем совокупность других способов.

Разумным представляется ответ «*Трудно сделать определенный прогноз ввиду недостаточности информации*», который авторами задания оценивается всего в 1 балл.

Вместе с тем нужно отдать должное авторам вопроса — наибольший балл присуждается ответам, которые учитывают неопределенность предположения и лишены категоричности.

Задача не является плохой. Напротив, она очень хороша для обсуждения ситуации, которая часто возникает при построении прогнозов:

1. Иногда лучший прогноз, какой только можно сделать, вовсе не является достоверным или даже сколько-нибудь надежным, в том смысле, что на него можно полагаться.

2. Принимая в расчет дополнительную информацию (Том — мальчик), можно уточнить (улучшить?) оценку шансов того или иного события.

Обратим внимание еще на одну особенность задачи: по условию, Том сегодня остался дома. Таким образом, опрошена не вся совокупность одноклассников Тома, но группу опрошенных нельзя назвать и случайной выборкой, поскольку в нее не входит как раз нужный нам Том.

Эта задача очень интересна во всех отношениях: и как ситуация для обсуждения, и как материал для исследования. К сожалению, те же обстоятельства делают ее неудачной для оценки знаний, поскольку наиболее разумные ответы являются констатацией невозможности сделать сколько-нибудь достоверный прогноз.

Задание 3. Это задание вызвало наибольшие проблемы с переводом, да и с пониманием сути тоже. После неоднократных консультаций с автором исследования был сделан смысловой перевод. Назначение задачи — проверить, понимают ли школьники, что такое среднее, и не смешивают ли они среднее с наибольшим значением или с суммой.

Отдельного обсуждения заслуживает **задание 4**, которое проверяет умение составить таблицу сопряженности двух признаков. Трудно сказать, какое место таблицы сопряженности занимают в регулярном курсе статистики чилийских школ. Однако из статьи следует, что количественный анализ нечисловых объектов в том или ином виде входит в учебные программы. Здесь так же, как и при пользовании иными статистическими инструментами, важно научиться строить гипотезы и оценивать их правдоподобность наивными средствами (без строгих доказательств), принимая во внимание отсутствие единственно верного ответа. Учебные ситуации такие, как в задании 4, формируют статистическую культуру в рассуждениях и записях.

Анализ качественных признаков с помощью таблиц восходит к англосаксонской школьной традиции. У нас нет данных о том, насколько глубоко изучаются эти вопросы в Чили или других странах. В России этот вид представления данных отсутствует не только в школе, но и в большинстве регулярных курсов статистики в высшей школе. Возможно, зря.

Задания 5 и 6 привлекают глубиной требующегося от школьников анализа. У школьников отсутствуют механизмы проверки гипотез. Вероятно, в задании 6 подразумевается использование статистической интуиции, развить которую в верном направлении должно задание 5. Смелый эксперимент.

Задание 7 — про школьников, готовившихся к олимпиаде, интересно тем, что погружает школьников в ситуацию, в которой не только не обозначен алгоритм, но еще и отсутствует стратегия решения. *Не предложено решающее правило*, позволяющее сказать, какая команда выступила лучше. Значит, нет однозначно верной альтернативы. Поясним: если бы было сказано, что побеждает та команда, где сильнейший участник, то ответ 1). Если бы было известно, что проигрывает команда, где самый слабый участник, то ответ 2). Если победитель определяется по среднему или по сумме баллов, то ответ 3). Если бы правило гласило, что при равных средних сильнее та команда, где рассеивание результатов меньше, — то 4). Но не сказано ничего. Таким образом, школьникам предлагается не столько выбрать ответ, сколько самостоятельно сформулировать разумное решающее правило для определения победителя. Задача очень ценная для исследования и последующего обсуждения.

Задание 10. Вероятно, правильный ответ на вопрос 1У: «Закон больших чисел». Трудность в том, что *от закона больших чисел далеко до аккуратного обоснования утверждения* о том, что вероятность большого отклонения частоты от вероятности на малой выборке больше, чем на большой. Вряд ли многие учителя (не говоря уже о школьниках), даже с привлечением соображений о дисперсии малой и большой выборки, смогут доказать этот факт. Однако вопрос в тесте есть, и он прошел экспертизу восьми независимых экспертов. На что расчет? Видимо, на то, что составители теста считали, что дедуктивные доказательства не главное в статистике. Впрочем, мы считаем так же.

Мы тоже не будем доказывать. Просто поясним. Предположим, что родился только один ребенок. Мальчик. Странно? Нет, конечно. Частота рождения мальчика равна единице (один мальчик из одного возможного — это 100%). Частота отклонилась от вероятности на 0,5. И это, повторим, вовсе не удивительно.

Если же из 100 новорожденных 100 оказались мальчиками, нас это сильно удивит. Мы даже скажем, что это практически невозможно. То же самое отклонение частоты от вероятности 0,5 теперь нам представляется невероятным, ведь в выборке теперь не один ребенок, а 100 детей.

На этом примере мы видим, что понятие о действии закона больших чисел у нас срабатывает без вычислений и доказательств; здравый смысл подсказывает, что в выборке объемом 1 всё возможно, а в выборке объемом 100 число мальчиков не может значительно отклоняться от ожидаемого.

Значит, чем больше выборка, тем меньше должна быть вероятность того, что частота рождения мальчика отклонится от 0,5 на 0,3 или выше. Таким образом, задание теста подразумевает чисто интуитивное решение, поскольку ни семиклассники, ни большинство их учителей не смогут провести доказательство.

Обращают на себя внимание, казалось бы, близкие **задания 11 и 12.** С заданием 11 все ясно: очень многие подсознательно смешивают случайный выбор со сложностью случайной последовательности и будут утверждать, что случайное выпадение в лотерее шести номеров подряд намного менее вероятно, чем любая беспорядочная комбинация.

К сожалению, в статье отсутствуют комментарии к заданию 12. Если кости различимы, то указанные события равновероятны. Впрочем, условие содержит указание на одновременность бросания костей. Вероятно, тем самым подразумевается отсутствие «первой кости» и «второй кости», то есть кости неразличимы. В этом случае комбинация (5; 6) в два раза вероятнее, чем пара (6;6). Не зная ответов к тесту, мы не можем точно сказать, что имеется в виду, но это неважно. Важен сам по себе факт, что качественные задачи такого рода включены в исследование статистической и вероятностной культуры школьников 9–11 лет.

В последнем задании, **задании 14**, учителю предлагается прокомментировать ошибочное утверждение. Помимо ошибки в подсчете медианы, здесь имеется еще одна ошибка. Утка не может быть медианой просто потому, что медиана — числовая характеристика. В отличие от моды. Мода — показатель необязательно числовой. В данном случае модой действительно служит собака.

Упомянув о моде, заметим вот еще что. Мода встречается в тесте дважды. И оба раза имеется в виду мода очень небольших наборов. С нашей точки зрения, говорить о моде, имея дело с выборками (числовыми наборами) небольшого объема, — методическая и, если хотите, концептуальная ошибка. Мода — важная описательная характеристика тогда, когда имеется большой массив данных. Чаще всего — когда речь идет о значительных по объему выборках из непрерывных распределений, где значения приходится группировать. На малых выборках мода — крайне неустойчивый показатель, а поэтому изучение моды лучше оставить до того момента, когда она действительно понадобится.

В целом проведенное и описанное исследование представляется ценным для поиска плодотворных образовательных стратегий. Понимание того, насколько статистические и вероятностные явления являются интуитивными или контринтуитивными для учащихся различных возрастных групп, крайне важно для осмысленного (побоимся употребить слово «правильного») планирования преподавания статистики и вероятности в школе. Отдельное достоинство исследования — включение в него учителей, участвовавших в опросе на тему (1) понимания реального соответствия между содержанием заданий и учебником и (2) оценки способностей школьников к восприятию важных понятий и терминов статистики и вероятности.

Мы надеемся, что сможем провести подобное исследование в России.

Бартоломе Эстебан Мурильо. Мальчики играют в кости. Мюнхен, Старая пинакотека

А. БЛИНКОВ,
А. ИВАНИЩУК,
Н. НАКОНЕЧНЫЙ,
П. ЧУЛКОВ,
г. Москва

Полные итоги регаты опубликованы на сервере МЦНМО (http://olympiads.mccme.ru/regata).

10 класс

ТУРНИР АРХИМЕДА

МОСКОВСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ РЕГАТА

Математическая регата 10-х классов прошла 28 февраля 2015 года в Московском городском дворце детского (юношеского) творчества. Финансовую поддержку регаты осуществлял, как всегда, Департамент образования г. Москвы, а организационную и техническую поддержку — Московский центр непрерывного математического образования.

