9 класс

1. Школьник Вася возвёл в квадрат некоторое натуральное число. Могла ли сумма цифр получившегося числа равняться 2013?
2. В Городе рыцарей живут только рыцари, которые всегда говорят правду, а в Городе лжецов – только лжецы, которые всегда лгут. Однажды на банкете за круглым столом собрались 100 знакомых между собой жителей этих городов. Официант подошёл к каждому из сидящих за столом и задал вопрос: «Из каких городов твои соседи за столом?». 99 раз он услышал ответ «Мои соседи из разных городов» и один раз – «Мои соседи из одного города». Сколько лжецов было за столом?
3. Докажите, что если прямые с уравнениями $y = px + q$, $y = qx + r$ и $y = rx + p$ имеют общую точку, то они совпадают (p, q, r – действительные числа).
4. Дана двухзвенная ломаная, длина которой меньше 2. Докажите, что эту ломаную можно целиком поместить в некоторый прямоугольник площади 1.
5. В треугольнике ABC проведены биссектрисы внутренних углов, пересекающиеся в точке I . Докажите, что центры окружностей, описанных около треугольников ABI , BCI и CAI , лежат на окружности, описанной около треугольника ABC .