Задания муниципального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике, 2013 г.

9 класс

1. Школьник Вася возвёл в квадрат некоторое натуральное число. Могла ли сумма цифр получившегося числа равняться 2013?

Ответ: Нет.

Решение. Пусть Вася возводил в квадрат число n. Если сумма цифр числа n^2 равна 2013, то n^2 делится на 3, поскольку 2013 делится на 3. Тогда n также делится на 3, следовательно, n^2 делится на 9. Но сумма его цифр 2013 не делится на 9, получаем противоречие.

2. В Городе рыцарей живут только рыцари, которые всегда говорят правду, а в Городе лжецов – только лжецы, которые всегда лгут. Однажды на банкете за круглым столом собрались 100 знакомых между собой жителей этих городов. Официант подошёл к каждому из сидящих за столом и задал вопрос: «Из каких городов твои соседи за столом?». 99 раз он услышал ответ «Мои соседи из разных городов» и один раз – «Мои соседи из одного города». Сколько лжецов было за столом?

Ответ: 33.

Решение. Пронумеруем сидящих за столом, присвоив номер 1 тому, кто сказал, что его соседи из одного города, и далее по часовой стрелке. Таким образом, соседями №1 будут №2 и №100, соседями №2 будут №1 и №3 и т.д. Рассмотрим 3 случая.
1) №1 – рыцарь и его соседи тоже рыцари. Тогда №2 – рыцарь и его соседи действительно из разных городов, значит, №3 – лжец. №3 сказал, что его соседи из разных городов, и солгал, значит, №4 – рыцарь. №4 сказал, что его соседи из разных городов, и это правда, значит, №5 – рыцарь. №5 сказал, что его соседи из разных городов, и это правда, значит, №6 – лжец. Рассуждая таким образом, получаем, что все сидящие за столом с номерами, кратными трём, лжецы. Условие задачи при этом выполняется, и в этом случае лжецов будет 33.
2) №1 – рыцарь, а его соседи №100 и №2 лжецы. №2 сказал, что его соседи из разных городов, и солгал, значит, №3 – рыцарь. №3 сказал, что его соседи из разных городов, и это правда, значит, №4 – рыцарь. №4 сказал, что его соседи из разных городов, и это правда, значит, №5 – лжец. Рассуждая таким образом, получаем, что все сидящие за столом с номерами вида $3n-1$ – лжецы, а остальные – рыцари. Но это противоречит тому, что №100 – лжец. Следовательно, этот случай невозможен.
3) №1 – лжец, а его соседи – рыцарь и лжец. Пусть для определённости №100 – рыцарь, а №2 – лжец. №2 сказал, что его соседи из разных городов и это ложь, значит, №3 – тоже лжец. Рассуждая таким образом, получаем, что все сидящие за столом – лжецы, а это противоречит тому, что №100 – рыцарь. Следовательно, этот случай невозможен.
Критерии. Рассмотрен только случай 1 и получен верный ответ – 3 балла; если рассмотрен случай 1, получен верный ответ и доказано, что ещё один из двух случаев невозможен (причём оставшийся случай не рассмотрен), - 5 баллов

3. Докажите, что если прямые с уравнениями $y = px + q$, $y = qx + r$ и $y = rx + p$ имеют общую точку, то они совпадают (p, q, r – действительные числа).

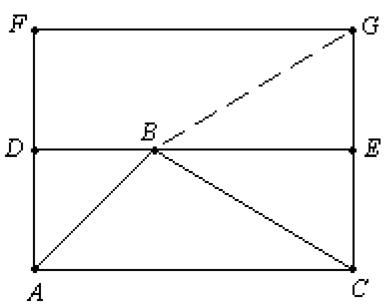
Решение. Предположим, что нашлись три прямые с указанными выше уравнениями, из которых хотя бы две не совпадают, например, первая и вторая. Тогда в их уравнениях какие-то коэффициенты при одинаковых степенях x различны, т.е. $p \neq q$ или $q \neq r$. Поэтому из коэффициентов p, q и r можно выбрать такой, который или больше всех остальных, или меньше всех остальных. Без ограничения общности можно считать, что этот коэффициент – r. Найдём абсциссы точек пересечения первой и второй прямой, а также первой и третьей прямой. Решая систему из первого и второго уравнений, получаем, что $px + q = qx + r$. Если бы коэффициенты p и q совпадали, то для существования общей точки у первой и второй прямых было бы необходимо, чтобы совпадали q и r, т.е. все коэффициенты были бы равны. Следовательно, $p \neq q$ и $x = \frac{r-q}{p-q}$. Аналогично получаем, что $p \neq r$ и $x = \frac{q-p}{r-p}$. Поскольку x в последних двух уравнениях – это одно и то же число, то $\frac{r-q}{p-q} = \frac{q-p}{r-p}$, откуда получаем, что $(r-q)(r-p) + (p-q)^2 = 0$. Первое слагаемое в левой части положительно (поскольку коэффициент r либо больше p и q, либо меньше p и q), а второе слагаемое неотрицательное, поэтому их сумма должна быть положительной. Получаем противоречие.

