МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ №11 (769)

ИЗДАЕТСЯ С 1992 г.

mat.1september.ru

издательский дом
1september.ru
Первое сентября
ноябрь
2015

МАТЕМАТИКА Подписка на сайте www.1september.ru или по каталогу «Почта России»: 79073 (бумажная версия); 12717 (CD-версия)

В НОМЕРЕ

К материалам, обозначенным этим символом, есть дополнительные материалы в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru

УВАЖАЕМЫЕ ЧИТАТЕЛИ!

Все подписчики журнала имеют возможность получать электронную версию, которая не только является полной копией бумажной, но и включает дополнительные электронные материалы для практической работы.

Для получения электронной версии:

1. Откройте Личный кабинет на портале «Первое сентября» (www.1september.ru).
2. В разделе «Газеты и журналы/Получение» выберите свой журнал и кликните на кнопку «Я — подписчик бумажной версии».
3. Появится форма, посредством которой вы сможете отправить нам копию подписной квитанции.

После этого в течение одного рабочего дня будет активирована электронная подписка а весь период действия бумажной.

МАТЕМАТИКА. ПЕРВОЕ СЕНТЯБРЯ

Методический журнал для учителей математики

Издается с 1992 г. Выходит один раз в месяц

РЕДАКЦИЯ:
Главный редактор: Л. Рослова
Отв. секретарь: Т. Черкасская
Редакторы: П. Камаев, О. Макарова, И. Коган
Дизайн макета: И. Лукьянов. Дизайн обложки: Э. Лурье
Корректор: Л. Громова. Верстка: Л. Кукушкина

Распространяется по подписке

Цена свободная
Тираж 22 000 экз.

Тел. редакции: **(499) 249-3460**
E-mail: **mat@1september.ru**
Сайт: **mat.1september.ru**

ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ДОМ «ПЕРВОЕ СЕНТЯБРЯ»
Главный редактор: Артем Соловейчик (генеральный директор)
Коммерческая деятельность: Константин Шмарковский (финансовый директор)
Развитие, IT и координация проектов: Сергей Островский (исполнительный директор)
Реклама, конференции и техническое обеспечение Издательского дома: Павел Кузнецов
Производство: Станислав Савельев
Административно-хозяйственное обеспечение: Андрей Ушков
Педагогический университет: Валерия Арсланьян (ректор)

ЖУРНАЛЫ ИЗДАТЕЛЬСКОГО ДОМА:
Английский язык – Е. Богданова,
Библиотека в школе – О. Громова,
Биология – Н. Иванова,
География – А. Митрофанов, и.о.
Дошкольное образование – Д. Тюттерин,
Здоровье детей – Н. Сёмина,
Информатика – С. Островский,
Искусство – О. Волкова,
История – А. Савельев,
Классное руководство и воспитание школьников – М. Битянова,
Литература – С. Волков,
Математика – Л. Рослова,
Начальная школа – М. Соловейчик,
Немецкий язык – М. Бузоева,
ОБЖ – А. Митрофанов,
Русский язык – Л. Гончар,
Спорт в школе – О. Леонтьева,
Технология – А. Митрофанов,
Управление школой – Е. Рачевский,
Физика – Н. Козлова,
Французский язык – Г. Чесновицкая,
Химия – О. Блохина,
Школа для родителей – Л. Печатникова,
Школьный психолог – М. Чибисова.

Иллюстрации: фотобанк Shutterstock
На с. 1 и с. 64 — коллажи из иллюстраций, взятых с сайтов: http://www.coolwallpapers.me, https://commons.wikimedia.org, http://www.bl.uk, http://newpix.ru, www.flickr.com (авторы Gonzalo Iza, Shellmush, Darren Harmon), http://news.softpedia.com, http://static.diary.ru, http://maness.biz, http://alina-romanova.blogspot.ru

УЧРЕДИТЕЛЬ:
ООО «ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ДОМ «ПЕРВОЕ СЕНТЯБРЯ»
Зарегистрировано ПИ №ФС77-58424 от 25.06.14 в Роскомнадзоре
Подписано в печать: по графику 12.08.15, фактически 12.08.15 Заказ №________
Отпечатано в ОАО «Первая Образцовая типография» филиал «Чеховский печатный двор»
ул. Полиграфистов, д. 1, Московская область, г. Чехов, 142300; Сайт: www.chpd.ru;
E-mail: sales@chpk.ru; факс: 8(496)726-54-10, 8(495)988-63-76

АДРЕС РЕДАКЦИИ И ИЗДАТЕЛЯ:
ул. Киевская, д. 24, Москва, 121165
Телефон/ факс: **(499) 249-3138**
Отдел рекламы: **(499) 249-9870**
Сайт: **1september.ru**
facebook.com/School.of.Digital.Age

ИЗДАТЕЛЬСКАЯ ПОДПИСКА:
Телефон: **(499) 249-4758**

ПОДПИСНЫЕ ИНДЕКСЫ:
Почта России: бумажная версия – **79073**; CD-версия – **12717**

БОЛЬШЕ ИНФОРМАЦИИ — БОЛЬШЕ ВОЗМОЖНОСТЕЙ

Л. РОСЛОВА

«Все новое — это хорошо забытое старое». Как часто приходится убеждаться в том, что народная мудрость — это не просто исторический фольклор, часто это руководство к действию. Взять хотя бы памятную еще с советских времен практику выплачивания студентам дополнительных стипендий от ведомств и предприятий. Нужен отрасли или организации специалист — надо вложиться в его профессиональную подготовку. И адресно, и надежно.

Правда, о том, чтобы студентам-математикам выплачивались стипендии, я как-то не слышала, больше это относилось к инженерным направлениям обучения. Но оказывается, что в наш век изучающие математику в приоритете. Взять в качестве примера конкурс, который проводит инвестиционно-промышленный холдинг «GS Group». Это международный конкурс по математике для старшеклассников из нестоличных городов. В течение прошедшего учебного года стипендию получали пять финалистов, которые поступили в профильные вузы на специальности, востребованные в холдинге. На 7 тыс. рублей в столице не пошикуешь, но студенту любая копейка сгодится. В каких вузах они учились? В Московском физико-техническом институте, в Высшей школе экономики, в Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова и Санкт-Петербургском государственном университете. Все выбрали математические специальности. Откуда приехали ребята? Из Челябинска, Вологды, Сыктывкара, Сарова и Бийска. По-моему, неплохо. Особенно с учетом того, что у них уже есть гарантированное место работы и направление деятельности. Конкурс включает два заочных онлайн-тура и очный финал. Привлекательно, что в ходе финального тура школьники получают возможность посетить предприятия холдинга и посмотреть, как там работается.

Конечно, все ребята — опытные турнирные бойцы, поскольку у них есть немалый опыт участия в олимпиадах высокого уровня. Кто-то побеждал на региональном этапе Всероссийской олимпиады по математике для школьников, кто-то — в олимпиаде выбранного вуза, кто-то в открытой олимпиаде. А участие в этом конкурсе принесло вполне ощутимые дивиденды.

На этом примере наглядно видна и возрастающая роль информации и средств коммуникации в современном обществе. Узнал об интересующем тебя событии — принял участие, как говорится, не выходя из дома. Давайте же будем помогать в этом нашим старшеклассникам. Ведь, несмотря на все достоинства ЕГЭ в плане поступления в интересующий тебя вуз, проблем остается немало. В частности, поступив, надо еще остаться: не разочароваться, поняв, что это не твое, соответствовать требованиям, осилив программу, и, в конце концов, банально вытянуть материально жизнь в столичном городе.

Н. ШАЛЬНЕВ,
г. Екатеринбург, Свердловская обл.

МЕТОДОБЪЕДИНЕНИЯ, ОБЪЕДИНЯЙТЕСЬ!

В статье автор рассматривает, как взаимодействие учителей разных предметов (русский язык и математика) в рамках одной школы способствует развитию познавательного интереса учащихся, их мотивации как на уроке, так и во внеурочной деятельности. Автор описывает разные формы сотрудничества учителей школьных методических объединений, работающих в СОШ № 72 г. Екатеринбурга.

В нашей школе активно сотрудничают учитель математики и учитель русского языка и литературы. В прошлом 2013/2014 учебном году нами был организован интегрированный урок в 10-м классе, направленный на развитие межпредметных связей и метапредметных результатов учащихся.

Как же был организован урок?

С одной стороны, как учитель математики я решил провести математический диктант по темам, которые учащиеся освоили за курс основного общего образования (7–9-е классы). Для этого я подобрал те математические термины, которые школьники должны знать перед изучением программы по математике 10-го класса. Ученики должны были написать определения этих терминов, указать раздел математики, в котором они встречаются, а также привести примеры формул, связанных с данной терминологией.

С другой стороны, учитель русского языка и литературы решила несколько усложнить задание: она подготовила примеры, где встречаются необходимые нам термины, но на материале русского языка XVIII века, когда происходило формирование языка русской науки. Школьники сначала должны были записать математический термин в той форме, которая существовала в XVIII веке, затем написать современную и уже после этого выполнить то задание, которое было предложено учителем математики.

Ниже представлены примеры употребления математических терминов в русском языке XVIII века, они взяты из книги: *Кутин Л.Л.* Формирование языка русской науки (М.–Л.: Наука, 1964). Орфография XVIII века заменена на современную.

1. «О извлечении квадратного радикса» (*квадратный корень*).
2. «Чрез поверхность разумеем протяжение двух размерений, то есть долготу и широту» (*поверхность*).
3. «Фигура, обнятая тремя линиями, называется триангулум» (*треугольник*).
4. «Около земли множество циркулев обведены» (*круг*).
5. «Прямая черта на другой стоящая глаголется перпендикулярная» (*перпендикуляр*).
6. «Тропики суть два круга параллели» (*параллель*).
7. «Прямую линию начертить, которая циркуля в единой данной точке коснётся» (*касательная*).
8. «Все ангулы и все стороны суть равны» (*угол*).
9. «В триангуле прямоугольном ABC будут знатны обе ноги AB AC» (*равнобедренный треугольник*).

10. «Ареа или площадь квадрата мерить» (*площадь*).

11. «Астрономические правила и феоремы» (*теорема*).

12. «Проф. Гольдбах показал бесконечные суммы рядов, их же все пределы и краи к генеральной формуле приведены быть могут» (*формула*).

Другое задание, предложенное учащимся, состояло в том, чтобы изобразить пословицы и поговорки с помощью графиков, например, такие:

- Кашу маслом не испортишь;
- Чем дальше в лес, тем больше дров;
- Без труда не выловишь и рыбку из пруда.

Третье задание состояло в том, что учитель русского языка повторила с учениками происхождение и лексическое значение таких слов, как *гектар, аршин, акр, гривна, дюжина, чёртова дюжина*. Затем школьникам была предложена для решения следующая задача:

Вчера Васин дедушка, отмечая свой день рождения, сказал: «Вот мне и пошёл восьмой десяток!» Вася, который любит всё считать в *дюжинах*, сообщил, что восьмая *дюжина* пойдёт дедушке через ... лет.

Взаимодействие школьных методических объединений не ограничивается проведением интегрированных уроков. Одной из форм педагогического сотрудничества является создание и накопление дидактического материала по математике и русскому языку в *печатной* и *электронной* формах. На уроках русского языка учащиеся в качестве лексико-грамматической разминки записывают под диктовку учителя отдельные предложения или короткий текст по математической теме. Они повторяют орфографию, пунктуацию, делают разбор предложений, после чего должны кратко охарактеризовать математический смысл того или иного явления. Например:

1. «Корень уравнения есть число, которое, будучи подставленным в уравнение вместо обозначающей его буквы или вида, приводит к исчезновению всех его членов». (*И. Ньютон*)

2. Периодическими функциями описываются многие физические процессы: колебания маятника, вращение планет, переменный ток.

3. Параллелограмм — это четырехугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны.

Таким образом, учащиеся получают сразу две отметки: по русскому языку (учитель-словесник проверяет тетради по своему предмету) и по математике (учитель математики проверяет тетради после учителя-словесника). Аналогичная работа проводится и после проведения математических диктантов. Например, мною был проведен следующий диктант:

- Сторона прямоугольного треугольника, прилежащая к прямому углу, называется ... [Катет]
- Направленный отрезок прямой, у которого есть и начало, и конец. [Вектор]
- Отрезок, соединяющий две точки окружности. [Хорда]

После чего я проверил правильность ответов, а затем учитель-словесник оценил орфографию и пунктуацию диктанта, написанного учениками. Хочется заметить, что такого рода задания позволяют разным школьным методическим объединениям осуществлять взаимопроверку тетрадей, которая оказывает заметное влияние на учащихся: они серьезнее относятся к ведению тетрадей, если их проверяют два учителя.

В том же 2013/2014 учебном году я и мой коллега-словесник провели районный конкурс «Математики и лингвисты» на базе нашей школы. Нами были расширены представленные выше задания, разработана система оценивания работ учащихся, а также продумана система поощрения всех участников нашего внеурочного мероприятия (сертификаты и грамоты участникам, благодарственные письма педагогам, призы победителям).

Стоит отметить, с каким энтузиазмом и ответственностью готовились к конкурсу наши ученики, ведь они должны были принять гостей из других школ согласно всем правилам гостеприимства и хорошего тона.

Задания для районного конкурса «Математики и лингвисты»
(9–11-е классы)

1. Установите, о каком писателе-математике и его произведении идет речь.

- Английской королеве так понравилась сказка этого автора, что она попросила принести ей остальные его сочинения. Ей подали «Руководство по теории детерминантов».

[*Кэрролл Л.* Приключения Алисы в Стране чудес.]

2. Перед вами зашифрованный русский текст.

1 2 + 3 + 4 + 5, 6 + 4 + 6
7 + 8 + 9 + 4 + 10 + 11
2 + 4 + 12 + 4 + 13 + 14.
1 15 + 6 + 16 + 7 + 16 7 + 8 + 9 + 14 8 + 8.
6 + 10 + 16 7 + 8 + 9 + 4 + 8 + 10
2 + 4 + 12 + 4 + 13 + 17
15 + 6 + 16 + 7 + 8 + 8,
10 + 16 + 10 7 + 8 + 9 + 17 + 10
18 + 16 + 19 + 11 + 9 + 8 2 + 4 + 12 + 4 + 13.
2 + 4 6 + 4 + 20 + 12 + 14 + 5
7 + 8 + 9 + 8 + 3 + 3 + 14 + 5
2 + 4 + 12 + 4 + 13 + 14
2 + 4 + 13 + 17 + 15 + 19 + 1 + 5 + 10 + 15 + 1
16 + 13 + 6 + 17.

Каждой букве соответствует одно число, причем разным буквам соответствуют разные числа (*е* и *ё* считаются одной буквой); зашифрованные буквы в пределах одного слова разделяются плюсами; знаки препинания в тексте сохраняются. Расшифруйте этот текст.

Один из возможных способов решения. В тексте встречается слово, состоящее из двух одинаковых букв: 8 + 8. Это местоимение *её*, так как *е* и *ё*, по условию, не различаются. Далее выписываем слова с одинаковым началом:

$7 + е + 9 + 4 + 10 + 11$;
$7 + е + 9 + 14$;
$7 + е + 9 + 4 + е + 10$;
$7 + е + 9 + 17 + 10$;
$\underline{7 + е + 9} + е + 3 + 3 + 14 + 5$.

В последнем слове встречается удвоенная буква, 3 + 3. Такой суффикс есть у причастий: *-енн*, тогда $7 + е + 9$ — глагольный корень.

Методом исключений приходим к выводу, что 14 + 5 — это *ую*, так как глагольных форм, оканчивающихся на *о* или *ы*, нет. На *а* может оканчиваться только деепричастие, но тогда оно выделялось бы запятой. Получается, что 14 = *у*, а 5 = *ю*. Затем методом подстановки узнаем, что 4 = *а*, 10 = *т*, 11 = *ь* и т.д.

В итоге расшифровываем весь текст:

Я знаю, как решать задачу. Я скоро решу её. Кто решает задачи скорее, тот решит больше задач. За каждую решенную задачу начисляются очки.

3. Составить текст, выстроив слова так, чтобы из начальных букв получилось слово МАТЕМАТИКА.

[**М**атематический **А**нализ **Т**ребует **Е**жедневного **М**ышления **А**строномическими **Т**еоремами **И** **К**лассическими **А**лгоритмами.]

4. Составить акростих со словом МАТЕМАТИКА.