В регате участвовало 64 команды. Помимо команд из Москвы, в ней приняли участие команды из двух физико-математических школ Долгопрудного и двух физико-математических школ Санкт-Петербурга.

Математической литературой (традиционно предоставляемой МЦНМО) было награждено 19 команд. Шестнадцать лучших команд получили дипломы I, II или III степени. Победителями регаты стала одна из команд гимназии №1514 и одна из команд школы № 218 (обе — Москва).

Условия задач

Первый тур

(*10 минут; каждая задача — 6 баллов*)

1.1. Сумма трех чисел равна нулю. Может ли сумма их попарных произведений быть положительной?

1.2. Дан треугольник со сторонами 3, 4 и 5. Построены три круга радиусами 1 с центрами в вершинах треугольника. Найдите суммарную площадь частей кругов, заключенных внутри треугольника.

1.3. Три трехзначных простых числа, составляющие арифметическую прогрессию, записаны подряд. Может ли полученное девятизначное число быть простым?

Второй тур

(*15 минут; каждая задача — 7 баллов*)

2.1. Найдите $\frac{\sin 5x}{\sin x}$, если $\frac{\sin 3x}{\sin x} = \frac{6}{5}$.

2.2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA'B'C'D'$ $AB = BC = a$, $AA' = b$. Его ортогонально спроектировали на некоторую плоскость, содержащую ребро CD. Найдите наибольшее значение площади проекции.

2.3. Натуральные числа 1, 2, ..., 199, 200 разбили на 50 множеств. Всегда ли хотя бы в одном из множеств найдется три числа, являющихся длинами сторон какого-либо треугольника?

Третий тур

(*20 минут; каждая задача — 8 баллов*)

3.1. По положительным числам x и y вычисляют

$$a=\frac{1}{y} \text{ и } b=y+\frac{1}{x}.$$

После этого находят C — наименьшее число из трех: x, a и b. Какое наибольшее значение может принимать число C?

3.2. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, $AC=a$, $BD=b$, $AB\perp CD$. Найдите радиус окружности.

3.3. В турнире участвовало 11 шахматистов: четверо из России и семь зарубежных. Каждый шахматист сыграл с каждым по две партии (выигрыш — 1 очко, ничья — 0,5 очка, поражение — 0). По окончании турнира оказалось, что все участники набрали различное количество очков, причем сумма очков, набранных россиянами, равна сумме очков, набранных иностранцами. Могло ли в тройке призеров не оказаться ни одного россиянина?

Четвертый тур

(*25 минут; каждая задача — 9 баллов*)

4.1. Найдите все строго возрастающие последовательности натуральных чисел a_1, a_2, …, a_n, …, в которых $a_2 = 2$ и $a_{nm} = a_n a_m$ для любых натуральных n и m.

4.2. Дан неравнобедренный остроугольный треугольник ABC. Вне его построены равнобедренные тупоугольные треугольники AB_1C и BA_1C с одинаковыми углами α при их основаниях AC и BC.

Перпендикуляр, проведенный из вершины C к отрезку A_1B_1, пересекает серединный перпендикуляр к стороне AB в точке C_1. Найдите угол AC_1B.

4.3. Решите в целых числах уравнение

$$(x^2-y^2)^2 = 16y + 1.$$

Пятый тур

(*15 минут; каждая задача — 7 баллов*)

5.1. Найдите все натуральные $n > 2$, для которых многочлен $x^n + x^2 + 1$ делится нацело на многочлен $x^2 + x + 1$.

5.2. Существует ли непрямоугольный треугольник, вписанный в окружность радиуса 1, у которого сумма квадратов длин двух сторон равна 4?

5.3. Прямоугольный параллелепипед размером $m\times n\times k$ разбит на единичные кубики. Сколько всего образовалось параллелепипедов (включая исходный)?

Ответы, решения, комментарии

1.1. Нет, не может.

Пусть $a+b+c=0$. Докажем, что

$$ab+bc+ca\le 0.$$

Способ I. Из условия задачи следует, что

$$(a+b+c)^2=0 \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=0.$$

Так как $a^2+b^2+c^2\ge 0$, то $ab+bc+ca\le 0$.

Способ II. Из условия задачи следует, что

$$c=-(a+b), \text{ тогда } ab+bc+ca=ab+c(a+b)=$$
$$=ab-(a+b)^2=-(a^2+ab+b^2)\le 0,$$

так как в скобках стоит неполный квадрат двучлена.

Следовательно, условие $ab + bc + ca > 0$ выполняться не может.

1.2. $\frac{\pi}{2}$.

Из условия задачи следует, что построенные круги не пересекаются. Кроме того, высота данного прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна $\frac{3\cdot 4}{5}>1$, значит, каждая часть круга, лежащая внутри треугольника, является сектором радиуса 1, центральный угол которого совпадает с углом треугольника. Так как сумма углов треугольника равна π, то суммарная площадь этих секторов равна площади половины единичного круга, то есть равна $\frac{\pi}{2}$.

1.3. Нет, не может.

Способ I. Так как данные простые числа составляют арифметическую прогрессию, то их можно записать в виде: $a-d$, a, $a+d$. Сумма цифр каждого из этих чисел дает тот же остаток при делении на 3, что и само число. Значит, сумма цифр девятизначного числа дает тот же остаток при делении на 3, что и сумма данных чисел, которая равна $3a$. Таким образом, полученное число делится на 3, то есть оно не является простым.

Способ II. Заметим, что разность прогрессии должна быть кратна трем, иначе три члена прогрессии будут иметь разные остатки от деления на 3, то есть среди них будет число, кратное трем, которое не может быть простым. Следовательно, данные числа имеют одинаковые остатки при делении на 3, и такие же остатки при делении на 3 имеют суммы их цифр, поэтому сумма цифр девятизначного числа кратна трем. Таким образом, полученное число делится на 3, то есть оно не является простым.

Комментарий. Ситуация, описанная в условии, возможна: например, записаны числа 107, 137, 167 или 167, 197, 227. Отметим также, что доказанное утверждение справедливо для любой тройки простых чисел, необязательно трехзначных.

2.1. $-0{,}76$.

1) Преобразуем $\frac{\sin 5x}{\sin x}$, используя формулы тройного аргумента:

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha,$$
$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha,$$

а также формулы синуса суммы и двойного аргумента:

$$\frac{\sin 5x}{\sin x} = \frac{\sin 3x\cos 2x + \cos 3x\sin 2x}{\sin x} =$$
$$= 16\sin^4 x - 20\sin^2 x + 5.$$

2) Найдем значение $\sin^2 x$:

$$\frac{\sin 3x}{\sin x} = \frac{3\sin x - 4\sin^3 x}{\sin x} = 3 - 4\sin^2 x,$$

$$3 - 4\sin^2 x = \frac{6}{5} \Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{9}{20}.$$

3) Вычислим:

$$16\sin^4 x - 20\sin^2 x + 5 =$$
$$= 16\cdot\left(\frac{9}{20}\right)^2 - 20\cdot\frac{9}{20} + 5 = \frac{81}{25} - 4 = -\frac{19}{25} = -0{,}76.$$

Комментарий. В пункте 1 фактически доказана формула

$$\sin 5x = 16\sin^5 x - 20\sin^3 x + 5\sin x.$$

2.2. $a\sqrt{a^2+b^2}$.

Пусть плоскость проекции α расположена так, как показано на рисунке 1. Тогда проекция параллелепипеда совпадает с проекцией его диагонального сечения $ABC'D'$. Так как площадь ортогональной проекции многоугольника не превосходит площади многоугольника, то площадь проекции будет наибольшей, если плоскость α параллельна этому сечению. В этом случае

$$S_{\text{пр}} = S_{ABC'D'} = AB\cdot AD' = a\sqrt{a^2+b^2}.$$

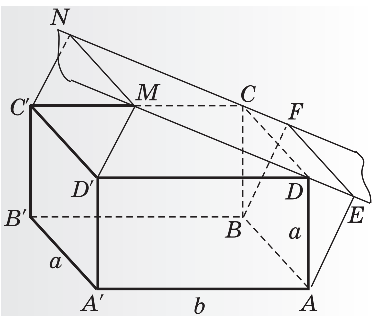


Рис. 1

Если плоскость α содержит внутренние точки параллелепипеда, то его проекция совпадает с проекцией диагонального сечения $A'B'CD$. Так как площади диагональных сечений равны, то ответ не изменится.