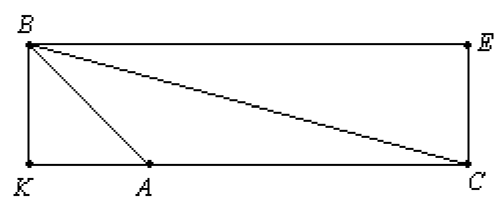
Замечание. Другой способ доказательства – умножить левую часть последнего уравнения на 2 и, сгруппировав слагаемые, привести его к виду $(p-q)^2 + (r-p)^2 + (q-r)^2 = 0$. Равенство нулю левой части возможно лишь при равенстве нулю каждого из слагаемых, т.е. при условии $p = q = r$.

Критерии. Если доказательство в целом верное, но при нахождении решения системы линейных уравнений отсутствует обоснование того, что знаменатель не равен нулю, – 5 баллов.

4. Дана двухзвенная ломаная, длина которой меньше 2. Докажите, что эту ломаную можно целиком поместить в некоторый прямоугольник площади 1.

Решение. Пусть ABC — наша ломаная. Разместим её на плоскости так, чтобы прямая AC была горизонтальной; из соображений симметрии можно считать, что B лежит выше прямой AC (или на самой этой прямой). Рассмотрим теперь два случая.





1) Предположим, что проекция B на прямую AC принадлежит отрезку AC. Построим прямоугольник $ADEC$ так, чтобы точка B лежала на стороне DE, и прямоугольник $DFGE$, равный $ADEC$. Площадь прямоугольника $ADEC$ равна ab, где $a = AC$ и $b = EC$. Имеем

$$2 > AB + BC = AB + BG \geq AG = \sqrt{AC^2 + GC^2} = \sqrt{a^2 + 4b^2} = \sqrt{(a-2b)^2 + 4ab} \geq \sqrt{4ab},$$

откуда $S_{ADEC} = ab < 1$, что и требовалось.

2) Пусть K (проекция точки B на прямую AC) не принадлежит отрезку AC. Будем для определённости считать, что точка A лежит между K и C. Имеем $2 > AB + BC > KB + BC$.

Поэтому можно применить к ломаной KBC рассуждения из случая 1), что приведёт нас к неравенству $S_{KBEC} < 1$.

Критерии. Если рассмотрен только случай, когда проекция точки B на прямую AC принадлежит отрезку AC, – 5 баллов.

5. В треугольнике ABC проведены биссектрисы внутренних углов, пересекающиеся в точке I. Докажите, что центры окружностей, описанных около треугольников ABI, BCI и CAI, лежат на окружности, описанной около треугольника ABC.

Решение. Пусть $\angle BAC = 2\alpha$, $\angle ABC = 2\beta$, $\angle ACB = 2\gamma$. Обозначим точки пересечения биссектрис углов A, B и C с окружностью, описанной около треугольника ABC, через A_1, B_1 и C_1 соответственно. Покажем, что A_1 – центр окружности, описанной около треугольника BCI. $\angle CIA_1$ – внешний угол треугольника AIC, следовательно, $\angle CIA_1 = \alpha + \gamma$. $\angle ICB = \gamma$, $\angle BCA_1 = \angle BAA_1 = \alpha$ (как опирающиеся на одну дугу BA_1), следовательно, $\angle ICA_1 = \alpha + \gamma = \angle CIA_1$, поэтому $IA_1 = CA_1$. Рассуждая аналогично, получаем, что $IA_1 = BA_1$. Следовательно, точки C, I, B лежат на окружности с центром в точке A_1. Аналогично доказывается, что B_1 и C_1 – центры окружностей, описанных около треугольников ACI и ABI соответственно.