5. Установить по этимологическому словарю, из каких языков и в какой период времени были заимствованы в русский язык следующие математические термины: *математика, алгебра, геометрия, тригонометрия, стереометрия, шар, сфера, квадрат, ромб, диагональ, биссектриса, медиана, радиан, синус, косинус, тангенс, котангенс.*

6. Решить задачи-загадки на английском языке.

а) How many times can you subtract 5 eggs from a carton holding 25 eggs?

[Только один раз можно вынуть 5 яиц из коробки, содержащей 25 яиц, потому что после этого в коробке останется 20 яиц.]

б) An old man said to a young man, «I have a daughter. She has as many brothers as she has sisters. Each one of her brothers has twice as many sisters as he has brothers. How many sons and daughters do I have?»

$$\left[\begin{cases} S = D - 1, \\ D = 2(S - 1), \end{cases}\right.$$ где S — это число сыновей, а D — число дочерей.

Получается, что сыновей трое, а дочерей четверо.]

в) A taxi driver was called to take a group of passengers to the train station. The station is normally an hour away, but with traffic being extra heavy, it took a full hour and a half. On the return trip the traffic was still as heavy but it took only 90 minutes. Why?

[Полтора часа — это и есть 90 минут.]

7. Определите, о каких архитектурных памятниках мира идет речь (все строки принадлежат перу О. Мандельштама).

а) И мудрое сферическое зданье
Народы и века переживет,
И серафимов гулкое рыданье
Не покоробит темных позолот.

б) Нам четырех стихий приязненно господство,
Но создал пятую свободный человек.
Не отрицает ли пространства превосходство
Сей целомудренно построенный ковчег?

в) Но выдает себя снаружи тайный план,
Здесь позаботилась подпружных арок сила,
Чтоб масса грузная стены не сокрушила,
И свода дерзкого бездействует таран.

8. Решите задачу.

Альберт всегда лжет. Однажды он сказал своему другу Франку: «Хотя бы один из нас никогда не лжет». Тогда обязательно:

а) Франк всегда лжет;
б) бывает, что Франк лжет;
в) Франк никогда не лжет;
г) бывает, что Франк говорит правду;
д) Альберт не мог произнести такую фразу.

Один из возможных способов рассуждения по ходу решения. Если Альберт под этой фразой подразумевал себя, то он солгал, так как в условии сказано, что он всегда лжет. С другой стороны, получается, что Франк всегда говорит правду. Но смысл этой фразы состоит в том, что хотя бы кто-то из них никогда не лгал. Мы не можем с *полной* уверенностью утверждать, что Франк *никогда* не лгал, потому что, произнося эту фразу, Альберт солгал (по условию задачи).

Следовательно, бывает, что Франк лжет.

В заключение хочется сказать, что опыт взаимодействия школьных методических объединений оказывается полезен не только для учащихся, но и для учителей, которые узнают много нового и интересного о предметах, казалось бы, настолько от них далеких. Мы думаем и дальше расширять и дополнять формы интеграции школьных методических объединений.

Л. ШЕСТАКОВА, Н. МИНЯЙЛОВА,
А. МАРКОВ, В. ПЕРЕСЫПКИН,
goodcatty@rambler.ru,
г. Новокузнецк

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ГЕОМЕТРИИ

В 60-х годах прошлого века в школе № 11 начал свою трудовую деятельность педагог-новатор, учитель математики Дмитрий Никифорович Хомяков. По его инициативе были открыты первые в г. Новокузнецке классы с углубленным изучением математики. На протяжении почти сорока лет Дмитрий Никифорович завораживал ребят преданностью своему делу, необыкновенной жизненной простотой, порядочностью и скромностью. Сегодня ученики Дмитрия Никифоровича — это доктора и кандидаты наук, заведующие кафедрами и деканы факультетов различных вузов нашей страны, многие работают в вузах за рубежом.

По инициативе учителей лицея, работавших с Дмитрием Никифоровичем, и выпускников лицея 25 февраля 2009 года стартовала Открытая городская олимпиада им. Д.Н. Хомякова.

Дмитрий Никифорович проработал в нашей школе более 30 лет. Специально приехав в Новокузнецк из Новосибирска в далекие 60-е годы, чтобы работать, жить и учить здесь школьников, он одним из первых в России начал профильное обучение математике. Однако это было только поводом для нашего решения проводить олимпиаду! Главным для нас был сам Дмитрий Никифорович — великий учитель и талантливый человек. Ученики, приходя на его уроки, получали не только математические знания, но безмерное наслаждение от общения с ним. Дмитрий Никифорович — Человек и Учитель с большой буквы!

Идею олимпиады поддержал Комитет образования и науки города Новокузнецка. Все школы, которые мы пригласили, активно откликнулись на наш призыв и выставили свои команды. Неоспоримым достоинством конкурса стала его объективность. Учителя оценивали работы строго по критериям. Наша олимпиада бесплатная, и это позволяет всем желающим участвовать в ней. Очень важно не погасить творческий настрой в ребенке, поддержать желание учиться.

Задания олимпиады за 2009–2015 годы можно найти в электронном приложении.

В данной статье представлен опыт работы учителей лицея № 11 г. Новокузнецка по теме «Дополнительные теоремы геометрии», которая включает в себя блоки: «Четыре замечательных точки треугольника»; «Точка Торичеллии»; «Окружность девяти точек и прямая Эйлера»; «Теорема Менелая»; «Теорема Чевы»; «Точка Жергонна»; «Теорема Птолемея». Знание дополнительных теорем дает «бонусы» на экзамене учащимся 11-х классов, позволяя решать многие задачи более изящным и простым способом.

Представленный материал — результат многолетней практической работы. Мы надеемся, что он будет полезен учителям математики и учащимся для подготовки к итоговой аттестации и обучению в профильных математических классах.

К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru

Тема 1. Четыре замечательные точки треугольника

Точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника

Теорема. Три перпендикуляра к сторонам треугольника, проведенные через их середины, пересекаются в одной точке, которая является центром описанной около треугольника окружности.

Дано: EM, FK и HN— серединные перпендикуляры к сторонам BC, AC и AB треугольника ABC.

Доказать: EM, FK и HN пересекаются.

Доказательство. 1. Предположим, что $EM \parallel FK$ (рис. 1).

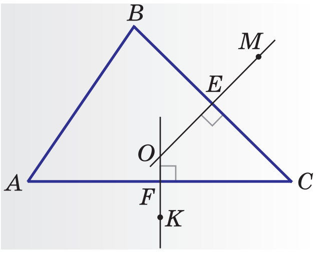


Рис. 1

Так как по условию $BC \perp EM$, а по предположению $EM \parallel FK$, то $BC \perp FK$. $AC \perp FK$ по условию, следовательно, $BC \parallel AC$. Но это невозможно, так как BC и AC — стороны треугольника ABC и потому они пересекаются. Значит, наше предположение неверно: EM не параллельна FK.

2. Теперь докажем, что все три серединных перпендикуляра пересекаются.

Пусть O — точка пересечения FK и EM. Так как точка O принадлежит FK, то $AO = OC$, а из того, что O принадлежит EM, следует $OB = OC$. Таким образом, $AO = OB = OC$, то есть O лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB, то есть все три серединных перпендикуляра пересекаются в одной точке O. Что и требовалось доказать.

3. Докажем, что около любого треугольника можно описать окружность и только одну. Мы доказали, что $AO = OB = OC$. Проведем окружность с центром O и радиусом $R = OA$. Она пройдет через точки A, B и C, являющиеся вершинами треугольника ABC. Эта окружность единственная, так как в противном случае две окружности пересекались бы в трех точках, что невозможно.

Точка пересечения биссектрис

Теорема. Биссектрисы углов треугольника пересекаются в одной точке, которая является центром вписанной окружности.

Дано: треугольник ABC; AF, BM, CE — его биссектрисы.

Доказать: биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

Доказательство. 1. Сначала докажем, что две биссектрисы треугольника пересекаются (рис. 2).

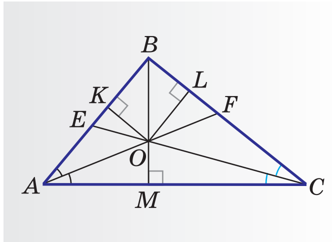


Рис. 2

Пусть AF и CE — биссектрисы углов A и C. Допустим, что $AF \parallel CE$. Тогда AC будет секущей для этих параллельных прямых и углы FAC и ECA будут дополнять друг друга до $180°$ (как односторонние). Следовательно, $\angle A + \angle C = 360°$, что невозможно по теореме о сумме углов треугольника. Значит, биссектрисы AF и CE пересекаются.

2. Теперь докажем, что все три биссектрисы пересекаются в одной точке. По свойству биссектрисы угла: если точка лежит на биссектрисе угла, то она равноудалена от сторон этого угла, имеем, что $OL = OK$ (где $OL \perp BC$, $OK \perp AB$). Соединим точки B и O. Треугольники BOK и BOL равны (по гипотенузе и катету), следовательно, $\angle KBO = \angle LBO$, то есть BO — биссектриса угла B. Значит, три биссектрисы проходят через одну точку.

3. Докажем, что в любой треугольник можно вписать окружность и только одну. Для доказательства достаточно построить окружность с центром в точке O и радиусом OK. Предположим, что можно построить две окружности, вписанные в треугольник ABC. Но тогда они имеют три общие точки, что невозможно.

Точка пересечения медиан треугольника

Теорема. Три медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении 2 к 1, считая от вершины

Точка пересечения медиан треугольника называется центром тяжести или центроидом треугольника и всегда расположена внутри треугольника.

Дано: треугольник ABC; AA_1, BB_1 и CC_1 — его медианы.

Доказать: $AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1 = M$; $BM : MB_1 = 2:1$, $AM : MA_1 = 2:1$; $CM : MC_1 = 2:1$ (или $MB_1 = \frac{1}{3} BB_1$).

Доказательство. 1. Проведем в треугольнике ABM (рис. 3) среднюю линию PQ. Докажем, что PQA_1B_1 — параллелограмм. Так как PQ — средняя линия треугольника ABM, то $PQ \parallel AB$, $PQ=\frac{1}{2}AB$ и A_1B_1 — средняя линия треугольника ABC, следовательно, $A_1B_1 \parallel AB$ и $A_1B_1=\frac{1}{2}AB$, откуда $PQ \parallel A_1B_1$ и $PQ=A_1B_1$. Значит, PQA_1B_1 — параллелограмм (по признаку).

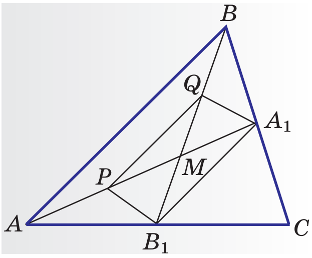


Рис. 3

2. Из пункта 1 следует, что $PA_1 \cap QB_1 = M$, $PM = MA_1$ и $QM = MB_1$ (по свойству диагоналей параллелограмма). Тогда $AP = PM = MA_1$, то есть $AM : MA_1 = 2 : 1$, $BM : MB_1 = 2 : 1$.

3. Если возьмем третью медиану CC_1 с одной из медиан, AA_1 или BB_1, то также убедимся, что точка их пересечения отсекает от каждой из них $\frac{1}{3}$ часть, считая от основания, значит, третья медиана должна пересечься с медианами AA_1 и BB_1 в одной и той же точке M.

Точка пересечения высот треугольника

Теорема. Три высоты треугольника или их продолжения пересекаются в одной точке.

Точка пересечения высот треугольника называется его ортоцентром.

Дано: треугольник ABC; $CF \perp AB$, $AD \perp BC$, $BE \perp AC$.

Доказать: высоты пересекаются в одной точке.

Доказательство. Через вершины треугольника ABC (рис. 4) проведем прямые, параллельные противолежащим сторонам. Точки A_1, B_1, C_1 — точки их пересечения.

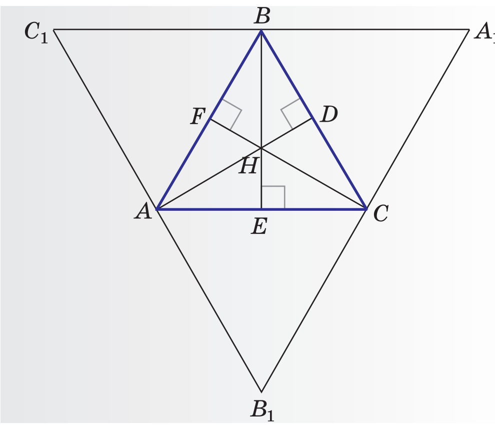


Рис. 4

Так как $BE \perp AC$, а $AC \parallel A_1C_1$, то и $BE \perp A_1C_1$; $AD \perp B_1C_1$, $CF \perp A_1B_1$; C_1BCA, BA_1CA, $ABCB_1$ — параллелограммы (по определению). Следовательно, $C_1B = AC = BA_1$, то есть B — середина A_1C_1.

Аналогично, C — середина A_1B_1, A — середина C_1B_1.

Но тогда BE, CF и AD — серединные перпендикуляры к сторонам треугольника $A_1B_1C_1$. А они пересекаются в одной точке.

Задачи для решения на занятии

1. Высоты треугольника ABC пересекаются в точке H. Указать ортоцентры треугольников AHB, BHC, CHA.

2. В каком треугольнике совпадают точки пересечения высот, медиан и биссектрис?

3. Диагональ AC параллелограмма $ABCD$ равна 15. Середина M стороны AB соединена с вершиной D. Найти длины отрезков, на которые отрезок DM делит диагональ AC.

4. Точка M — середина стороны CD, точка N — середина стороны BC параллелограмма $ABCD$. Докажите, что прямые AM и AN делят диагональ BD на три равные части.

5. Середины E и F сторон AD и BC параллелограмма $ABCD$ соединены с вершинами B и D. Доказать, что эти прямые делят диагональ AC на три равные части.

Задачи для контрольной работы

6. Докажите, что шесть углов, образованных высотами остроугольного треугольника, попарно равны углам треугольника.

7. Пользуясь только линейкой, проведите перпендикуляр из точки, лежащей вне окружности, на данный ее диаметр или его продолжение.

8. Постройте треугольник по стороне и медианам, проведенным к двум другим сторонам.

Ответы

1. C, A, B.

2. В равностороннем.

3. 5 и 10. В треугольнике ABD (рис. 5) MD и AO — медианы. $MD \cap AO = K$ и $AK : KO = 2 : 1$. $AO=\frac{1}{2}AC=7{,}5$; $7{,}5 : 3 = 2{,}5$; $AK = 2{,}5 \cdot 2 = 5$, $KC = 10$.

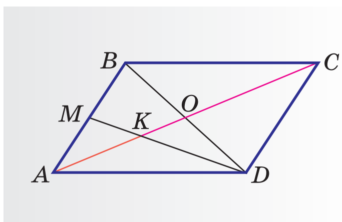


Рис. 5

4. В треугольнике ABC (рис. 6) AN и BO — медианы, поэтому $BK=\frac{2}{3}BO$. Аналогично, $PD=\frac{2}{3}OD=\frac{2}{3}BO$, так как $OB = OD$. $BK = DP$. $OK=\frac{1}{3}BO$, $OP=\frac{1}{3}OD=\frac{1}{3}BO$, следовательно, $OK=OP=\frac{1}{3}BO$, а $KP=OK+OP=\frac{2}{3}BO$. Таким образом, $BK = DP = KP$. Что и требовалось доказать.

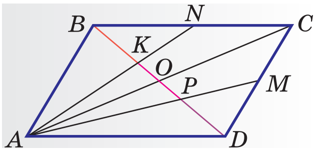


Рис. 6

5. Соединим вершины B и D (рис. 7). Тогда BE и AO — медианы треугольника ABD, поэтому $AK=\frac{2}{3}AO=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}AC=\frac{1}{3}AC$. В треугольнике BCD $CN=\frac{2}{3}CO=\frac{2}{3}AO=\frac{1}{3}AC$, то есть $AK=CN=\frac{2}{3}CO$ или $\frac{2}{3}AO$. Тогда $OK=ON=\frac{1}{3}AO$, а $KN=OK+ON=\frac{1}{3}AO+\frac{1}{3}AO=\frac{2}{3}AO$. Таким образом, $AK=KN=NC$.

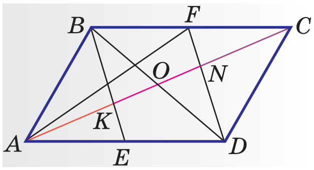


Рис. 7

6. Из прямоугольного треугольника AHC_1 (рис. 8), $\angle 6 = \angle 3 = 90° - \angle 7$. Из прямоугольного треугольника ABA_1, $\angle 7 = 90° - \angle B$. Тогда $\angle 6 = 90° - (90° - \angle B) = \angle B$. Таким образом, $\angle 6 = \angle 3 = \angle B$. Аналогично, $\angle 1 = \angle 5 = \angle A$, $\angle 2 = \angle 4 = \angle C$.