Комментарий. Этот же результат можно получить непосредственным вычислением. Пусть $MNFE$ — проекция параллелепипеда (см. рис. 1). Так как $AB \parallel CD$, то $AB \parallel \alpha$. Аналогично, $C'D' \parallel \alpha$, значит, искомая проекция состоит из двух прямоугольников, $CDEF$ и $CDMN$, являющихся проекциями граней $ABCD$ и $CDD'C'$ соответственно. Пусть α составляет угол φ с плоскостью грани $CDD'C'$, тогда угол между ней и плоскостью грани $ABCD$ равен $90° - \varphi$, а

$$S_{\text{пр}} = S_{CDD'C'}\cdot\cos\varphi + S_{ABCD}\cdot\cos(90° - \varphi) =$$
$$= ab\cos\varphi + a^2\sin\varphi = a(a\sin\varphi + b\cos\varphi).$$

Учитывая, что наибольшее значение выражения в скобках равно $\sqrt{a^2+b^2}$, получим ответ.

2.3. Всегда.

Рассмотрим все числа от 100 до 200. Для любых трех чисел из этого набора существует треугольник с такими длинами сторон. Так как в рассмотренном наборе 101 число, то в каком-то из множеств разбиения окажется хотя бы три числа из этого набора (*принцип Дирихле*).

3.1. $\sqrt{2}$.

Из условия задачи следует, что

$$C \le x,\ C \le a,\ C \le b.$$

Так как $b = \frac{1}{a} + \frac{1}{x}$, то $C \le \frac{1}{a} + \frac{1}{x}$. Кроме того, так как все числа положительные, то $\frac{1}{a} \le \frac{1}{C}$ и $\frac{1}{x} \le \frac{1}{C}$.

Таким образом, $C \le \frac{1}{C} + \frac{1}{C}$, $C \le \sqrt{2}$.

Значение $\sqrt{2}$ достигается, если $x = \sqrt{2}$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$, так как в этом случае $a = \sqrt{2}$ и $b = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

3.2. $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$.

Пусть R — радиус окружности, $\angle BAD = \alpha$, тогда, так как $AB \perp CD$, $\angle CDA = 90° - \alpha$ (рис. 2). По следствию из теоремы синусов

$$BD = 2R\sin\angle BAD = 2R\sin\alpha,$$
$$AC = 2R\sin\angle CDA = 2R\cos\alpha.$$

Следовательно,

$$BD^2 + AC^2 = 4R^2,\quad R = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}.$$

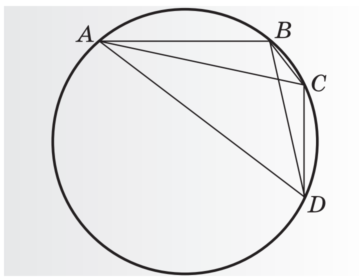


Рис. 2

Комментарий. Отметим, что ответ не изменится, если концы хорд AB и CD расположены на окружности в другом порядке, образуя четырехугольник $ACBD$ с перпендикулярными диагоналями.

3.3. Нет, не могло.

Количество партий, сыгранных в турнире, равно $\frac{10 \cdot 11}{2} \cdot 2 = 110$. Очков было разыграно столько же, значит, как россияне, так и иностранцы в сумме набрали по 55 очков. Лучший из российских шахматистов не мог набрать меньше чем 14,5 очков (иначе сумма очков, набранных россиянами, не больше $14 + 13{,}5 + 13 + 12{,}5 = 53 < 55$). Пусть его опередили хотя бы трое иностранцев, тогда они набрали в сумме не меньше $15 + 15{,}5 + 16 = 46{,}5$ очков. Значит, четыре остальных зарубежных шахматиста набрали в сумме не больше $55 - 46{,}5 = 8{,}5$ очков. Но эти шахматисты только во встречах между собой разыграли $\frac{3 \cdot 4}{2} \cdot 2 = 12$ очков, то есть сумма набранных ими очков не могла быть меньше чем 12. Полученное противоречие показывает, что хотя бы один из россиян стал призером турнира.

4.1. $a_n = n$.

Так как $a_1 < a_2$ и a_1 — натуральное число, то $a_1 = 1$. Докажем теперь методом математической индукции, что $a_{2^n} = 2^n$.

1) *База*: $a_{2^1} = 2 = 2^1$.

2) *Шаг индукции*: пусть $a_{2^k} = 2^k$, тогда

$$a_{2^{k+1}} = a_{2^k \cdot 2} = a_{2^k} \cdot a_2 = 2^k \cdot 2 = 2^{k+1}.$$

Доказав, что $a_{2^n} = 2^n$, заметим: между a_{2^k} и $a_{2^{k+1}}$ находится ровно $2^{k+1} - 2^k - 1 = 2^k - 1$ членов последовательности и столько же натуральных чисел. Учитывая также, что искомая последовательность (a_n) строго возрастающая, получим, что для любых натуральных n должно выполняться равенство $a_n = n$.

В этом случае $a_{nm} = nm = a_n a_m$ для любых натуральных n и m.

4.2. 2α.

Заметим, что

$$\angle ACB + 2\alpha < 90° + 2 \cdot 45° = 180°,$$

поэтому A_1B_1 пересекает стороны AC и BC (рис. 3). Пусть точка D симметрична вершине C относительно A_1B_1, тогда точка D лежит на отрезке CC_1. Кроме того, $A_1D = A_1B = A_1C$.

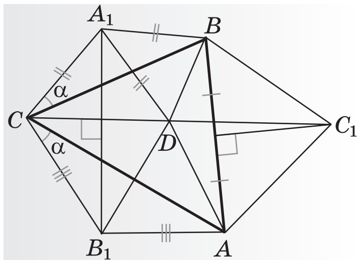


Рис. 3

В четырехугольнике A_1BDC $\angle BA_1C = 180° - 2\alpha$, $\angle BDC = \angle A_1BD + \angle A_1CD = x$, тогда $2x + 180° - 2\alpha = 360°$, значит, $x = 90° + \alpha$. Аналогично, $\angle ADC = 90° + \alpha$.

Следовательно, $\angle ADC_1 = \angle BDC_1 = 90° - \alpha$, то есть DC_1 — биссектриса угла ADB. Тогда точка C_1 пересечения биссектрисы треугольника ADB и серединного перпендикуляра к стороне AB лежит на окружности, описанной около этого треугольника. Таким образом,

$$\angle AC_1B = 180° - \angle ADB = 2\alpha.$$

Комментарий. Точку D можно получить иначе. Рассмотрим окружности с центрами A_1 и B_1 и радиусами A_1C и B_1C соответственно. Так как точка C принадлежит обеим окружностям, а CC_1 — перпендикуляр к их линии центров, то D — вторая точка пересечения этих окружностей. В этом случае

$$\angle BDC = 180° - 0{,}5\angle BB_1C = 90° + \alpha$$

(по теореме о вписанном и центральном углах).

4.3. $(\pm 1; 0)$, $(\pm 4; 3)$, $(\pm 4; 5)$.

Так как в правой части уравнения — нечетное число, то

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) \neq 0,$$

то есть

$$x - y \neq 0 \text{ и } x + y \neq 0.$$

Тогда

$$(x + y)^2 \geq 1 \text{ и } (x - y)^2 \geq 1.$$

Следовательно,

$$(x^2 - y^2)^2 \geq (x + y)^2 \text{ и } (x^2 - y^2)^2 \geq (x - y)^2.$$

Сложив два последних неравенства, получим:

$$2(x^2 - y^2)^2 \geq (x + y)^2 + (x - y)^2 = 2x^2 + 2y^2.$$

Следовательно,

$$2(16y + 1) \geq 2(x^2 + y^2) \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 16y \leq 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 + (y - 8)^2 \leq 65.$$

Значит, $0 \leq y \leq 16$. При этом $16y + 1$ является полным квадратом, поэтому возможны только четыре значения y: 0, 3, 5, 14. Подставляя их в исходное уравнение, находим соответствующие целые значения x, если они существуют.

5.1. $n = 3k + 1$, $k \in N$.

Рассмотрим остатки от деления n на 3.

1) Если $n = 3k + 1$ $(k \in N)$, то

$$x^n + x^2 + 1 = x^{3k+1} - x + x^2 + x + 1 =$$
$$= x((x^3)^k - 1) + (x^2 + x + 1)$$

делится на $x^2 + x + 1$, так как $(x^3)^k - 1$ делится на $x^3 - 1$, а $x^3 - 1$ делится на $x^2 + x + 1$.

