**Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников 2012-2013**

**Задачи для 9-х классов**

**Задача 1.**  Квадратный трёхчлен , где , , — целые числа и — нечётное число, имеет целые корни. Может ли быть нечётным числом? Ответ обоснуйте.

**Ответ:** нет, не может.

**Решение.** Пусть и – корни . По теореме Виета имеем , т.е. . Числа , и являются целыми; — нечётное число. Следовательно, числа , и также нечётные. Кроме того, по теореме Виета мы можем записать ; таким образом, . Следовательно, — чётное число. Тогда есть сумма двух нечётных и одного чётного числа, т.е. чётное число.

**Задача 2.**  Дан параллелограмм . На отрезке выбрана точка так, что . Пусть – точка пересечения и . Докажите, что .

**Решение.** Поскольку прямые и параллельны, то треугольники и подобны по двум углам. Отсюда следует, что , т.е. , следовательно, .

**Задача 3.** Рассмотрим четвёрки чисел , обладающие тем свойством, что число 0 появляется среди чисел четвёрки ровно раз, число 1 — ровно раз, число 2 — ровно раз, число 3 — ровно раз. Сколько всего существует различных четвёрок с таким свойством?

**Ответ:** две, (1, 2, 1, 0) и (2, 0, 2, 0).

**Решение.** Ясно, что .

Если хотя бы одно из чисел равно 4, то все четыре числа четвёрки совпадают, т.е. все они равны 4. Легко видеть, что четвёрка (4, 4, 4, 4) не удовлетворяет условиям задачи. Итак, все принадлежат множеству , а значит, .

Пусть хотя бы одно из чисел равно 3. Этим числом не может быть , поскольку три тройки уже дадут сумму, превышающую 3. Если же и , то в четвёрке есть одно число, равное 3, и три числа, равных . Но тогда их сумма не может равняться 4 – вновь получили противоречие.

Как мы показали, все принадлежат множеству . Следовательно, . Это означает, что в четвёрке есть не менее одного нуля (но не более двух). С учётом равенства остаётся проверить наборы (1, 1, 2, 0), (1, 2, 1, 0), (2, 0, 2, 0), (2, 1, 1, 0) и (2, 2, 0, 0). Из них условиям задачи удовлетворяют лишь (1, 2, 1, 0) и (2, 0, 2, 0).

**Критерии.** Правильно найдена одна четвёрка без достаточного обоснования (при условии, что в ответе не приведено неправильных четвёрок) – 1 балл. Правильно найдены две четвёрки без достаточного обоснования (при условии, что в ответе не приведено неправильных четвёрок) – 2 балла.

**Задача 4.** Докажите неравенство для всех .

**Решение.** 1-й способ. Из условия следует, что все знаменатели положительны. Умножим обе части неравенства на произведение этих знаменателей, получим

,

т. е. , а это равносильно неравенству . Последнее неравенство верное, поскольку первое слагаемое неотрицательно в силу того, что , а второе слагаемое является квадратом действительного числа. Исходное неравенство доказано.

2-й способ. Из известного неравенства , которое верно для всех положительных и , следует, что . Теперь осталось доказать, что , а это следует из того, что .

**Критерии.** Не указано, что все знаменатели положительные – минус 1 балл. Не указано, что все переходы равносильны – минус 1 балл.

**Задача 5.** Имеется 5 монет, среди которых есть по крайней мере одна настоящая и по крайней мере одна фальшивая. Каждая настоящая монета весит 2 грамма, каждая фальшивая —  
1 грамм. Как за три взвешивания на чашечных весах без гирь определить, сколько среди данных пяти монет имеется настоящих (1, 2, 3 или 4)?

**Решение.** Имеющиеся монеты (а также их веса) мы будем обозначать буквами , , , и . Первым взвешиванием сравним и . Возможны два принципиально различных исхода: равенство суммарных весов и неравенство.

1) Пусть оказалось, что . Заметим, что монеты , и не могут все три иметь одинаковый вес, так как в этом случае все пять монет оказались бы одновременно фальшивыми или настоящими. Поэтому достаточно вторым и третьим взвешиваниями сравнить с монетами и соответственно. После этого будут известны веса , и , а в паре фальшивых монет столько же, сколько в паре .

2) Пусть справедливо неравенство (другое неравенство рассматривается аналогично). Тогда вторым взвешиванием сравним и .

2a) Пусть . Тогда монеты и – настоящие, а монеты и — фальшивые, т.е. третье взвешивание уже не нужно.

2b) Пусть . Третьим взвешиванием сравниваем и . Если , то и — настоящие, а в тройке ровно две фальшивых монеты. Если же , то ясно, что в паре одна фальшивая монета, а в тройке – все фальшивые.

2c) Пусть . Тогда — настоящая монета. Третьим взвешиванием мы сравниваем и . Если , то монеты и — настоящие, а в паре есть ровно одна фальшивая. Если же выполнено , то в паре есть одна фальшивая монета, а в паре обе монеты фальшивые.

**Критерии.** Полностью разобран пункт 1) – 2 балла, за каждый из пунктов 2а), 2b) и 2c) – по одному баллу, 7 баллов за все пункты.