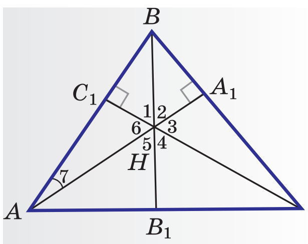


Рис. 8

7. *1-й случай*. Отрезки AC и BC (рис. 9), пересекают окружность в точках D и E соответственно, которые лежат на одной полукружности. Проведем отрезки BD и AE. $\angle ADB=\angle AEB=90°$. BD пересекает AE в ортоцентре треугольника ABC — точке H. Отрезок CH пересекает AB в точке K. Так как три высоты треугольника пересекаются в одной точке, то $CK\perp AB$.

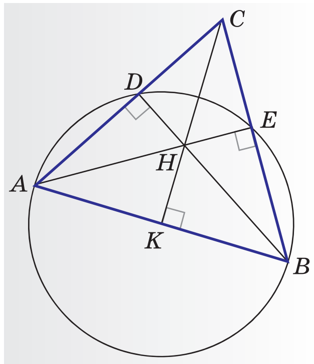


Рис. 9

2-й случай. Отрезки AC и BC пересекают окружность в точках D и E соответственно, которые лежат на разных полуокружностях (рис. 10).

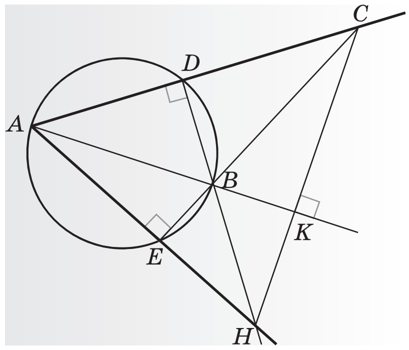


Рис. 10

В треугольнике ABC $BD\perp AC$, $AE\perp BC$; BD пересекает AE в точке H; CH пересекает AB в точке K. CK — искомый перпендикуляр к диаметру AB, так как точка H — ортоцентр треугольника ABC, а AE, BD и CK — его высоты.

8. Построим треугольник AOC (рис. 11) по трем сторонам: AC, $AO=\frac{2}{3}AM$, $CO=\frac{2}{3}CK$. Далее найдем точки K и M. Точка B является точкой пересечения лучей AK и CM.

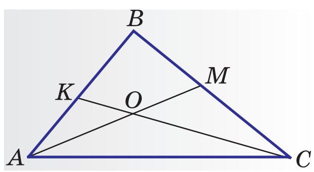
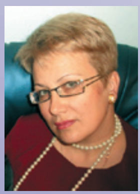


Рис. 11

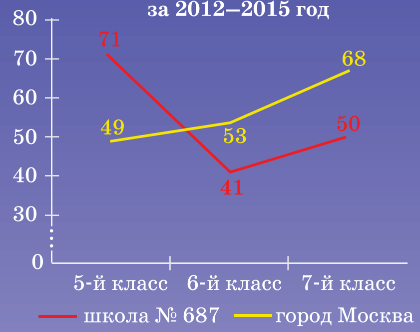
О. ГРИГОРОВА,
А. ЕВСЕЕВА,
М. ЗОТОВА,
г. Москва



СИСТЕМА КРИТЕРИАЛЬНОГО ОЦЕНИВАНИЯ: ПРОБЛЕМА ИЛИ РЕШЕНИЕ?

В последнее время мы стали сталкиваться с огромным разнообразием контрольно-измерительных материалов, которые предполагают балльную систему оценивания. ЕГЭ, ОГЭ, городские контрольные работы также предлагают критериальную оценку. Дети и учителя оказались поставлены в ситуацию разных систем оценивания. И вот на очередном заседании нашего методобъединения мы пришли к выводу, что нужно идти в ногу со временем, и разработка критериальной системы оценивания стала темой нашей работы. И уже на втором году работы мы заметили существенный рост результатов внешней независимой оценки, причем не только предметных, но и метапредметных умений. А на третьем году результаты независимого контроля качества математического образования убедили нас, что система приносит плоды. Вкратце ознакомим вас с результатами нашей работы.

Сводный график результативности внешней оценки по математике за 2012–2015 год



Итак, за три года мы видим рост результативности по математике. На фоне общегородских результатов результаты нашей 687-й школы выглядят достаточно стабильными и имеют положительную динамику роста. Что же привело нас к таким результатам?

Вначале нами был разработан способ самоанализа ребенком контрольной работы, который положил начало работе над системой критериального оценивания в целом. Суть его такова.

Самоанализ проводится на уроке, следующем за уроком проведения контрольной работы. Ученик проверяет свою работу самостоятельно (учитель все результаты предварительно занес себе в таблицу оценивания контрольной работы, не делая никаких пометок в тетради ученика, кроме количества баллов и оценки). Задача ученика — найти свои ошибки, оценив этапы выполнения работы в баллах. Он это делает при помощи эталона (5–6-е классы) или при помощи листа самоанализа (7–11-е классы). Результат самоанализа приводит ученика к необходимости повторной отработки тех или иных умений, с которыми он не справился в контрольной работе, для чего учитель заранее готовит задания. Если же ученик справился с контрольной блестяще, имеет смысл углубиться в тему, чтобы повысить уровень компетентности в ней.

Самоанализ контрольной работы исключает спорность оценки учителя, так как баллы предельно открыты, а результат прозрачен. Если происходит несовпадение баллов с учительскими, то все вопросы решаются на уроке самоанализа быстро и без конфликтов. Но наиболее важным результатом самоанализа мы считаем то, что ученик, проанализировав свою работу, четко понимает, в каких конкретно местах темы у него пробелы, и видит необходимость и реальную возможность их закрыть. Дома при работе с заданиями, нацеленными на ликвидацию пробелов в умениях, ученик пользуется тем же эталоном, которым пользовался при проверке контрольной работы. Если проблем в классе оказывается много, то за уроком анализа может следовать урок рефлексии, на котором ученики отрабатывают выявленные проблемы в группах.

Случается, что ученик приводит в работе нестандартное решение, не запланированное в эталоне работы. Особо часто с этим мы сталкивались на уроках геометрии. Поэтому при подготовке к контрольной работе мы предлагаем ученику демоверсию, при решении которой оговариваем лишь возможные варианты применения умений, которые могут быть вариативными. При этом сумма баллов остается неизменной. В каждую контрольную включаются задания «для продвинутых пользователей», которые предполагают не только применение всех умений темы, но и нестандартную логику решения. Эти задания оцениваются учителем отдельно, на уроке подготовки озвучивается только сумма баллов. Результат решения ребенок может видеть в своей тетради.

По итогам работы баллы переводятся в оценку по заданным критериям, так как пока ресурс электронного журнала подразумевает лишь пятибалльную систему оценивания. Таблицу набора баллов можно прикреплять в виде файла к электронному дневнику или использовать другие интернет-порталы, пригодные для интерактивного общения с учащимися и их родителями. Подробно о самоанализе контрольной работы мы поговорим в одной из следующих статей, а сейчас приведем пример карточки самоанализа контрольной работы.

В таблице вы видите колонки, которые называются «Отметка» и «Оценка». Поясним, что это такое. Для оценивания результатов контрольной работы важно не просто набрать баллы, но и довести решение до верного ответа. Поэтому при подведении итогов контрольной работы находится сумма баллов только за те задания, которые были решены верно. Возникает вопрос: зачем тогда считать баллы за мелкие умения в заданиях, верные решения которых не были получены?

Самоанализ контрольной работы № 6

Что проверялось́

1. Умение находить дробь от числа (*4 балла*).
2. Умение находить число по дроби (*4 балла*).
3. Умение сравнивать дроби с одинаковыми знаменателями (*2 балла*).
4. Умение выражать части единиц измерения (*6 баллов*).
5. Умение решать логические задачи на правильные и неправильные дроби (*6 баллов*).

Всего: *22 балла*.

№ задания	1	2	3	4	5	Итого	Оценка	Отметка
Макс. балл	4	4	2	6	6	22		
Набрано баллов	3	4	1	6	4	18	хорошо	3

Критерии: нормально — 8–13 баллов;
почти хорошо — 14–15 баллов;
хорошо — 16–18 баллов;
почти отлично — 19–20 баллов;
отлично — 21–22 балла.

А это нужно ребенку для самооценки, потому что, подсчитывая все баллы подряд, он может видеть, сколько умений реально он смог применить. Так появилась вторая характеристика оценивания выполнения контрольной работы, которую мы назвали «Качественная оценка». Чтобы их различать, первую называем «Отметка», а вторую, которая выставляется словами «нормально», «почти хорошо», «хорошо», «почти отлично» и «отлично», — «Оценка».

КИМ последних лет содержат задания разного уровня сложности, но оцениваются одним минимальным баллом. Для процесса обучения такие измерители, не раскрывающие продвижения ученика по заданию, не показывающие ни учителю, ни ученику уровень усвоения материала, мало что дают. Поэтому у нас появилась идея решение каждого задания разбивать на этапы и оценивать задание по количеству верно выполненных этапов решения. В этом случае обеим сторонам процесса четко видно, с какого момента начинается ошибка и почему задание в целом не получается. Следовательно, работу над заданием надо начинать с устранения именно этой проблемы, а затем вернуться к решению в целом. Для ясности приведем пример оценивания решения линейного уравнения

$$-3(x + 2) = 7 - 5x.$$

Разбирая решение данного уравнения с учениками, проговариваем, за какие этапы решения можно получать баллы.

1-й балл — за раскрытие скобок: $-3x - 6 = 7 - 5x$.

2-й балл — за перенос слагаемых: $-3x + 5x = 7 + 6$.

3-й балл — за приведение подобных слагаемых: $2x = 13$.

4-й балл — за нахождение неизвестного множителя: $x = 6{,}5$.

5-й балл — за запись ответа:

Ответ: 6,5.

В итоге, несложное уравнение дает 5 баллов в оценке. И теперь при проведении самостоятельных и контрольных работ баллы за решение уравнения начисляются до первой ошибки, таким образом, и ученику, и учителю становится ясно, на каком этапе возникают затруднения, какого навыка не хватает, чтобы линейные уравнения решались без проблем.

К оцениванию заданий и целых тем мы вернемся в следующих статьях, а сейчас поговорим о критериальной оценке как о неотъемлемой части современного образования.

Коротко о главном.

Оценивание — это постоянный процесс, происходящий в течение всего времени обучения.

Оценивание должно быть критериальным, ориентированным на ожидаемые результаты обучения.

Если изначально заданы критерии оценивания, то личные качества ученика и учителя не смогут вмешаться в процесс выставления оценки.

Критерии оценивания могут разрабатываться как учителем, так и учениками и даже родителями, если возникла такая необходимость.

Критериальная система невозможна без самооценки учащегося в течение всего учебного процесса. Поэтому самооценка становится одним из главных элементов системы.

А теперь подробнее. В основе критериального оценивания лежит компетентностно-деятельностный метод преподавания, который формирует три вида компетенций: личностные, метапредметные и предметные.

Такие личностные компетенции, как умение делать выбор, умение ставить цель, планировать и т.д., не могут быть сформированы без умения оценивать себя. Чтобы ребенок мог грамотно поставить цель работы, он должен уметь прогнозировать результат этой работы. А чтобы спланировать свой путь к этому результату, необходимо вычленить шаги, которые помогут пройти этот путь. Самооценка же необходима, чтобы весь путь был пройден по запланированным шагам, без отклонения в стороны.

В процессе самооценивания развиваются и метапредметные компетенции. Такие, например, как следование инструкции, сравнительный анализ данных, работа с таблицей и прочее. Чаще всего самооценку мы предлагаем провести с помощью таблицы, следуя установленному алгоритму. Приведем пример такой таблицы с урока по теме «Построение графиков кусочно-заданной функции», на котором отрабатывался алгоритм построения графиков.

Инструкция по заполнению таблицы

В каждую колонку таблицы ты ставишь 1, 2 или 3 балла, следуя критериям:

«3» — ты полностью самостоятельно выполнил этап алгоритма, он совпадает с эталоном на экране; «2» — твой результат практически полностью соответствует эталону, но есть небольшой недочет; «1» — самостоятельно выполнить этап не получилось, пришлось воспользоваться эталоном как образцом.

Номер задания	1-я функция					2-я функция					3-я функция				
	запись	название	промежуток	таблица	график	запись	название	промежуток	таблица	график	запись	название	промежуток	таблица	график
1															
2															
3															
4															

Если по итогам работы ты набрал:

– от 75 до 105 баллов, то к проверочной работе ты готов;

– от 45 до 75 баллов, то тебе надо позаниматься по презентации и учебнику;

– менее 45 баллов, то тебе требуются дополнительные занятия по теме.

Формирование предметных умений в общих чертах мы показали на примере решения линейного уравнения, но любая тема подразумевает формирование многих предметных компетенций. Критериальная система оценивания помогает не потерять ни одну из них, что хорошо видно на примере листа прохождения темы «Признаки равенства треугольников».

№	Этапы алгоритма	Баллы
1	По отмеченным на чертеже равным элементам определить признак равенства треугольников	1 балл
2	Найти на чертеже с отмеченными двумя парами равных элементов третью пару и доказать равенство треугольников по одному из признаков	3 балла
3	Доказав равенство треугольников, доказать равенство их элементов	5 баллов
4	Используя равенство одних треугольников, доказать равенство других треугольников	7 баллов

С применением критериальной оценки нам стало проще прогнозировать результаты обучения, а значит, вовремя корректировать выявленные проблемы. Особое внимание хотелось бы обратить на изменения, которые произошли с мотивацией наших учеников. Многие из нас не раз слышали от ученика, пришедшего на дополнительные занятия, такие вопросы:

– А что мне сделать, чтобы исправить оценку?

– Можно я пересдам что-нибудь?

С появлением таблиц прохождения темы и анализа контрольной работы ситуация в корне изменилась. И вот что мы слышим от учеников теперь:

– Дайте мне работу № 3, второй уровень.

– Хочу добрать баллы, чтобы получить четверку.

– Мне нужно добрать баллы для получения зачета по теме и допуска к контрольной работе.

То есть мы получили дополнительный мотивационный аппарат. В чем он заключается? Смотрите, слабоуспевающий ученик, погрязший в двойках и тройках, вместо того чтобы начать работать усерднее, в какой-то момент перестает на них реагировать. Он теряет интерес к предмету, теряет веру в свои возможности и считает, что тройка — рубеж, который ему никогда не перепрыгнуть. С введением критериальной системы оценивания тройка превратилась в балл, который показывает динамику освоения той или иной темы. Наш «троечник» получил дополнительный стимул — количественный, так как при любом напряжении сил он получает рост баллов. Именно это позволяет ему продвигаться по «лестнице успеха». И теперь не мы отлавливаем его на дополнительные занятия, а он ищет возможность добрать баллы, чтобы повысить свой результат.

Критерии оценивания могут разрабатываться не только учителем. Иной раз на уроке ученики предлагают то или иное задание оценивать другим количеством баллов, объясняя это тем, что задание состоит из нескольких этапов. Это происходит спонтанно. Ученики могут предложить как увеличить, так и уменьшить количество баллов за задание, потому что их восприятие сложности отличается от нашего.

В следующих статьях мы постараемся раскрыть процесс построения этой системы. Расскажем о видах критериального оценивания, о формах работы с использованием нашей системы, об особенностях критериального оценивания на уроках различных типов. Мы проиллюстрируем все материалы конспектами уроков, чтобы на практике показать действенность предложенной системы.

Из каких же элементов складывается система?

Каталог умений по данной теме — это таблица, в которой показано, на какие умения — КЭСы — делится тема, сколько за каждое умение можно получить баллов.

Лист прохождения учебной темы выдается ученику, заполняется на первом уроке изучения темы, чтобы ученик понимал, из каких умений состоит тема и как набрать баллы на интересующую его оценку. В этом листе даются примеры заданий и указываются уровни, которые ученик может достичь при изучении темы.

Лист оценивания учебной темы — лист со списком класса, в который учитель заносит результаты проверочных работ по теме в баллах. Сумма баллов и переводится в оценку по данным критериям.