2) Если $n = 3k + 2$ ($k \in N$), то

$$x^n + x^2 + 1 = x^{3k+2} - x^2 + 2x^2 + 1 = \\ = x^2((x^3)^k - 1) + (2x^2 + 1)$$

не делится на $x^2 + x + 1$, так как $(x^3)^k - 1$ делится на $x^2 + x + 1$, а $2x^2 + 1$ не делится на $x^2 + x + 1$.

3) Если $n = 3k$ ($k \in N$), то

$$x^n + x^2 + 1 = ((x^3)^k - 1) + (x^2 + 2)$$

не делится на $x^2 + x + 1$, так как $(x^3)^k - 1$ делится на $x^2 + x + 1$, а $x^2 + 2$ не делится на $x^2 + x + 1$.

Комментарий. Школьники, знакомые с комплексными числами, могли действовать по-другому: найти комплексные корни трехчлена $x^2 + x + 1$, а затем, подставив их в многочлен $x^n + x^2 + 1$, потребовать, чтобы его значение равнялось нулю.

5.2. Да, существует.

Способ I. Пусть $AB = 2$ — диаметр окружности, C — произвольная точка на окружности, тогда угол ACB прямой (рис. 4).

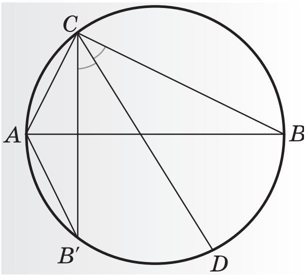


Рис. 4

Проведем диаметр CD и отразим отрезок BC относительно него. Тогда в непрямоугольном треугольнике ACB' получим, что

$$AC^2 + B'C^2 = AC^2 + BC^2 = AB^2 = 4,$$

что и требовалось.

Комментарий. Эту же идею решения можно реализовать, получив конкретный числовой пример. Пусть $AC = 1$, тогда $BC = \sqrt{3}$, $\angle AB'C = \angle ABC = 30°$. Из треугольника ACB' по теореме синусов

$$\frac{B'C}{\sin\angle CAB'} = \frac{AC}{\sin\angle AB'C}, \quad \sin\angle CAB' = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Учитывая, что этот угол тупой, получим: $\angle CAB' = 120°$, тогда $\angle ACB' = 30°$ и $AB' = AC = 1$. Тем самым, для решения задачи достаточно предъявить равнобедренный треугольник с боковой стороной 1 и углом при вершине 120°, вписанный в данную окружность.

Способ II. Впишем в данную окружность с диаметром $AD = 2$ трапецию $ABCD$. Так как трапеция вписанная, то она равнобокая. Проведем диагональ AC, тогда $\angle ACD = 90°$ (рис. 5).

Тупоугольный треугольник ABC — искомый, так как

$$AC^2 + AB^2 = AC^2 + CD^2 = AD^2 = 4.$$

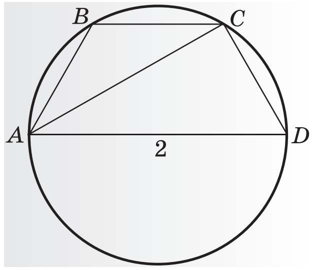


Рис. 5

Комментарий. И эту идею можно «конкретизировать», если выбрать точки B и C так, чтобы $AB = BC = CD = 1$, то есть чтобы трапеция являлась «половиной» правильного вписанного шестиугольника. Тогда треугольник ABC — искомый, так как $\angle ABC = 120°$, $AC = \sqrt{3}$.

5.3. $\dfrac{mnk(m+1)(n+1)(k+1)}{8}$.

На трех ребрах данного параллелепипеда, исходящих из одной вершины, образовались $m + 1$, $n + 1$ и $k + 1$ точки разбиения соответственно (включая концы). Далее можно рассуждать по-разному.

Способ I. Каждый параллелепипед однозначно определяется тремя ребрами, исходящими из одной вершины. Количество возможных различных ребер по каждому из измерений равно количеству способов выбрать две точки из имеющихся:

$$C_{m+1}^2 = \frac{(m+1)!}{2!(m+1-2)} = \frac{m(m+1)}{2},$$

$$C_{n+1}^2 = \frac{n(n+1)}{2}, \quad C_{k+1}^2 = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Выбор ребра по каждому из измерений происходит независимо, поэтому искомое количество параллелепипедов равно

$$\frac{m(m+1)}{2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{k(k+1)}{2} = \frac{mnk(m+1)(n+1)(k+1)}{8}.$$

Способ II. Всего после разбиения в пространстве образуется $(m + 1)(n + 1)(k + 1)$ точек, которые могут стать вершинами параллелепипедов. Заметим, что любые две точки, не лежащие в плоскости, параллельной одной из граней данного параллелепипеда, могут стать концами диагонали ровно одного из искомых параллелепипедов. Для каждой точки разбиения существует mnk точек, которые могут стать вторым концом такой диагонали, поэтому количество диагоналей равно

$$\frac{mnk(m+1)(n+1)(k+1)}{2}.$$

Но в каждом параллелепипеде четыре диагонали, поэтому искомое количество параллелепипедов в 4 раза меньше.

Комментарий. Отметим, что можно провести аналогичные рассуждения, введя декартову систему координат в пространстве.

XI ЗАОЧНЫЙ ТВОРЧЕСКИЙ КОНКУРС УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

Что требуется от участников конкурса? Обычные учительские навыки — умение решать задачи и находить ошибки в решениях. О результатах заочного конкурса 2015 года читайте в электронном приложении.

Что дает участие в конкурсе? Победители и призеры конкурса, как и в предыдущие годы, награждаются дипломами журнала «Математика» . Участники, не ставшие победителями или призерами, но показавшие достойные результаты, получат сертификаты участников.

Кроме того, победители и призеры конкурса, которые в следующем учебном году будут иметь учебную нагрузку не менее 9 часов в неделю, будут традиционно приглашены к участию в XIII очном конкурсе, который пройдет в Москве в сентябре 2016 года.

Что нужно делать? Вам предлагается выполнить девять заданий, разбитых на три блока: математический (задания № 1–5), методический (задания № 6–8) и аналитический (задание 9).

Работы (не ксерокопированные и не сканированные) с пометкой «На конкурс» следует выслать по адресу: редакция журнала «Математика. Первое сентября», ул. Киевская, д. 24, Москва, 121165.

Срок отправки работ — до 20 апреля 2016 года (по почтовому штемпелю).

Вместе с работой необходимо выслать заполненный бланк заявки.

К участию допускаются и коллективные работы (в составе коллектива авторов — не более трех человек).

Всем участникам конкурса будет обеспечена анонимность участия и объективность проверки.

Приглашаем вас к участию в конкурсе и желаем успеха!

I. Решите задачи

1. Пони и ослик бегали с постоянными скоростями по кругу длиной 100 метров. Пони каждые 2 минуты обгонял ослика. Когда ослик вдвое увеличил скорость, он сам стал каждые 2 минуты обгонять пони. С какими скоростями бегали пони и ослик изначально?

2. На координатной плоскости XOY покрашены все прямые вида $y = ax + a^2$. Нарисуйте покрашенную область. Ответ обоснуйте.

3. Докажите, что в равногранном тетраэдре вершина проектируется в точку, симметричную ортоцентру основания относительно центра его описанной окружности.

4. В футбольном турнире команда $А$ заняла первое место, набрав больше всех очков, а команда $Б$ — последнее место, набрав меньше всех очков. Если бы за победу давали не 3 очка, а 2, то,

К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru (Бланк заявки.)

наоборот, команда *Б* стала бы первой, а команда *А* — последней. Какое наименьшее количество команд могло играть в турнире? (*Каждая команда сыграла с каждой один раз*.)

5. Около остроугольного треугольника ABC описана окружность, AN — ее диаметр. На сторонах AC и AB отмечены точки D и E соответственно так, что $\angle BNE = \angle CND$. Прямые DE и BC пересекаются в точке F, K – середина отрезка DE. Окружность, описанная около треугольника ADE, вторично пересекает данную окружность в точке X. Докажите, что угол KXF прямой.

II. Методический блок

В предложенных текстах (6 и 7) могут содержаться математические ошибки (как в условиях «задач», так и в «ответах» и «решениях»). Если некорректно условие «задачи», то объясните, почему это так. Если неверно только «решение», то укажите все ошибки и приведите верное решение.

6. «Задача». Решите уравнение

$$(1 + x + ... + x^9)(1 + x + ... + x^{11}) = (1 + x + ... + x^{10})^2.$$

«Ответ»: 0.