Лист подготовки к контрольной работе, где приводится демоверсия контрольной работы. На уроке в демоверсии появляются баллы, демонстрирующие количество умений, которые применяются при решении задания, согласно вышеупомянутому каталогу.

Лист оценивания контрольной работы, в который учитель заносит результаты проверки контрольной работы.

Лист самоанализа контрольной работы заполняется учеником на уроке самоанализа контрольной работы для самооценки.

Лист рефлексии — в нем подсчитывается количество правильно примененных умений при решении заданий контрольной работы и дается их качественная оценка (указываются причины успеха или неудачи). По результатам заполнения листа рефлексии ученик составляет домашнее задание для отработки выявленных проблем, а учитель может подготовить урок для отработки проблем, возникших при решении контрольной работы.

В заключение предлагаем вашему вниманию план будущих публикаций:

✓Виды критериального оценивания: констатирующее оценивание. *В этой статье мы подробно опишем построение системы критериального оценивания, от урока подготовки к контрольной работе до урока ее анализа.*

✓Виды критериального оценивания: формирующее оценивание. *Мы опишем построение системы критериального оценивания, от создания каталога умений на первом уроке по теме до урока подготовки к контрольной работе.*

✓Особенности критериального оценивания предметных компетенций на уроках различных типов: урок открытия новых знаний. *Мы приведем примеры применения критериальной системы оценивания на первом уроке изучения нового материала и коснемся различных форм проведения урока.*

✓Особенности критериального оценивания предметных компетенций на уроках различных типов: урок рефлексии в групповой форме. *Эта статья будет посвящена групповой работе в системе критериального оценивания.*

✓Особенности критериального оценивания предметных компетенций на уроках различных типов: урок рефлексии, проводящийся фронтально или в малых группах.

✓Критерии оценивания личностных и метапредметных компетенций.

О КРИТЕРИАЛЬНОМ ОЦЕНИВАНИИ

М. ЧИБИСОВА,
г. Москва

Критериальное оценивание — одна из новых образовательных технологий, которые активно входят в школьную практику. Смысл ее в том, что работа ученика оценивается по нескольким параметрам — они и называются критериями. Конечно, учитель довольно часто, проставляя отметки, руководствуется несколькими показателями: правильно ли решено, верно ли оформлено и т.п. Но технология критериального оценивания предполагает, что, во-первых, эти критерии четко и ясно называются учителем, то есть дети о них знают, а во-вторых, за каждый критерий выставляется отдельная оценка (балл, отметка и т.д.). Самый яркий пример критериального оценивания, который нам знаком со школьных лет, — две отметки за сочинение: одна за грамотность, вторая за содержание.

Критерии, разработанные авторами статьи, заносятся в таблицы оценивания и самоанализа, то есть представлены наглядно. Такие таблицы могут варьироваться от темы к теме, но поскольку они построены единообразно, то детям легко в них ориентироваться. Также важно, что критерии разрабатываются учителем вместе с детьми. Правда, это уже высший пилотаж. Но начать нужно с простого: построить таблицу оценивания по выбранной теме и самому выделить критерии.

Что может служить критерием?

Умения или навыки, которыми ученик должен овладеть при изучении темы. Именно этот вариант мы видим в данной модели: каждая тема раскладывается на составляющие, которые и выступают в качестве критериев.

Этапы работы. Например, чтобы решить задачу, нужно записать условие, затем составить уравнение, а потом его решить. Значит, нужно оценить каждый из этих этапов.

Характеристики работы. Скажем, для оценки самостоятельной работы учитель использует параметры: оформление, скорость, правильность. Такой вариант подойдет для пятиклассников. Удобно использовать подобные критерии при оценке проектной работы, ими могут быть оригинальность, использование информационных технологий и пр.

Типы задач. Допустим, при изучении определенной темы дети должны научиться строить графики разных типов. Тогда каждый тип графиков и станет критерием.

Если вы начинаете использовать систему критериального оценивания, подумайте, какой из этих вариантов подойдет вам и классу, с которым вы будете экспериментировать.

При критериальном оценивании может использоваться традиционная пятибалльная отметка, но можно выбрать и другие модели. В данной статье мы видим разные варианты: в одном случае за выполнение каждого этапа начисляется по одному баллу, в другом — от 1 до 3 баллов. При таком подходе проще выйти за рамки привычных отметок.

Очень важно, чтобы критериальное оценивание не проводилось формально, его итоги можно использовать в различных целях (и в статье об этом говорится): для определения типа домашнего задания, для оценки уровня готовности к контрольной работе и пр. Например, авторы статьи помогают ученикам выбрать стратегию подготовки к проверочной работе. Так что если вы вводите систему критериального оценивания, то не забудьте ответить и себе, и детям на вопрос, о чем говорят полученные ими баллы?

Как критериальное оценивание может переводиться в отметку по пятибалльной шкале? Во-первых, можно обратиться к опыту авторов: определенная сумма баллов соответствует той или иной отметке. Во-вторых, можно выставлять несколько отметок за работу (как в примере с сочинением). Но это возможно не всегда. Если дети выполняют длительный проект, поставить несколько отметок будет логично, а вот за небольшую работу на уроке — вопрос дискуссионный. В-третьих, общая отметка может выводиться как среднее арифметическое баллов, полученных по разным критериям. В-четвертых, можно выставлять «зачет», а не отметки.

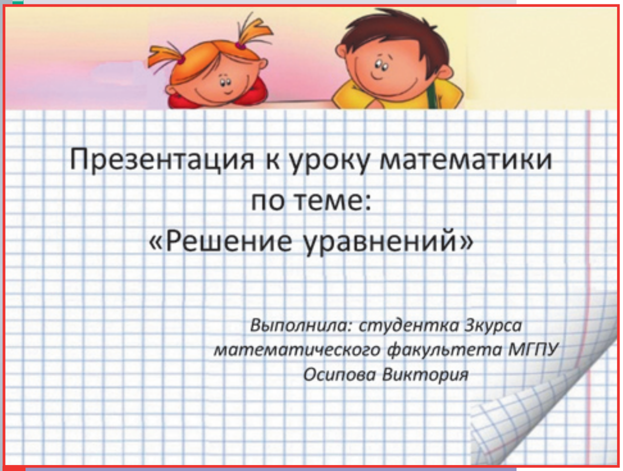
Кто может осуществлять оценивание?

Сам учитель. И с этого лучше начинать знакомство с данной технологией, однако долю такого оценивания следует постепенно уменьшать.

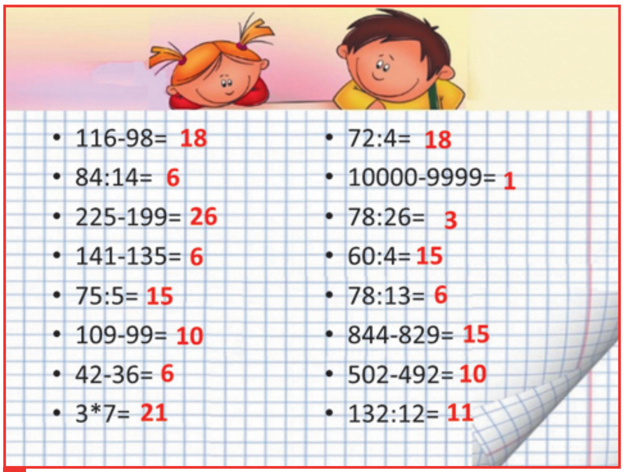
Дети могут оценивать друг друга. Многим проще научиться пользоваться критериями, анализируя чужую работу, а не свою собственную.

Ученик оценивает себя сам. Именно вариант самооценивания используют авторы статьи.

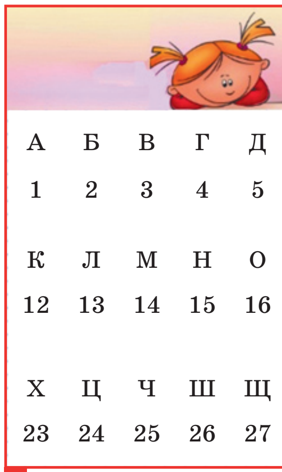
Что дает ученику критериальное оценивание? Прозрачность отметки. Эта система позволяет избежать хорошо знакомых учителю претензий вроде «У меня все то же самое, почему ему четыре, а мне три?» Критериальное оценивание помогает ученику увидеть свои слабые и сильные стороны. Ему становится ясно, что, например, составлять уравнения и решать их он умеет, но над оформлением работы нужно еще поработать. А это способствует формированию устойчивой адекватной самооценки, а также развитию рефлексивных компетенций, о которых говорится во ФГОС.



1



2



3

Фрагменты презентации публикуются в авторской редакции

Сегодня в рубрике «Разбор урока» мы обсуждаем урок в 5-м классе, проведенный студенткой 3-го курса Института математики, информатики и естественных наук МГПУ Викторией ОСИПОВОЙ. Обсуждают урок ее сокурсники: Александр ЖДАНОВ, Екатерина ГУЩИНА, Екатерина ВЫГОННАЯ, Диана СИТДИКОВА, Полина НИКИТИНА, Юлия ВОЙНОВА, Таисия ТЕРЕНТЬЕВА, профессор кафедры высшей математики и методики преподавания математики Лариса Олеговна ДЕНИЩЕВА.

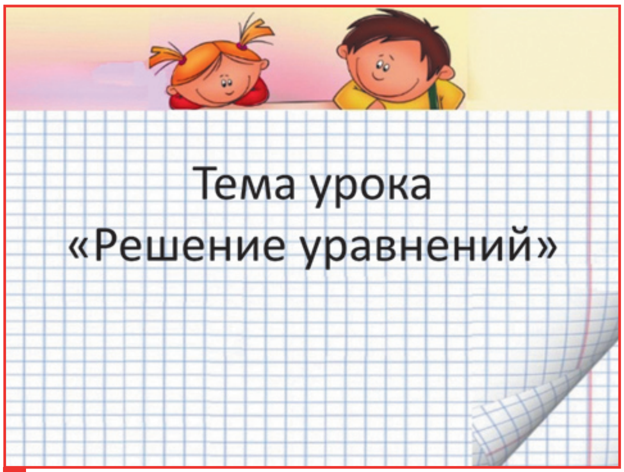
5 класс

ТЕМА УРОКА: «РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ»

Учебник: Виленкин Н.Я. и др. Математика, 5 класс. — 2008.
Тип урока: тематическое повторение.
Цели урока:
образовательные: научить решать уравнения, формировать умения решать задачи с помощью уравнений;
воспитательные: воспитание таких личностных качеств, как внимательность, организованность, дисциплинированность;
развивающие: развитие аккуратности, наблюдательности, логического мышления; навыков самостоятельности.
Формы работы: фронтальная, парная, индивидуальная.
Оборудование: интерактивная доска, презентация, раздаточный материал.

А	Б	В	Г	Д	Е	Ё	Ж	З	И	Й
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
К	Л	М	Н	О	П	Р	С	Т	У	Ф
12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Я
23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33

К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru (Авторская презентация)



4

5

Ход урока

I. Организационный момент
(6–7 мин.)

Здравствуйте. Приготовьтесь к уроку, запишите в тетрадях число, «Классная работа». Чтобы узнать тему сегодняшнего урока, устно решим несколько примеров. 2 В выборочном порядке я буду спрашивать ответы. Слушайте ответы внимательно, проверяйте и правильные результаты вычислений записывайте отдельной строкой через запятую. Зачем это нужно, вы узнаете позже.

Задание 1. Выполните действие:

$116 - 98$; → $84 : 14$; → $225 - 199$; →
→ $141 - 135$; → $75 : 5$; → $109 - 99$; →
→ $42 - 36$; → $3 \cdot 7$; →
→ $72 : 4$; → $10\,000 - 9999$; →
→ $78 : 26$; → $60 : 4$; → $612 : 102$; →
→ $844 - 829$; → $502 - 492$; → $132 : 12$.

Ответы: 18, 6, 26, 6, 15, 10, 6, 21, 18, 1, 3, 15, 6, 15, 10, 11.

Посмотрите на числа, которые вы записали в качестве ответов, сопоставьте их с буквами алфавита, имеющими данные порядковые номера.

На слайде вы видите русский алфавит. 3

Итак, какова тема нашего урока?

[Решение уравнений.]

Запишите ее в тетрадь. 4

II. Актуализация знаний
(7–8 мин.)

Давайте мы с вами немного поиграем. Нам нужно найти уравнения среди предложенных записей. Если я показываю числовое выражение или числовое равенство, то вы поднимаете руки вверх, а если уравнение, то хлопаете в ладоши один раз. 5

Задание 2. Укажите уравнения среди предложенных записей:

$75 - 3 = 15 + 57$; $5 - x = 3$;
$2 \cdot 4 + 7$; $5y = 65 - 30$;
$(100 - 32) : 17$; $4 + (6 - 3) : 2$;
$x : 7 + 11 = 21$; $12 + 3 = 9 + 6$;
$(48 + k) \cdot 8 = 400$.

Итак, что называется уравнением?

[Равенство, содержащее букву, значение которой надо найти.]

А сейчас мы сыграем в «Молчанку». 6 Вам необходимо в полной тишине за 2 минуты решить следующие уравнения.

Задание 3. Решите уравнение:

а) $34 + a = 34$; б) $58 - d = 0$;
в) $m + m = 0$; г) $c + 10 = 90$;
д) $9 + x = 16$; е) $d - 5 = 45$;
ж) $24 - a = 12$; з) $63 - c = 1$.

Ответы: а) 0; б) 58; в) 0; г) 80; д) 7; е) 50; ж) 12; з) 62.

Сверьте ответы с записанными на слайде. 7 Если вы допустили ошибку, поднимите руку.

Вспомните, что значит решить уравнение.

[Найти все его корни или убедиться, что их нет.]

А что называется корнем уравнения?

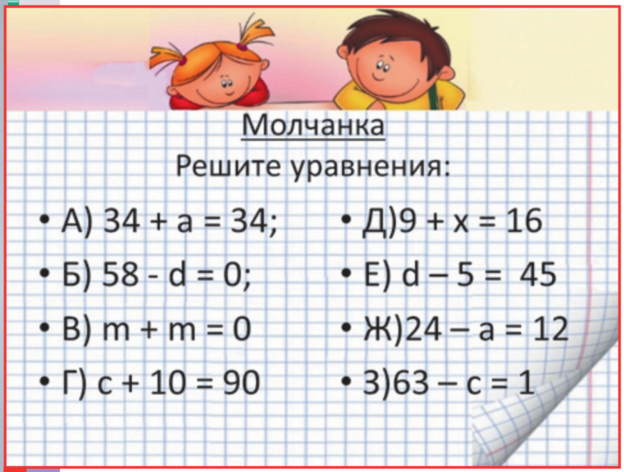
[Значение буквы, при котором из уравнения получается верное числовое равенство.]

III. Самостоятельная работа
(7 мин.)

Задание 4. Восстановите уравнение по его записи; запишите его в тетради; решите его. 8

Вариант 1	*Вариант 2*	*Вариант 3*
* – * = 5;	* – * = 7;	* + * = 18;
$x = 20 + 5$.	$x = 21 - 7$.	$x = 18 - 10$.

Поменяйтесь тетрадями с соседом по парте, проверьте, правильно ли он восстановил и решил свое уравнение; если «да», поставьте плюс в его тетради.



6

7

8

IV. Фронтальное решение задачи с помощью уравнения (8 мин.)

Задача. В мире существует около 30 различных видов лягушек. Лягушки различаются по размерам, форме и цвету. Леопардовая лягушка меньше лягушки-быка в 4 раза. Найдите их длины, если лягушка-бык на 15 см длиннее леопардовой. 9

Анализ условия.

– О каких лягушках говорится в задаче?

[О леопардовой и лягушке-быке.]

– Во сколько раз леопардовая лягушка меньше лягушки-быка?

[В 4 раза.]

– На сколько сантиметров лягушка-бык длиннее леопардовой?

[На 15 см.]

– Что требуется найти в задаче?

[Требуется найти их длины.]

Поиск решения.

– Как мы будем решать эту задачу?

[С помощью уравнения.]

– Что мы обозначим за x?

[Длину леопардовой лягушки.]

– Какие еще величины нам неизвестны?

[Неизвестна длина лягушки-быка.]

– Как ее можно выразить через x?

[Длина лягушки-быка будет равна $4x$.]

– Что еще известно об их длинах?

[Длина лягушки быка на 15 см больше, чем у леопардовой лягушки.]

– Какое уравнение мы можем составить?

[Составим уравнение $4x - x = 15$.]

Теперь один ученик решит это уравнение на доске, а остальные в своих тетрадях.

V. Самостоятельная работа (10–12мин.)

Проведем проверочную работу. Но вы сами можете выбрать, какие задания вы хотите и можете решить. У меня есть карточки трех цветов, на каждой 7 уравнений. На синих карточках записаны самые простые уравнения, на зеленых — уравнения среднего уровня сложности, на красных — уравнения посложнее. Если решите правильно все уравнения синей карточки, то получите «4»; выбрав зеленую карточку, вы можете допустить одну ошибку и также получить «4»; только выбрав красную карточку, у вас появляется возможность получить пятерку. Сейчас вам необходимо принять решение, карточку какого цвета вы хотели бы получить.

Красная	Зеленая	Синяя
$(16 + x) + 2 = 27$	$x + 607 = 700$	$x + 7 = 17$
$(a - 65) - 96 = 100$	$309 + a = 411$	$13 + a = 19$
$643 - (112 + y) = 133$	$y - 159 = 331$	$30 - y = 26$
$(24 - m) + 37 = 59$	$803 - m = 83$	$m - 52 = 12$
$11 + (b + 23) = 44$	$b + 186 = 300$	$64 - b = 33$
$15 + (91 - p) = 88$	$p - 94 = 121$	$p - 46 = 5$
$(z + 247) - 72 = 427$	$511 - z = 108$	$92 + z = 100$

VI. Итоги урока. Рефлексия (2 мин.)

Чем мы занимались сегодня на уроке?

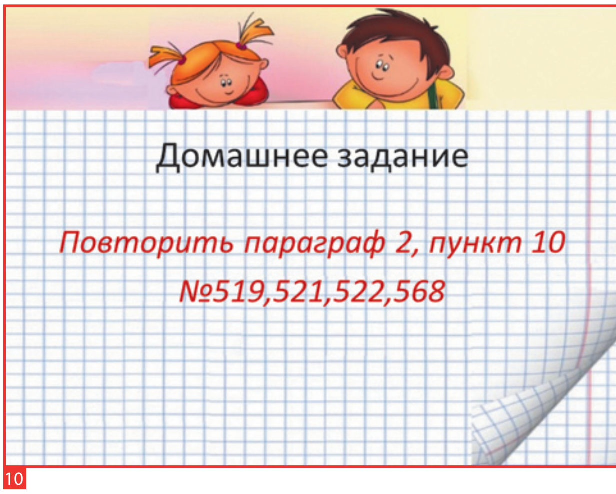
[Решали уравнения и задачи с помощью уравнений.]

Понравился ли вам урок? Если на уроке вам все было понятно, нарисуйте на полях своей тетради квадратик; если в целом все понятно, но остались вопросы, — треугольник; а если у вас возникли трудности с большей частью данного материала, то кружок. Тетради сдайте. А теперь пришло время выставления оценок.

VII. Домашнее задание (2 мин.)

Повторить пункт 10, решить № 519, 521, 522, 568. 10

9



10

Обсуждение урока

Л.Д. Уважаемые коллеги, сегодня мы обсуждаем урок в 5-м классе по теме «Решение уравнений». Это урок повторения. При подготовке таких уроков существуют, как правило, два подхода. В первом случае учитель сосредотачивает все внимание на отработке алгоритмов решения основных типов задач и предлагает учащимся решить те задачи, в которых они допускают типичные ошибки, которые ранее вызвали серьезные затруднения и которые часто предлагаются при административных проверках состояния знаний и на итоговой аттестации школьников. Во втором случае учителя предлагают школьникам еще раз прочитать теорию по учебнику и проводят опрос по всем определениям и способам решения и пр.

Но есть и третий подход к организации уроков повторения: учитель ставит задачу систематизации и обобщения знаний и способов деятельности, которые были изучены ранее. При этом обновляются и идеи решения задач: становится возможным комбинировать разные темы, применяя методы решения из разных разделов курса. При этом учитель разрабатывает стратегию в зависимости от уровня подготовки класса, учитывая индивидуальные продвижения школьников. Но никто не сомневается, что при проведении урока повторения по теме учитель должен убедиться в том, что ученики овладели теоретической составляющей темы, а также научились решать задачи на ее практическое применение.

Кроме того, при повторении у учителя есть возможность решать и многие другие дидактические задачи: развития математической речи учащихся, творческого мышления, УУД, математической компетентности и пр.

При анализе урока, который мы с вами посмотрели, прошу вас подумать над следующими вопросами.

1. Какие учебные действия преобладают на уроке повторения и почему?

2. Как отличаются задачи, включаемые в урок повторения, от задач, используемых на уроках закрепления?

3. Что можно сказать о планировании опроса и оценивании ответов учащихся на уроке повторения?

4. Какие УУД формируются на уроке повторения?

А.Ж. Пожалуй, я начну. Урок произвел приятное впечатление: Вика продумала каждый этап занятия и формы работы учащихся. Задания были разнообразными и интересными. Но мне не совсем понятно, почему в образовательных целях урока среди прочих она указала: «Научить решать уравнения»? Ведь урок-то итогового повторения.

Т.Т. Я тоже согласна, что для урока повторения такие образовательные цели ставить некорректно: нельзя научить решать уравнения в 5-м классе. Что же будет в 7–9-х классах?

Е.В. А мне хотелось бы продолжить разговор про этапы урока. Начну со стимулирующего задания. Ученики должны были устно решить примеры и расшифровать запись из полученных ответов с помощью ключа. Эта работа объединила устный счет и формулирование темы урока (что способствует формированию регулятивных УУД). Задания несложные, справиться с ними может большинство учащихся, что создаст ситуацию успеха и желание активно работать на уроке. Мне понравилось.

Ю.В. На мой взгляд, здесь это задание неуместно. Примеры однообразны, их очень много, и они не относятся к теме урока. А тратить семь минут столь драгоценного времени нерационально.

Т.Т. Я не согласна. В пятом классе устный счет имеет большое значение, и данное задание организует учащихся на работу. Кроме того, как посмотреть: можно сказать, что задания однообразны, а можно — что они отрабатывают небольшой набор определенных приемов.

Е.В. На втором этапе урока, играя, ученики отвечают на вопросы: либо хлопок в ладоши, либо поднятие рук. И учитель видит ответы всех, отмечая действия ученика. Такая форма ответа целесообразна, ведь пятиклассники очень активны в силу своего возраста, им хочется знать, правильно они ответили на поставленные вопросы или нет. Кроме того, такая работа способствует развитию внимания учащихся.

Д.С. Мне понравился переход от шумной игры к «Молчанке». Это помогло учащимся настроиться на дальнейший ход урока. Все эти игровые моменты позволили им активно повторить материал и способствовали установлению рабочей обстановки на уроке.

Е.В. Лично я выделила следующие формы работы: фронтальную, парную и индивидуальную. Они плавно сменяют друг друга, и ученики не так сильно устают на уроке.

А.Ж. Мне кажется, что взаимопроверку не стоит считать парной формой работы, так как учащиеся в это время не взаимодействуют между собой. Но в целом Вика эффективно использовала возможности класса и задействовала раздаточный материал. Все это сделало урок интересным.

Ю.В. На мой взгляд, уравнения в «Молчанке» слишком просты для урока повторения.

Т.Т. А я считаю, что сначала нужно было провести опрос по теоретическому материалу, а потом уже решать уравнения.

А.Ж. Не согласен. Вариант, предложенный Викой, на мой взгляд, лучше, поскольку после решения простейших уравнений, да еще имея их перед глазами, ученикам будет проще ответить на поставленные теоретические вопросы, например, о корне уравнения. И такой порядок повторения больше соответствует возрасту учащихся. Но мне кажется, что следовало добавить уравнения, не имеющие корней. Это очень сложный для школьников вопрос, и надо постоянно напоминать о нем.

П.Н. И на этапе, где надо было восстановить уравнения по их решениям, мне кажется, стоило бы организовать самостоятельную работу так, чтобы каждому ученику пришлось искать все компоненты арифметических действий. Такие задания обычно не представлены на уроках изучения данной темы, а для урока повторения их включение целесообразно: в них есть элемент новизны, задания интересные сами по себе и, наверное, самые сложные на уроке.

Е.Г. Отмечу презентацию к уроку. Она красочная, текст хорошо виден. Фото к задаче дают наглядное представление о двух видах лягушек. Ну прямо межпредметная связь биологии и математики!

А.Ж. Мне тоже понравилась презентация. Она оформлена красочно, но сдержанно, нет отвлекающих элементов. Очень понравился слайд 5, где примеры на распознавание уравнений появляются не последовательно, а в хаотичном порядке, что заставляет учащихся концентрировать внимание.

Л.Д. А что вы скажете о реализации требований стандарта второго поколения в контексте нашего урока?

Д.С. Я считаю, что урок задуман в духе этого стандарта. Учитель планирует различные виды математической деятельности пятиклассников. Задания разнообразны и интересны. Задания для самостоятельной работы дифференцированы по уровню сложности, что позволяет учитывать индивидуальные особенности учащихся. Задачу о лягушках можно рассматривать как задачу, при решении которой осуществляется межпредметная связь математики и биологии, и это повышает интерес к обоим предметам.

Е.В. У меня есть замечания по работе над этой задачей. Мне кажется, что поиск решения нужно проводить подробнее, поскольку неясно, почему мы взяли за неизвестную величину длину леопардовой лягушки. А учить рациональному выбору при введении переменной — это важный аспект обучения математическому моделированию.

Т.Т. И следовало бы обратить внимание учащихся на то, что задачу можно решить, взяв за неизвестную длину другой лягушки, может быть, даже решить задачу разными способами, распределив эти способы по вариантам.

П.Н. Задача очень проста, многие справятся с ней быстрее, чем закончится поиск решения, и учителю необходимо иметь в запасе дополнительное задание. Более того, считаю, что на уроке нужно было дать больше заданий на составление уравнений.

Е.В. Еще мне показалось интересным то, как был применен дифференцированный подход в самостоятельной работе: ученики сами выбирали для себя уровень сложности заданий.

П.Н. А уместно ли давать такую работу в пятом классе? В этом возрасте учащимся сложно правильно оценить свои возможности, могут возникнуть проблемные ситуации, когда ребята, выбравшие красную карточку, будут посмеиваться над теми, кто выбрал синюю.

Е.В. А по-моему, такой подход поможет формированию личностных качеств ученика — умения ставить перед собой реальную цель, а учитель сможет увидеть уровень притязаний каждого и на основании этого будет строить последующие уроки.

Т.Т. Мне неясно предназначение зеленой карточки, поскольку, решив ее, все равно нельзя получить пятерку.

Ю.В. На мой взгляд, следует немного изменить содержание карточек, например, убрать из красной карточки пару уравнений и добавить вместо них задачу, чтобы пятерка была весомее.

А.Ж. Хотелось обратить внимание на домашнее задание. Оно, во-первых, не равноценно тем упражнениям, что были разобраны в классе. Во-вторых, уверен, что оно перегружено: три текстовые задачи, среди которых есть задачи с геометрическим содержанием, и шесть уравнений. Думаю, что было бы целесообразно дифференцировать домашнюю работу.

Д.С. Я бы добавила, что Вика не дала инструктажа к ее выполнению. А что касается дифференцированной домашней работы, то как это отразить в электронном журнале? Кроме того, дифференцированное домашнее задание может вызвать слишком много вопросов у родителей учащихся.

А.Ж. В целом урок интересный, яркий и запоминающийся. Благодаря разнообразию форм работы на уроке, а также интересным заданиям урок как по оформлению, так и по содержанию запомнится ребятам.

Л.Д. Итак, давайте вернемся к вопросам, поставленным в начале обсуждения.

Как вы все отметили, на уроке повторения преобладает самостоятельная деятельность учащихся. Главная задача учителя — спланировать различные ее формы, а также организовать «обратную связь», чтобы иметь оперативную информацию о возникающих затруднениях учащихся. Именно эта информация позволит учителю оказать индивидуальную помощь для коррекции ситуации.

Задачи, включаемые в урок повторения (даже в 5-м классе), несколько отличаются от задач, используемых на уроках закрепления. Задачи на повторение материала несут в себе элемент новизны, они могут быть более сложными по структуре условия, по используемому методу (возможна комбинация двух методов). Задачи должны быть обязательно дифференцированными по уровню сложности, поскольку именно на уроках повторения может возникнуть большой разрыв в результатах освоения материала различными категориями учащихся.

Уроки повторения позволяют организовать уплотненный опрос. Оценивать можно не только письменные задания или самостоятельную работу, но и ответы на вопросы во время фронтальной устной работы.

И как отметили участники обсуждения, на уроке повторения формируются не только познавательные УУД, но и развиваются регулятивные УУД и личностные качества школьников.

КАК СТАТЬ АВТОРОМ ЖУРНАЛА «МАТЕМАТИКА»?

Сделать это несложно: надо лишь написать статью и прислать ее в редакцию журнала. И еще одно условие — она должна быть интересна и полезна вашим коллегам.

Требования к оформлению статьи таковы:

Материал должен быть напечатан на компьютере или на пишущей машинке.

Рисунки должны быть четкими, аккуратными, выполненными на белой нелинованной или клетчатой бумаге с помощью чертежных инструментов. Если вы хорошо владеете компьютером, можете воспользоваться для этого программой Corel Draw.

Рисунки надо пронумеровать, нумерация должна соответствовать их нумерации в тексте.

Фотографии должны быть цветными. Формат фотографий, отпечатанных на бумаге, не менее 10×15 см. Размер цифровых фотографий не менее 800×600 пикселей, формат JPG, качество, используемое при сохранении JPG-файлов, высокое (high).

Прислать статью можно по почте или по электронной почте. Всю необходимую для этого информацию вы найдете на странице 2 журнала.

Для получения сертификата о наличии печатной работы необходимо заполнить карточку автора.

Фамилия		
Имя		
Отчество		
Дата рождения		
Место рождения		
Адрес проживания		
Индекс	город	
Улица		
Дом	корпус	квартира
Телефон		
Информация о профессиональной деятельности		
Должность		
Место работы (полное официальное наименование образовательной организации)		
Стаж работы		

издательство ДРОФА

2015/16 учебный год

Что такое электронный учебник | Преимущества | Демоверсия | Поддержка | Купить | Акция

Формат: ePUB

Поддерживает: Mac OS

БЕСПЛАТНЫЙ ДОСТУП
к электронным учебникам

Подробная информация об условиях бесплатного доступа к электронным учебникам в 2015/16 учебном году на сайте:

efu.drofa.ru (раздел «Акции»)

Электронные учебники издательства «ДРОФА» созданы в полном соответствии с требованиями приказа Минобрнауки России № 1559. Разнообразие методически обоснованных электронных образовательных ресурсов в сочетании с интуитивно понятным интерфейсом, удобной навигацией и встроенными возможностями автоматической адаптации к различным размерам экранов делает ЭФУ издательства «ДРОФА» уникальным образовательным продуктом, использование которого будет способствовать достижению лучших образовательных результатов.

Аналитические материалы по результатам проведения национального исследования качества математического образования в 5–7-х классах подготовлены Московским центром непрерывного математического образования, www.mccme.ru

АНАЛИТИКА РЕЗУЛЬТАТОВ НИКО

■ Национальное исследование качества математического образования в 5–7-х классах было направлено на выявление системных тенденций и факторов, затрудняющих реализацию ключевых идей «Концепции развития математического образования в Российской Федерации». Выбор классов — с 5-го по 7-й — обусловлен фиксируемыми в последние годы существенными различиями в результатах внешней оценки успешности изучения математики обучающимися начальной школы, с одной стороны, и обучающимися (выпускниками) основной и средней школы — с другой. Так, по результатам сравнительных международных исследований TIMSS российские четвероклассники заняли в 2011 г. по математике достаточно высокое (10-е) место среди 60 стран мира. Вместе с тем можно констатировать, что результаты ОГЭ и ЕГЭ по математике в последние несколько лет были критически низкими (в том числе отмечалась слабая сформированность базовых математических знаний, умений и навыков, активное развитие которых должно происходить при изучении математики в 5–7-х классах).

Таким образом, в рамках национального исследования проверялась гипотеза о заметном снижении качества математической подготовки в образовательных организациях РФ от 5-го к 7-му классу. Наряду с уровнем математической подготовки исследовались также мотивация обучающихся и их интерес к изучению математики, связь интереса и реальных учебных достижений обучающихся.

Формирование выборки образовательных организаций для участия в исследовании

В рамках национальных исследований качества образования предполагалось не только исследование уровня математической подготовки обучающихся 5–7-х классов, но и установление связей между результатами образования и социально-экономическими, социокультурными особенностями субъектов РФ, характеристиками образовательных организаций и другими факторами, учет которых обеспечивался формированием выборки участников исследования.