«Решение». По формуле для вычисления суммы первых n членов геометрической прогрессии получим:

$$\frac{x^{10}-1}{x-1}\cdot\frac{x^{12}-1}{x-1}=\frac{\left(x^{11}-1\right)^2}{(x-1)^2}.$$

Избавившись от знаменателя и раскрыв скобки, получим, что

$$x^{22} - x^{12} - x^{10} + 1 = x^{22} - 2x^{11} = 1,$$

то есть

$$x^{10}(x - 1)^2 = 0.$$

Корни этого уравнения: $x = 0$ или $x = 1$, но второй корень посторонний, так как при $x = 1$ знаменатели дробей обращаются в ноль.

7. «Задача». Натуральные числа a и b удовлетворяют соотношению $2a^2 + a = 3b^2 - b$. Докажите, что $a + b$ — точный квадрат.

«Решение». Перенося $2b^2 - b$ в левую часть равенства, получим, что

$$2(a^2 - b^2) + a + b = b^2,$$

то есть

$$(a + b)(2a - 2b + 1) = b^2.$$

Осталось заметить, что числа $a + b$ и $2a - 2b + 1$ взаимно просты, следовательно, каждое из них — точный квадрат.

8. «Определение». Правильным многоугольником называется простая замкнутая ломаная, у которой равны длины всех звеньев и равны все углы между соседними звеньями. Корректно ли это определение для правильного: а) четырехугольника; б) шестиугольника; в) пятиугольника? Обоснуйте.

III. Аналитический блок

9. Некоторые школьники допускают ошибки, используя в процессе решения каких-то задач «тождества» типа $\lg(a + b) = \lg a + \lg b$. Это может и не повлиять на результат, так как существуют значения переменных, для которых подобные равенства верны. Например, данное равенство выполняется при $a = 3$, $b = 1,5$.

1) Найдите множество всех пар $(a; b)$, для которых верно это равенство.

2) Приведите еще несколько примеров похожих ошибок из других разделов школьной программы (*желательно, чтобы множества значений переменных или классы объектов, для которых приведенные вами соотношения окажутся верными, были достаточно широкими и отличными от тривиальных*).

3) Для каждого примера найдите множество значений переменных или класс объектов, для которых приведенные вами соотношения верны.

Заявка участника конкурса

Форма участия (нужное подчеркнуть): индивидуальная / коллективная		
Фамилия		
Имя		
Отчество		
Домашний адрес		Индекс
Телефон		
e-mail		
Место работы		
Должность		
Недельная нагрузка в 2015/2016 учебном году		

В. ДЯТЛОВ,
vndyatlov@yandex.ru,
г. Новосибирск

КАК НАУЧИТЬ(СЯ) РЕШАТЬ ЗАДАЧИ ПО ПЛАНИМЕТРИИ

О ПОСТРОЕНИИ ЧЕРТЕЖЕЙ

Настоящая лекция является продолжением лекции [1]. В ней собраны наблюдения по поводу подготовки чертежа при решении планиметрической задачи. Качество чертежа может существенно повлиять на успешность решения. Иногда считают, что не надо обращать внимание на соответствие рисунка условиям задачи. Мы не будем придерживаться этой точки зрения, и поскольку при подготовке чертежа есть некоторые особенности, сформулируем несколько пожеланий.

1. Сначала рисунок лучше выполнять карандашом, так как на нем могут появляться вспомогательные элементы, связанные с условиями задачи и помогающие построить чертеж, по возможности согласованный с данными. После завершения чертежа можно относящиеся к условию элементы выделить ручкой, а остальные стереть. Однако практика показывает, что со стиранием спешить не надо, ибо свойства, отраженные на чертеже при анализе условия задачи, бывают полезны при ее решении.

2. Не рисуйте «провокационных» чертежей, то есть фигура на чертеже не должна добавлять новые по сравнению с данными свойства. Например, если сказано, что треугольник равнобедренный, то не надо изображать его правильным — надо его либо вытянуть, либо сжать; если треугольник общего вида, то не следует изображать его равнобедренным или правильным и т.д. Не вполне соответствующий условию задачи чертеж может вызвать ложные ходы в процессе решения и привести к неверному решению.

3. Нередко удобнее строить чертеж на основе свойств указанных в условии объектов. При этом полезно выделить какое-то одно из свойств искомого объекта, временно не принимать во внимание остальные и поставить вопрос «Где может быть расположен искомый объект?» или «Среди каких объектов искать требуемый?» и т.п.

4. Изображать равнобедренный треугольник лучше путем применения следующей процедуры:

1) рисуем горизонтально прямую, отмечаем на ней точку D, влево и вправо от нее откладываем равные отрезки; получаем вершины A, B нижнего основания (рис. 1,*а*);

2) из точки D проводим вертикальную прямую и на ней, исходя из данных задачи, характеризующих треугольник, отмечаем точку C, служащую вершиной треугольника (рис. 1,*б*);

3) точку C соединяем с точками A и B; получаем равнобедренный треугольник (рис. 1,*в*).

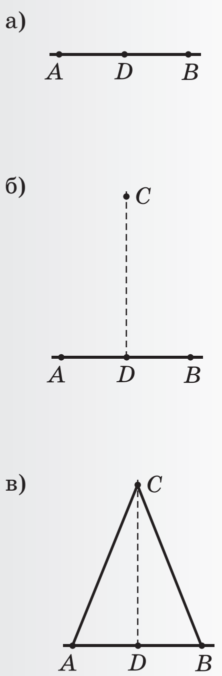


Рис. 1

Такая процедура изображения равнобедренного треугольника помогает учесть особенности данных и избежать провокационности.

5. Изображение прямоугольного треугольника при отсутствии клеточной разметки на бумаге удобно начинать с изображения

К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru (Шаблоны, литература.)

(полу)окружности, затем следует нарисовать ее диаметр, выбрать точку на окружности и соединить ее с концами диаметра (рис. 2). Затем окружность можно устранить, но обычно она лишней не оказывается.

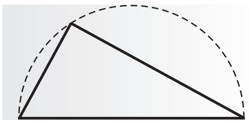


Рис. 2

6. Привлечение окружности удобно при изображении двух высот в треугольнике. Нарисовав полуокружность и ее диаметр, можно взять точку не на окружности и через нее и концы диаметра провести прямые. Точки пересечения проведенных прямых с окружностью суть основания высот (рис. 3). Варьируя точку, можно получить соответствие чертежа самым разнообразным особенностям.

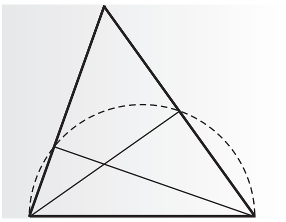


Рис. 3

7. Для изображения биссектрисы треугольника (допустим, из вершины A к стороне BC на рис. 4) удобно использовать описанную около него окружность, с которой и надо начать построение чертежа: достаточно разделить пополам дугу, стягивающую сторону BC, соединить эту точку с противолежащей вершиной A, и пересечение полученного отрезка со стороной BC даст конец биссектрисы. Разделить дугу на две равные части можно «на глазок», а можно отметить середину отрезка BC (см. рис. 4) и провести из нее перпендикуляр до пересечения с окружностью.

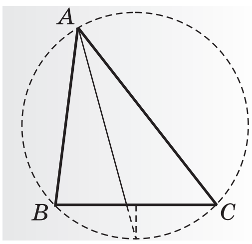


Рис. 4

8. Если в задаче участвует описанная около треугольника окружность, начинать изображение лучше с окружности.

Если говорится об окружности, вписанной в треугольник, то нередко изображать ее не нужно — достаточно отметить положение центра и провести радиусы в точки касания.

9. Изображение фигур, в которых участвуют параллельные прямые, эффективнее начать с проведения двух достаточно длинных горизонтальных прямых, на которых будут располагаться основания трапеции или две стороны параллелограмма. Затем изобразить другие детали, учитывая особенности условия задачи.

10. Изображение трапеции бывает удобно начинать с треугольника, а именно, нарисовав треугольник, провести параллельно его основанию прямую, отрезав тем самым часть треугольника и оставив трапецию. Такой способ позволяет учесть имеющуюся в условии информацию. Например, если сказано, что углы при основании трапеции в сумме дают 90°, это означает, что начинать надо с прямоугольного треугольника.

11. Изображение ромба лучше начинать с двух взаимно перпендикулярных прямых, на которых от точки их пересечения отложить в разные стороны две пары равных между собой отрезков и построить ромб исходя из его свойства, состоящего в том, что диагонали перпендикулярны и делятся точкой пересечения пополам.

Приведенный набор наблюдений, способствующих получению хорошего чертежа, разумеется, не претендует на полноту и отражает опыт автора. Читатель может дополнить или модифицировать его и использовать в повседневной работе.

Рассмотрим несколько примеров, показывающих процесс построения чертежа на основе свойств, при этом в формулировках задач ограничимся только сведениями, относящимися к чертежу. Условия примеров взяты из [2–4].

Пример 1. В треугольнике ABC медиана AK, биссектриса BL и высота CM пересекаются в одной точке P, причем $CP : PM = 3 : 2$.

Построение чертежа будет основано на указанных в условии свойствах отрезков: высота, биссектриса, медиана. Проще всего нарисовать медиану — для этого соответствующий отрезок надо разделить пополам, что нетрудно. Труднее изобразить биссектрису и высоту. Начнем с биссектрисы. Нарисуем горизонтальную прямую, возьмем на ней точку B (рис. 5,*а*), проведем луч с вершиной в этой точке (рис. 5,*б*) и от этого луча отложим угол, равный углу между проведенным лучом и одним из лучей, на которые прямая оказалась разбитой точкой B (рис. 5,*в*). Получилась заготовка для биссектрисы. Заметим, что если первоначальный угол взять таким, что его удвоение приведет к тупому углу, то условие задачи не может быть выполнено, ибо высота расположится за пределами треугольника.

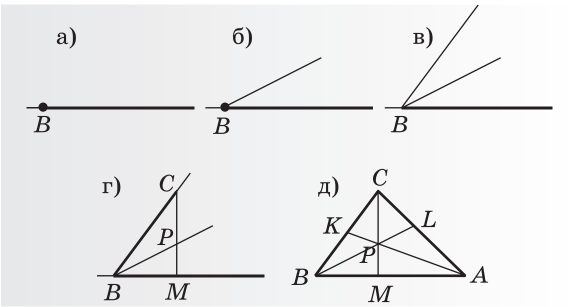


Рис. 5

На верхнем луче возьмем точку C с таким расчетом, чтобы проведенный из нее перпендикуляр к горизонтальной прямой разбивался точкой P пересечения с биссектрисой на отрезки, относящиеся как 3 : 2 (рис. 5,*г*). Готова высота. Осталась медиана.

Из середины K отрезка BC проведем луч KP и обозначим через A точку его пересечения с лучом BM. Чертеж готов (рис. 5,*д*).

Пример 2. В параллелограмме $ABCD$ биссектрисы углов A и D пересекают сторону BC в точках M и K соответственно, а отрезки AM и DK пересекаются в точке P, причем $AP : PM = 3 : 2$.

Поскольку в условии есть отрезки, обладающие сильным свойством, а именно биссектрисы углов параллелограмма, начнем чертеж с учета этого свойства. Изобразим заготовку для параллелограмма, составив ее из нижнего основания и лучей, на которых расположатся боковые стороны, и проведем биссектрисы углов A и D (рис. 6,*а*).

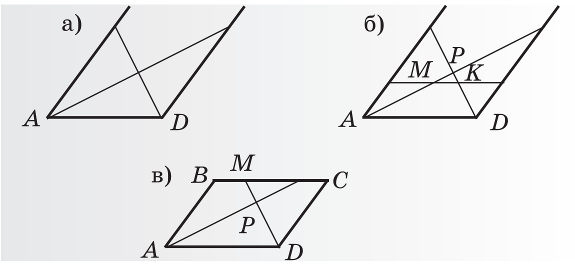


Рис. 6

Проведем какую-либо прямую параллельно AD и будем изучать, даст ли она параллелограмм, удовлетворяющий условиям задачи. Если прямая расположена невысоко над AD (рис. 6,*б*), то биссектрисы пересекаются вне параллелограмма, а тогда отрезки AM и DK (именно отрезки, а не лучи) не пересекаются, значит, прямая на такой высоте правдоподобного чертежа не даст. Надо поднять прямую настолько, чтобы она оказалась выше точки P пересечения биссектрис (рис. 6,*в*). Тогда отрезки AM и DK пересекаются, и чертеж согласован с условием.

Пример 3. На окружности радиусом 20 с центром в вершине C треугольника ABC взята точка P. Известно, что $AB = 25$, $AC = 15$, $BC = 20$, а треугольники APC и BPC равновелики.

Можно заметить, что треугольник ABC прямоугольный, вершина прямого угла расположена в центре окружности, а радиус совпадает с одним из катетов. Учитывая результаты наблюдений, начнем подготовку чертежа (рис. 7).

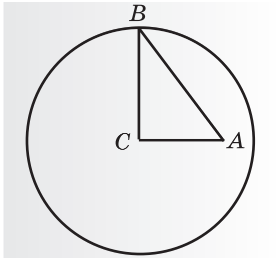


Рис. 7

Надо определиться с положением точки P на окружности. Отвлекаясь от конкретной фигуры, разберемся в общем случае: каковы типичные ситуации, в которых получаются равновеликие треугольники? Заметим, что у наших треугольников есть общая сторона, это CP. Возьмем прямую, на которой лежит эта сторона. Если треугольники с основанием CP и вершинами A и B равновеликие, то эти вершины лежат либо на одной прямой, параллельной CP, либо одна из них — на прямой, параллельной CP, а другая — на другой прямой, параллельной CP и отстоящей от нее на таком же расстоянии, как и первая прямая (рис. 8, *а* и *б*).

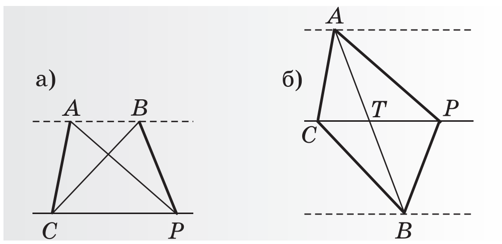


Рис. 8

В первом случае, когда вершины A и B лежат на одной прямой, надо через точку C провести прямую, параллельную AB, и точку P брать на этой прямой.

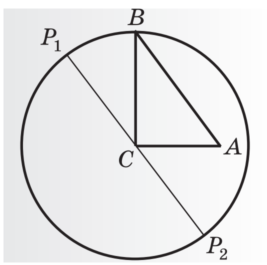


Рис. 9

В условии сказано, что точка P должна лежать на окружности, стало быть, это одна из двух точек пересечения прямой, проходящей через C и параллельной AB, с окружностью (рис. 9). Во втором случае, когда вершины A и B лежат на разных прямых, заметим, что ввиду одинаковой удаленности точек A и B от прямой CP отрезок AB пересекается с прямой CP в середине (см. рис. 8,*б*). Это наблюдение указывает на то, что точка P должна быть на прямой, проходящей через точку C и середину T отрезка AB. Значит, еще два варианта расположения точки P — это пересечения прямой CT с окружностью (рис. 10).

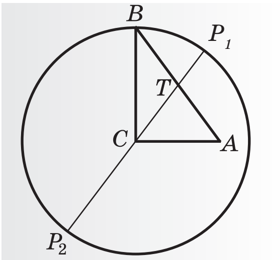


Рис. 10

Пример 4. В треугольнике ABC биссектриса угла BAC равна a. Окружность, построенная на этой биссектрисе как на диаметре, делит стороны AB и AC в отношении $2 : 1$ и $1 : 1$, считая от точки A.

Как нередко бывает в задачах с окружностью, начнем с окружности. Изобразим ее диаметр. Один из концов этого диаметра будет вершиной A треугольника. Подумаем, как отложить от диаметра в разные стороны равные углы с вершиной A, чтобы этот диаметр оказался биссектрисой. Можно взять транспортир и с его помощью отложить равные углы. Но транспортира под рукой не оказалось, поэтому поступим так. На диаметре возьмем точку и через нее проведем прямую, перпендикулярную диаметру (это легко сделать и без инструменов). Получим точки E, F на окружности, и если через один из концов диаметра и каждую из этих точек провести по лучу, то получим угол, для которого построенный диаметр является биссектрисой (рис. 11,*а*).