Каждый из проектов программы НИКО проводится на выборке участников, являющейся репрезентативной по исследуемым характеристикам в масштабах Российской Федерации и в масштабах групп субъектов Российской Федерации. Репрезентативность выборки позволяет не только судить о ряде аспектов качества образования непосредственных участников исследования, но и распространить полученные результаты на более широкие совокупности обучающихся, а именно:

– на генеральную совокупность обучающихся соответствующих классов Российской Федерации;

– на совокупности обучающихся из групп субъектов Российской Федерации, имеющих близкие характеристики с точки зрения формирования выборки.

Разбиение всех субъектов Российской Федерации на группы (кластеры), внутри которых обеспечивается репрезентативность выборки участников исследования, проводится для каждого проекта программы НИКО с учетом его особенностей на основе строгих статистических методов.

Выделение групп субъектов при проведении исследования качества математического образования в 5–7-х классах проводилось с использованием следующих критериев:

– уровень математического образования в регионе, оцениваемый по характеру распределения баллов участников ЕГЭ по математике в 2014 г.;

– уровень образования по русскому языку в регионе, оцениваемый по характеру распределения баллов участников ЕГЭ по русскому языку в 2014 г.;

– уровень экономического развития региона, оцениваемый по значениям валового регионального продукта на душу населения.

В результате регионы были разбиты на три группы: регионы с высоким уровнем результатов ЕГЭ по математике (20 регионов), со средним (50 регионов) и с низким уровнем результатов (13 регионов). Аналогично проводилось разбиение субъектов РФ по уровню результатов ЕГЭ по русскому языку в регионе. Выделены две группы: регионы с высоким и средним уровнями результатов ЕГЭ по русскому языку (76 регионов) и регионы с низким уровнем результатов ЕГЭ по русскому языку (7 регионов).

При разбиении по уровню валового регионального продукта (ВРП) на душу населения выделены три группы регионов: с высоким, средним и низким уровнями ВРП на душу населения.

Сочетание трех перечисленных показателей разбиения регионов привело к выделению 10 кластеров.

(1): г. Москва, г. Санкт-Петербург.

(2): Республика Татарстан, Удмуртская Республика, Краснодарский край, Вологодская, Калининградская, Кемеровская, Ленинградская, Московская, Мурманская, Оренбургская области, Пермский край, Самарская, Томская, Ярославская области.

(3): Ивановская, Кировская, Костромская, Рязанская области.

(4): Республика Коми, Тюменская область, Ненецкий, Ханты-Мансийский, Чукотский, Ямало-Ненецкий автономные округа.

(5): Республика Башкортостан, Республика Карелия, Республика Хакасия, Красноярский, Приморский, Хабаровский края, Архангельская, Белгородская, Воронежская, Иркутская, Калужская области, Камчатский край, Липецкая, Нижегородская, Новгородская, Новосибирская, Омская, Свердловская, Челябинская области.

(6): Республика Бурятия, Республика Алтай, Республика Калмыкия, Республика Марий Эл, Республика Мордовия, Республика Тыва, Чувашская Республика, Алтайский край, Ставропольский край, Астраханская, Брянская, Владимирская, Волгоградская, Курганская, Курская, Орловская, Пензенская, Псковская, Ростовская, Саратовская, Смоленская, Тамбовская, Тверская, Тульская, Ульяновская области.

(7): Республика Саха (Якутия), Магаданская, Сахалинская области.

(8): Амурская область, Забайкальский край, Еврейская автономная область.

(9): Республики Адыгея и Кабардино-Балкарская.

(10): Республика Дагестан, Республика Ингушетия, Карачаево-Черкесская Республика, Республика Северная Осетия – Алания, Чеченская Республика.

В результате сформирована выборка учащихся из 53 субъектов РФ. Распределение участников НИКО по классам соответствует большей наполняемости младших классов за счет улучшения демографической ситуации в стране:

Характеристики кластеров для формирования выборки

Номер кластера	Уровень математического образования	Уровень образования по русскому языку	Уровень экономического развития
1	Высокий	Высокий и средний	Высокий
2	Высокий	Высокий и средний	Средний
3	Высокий	Высокий и средний	Низкий
4	Средний	Высокий и средний	Высокий
5	Средний	Высокий и средний	Средний
6	Средний	Высокий и средний	Низкий
7	Низкий	Высокий и средний	Высокий
8	Низкий	Высокий и средний	Средний
9	Низкий	Высокий и средний	Низкий
10	Низкий	Низкий	Низкий

5-й класс — 15 973 участника;
6-й класс — 15 257;
7-й класс — 13 377;
всего — 44 607 участников.

Таким образом, с учетом методики формирования выборки и числа участников исследования качества математического образования в 5–7-х классах, каждая из выборок для соответствующего кластера может считаться репрезентативной по характеристикам, являющимся предметом исследования (без учета школ, наполняемость параллели в которых менее 10 человек). Вся выборка, на которой проводилось исследование по оценке качества математического образования в 5–7-х классах, может считаться репрезентативной по РФ и не является репрезентативной для отдельных регионов и муниципальных образований.

Основные результаты исследования

Результаты выполнения диагностических работ

Средние баллы участников НИКО

Класс	Средний балл	Максимальный балл
5-й	8,61	17
6-й	7,77	15
7-й	7,98	18

С учетом того, что максимальный балл за диагностическую работу в 7-м классе был наибольшим, представленные значения свидетельствуют о более низких результатах выполнения диагностической работы в 7-м классе по сравнению с 5-м и 6-м классами.

Отметки НИКО

Отметка НИКО	Доля участников (в %)		
	5-й класс	6-й класс	7-й класс
2	12,85	17,35	30,31
3	43,40	39,48	41,87
4	38,26	35,81	24,65
5	3,48	7,36	3,16

В диагностические работы для семиклассников была включена третья — необязательная — часть, состоящая из заданий повышенного уровня сложности.

Распределение участников, набравших баллы за выполнение необязательной части работы: 1 балл набрали 17,5% участников; 2 балла — 4,4% участников; 3 балла — 0,8% участников.

Таким образом, более 20% участников набрали за выполнение заданий необязательной части хотя бы 1 балл. Причем среди этих участников имеется значительная доля набравших достаточно высокий балл (11 и выше) за основную часть работы, что может говорить об их принадлежности к перспективной группе обучающихся, имеющих потенциал для освоения курса математики на высоком уровне.

Средние баллы участников НИКО в зависимости от результатов ЕГЭ по математике в регионе проживания участников НИКО

Класс	Уровень результатов ЕГЭ по математике	Средний балл	Медиана
5-й	Низкий	7,19	7
	Средний	8,88	8
	Высокий	9,48	10
6-й	Низкий	6,59	7
	Средний	8,00	8
	Высокий	8,47	9
7-й	Низкий	6,35	6
	Средний	7,95	8
	Высокий	9,20	9

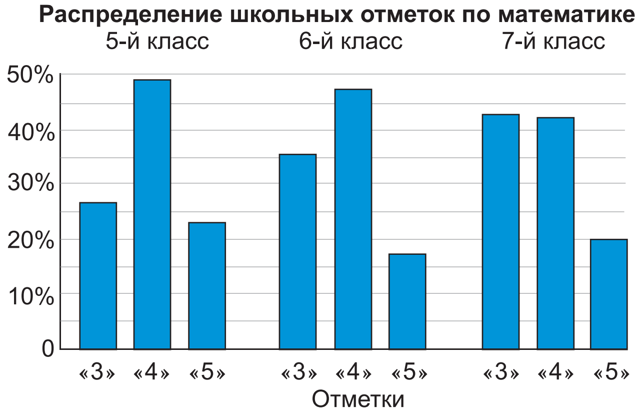
Представленные данные показывают, что результаты выполнения диагностических работ НИКО и результаты ЕГЭ по математике находятся во взаимосвязи: чем ниже результат НИКО, тем ниже результат ЕГЭ и наоборот.

И баллы НИКО, и результаты ЕГЭ по математике, вероятно, отражают объективное состояние системы математического образования в регионах Российской Федерации. Можно предположить, что проблемы и недостатки, выявляемые результатами ЕГЭ, связаны с практикой обучения математике в основной школе.

Связь результатов НИКО с годовыми школьными отметками по математике в предшествующем исследованию году

Участники НИКО в 7-м классе гораздо чаще, чем пяти- и шестиклассники, имеют в школе отметку «3» и реже, чем пяти- и шестиклассники, отметки «4» и «5». Данное утверждение справедливо для всех обучающихся в РФ, поскольку выборка НИКО является репрезентативной.

Распределение школьных отметок по математике



Можно констатировать наличие устойчивой связи между отметками обучающихся в школе и результатами выполнения диагностических работ НИКО. Однако резкое увеличение от 5-го к 7-му классу доли обучающихся, имеющих отметку «3» по математике за предыдущий год и одновременно получивших низкие результаты в НИКО, может свидетельствовать о том, что школьная отметка не является эффективным инструментом управления качеством образования, а лишь фиксирует проблему, выступая в качестве своеобразного ярлыка.

Связь результатов НИКО с отметками по математике и с уровнем результатов ЕГЭ по математике в регионе проживания участников

Нарастание от 5-го к 7-му классу дифференциации в результатах НИКО между группами регионов с высокими и низкими результатами ЕГЭ позволяет предположить, что проблемы в изучении математики не только не компенсируются от класса к классу, но и углубляются. Указанная дифференциация еще более подчеркивается различием в требованиях к уровню подготовки обучающихся по математике, проявляющемся в существенной разнице в результатах НИКО у школьных отличников из разных регионов страны.

Связь результатов НИКО по математике со школьными отметками по русскому языку

Распределение баллов НИКО в зависимости от школьной отметки по математике и русскому языку свидетельствует о сходном характере дифференциации результатов НИКО, объясняющейся отчасти и тем, что у части обучающихся в каждом классе отметки по русскому языку и математике совпадают.

Полученный результат свидетельствует о тесной связи между результатами обучения по математике и русскому языку в 5–7-х классах. Возможно, это связано с тем, что для успешного овладения в 5–7-х классах предметными умениями как по математике, так и по русскому языку необходимо развитие у обучающихся схожих метапредметных умений и овладение схожими навыками универсальных учебных действий.

Связь результатов НИКО с количеством часов, отводимых на изучение математики

Влияние дополнительных часов изучения математики на результаты НИКО в 5-м классе проявляется не во всех видах образовательных организаций. Наблюдаемая в некоторых случаях зависимость результатов НИКО от увеличения часов математики может быть связана, например, с тем, что выделение большего количества часов происходит одновременно с отбором обучающихся в более «сильный» класс, с приходом в класс более квалифицированного учителя, «под которого» выделяются часы.

Вместе с тем в 5-м и 6-м классах улучшение результатов с увеличением часов на изучение математики проявилось в основном в сельских школах. Это может быть вызвано наличием системных проблем с качеством преподавания математики в указанной категории выборки (наличие которых подтверждается и другими результатами настоящего исследования), обусловленных экстенсивным путем освоения учебной программы.

Тем не менее влияние дополнительных часов на результат отчетливо выражено в 7-м классе. Вероятно, это может быть объяснено общим увеличением объема изучаемого нового материала в 7-м классе, в результате которого при небольшом количестве уроков становится сложно освоить все содержание курса.

Связь результатов НИКО с мотивацией обучающихся к изучению математики

В рамках исследования проводилось анкетирование обучающихся — участников НИКО. Один из вопросов был направлен на выявление структуры мотивации изучения математики:

«Я изучаю математику, потому что... (можно выбрать несколько ответов):

– она будет нужна мне для работы по профессии и поступления в вуз (1);

– она нужна мне в обычной жизни, как и каждому культурному и успешному человеку (2);

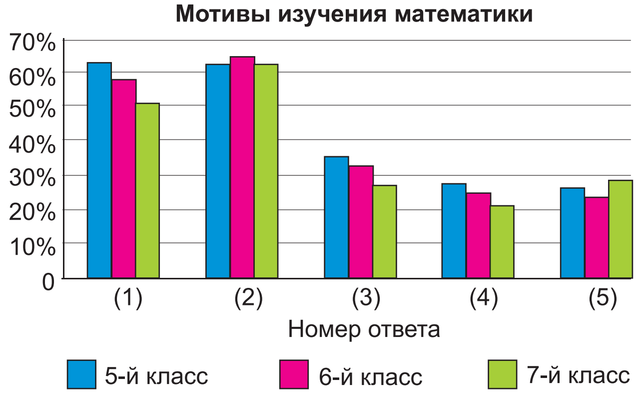
– она интересна мне сама по себе (3);

– мне нравится учитель, который ее преподает (4);

– я не хочу получать плохие отметки»(5).

Результаты анализа ответов на этот вопрос приведены на рисунке, цифрами отмечены соответствующие ответы из анкеты.

Мотивы изучения математики



Чаще всего в качестве мотива изучения математики участники НИКО во всех классах указывали на необходимость знания математики в обычной жизни. Доли обучающихся, выбирающих эту позицию, близки во всех классах.

Семиклассники реже указывают на необходимость математики для работы и поступления в вуз. Доля семиклассников, выбравших ответ «она интересна мне сама по себе», ниже соответствующих долей шестиклассников и пятиклассников.

Среди рассмотренных групп обучающихся, отметивших в анкете, что они изучают математику «только для использования в повседневной жизни», «собираются использовать математику в профессии и жизни», «имеют иные мотивы изучения математики», лучшие результаты показали обучающиеся, считающие, что математика нужна им и в профессии, и в обычной жизни. Самая существенная дифференциация результатов обучающихся этих групп наблюдается в 7-м классе.

Структура мотивации изучения математики у мальчиков и девочек различна. Во всех классах мальчики значительно чаще девочек отмечают мотив изучения математики, связанный с необходимостью для работы; для девочек большее значение имеют полезность в обычной жизни и симпатия к учителю.

Связь результатов НИКО с интересом учащихся к математике

В ходе анкетирования выделилась группа обучающихся, отметивших интерес к математике как мотив ее изучения. Данные о зависимости результатов НИКО от интереса к математике приведены в таблице.

Средние баллы участников НИКО в зависимости от наличия интереса к математике

Класс	Математика интересна	Средний балл	Медиана
5-й	Нет	8,08	8
	Да	9,66	10
6-й	Нет	7,32	7
	Да	8,94	9
7-й	Нет	7,34	7
	Да	9,51	10

В каждом классе результаты участников НИКО, указавших в качестве мотива интерес к математике, значительно выше результатов тех, кто не указал этот мотив.

Отношение обучающихся к математике с точки зрения учителей

В ходе исследования проводилось анкетирование учителей, работающих в школах —участницах НИКО. Среди вопросов были и касающиеся интереса обучающихся к математике.

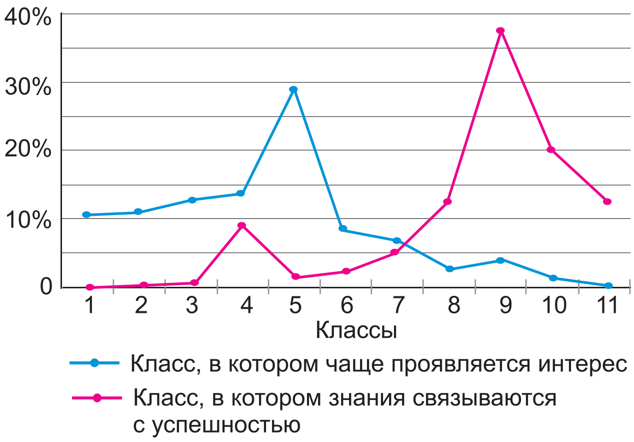
– В каком классе, по вашим наблюдениям, наиболее часто проявляется интерес к математике у одаренных детей?

– В каком классе обучающиеся начинают связывать хорошее знание математики с поступлением в вуз или профессиональной успешностью?

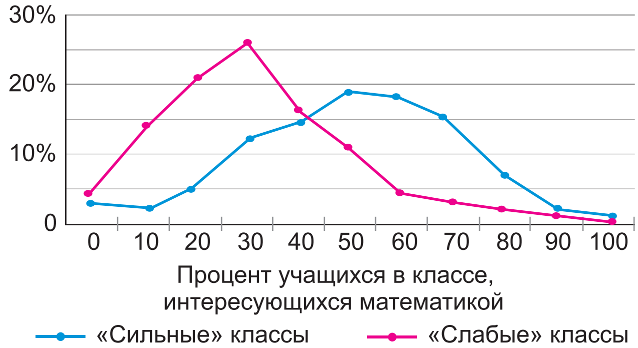
– Какая часть ваших учеников проявляет устойчивый, явно выраженный интерес к математике?