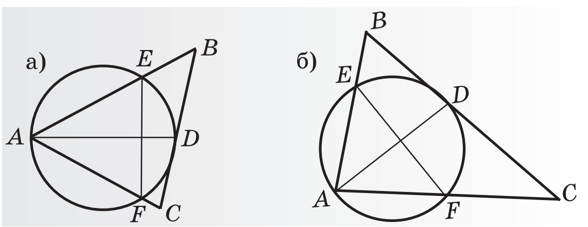


Рис. 11

На одном из лучей от точки E его пересечения с окружностью отложим отрезок длиной, равной половине длины отрезка AE. Конец этого отрезка будет второй из вершин треугольника. Через точку B и конец диаметра проведем прямую. Точка ее пересечения с лучом AF является вершиной C треугольника (см. рис. 11,*а*). Если на чертеже сразу получилось так, что $AF = FC$, то построение рисунка завершено. Однако могло не повезти, как нам на рис. 11,*а*, и тогда придется рисунок изменять, перемещая выбираемую на AD точку и повторяя процедуру до тех пор, пока не получится равенство $AF = FC$. Нетрудно понять, что если мы подвинем влево взятую в начале построения перпендикулярную диаметру прямую, то в итоге отрезок AF немного уменьшится, а отрезок FC довольно существенно увеличится. Постепенно перемещая точку на диаметре и проводя прикидки, добьемся более или менее адекватного задаче чертежа (рис. 11,*б*).

Пример 5. Сторона прямоугольника $ABCD$ касается некоторой окружности в точке M. Продолжение стороны AD пересекает окружность в точках P и Q, причем точка P лежит между точками D и Q. Прямая BC касается окружности, а точка Q лежит на прямой BM.

Начнем с окружности и прямой, касающейся ее в некоторой точке M (рис. 12,*а*).

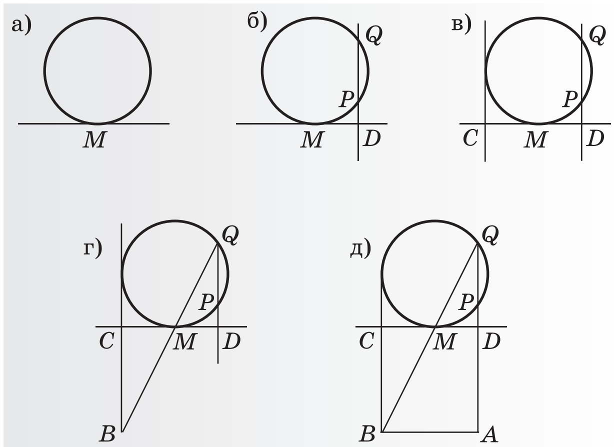


Рис. 12

Точки C и D расположатся по разные стороны от M. Продолжая изучение условия, находим фразу «продолжение стороны AD пересекает окружность в точках P и Q, причем точка P лежит между точками D и Q», в которой сообщается, что точку D надо расположить так, чтобы прямая AD пересекала окружность (рис. 12,*б*).

Продолжая читать условие, находим, что прямая BC должна касаться окружности, и это определяет положение точки C (рис. 12,*в*). В завершение формулировки говорится, что «точка Q лежит на прямой BM». Эта информация определяет положение точки B: это точка пересечения прямой QM и касательной к окружности, проходящей через C (рис. 12,*г*). Осталось учесть то обстоятельство, что $ABCD$ — прямоугольник, и мы получаем точку A (рис. 12,*д*). Чертеж готов.

Пример 6. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC из вершин B и D к диагонали AC проведены перпендикуляры BH и DK, причем основания перпендикуляров лежат на отрезке AC. Известно, что $AH = 4$, $AK = 6$, $AC = 7$ и $AB : CD = 2$.

В условии задачи много свойств, которые желательно учесть. Это перпендикулярность соответствующих отрезков, деление диагонали основаниями перпендикуляров в отношении $4 : 2 : 1$, что вытекает из числовых данных, и отношение боковых сторон. Как обеспечить каждое из этих свойств?

Пропорциональность можно учесть с помощью теоремы Фалеса: достаточно взять прямую, на которой лежит основание AD, отложить на ней в соответствующей пропорции отрезки AE, ED, DF и провести из концов этих отрезков перпендикуляры к прямой, на которой расположится диагональ. Получим деление диагонали в требуемой пропорции (рис. 13,*а*).

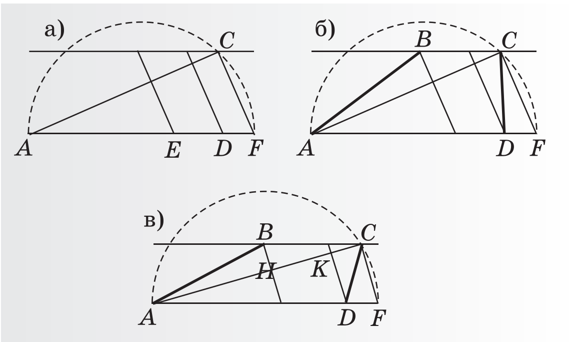


Рис. 13

Обеспечение перпендикулярности обычно связано с окружностью, и мы этим воспользуемся. Изобразим окружность, как на рисунке 13,*а*, возьмем на ней точку и соединим ее с концами A и F диаметра окружности. Тем самым получим прямоугольный треугольник, а также заготовку для проведения перпендикуляров к диагонали AC (см. рис. 13,*а*). Проведя перпендикуляры к AC из точек D и E, получим деление диагонали и вершину B трапеции (рис. 13,*б*). Свойства перпендикулярности и пропорциональности выполнены.

Осталось обеспечить пропорциональность сторон. Если удача нам сопутствовала и отношение $AB : CD = 2$ правдоподобно, на этом можно остановиться. Если же хочется достичь большего правдоподобия, будем перемещать по окружности точку C, перемещая соответственно все детали, и ясно, что если точку сместить вниз, то отношение увеличится, если вверх — уменьшится. В результате можно получить чертеж, в достаточной мере отвечающий условиям задачи (рис. 13,*в*).

Пример 7. Внутри ромба $ABCD$ со стороной a и углом BAD, равным $60°$, выбрана точка M так, что площади треугольников ADM, ABM, BCM и CDM пропорциональны числам 1, 2, 4 и 3 соответственно.

Изобразим две перпендикулярные прямые и возьмем на них четыре точки так, чтобы были равны соответствующие расстояния и натянутый на эти точки ромб имел угол примерно в $60°$ (рис. 14,*а*).

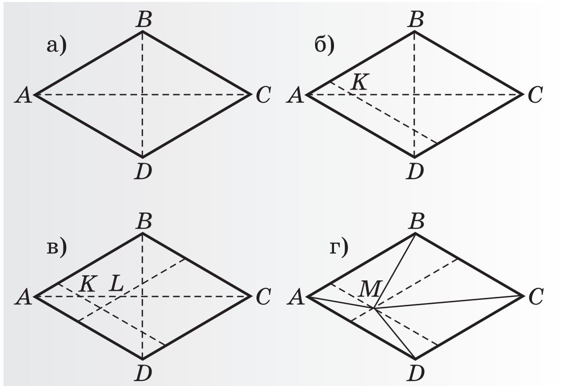


Рис. 14

Как обработать отношение площадей? Поскольку основания у всех указанных в условии треугольников одинаковы, отношение площадей равно отношению высот треугольников. Стало быть, можно разделить в подходящем отношении отрезок, перпендикулярный противоположным прямым, и через полученную точку провести прямую, параллельную этим прямым. Нетрудно понять, что можно обойтись и без перпендикуляра, а именно достаточно взять какой-либо отрезок, соединяющий противолежащие прямые, например, диагональ AC для прямых AD и BC, и использовать ее для деления на соответствующие доли. Проделав намеченное, получим точку K на AC такую, что $AK : KC = 1 : 4$. Проведем через K прямую, параллельную AD и BC. Точка M должна располагаться на этой прямой (рис. 14,*б*).

Поступая аналогично для пары прямых AB и CD, а именно разделив тот же отрезок AC точкой L в отношении $2 : 3$ и проведя через нее прямую, параллельную AB и CD, находим, что точка M должна лежать на этой прямой. Следовательно, это точка пересечения построенных прямых (рис. 14,*в*).

Получив точку M, можно завершить построение чертежа (рис. 14,*г*).

Можно привести много примеров построения чертежа на основе свойств, и это подтвердится в дальнейших лекциях. Здесь ограничимся приведенным набором примеров и предложим читателю построить чертежи на основе свойств в интересующих его задачах.

Н. АНДРЕЕВ, С. КОНОВАЛОВ,
Н. ПАНЮТИН,
г. Москва

ПОПУЛЯРИЗИРУЯ МАТЕМАТИКУ

Расширенная электронная версия сборника находится на сайте «Математические этюды» по адресу http://etudes.ru. Электронная версия будет развиваться, пополняясь дополнительной информацией и ссылками на другие источники по темам, представленным в книге.

Математическая составляющая / Ред.-сост. Н.Н. Андреев, С.П. Коновалов, Н.М. Панютин; худож. Р.А. Кокшаров. — М.: Фонд «Математические этюды», 2015. — 151 с.: ил.