Результаты ответов на данные вопросы представлены на рисунках.

Распределение мнений учителей о том, в каком классе наиболее часто проявляется интерес к математике и в каком классе знание математики связывается с успешностью



Распределение мнений учителей о процентах обучающихся, интересующихся математикой



По оценкам значительной части учителей, интерес школьников к математике проявляется в 4-м классе, а осознание связи изучения математики с профессиональной успешностью — в 9-м.

Учителя склонны видеть значительный интерес к математике у обучающихся в «сильных» классах и невысокий интерес у обучающихся в «слабых» классах.

Далее это мнение сопоставляется с позицией обучающихся.

Эмоциональное восприятие математики обучающимися выявлялось следующим вопросом анкеты.

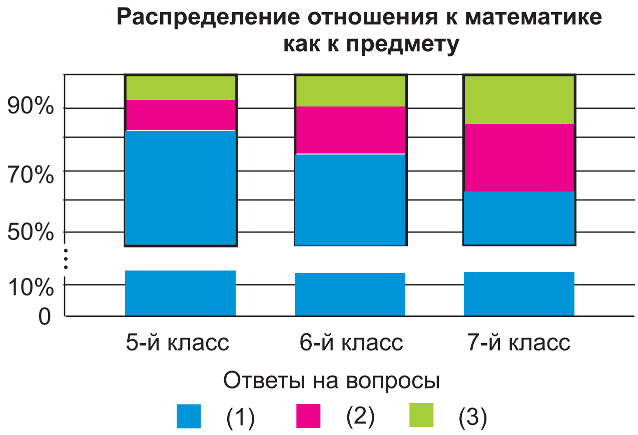
«Математика как предмет мне скорее:

– нравится, это моё (1);

– не нравится, это не моё (2);

– безразлична (3)».

Подавляющее большинство обучающихся продемонстрировали позитивное отношение к математике. Однако доля таких детей уменьшается от 5-го к 7-му классу, при этом растет и доля проявляющих безразличие к математике, и доля относящихся к ней негативно.



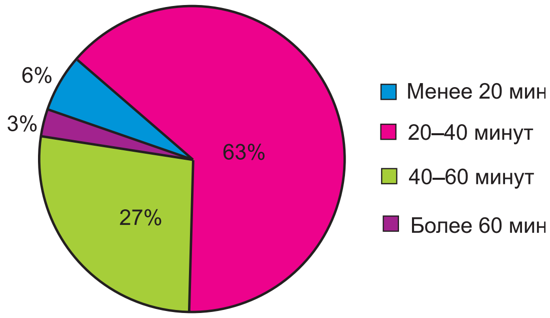
Полученный результат подтверждает, что проявляемый обучающимися интерес к математике связан с их успехами в предмете. Таким образом, мониторинг динамики интереса обучающихся к предмету может быть одним из механизмов повышения качества математического образования. Это в полной мере соответствует ключевым принципам «Концепции развития математического образования в Российской Федерации», согласно которой «в основном общем и среднем общем образовании необходимо предусмотреть подготовку обучающихся в соответствии с их запросами к уровню подготовки в сфере математического образования».

Падение интереса к математике может быть связано с целым комплексом причин, в том числе с проявлением возрастных особенностей развития детей. Вместе с тем фиксируемое по результатам анкетирования снижение интереса к математике находится в явной связи со снижением результатов выполнения диагностических работ от 5-го к 7-му классу и одновременно с увеличением числа обучающихся, получивших по итогам предыдущего учебного года отметку «3». С учетом отмеченного выше увеличения значимости количества часов, отводимых на изучение математики от 5-го к 7-му классу, можно сделать предположение о некоторой перегруженности содержания курса математики вопросами, освоение которых выходит за рамки возрастных психофизиологических возможностей обучающихся и негативно влияет на мотивацию обучающихся, снижает их интерес к изучению математики.

Необходимо также отметить различие в результатах опроса учителей и учеников, связанное с оценкой отношения последних к математике. Так, учителя преимущественно оценивают долю интересующихся предметом как 30% в «слабых» классах и 50–60% в «сильных» классах. А результаты анкетирования школьников показывают, что хотя позитивное отношение к предмету («это моё») и падает от 5-го к 7-му классу, но всё же находится на достаточно высоком уровне (от примерно 83% в 5-м классе до примерно 62% в 7-м классе). Эти данные говорят о наличии определённого числа обучающихся, расположенных к обучению, но не проявляющих явно выраженного интереса к изучению математики. Возможно, осознание этого факта учителем может повысить эффективность его взаимодействия с классом.

Распределение мнений учителей об оптимальной продолжительности выполнения домашней работы по математике

В рамках анкетирования учителя отвечали на вопрос: «Сколько времени, на ваш взгляд, должно занимать выполнение домашней работы по математике среднего ученика?»



Большинство учителей указали, что выполнение домашней работы должно занимать менее 40 минут; почти треть учителей, задавая домашнее задание, рассчитывают, что его выполнение займет у среднего обучающегося более 40 минут.

Данный результат свидетельствует о наличии определенного стереотипа в представлении учителей о распределении времени занятий между уроками в школе и домашней работой. Общий для учителей взгляд: домашние задания необходимы, а время, которое потратит на их выполнение обучающийся, сопоставимо с целым уроком.

Представляется, что оценка эффективности подобной организации работы может составить предмет актуального исследования в области педагогики и психологии.

Характер использования компьютера участниками и результаты НИКО

Во всех классах более высокие результаты НИКО показали участники, использующие компьютер в образовательных целях; среди них ниже процент двоек и выше процент пятерок и четверок НИКО. Участники, не использующие компьютер, показали промежуточные результаты. Во всех классах участники, использующие компьютер преимущественно для игр и (или) общения, имеют более низкие результаты НИКО. Семиклассники этой группы в 45% случаев получили по результатам НИКО отметку «2».

С. КОЗЛОВ,
г. Великие Луки

О ФОРМИРОВАНИИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ КУЛЬТУРЫ

Математика в современном обществе

Математическое образование — один из важнейших факторов, определяющих уровень экономического и общественно-политического развития общества в целом и каждого человека в частности.

Платон считал необходимым включать математику в систему общего образования. «Позорно, — говорил он, — если большинство людей не имеют необходимых сведений в этой области и пребывают в невежестве. Математика пробуждает ум, придает ему гибкость, живость и понятливость. Основная задача преподавания математики не в том, чтобы дать набор полезных знаний, а в том, чтобы создать "ясную голову", чтобы ум стал способен вместить умопостигаемую истину».

«Когда мы упражняем свой ум в занятиях науками, они обостряют нашу способность к пониманию и сметают пыль невежества», — утверждает Кассиодор (сер. I тыс.).

«Кто не знает математики, — вторит ему философ Бекон (нач. II тыс.), — не может узнать никакой другой науки и даже не сможет обнаружить своего невежества».

«Задача, стоящая перед образованием, — говорил П.Л. Капица (сер. XX в.), — заключается не только в том, чтобы давать человеку всесторонние знания, но и развивать в нем самостоятельность мышления, необходимую для развития творческого восприятия окружающего мира».

Сквозь все века — одна мысль!

«Одним из главных, глобальных, факторов сегодня, влияющих на развитие системы образования, — прагматический подход, то есть сведение ее к рынку образовательных услуг. Работодатели становятся активными игроками на образовательном пространстве, побуждая "подстраивать" образование к конкретным потребностям рынка труда. Перенос рыночных механизмов чреват стратегическими потерями, которые в перспективе могут оказаться более ощутимыми, чем сегодняшняя выгода. Только фундаментально, широко образованный специалист может выгодно и эффективно адаптироваться к работе в условиях быстрой смены технологий» (материалы II Съезда математиков, 2010).

«Преступление против страны — позиционировать образование как услугу, — говорит С. Рукшин (учитель Смирнова и Перельмана). — Педагог не шлюха. Образование — системообразующий институт наций, который мы утрачиваем».

«Жажда чуда, вера в чудо — характерная черта нашего времени, — объясняет академик С.П. Новиков. — Многие стараются фантазировать и предсказывать наше будущее, наши достижения без реальной научной основы. Подобная ориентация на чудо — один из симптомов снижения общего уровня. Когда наука идет на подъем, ценятся лишь рациональные аргументы».

Даваемые в школе элементы научного образования в какой-то степени создают иммунитет против массового одурачивания.

Математика — часть человеческой культуры

Математика — неотъемлемая часть человеческой культуры, она формирует духовный мир человека, равно как и искусство. «В каких-то своих самых глубинных основаниях эстетика совпадает с математикой, и математика в своих исторически первых формах есть не что иное, как попытка воспроизведения гармонии, попытка воспроизведения красоты в ее орнаментальных формах. И числовой орнамент — это великая сила, способная пробудить математический вкус, родить математическую увлеченность у любого ребенка. Поэтому математическое мышление глубоко эстетично по самой своей сути» (философ и психолог А.М. Лобок).

На конференции по вопросам преподавания математики (Женева, 1956) бельгийский профессор В. Севэр говорил: «Больше чем когда-либо математика является одновременно культурой в лоне техники и техникой в сердце культуры. Она представляет собой культурную ценность сама по себе, и она — идеал формальной красоты, заложенной в произведениях искусства».

«Математика как школьный предмет, пожалуй, самое сложное, что есть в образовании, — писал известный математик Ю.П. Соловьев, — это и наука, и универсальный язык, однако прежде всего культурный феномен. Математика в широком смысле, математика для всех — это искусство логически правильно мыслить, владеть пространственными формами, делать правдоподобные оценки».

Изучение математики требует постоянного напряжения внимания, способности сосредоточиться (проблема сегодняшних школьников); оно требует настойчивости и закрепляет навыки работы. Поэтому «математика, — отмечает профессор Севэр, — влияет как на развитие интеллекта, так и на формирование характера».

Математически мыслящий человек — хоть на секунду — задумается при ответе на любой вопрос, даже самый простой.

Математическая культура

Школа — один из социальных институтов, созданных обществом для воспитания подрастающих поколений, где основным средством является обучение. Изучение математики в этом процессе — важное звено: содействуя решению многих воспитательных задач, оно формирует основу научного мировоззрения — ***математическую культуру***, которая предполагает:

а) овладение общими методами рассуждений, доказательств и решений;

б) понимание того, что математика позволяет отыскивать закономерности и выражать их в наиболее кратком и удобном виде;

в) представление о том, как математика «работает» в различных сферах человеческой деятельности;

г) определенный объем знаний, умений и навыков математического характера.

Как тут не вспомнить мудрость предков: «Образование — это то, что остается, когда все забыто».

Остановимся на каждой из этих составляющих.

Овладение общими методами рассуждений, доказательств и решений

Заученная математика — это абсурд. Путь в мир математики принципиально не может лежать через запоминание. Единственно возможный и по-настоящему действенный путь освоения математики — это путь понимания. Мышление — условие появления в голове человека любых знаний.

С.П. Капица, отвечая на вопрос «Что важнее: знание или понимание?», на первое место поставил *понимание* и добавил, что физтех (один из ведущих вузов мира!) на этом изначально и построен. Там на экзамене студентам можно пользоваться любыми учебниками и справочниками, но для сдачи экзамена этого мало. Можно что-то забыть, но *нельзя* (!) *не понять*.

Все детские игры, придуманные взрослыми, и различные научные теории строятся по одним и тем же законам нашего мышления.

1. Вначале мы вводим без определений первичные понятия: водящий и прячущийся (игра в прятки); конь, слон, ладья (шахматы); точка, прямая, число, множество (математика).

2. Затем устанавливаем правила игры (аксиомы): в прятках — что значит «водить» и «прятаться»; в шахматах — конь ходит буквой «Г», а ладья «по горизонталям» и «вертикалям»; в геометрии — через две различные точки проходит единственная прямая; в арифметике — для каждого натурального числа существует следую-

щее за ним натуральное число. То же и в других научных дисциплинах. И все это без «почему?». Так договорились, так принято всеми.

3. После этого, опираясь на первичные понятия, вводим новые понятия через определения. Основным средством формирования математических образцов становится математическое моделирование. Очень важно, чтобы у детей возник «свой» правильный образ нового понятия и они могли бы объяснить его «почти правильно» своими словами. Только после этого можно давать уточняющее, строгое определение и в дальнейшем с ним работать. Выдающийся математик А.Н. Колмогоров считал, что при изложении элементов анализа основным должен быть не формальный, а наглядный метод. Академик Л.С. Понтрягин говорил, что представление о гладкости линии дает край острой пластины, о который обрежешься, но не уколешься, а где уколешься — там излом. О локальных экстремумах говорят как о «вершинах» графика функций. Можно говорить о различии локальных и абсолютных экстремумов как о вершинах гор: вершин много, но Эверест один. Нахождение графика в полосе — ограниченность функции; «выпрямление» графика вдоль некоторой прямой с одновременным приближением к ней — асимптотичность.

4. Введя новые понятия, мы начинаем изучать их свойства — появляются теоремы, которые доказываются при помощи аксиом и ранее доказанных теорем. И хотя аксиомы и теоремы имеют чисто внешне одну и ту же конструкцию «если..., то...», но у них есть существенное отличие: к теоремам добавляются вопросы: «Почему?», «Что нам дано?», «Что из этого вытекает?» и «***Почему*** это следует из того, что нам дано?». Вот эти три слова, «если», «то» и «почему», и являются ключевыми словами всей математики.

«Я думаю, — писал академик А.Я. Хинчин, — что основным общим моментом воспитательной функции математического образования служит приучение воспитываемых к полноценной аргументации».

Что нам дано? И здесь первая проблема: ученики сегодня плохо читают, и еще хуже читают осмысленно. Поэтому нередко что-то пропускается, что-то теряется в ходе разбора условия задачи — отсюда первые трудности. Никто не отрицает, что компьютерные технологии осваивать нужно — веяние времени. Однако излишне частое обращение к компьютеру отучает учащихся от осмысленного чтения и восприятия текста, написания формул и рисования графиков. Компилирование при выполнении различных заданий, написании докладов и «научных работ», без пропускания материала через себя, формирует клиповое сознание, и это бич сегодняшних школьников. Да и зачем что-то запоминать и знать, когда есть Интернет? Постоянная тренировка памяти уходит в прошлое, а применение калькуляторов в школе и дома приводит к ослаблению памяти у детей. В результате сегодня мы имеем плохо пишущих, плохо осмысленно читающих и плохо считающих учеников. Знание таблицы умножения даже у сильных учеников не столь твердое, как в прошлом.

Задачи уровня В на ЕГЭ — это прежде всего точность счета, и сколько бы мы ни перерешали таких задач, вероятность ошибок остается большой. Если учесть, что задачи уровня С доступны единицам выпускников, то надеяться на хороший результат на ЕГЭ не приходится.

На уровне С, помимо того что задачи часто выходят за рамки школьной программы, есть и еще одна сложность — правильное понимание условия задачи. Поэтому сегодня нужно учить переводить условия задач на понятный язык. Приведу пример.

Задача. При каких a неравенство $F(x;\ a) > 0$ будет выполняться как только $G(x) > 0$?

Здесь $F(x;\ a) > 0$ и $G(x) > 0$ любые неравенства: иррациональные, показательные, но чаще квадратные. Обозначив множества решений неравенств $F(x;\ a) > 0$ через X и $G(x) > 0$ через Y, можно переформулировать задачу так:

При каких a $X \supset$ (содержит) Y (или $Y \subset X$)?

И все становится понятно.

Почему? Несмотря на то, что в учебниках достаточно много места уделяется доказательствам и обоснованиям, на уроках этому стало отводиться все меньше времени. Причины:

– нехватка времени: в учебники продолжают вносить элементы новых теорий (при тех же часах и без сокращения тем); так пришла теория вероятности, которую вынуждены изучать учителя только потому, что в варианты ОГЭ и ЕГЭ включена одна (всего!) задача на эту тему;

– задачи уровня В в вариантах ЕГЭ, как и большая их часть в ОГЭ, не требуют обоснований;

– ослабление мотивации к получению знаний: все вокруг кричат, что главное в жизни не знать, а вытащить счастливый лотерейных билет.

О поисках закономерностей

Мы живем в мире величин и видим, что изменение одних вызывает изменение других. Ну хотя бы: «Зарплата зависит от объема выполненной работы». Всегда возникают вопросы: «Как связаны величины?», «Какие особенности у этой зависимости?», «Как спрогнозировать результат того или иного явления?»