В сюжетах, собранных в книге, рассказывается как о математической «составляющей» крупнейших достижений цивилизации, так и о математической «начинке» привычных, каждодневных вещей. Все авторы — известные ученые.

То, что математика является и языком, и главным инструментом естественных наук и техники, читателю известно. Математика играет эту роль и в физике, от теории до приложений, и в осуществлении космических полетов, и в укрощении атомной энергии, и в жизни компьютерного мира. Менее очевидна для широкой публики важность математики в таких дисциплинах, как медицина или лингвистика.

Но даже читатель, догадывающийся о значительной математической составляющей в различных сферах деятельности, не всегда может оценить степень зависимости этих областей от математики. Основная причина — сложность применяемых математических инструментов, часто специально разработанных для конкретного приложения. И признавая на словах роль математики, люди редко задумываются над математической начинкой окружающих нас предметов и явлений, а иногда и просто не замечают ее.

Существующие прикладные задачи являются постоянным и требовательным заказчиком, ставящим все новые и новые проблемы перед самой математикой. С другой стороны, прогресс в математике открывает новые возможности, порождает такие технические задачи и решения, о которых до того нельзя было и подозревать. А бывает и так, что результаты теоретической математики ждут своего практического воплощения десятилетиями, а потом выстреливают неожиданно и с невероятной эффективностью. Ряд примеров такого двустороннего взаимодействия читатель найдет в этой книге.

Книга состоит из трех частей, каждая имеет свой цветовой код.

В первой (синей) части собраны короткие тексты, демонстрирующие жизненную необходимость для человечества математических исследований.

Во второй (зеленой) части содержатся математические «проявления» в повседневной жизни. Большинство сюжетов — из математического фольклора, они приводятся в обработке составителей сборника.

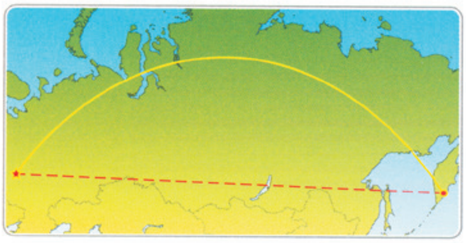
В третьей (красной) части собраны тексты, допускающие, по сравнению с синей и зеленой частями, более сложные математические детали или больший объем. Этот раздел в большей степени, чем другие, рассчитан на читателя, заинтересованного в прояснении сути описанных математических механизмов.

Особенность книги в том, что первая и третья части содержат статьи, написанные российскими математиками, результаты которых определяют мировой уровень математики. Для читающей публики получение научной информации из первых рук — редкая удача.

Появление известных математиков как авторов на страницах этой книги объясняется тем, что она создавалась в Математическом институте имени В.А. Стеклова РАН — ведущем научном центре страны.

Траектория полёта самолёта

Если проследить по карте маршрут полета самолета из Москвы в Петропавловск-Камчатский, то можно заметить, что во время полета самолет забирается (по широте) высоко вверх. Кажется, что длина такого пути больше длины прямого пути, соединяющего на карте эти два города (координаты по широте близки: 55°45′21″ с.ш. и 53°1′ с.ш.).



Странно, ведь лишние сотни километров пути самолета — дорогое удовольствие. Но и сервис «Яндекс. Карты» на запрос о расстоянии между этими городами тоже выдает выпуклую вверх кривую.

Все дело в том, что понятие кратчайшего расстояния неразрывно связано с той поверхностью, по которой оно измеряется. Любая плоская карта представляет земную поверхность с искажениями. А рассмотрение соответствующих траекторий на глобусе позволит во всем разобраться.

Чтобы найти кратчайшее расстояние между двумя точками на сфере, необходимо провести через них «большую окружность». Так называют окружность, образованную пересечением сферы с плоскостью, проходящей через центр сферы и выбранные точки. Меньшая из двух дуг большой окружности, соединяющей точки, является кратчайшим расстоянием на сфере между ними. В математике линию, реализующую минимальное расстояние между двумя точками на рассматриваемой поверхности, называют геодезической.

Все остальные маршруты, соединяющие Москву и Петропавловск-Камчатский, в том числе тот, который казался прямым на карте, на глобусе (и в реальности!) будут длиннее этой дуги. Итак, кратчайшая траектория полета самолета определяется дугой большой окружности.

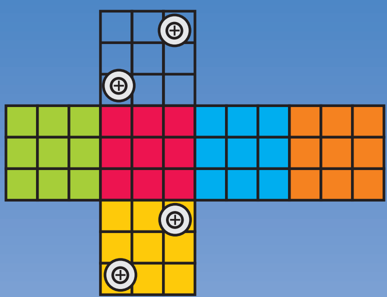
48

Приложения: мир вокруг нас, геодезия
Математика: сфера, дуга окружности, геодезическая

Н. АВИЛОВ,
avilow@rambler.ru,
ст. Егорлыкская, Ростовская обл.

КУБИК РУБИКА С ШАЙБАМИ

Ведущий рубрики — Николай Иванович Авилов — на фоне своей коллекции головоломок



Все знают, что кубик Рубика непростая головоломка, но и ее можно усложнить, прикрепив на грани маленьких кубиков несколько шайб. Это легко сделать, но трудно решить.

Шайбы при вращении цепляются за соседние кубики и не дают возможности повернуть слой в одном направлении, но позволяют вращать его в противоположную сторону. Каждая шайба срабатывает как «собачка» (это такое устройство, ограничивающее движение в определенном направлении). Таким образом, шайба на угловом кубике ограничивает решающего, так как некоторые повороты становятся невозможными. Более того, могут возникнуть ситуации, когда две шайбы блокируют любое вращение слоя.

Внешний вид головоломки показан на фото слева, ниже на развертке кубика приведена схема крепления четырех шайб к угловым кубикам.

Придумал эту модификацию кубика Рубика Владимир Ярославский, математик-программист из Санкт-Петербурга, кандидат физико-математических наук. В области компьютерных наук он известен как автор нового метода сортировки чисел: Dual-Pivot Quicksort — двухопорная быстрая сортировка, использующаяся на платформе Java и на мобильных телефонах с ОС Android.

Головоломки — это его хобби со школьной скамьи. Владимир собрал большую коллекцию головоломок, придумал серию магнитных головоломок и разработал оригинальную технологию их изготовления. Кубик с шайбами — одно из его творений. В августе 2015 года с этим кубиком Ярославский впервые участвовал в конкурсе «Puzzle Design Competition» — это неотъемлемая часть ежегодной встречи IPP (International Puzzle Party). Изобретатели головоломок присылают свои разработки на конкурс, а авторитетные знатоки головоломок выбирают лучшие. В международном сообществе встречи IPP и конкурс «Puzzle Design Competition» самые ожидаемые мероприятия года.

Интересно узнать, как Владимир придумал свою модификацию кубика Рубика, ведь новые головоломки не рождаются на пустом месте. Ранее Ярославский придумал новый вариант головоломки «Пятнашки», приклеив к фишкам монетки чуть большего размера. Это создало преграду для перемещения фишек, и сборка головоломки стала значительно труднее.

Придумав такие пятнашки, он решил прикрепить монетки на кубик Рубика, чтобы они ограничивали вращение его слоев. Для надежности крепления монетки заменил шайбами. Так получился кубик Рубика с шайбами, как оказалось, очень трудная головоломка.

Разгадать секреты головоломки помог Владимир Виногоров, офицер Российской армии. Он служит в Санкт-Петербурге, на досуге занимается скоростной сборкой кубика Рубика, сборкой кубика вслепую. Виногоров является экспертом в этом деле и умеет находить решения очень сложных головоломок.

К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru (Решение головоломки.)

Порядок поворота орнамента «елочка» равен 2, орнаментальная плоскость переходит в себя при повороте на 180°. Осевая симметрия здесь отсутствует. Однако есть скользящее отражение: базовый элемент отражается относительно прямой и сдвигается вдоль этой же прямой на свою длину.

<table>
<tr><td colspan="4">Порядок поворота равен 2</td></tr>
<tr><td colspan="4">Есть ли осевая симметрия?</td></tr>
<tr><td colspan="2">Да</td><td colspan="2">Нет</td></tr>
<tr><td colspan="2">Есть ли скользящая симметрия относительно оси, которая не является осью симметрии?</td><td colspan="2">Есть ли скользящая симметрия?</td></tr>
<tr><td>Да</td><td>Нет</td><td>Да</td><td>Нет</td></tr>
<tr><td>cm</td><td>pm</td><td>pgg</td><td>p2</td></tr>
</table>

http://www.mi.sanu.ac.rs/vismath/bianco2011mart/BL.pdf