Функция и позволяет описывать такие связи и выражать их кратко в виде формул. Формула, график и таблица значений на разных языках задают одну и ту же зависимость (закономерность), причем каждый способ задания имеет свои достоинства и недостатки. Но вместе они достаточно полно ее представляют. Так, листок по учету кадров содержит: ФИО (аналитическое задание), фото (графическое) и биографические сведения (табличное), и этого достаточно для узнавания, получения первого представления о человеке и для взаимодействия с ним. То же и для функциональной зависимости.

Как же отыскивается формула, описывающая определенный процесс? Вначале ставится эксперимент или проводится наблюдение, результаты которых заносятся в таблицу (закономерность поймана — есть иголка в стоге сена). Затем результаты из таблицы переносятся на координатную плоскость (каждая пара связанных значений — координаты определенной точки), и получается «размытая линия» — чем больше точек, тем сильнее эта иллюзия. Линию надо узнать! Вот для этого мы и изучаем элементарные функции и их графики. Нам показалось, что эта линия напоминает, например, параболу, ось которой параллельна оси ординат. А все такие параболы имеют уравнение вида $y = ax^2 + bx + c$, это тоже мы выносим из школы. Какая из этих парабол «наша»? Существуют методы, которые по табличным данным позволяют определить коэффициенты a, b, c, и формула найдена — закон определен. Теперь без наблюдений и экспериментов можно по значениям одной из переменных находить значения другой, судить об особенностях найденной закономерности. И об этом должен помнить любой, получивший полное среднее образование (мне больше нравится — аттестат зрелости).

Как математика «работает» на нас

«Расчеты показали, что нужно сделать...» А как рассчитывали-то?

1. Прежде всего формулируется задача на языке той области, в которой она возникла. Везде, где оперируют величинами (а величина — это то, что может быть измерено), решение будет найдено на математическом поле.

2. Переводят задачу на математический язык: вводят переменные для обозначения различных величин, и прежде всего искомых, и ищут связи между ними и данными задачи. Как только это сделано, получается уравнение, неравенство, их системы и совокупности, которые надо решить, или функция, которую необходимо исследовать. Вот она — математическая модель задачи, которыми мы и занимаемся на уроках математики.

3. Затем задачу решают. Иногда для решения полученной задачи приходится дорабатывать математическую теорию, а то и создавать новую. Так, например, на заре авиастроения решались проблемы «флаттера» и «шимми» (М.В. Келдыш).

4. Решив задачу, переводят решение с математического языка на язык той области, где задача возникла, и отбирают те решения, которые удовлетворяют заданным условиям.

Путь, который мы при этом проходим, — алгоритм решения любой прикладной задачи. И это также должен понимать каждый выпускник, а тем более специалист в любой области знаний, хотя бы для того, чтобы правильно поставить задачу.

Определенный объем знаний, умений и навыков математического характера

«Что учить в школе?», «Как учить?» — вопросы, по которым сегодня так и нет единства мнений. Наверное, это от того, что к голосу учителя мало прислушиваются сегодня. Даже решения III Съезда учителей, прошедшего в октябре 2010 года, остались только на бумаге.

«Главное, чем отличалось обучение математике в прошлом, вплоть до 70-х годов XX века, — говорилось на съезде, — это реализация принципа: иметь немного понятий, но уметь выявлять между ними как можно более глубокие связи (здесь корни культуры!). Это достигалось в основном за счет решения большого числа задач возрастающей сложности. К сожалению, последняя треть XX века и начало XXI века ознаменованы инвертированием принципа: иметь много понятий и выявлять неглубокие связи между ними, что привело к “рецептурному” обучению математике (да и другим дисциплинам), часто бездоказательному».

Еще одна беда — учащающееся тестирование, идущее вразрез с развитием логического мышления. Натаскивание на ОГЭ и ЕГЭ принимает все больший размах: два-три ходульных алгоритма, повторенные многократно, — разве это математика? Какие тут задачи уровня С! Ни в коем случае не хочу обвинять учителей, которых сегодня ставят в такие условия, что поневоле хочется сделать так, чтобы тебя не трогали. Учитель сегодня вымотан, еще немного, и мы будем его искать с фонарем даже при дневном свете.

Реформа преподавания математики, начатая в 1965 году, перманентно продолжается до сегодняшнего дня. Меняется не только содержание программ, но и многие проверенные веками методы изучения. А ведь советская школа (и старая российская), веками складывающаяся как школа логического мышления, в свое время позволила нашей науке и технике занять одно из ведущих мест в мире. Страны, которые сегодня стремительно развиваются, берут на вооружение достижения именно советской школы. Неразборчивая ориентация на Запад пагубна. Кстати, и ЕГЭ, и тестирование, и многие другие «новшества» пришли оттуда. А так ли у них все хорошо? США славятся своими учеными, но они в основном не «доморощенные», да и ведущие страны Европы сегодня все больше переманивают отовсюду специалистов (в том числе и от нас), в то время как бурно развивающиеся страны растят своих специалистов.

Реформа привела к «существенному сокращению так называемых арифметических задач, которые решаются всего в несколько шагов и являются столь же арифметическими, сколько и логическими. Это обеднило развитие учеников младших классов», — подчеркивал академик Д.В. Аносов. Отход от арифметических задач сказался прежде всего на изучении геометрии: то, к чему приучались ученики в возрасте 7–11 лет, теперь начинает разворачиваться только при изучении геометрии в 12–13-летнем возрасте. И если «фактический объем знаний еще можно восполнить позднее, упущенное в ранней юности для развития любознательности, мышления и других сторон личности впоследствии восполнить очень трудно, если вообще возможно. Арифметика должна вернуться в школьные программы».

В 1972 году в школу пришла новая геометрия — был отброшен учебник Киселёва, и начались проблемы. Только через 20 лет, после появления учебников Погорелова и Атанасяна, все пришло в норму, хотя многие важные теоремы потерялись, да и элементы аналитической геометрии не были изложены должным образом.

На уроках алгебры в старшей школе до последнего времени царствовал учебник, в котором тригонометрия рассматривалась очень кратко (ее перенесли в 9-й класс, где вскоре она съежилась как шагреневая кожа), а начала анализа излагались так, как никогда не излагались ни в техникумах, ни в вузах, и никогда не будут так излагаться. И садились на студенческие скамьи (и садятся до сих пор) выпускники, имеющие смутное представление о производной и определенном интеграле, а о пределе функции, неопределенном интеграле вообще не имеют никакого представления, разве что единицы.

Пока в школе шли эксперименты и не спешили перестраиваться (если только ведущие университеты) — ждали завершения реформ, которых так и не дождались. В итоге на сегодня мы имеем дублирование школьных и вузовских программ по ряду разделов.

Напомню, что основной причиной реформы 60-х годов был разрыв между вузовской и современной математикой. Ставилась задача передвинуть часть вузовской математики в школу, что позволит, с одной стороны, дополнить вузовские программы совершенными курсами, а с другой — познакомить школьников с давно уже ставшими классическими элементами механики, дифференциального и интегрального исчислений и аналитической геометрии. С этим трудно не согласиться. Ведь «многие наши современники, — говорил французский математик Э. Борель, — не показывавшие особых успехов в школьной математике, удивятся, если узнают, что они всякий раз, рассматривая графики, столь часто встречающиеся на страницах газет, занимаются аналитической геометрией. А обсуждая большую или меньшую скорость изменения этих графиков и следствия из них, — дифференциальным и интегральным исчислением». Современному человеку нужно иметь и представление о кривых второго порядка. Без них не поймешь ни вселенских законов, ни «как это спутник может “зависать” над определенной точкой Земли», ни как Архимед сжигал корабли при помощи своих зеркал, ни почему прожектор дает направленный сноп света.

Теория пределов. Сколько раз ее вводили и выводили из школьных программ! Но без предела не сформируешь ни правильного понятия производной, ни непрерывности, не совершишь предельных переходов в геометрии и физике, значит, нужно изучать. А как? Академик Понтрягин писал, что в школьные годы он вычислял пределы, производные, интегралы и решал дифференциальные уравнения, имея только некоторое представление о пределах. Но если бы он начал изучать математический анализ с теории бесконечно малых, то никогда бы не стал математиком.

А.Н. Колмогоров считал, что «в школьных учебниках не нужно стесняться вводить так называемые недоказанные утверждения и, кроме сторонних доказательств, там, где это целесообразно, проводить правдоподобные рассуждения. В старшей школе, где идет пропедевтика высшей математики, без этого не обойтись. Опираясь на геометрические образы, сочетая доказательства и правдоподобные рассуждения без предела последовательности, я уже много лет за достаточно короткое время формирую у моих подопечных те представления о пределе, которых достаточно, чтобы научиться понимать его, вычислять и применять. Но это тема особого разговора. Замечу, что школа прекрасно обошлась бы без первообразной и определенного интеграла, а тем более без теории вероятностей. Высвободившееся же время посветить решению задач и углублению некоторых разделов, различных обобщений, названные же темы оставить для факультативов и рассматривать при углубленном изучении.

Математика в старших классах — венец школьной математики, завершающий этап ее изучения для большинства учеников. Поэтому к концу обучения у выпускников должно сложиться о ней целостное представление. Как уже говорилось выше, математическая культура зависит не от количества изученных вопросов, а от качества их осознания и понимания взаимосвязей между ними. Мы должны дать своим ученикам прежде всего ***школу***, как в балете, которая позволит им справиться с обрушивающейся на них лавиной информации, в том числе и научной. А бороться с этой лавиной, не имея ***школы***, — дело столь же бесперспективное, как и гнаться за ней.

Одна из центральных проблем сегодняшней школы — новые образовательные стандарты, которые предсказывают предисловия к нашим старым программам с добавлением популистских, заумных и псевдонаучных фраз: о воспитании личности и правах ученика, о развитии и дифференцируемом обучении, системно-деятельностном подходе, компетентности и компетенции, гуманизации и гуманитаризации, диверсификации и компьютеризации и т.п. Так, например, в требованиях к изучению математики в основной школе пункт 11 звучит так: «Понимание роли информационных процессов как фундаментальной реальности окружающего мира и определяющего компонента современной цивилизации; формирование способности выделять основные информационные процессы в реальных ситуациях, учитывать специфику протекания информационных процессов в биологических, технических и социальных системах, оценить окружающую информационную среду и формулировать предложения по ее улучшению». Вы поняли? Тогда объясните, пожалуйста, это предметно и своими словами. И этому мы должны научить учеников до 14 лет?

«Если вы не можете объяснить ***это*** доступно — значит, вы сами не понимаете ***этого*** до конца» (теория простоты А. Эйнштейна).

А стандарты уже вводятся, а учебников, соответствующих заявленным требованиям, нет и неясно, как выходить на заявленные высоты; вот уж воистину «пир по время чумы». Ни настоящего осторожного эксперимента, ни скрупулезного анализа, ни подлинного обсуждения. Сразу, с ходу, с листа.

На III Съезде ректор МГУ В.А. Садовничий говорил: «Ключевое звено школьного образования — учебник. Учебник должен быть продуктом многолетнего преподавательского опыта. Это тот вид литературы, который по определению должен быть классическим, где необходимость и степень новаторства должны быть выверены самым тщательным образом... Всякий прогресс школы может явиться лишь в результате последовательного ряда опытов очень многих учителей».

Прежде чем говорить о том, что должно быть в программах, мы должны договориться о принципах их построения. Тезис «Нет, нет, мы хотим сегодня; нет, нет, мы хотим сейчас» привел к развалу страны... и всеобщему среднему образованию, борьба за которое, как и за 100%-ю успеваемость, за «качество знаний», достигла умопомрачительных размеров. Общество же не готово к нему ни тогда, ни сейчас. Как тут не вспомнить царские гимназии и училища, которые заканчивали далеко не все. А в советской школе те, кому учеба не давалась, шли работать или учиться в ПТУ и техникумы. В СССР было верно задумано, и жаль, что дифференциация системы образования не была доведена до конца. Основное образование нужно всем, а вот дальше должна идти профилизация. Гимназии, лицеи, профилированные колледжи и училища — с одной стороны, по достижениям, с другой стороны, право выбора. В соответствии с этой классификацией и разное среднее образование, и разные программы. Ведь никто не удивляется разному высшему образованию.

ЕГЭ. Сколько о нем уже сказано. «С экзаменом все в порядке», — звучит из уст даже первых лиц государства, они «не встречали еще учителя, который был бы недоволен и критиковал ЕГЭ». Не с теми встречались! Вам их привели те, кто использует экзамен в своих целях. А учителей-штрейкбрехеров хватает. Пришли бы на съезд математиков, на котором ваши представители только отметились (поприветствовали)... А борьба за ***честный*** экзамен — это что-то из мира абсурда.

Что плохого в ЕГЭ? Во-первых, его не пишут. Это стало ясно с 2002 года, когда его ввели. Из 100 баллов для получения тройки вчера достаточно было 24, а сегодня 14 из 100. Что это за экзамен, когда основная масса сдающих не может набрать даже трети баллов? Все валят на школу, а может, вина в другом?

Во-вторых, выпускники не справляются даже с уровнем В, в котором почти нет задач старшей школы (3–5 из 12, да и те простейшие). Уровень С практически не решается (сложно), а уровень А, на котором проверялась, хоть и примитивно, вся «старшая» математика, канул в небытие. Вот и приходят в вузы те, кто практически не проверялся на знание курса старшей школы (скажем, стандарта), и теперь в вузах... доучивают школьную математику.

Нам бы лучше подумать о возвращении обязательных выпускных экзаменов «на аттестат зрелости» (6–9 в старое время), которые позволяли выпускникам еще раз пересмотреть пройденное, повторить и поучить забытое и пропущенное, систематизировать и синтезировать все свои знания (это и есть зрелость). Существующие же экзамены по выбору — это мне надо, а это нет — просто уродуют молодое поколение. Общество знает, что надо, а не школьник. А для выбора — профилизация. Как тут не вспомнить старую, вечную цель: воспитание гармонично развитого человека!

Понимаю, что многое из того, о чем я сказал, всем известно и понятно. Но исповедуя старую мудрость «Повторение — мать учения», захотелось напомнить то, что сегодня следует сохранять и оберегать, и сказать о том, что «за державу обидно». Беречь и изучать традиции российского и советского учительства — это завет молодым учителям от нас, старых учителей, от наших учителей и от учителей наших учителей. Эстафета Учительства не должна прерываться.

Литература

1. Математика в образовании и воспитании / Сост. В.Б. Филиппов. — М.: ФАЗИС, 2000. **2.** Явление чрезвычайное: Книга о Колмогорове. — М.: ФАЗИС; МИРОС, 1999. **3.** Материалы Всероссийского съезда учителей в МГУ. 28–30 октября 2010 года. **4.** *Лобок А.М.* Другая математика // Школьные технологии, 1998, № 6. **5.** *Рукшин С.* Ломоносовых больше не будет. — Режим доступа: www.gazeta.ru.

ФОТО НА КОНКУРС

Бабушкины спицы? Нет, математический конструктор!

Автор: Н.П. Григорьева, учитель математики средней школы № 1, г. Гатчина, Ленинградская обл.

Л. ГОРИНА
gorinalw@yandex.ru,
г. Михайловск, Свердловская обл.

ТАБЛИЧКИ С ЯЧЕЙКАМИ

Тема «Площадь» изучается в 8-м классе, если ориентироваться на учебник:

Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. и др. Геометрия, 7–9: Учеб. для общеобразоват. учреждений. — 21-е изд. — М.: Просвещение, 2011.

При работе с формулой учащиеся должны уметь находить любой ее элемент в зависимости от требования задачи. Значит, учитель должен организовать работу так, чтобы она способствовала запоминанию большого количества формул и включала в себя все основные приемы работы с ними.

Для этого мною разработаны тематические таблички для всех основных формул площадей. В табличках некоторые ячейки заполнены, а остальные нужно заполнить самостоятельно, применяя основные зависимости. Эти карточки я называю «Таблички с частично заполненными ячейками». Каждая табличка — это система заданий для всесторонней отработки формулы. Таблички представлены в двух видах: с подсказками (вариант 1) и без них (вариант 2). Таблички с подсказками могут быть использованы для самообразования или индивидуальной работы со слабоуспевающими учащимися, а таблички без подсказок — для контроля знаний в классе или для домашней работы.

Карточки можно применять при первичном закреплении материала, для актуализации знаний на любом этапе урока, при повторении накануне контрольной работы или экзамена.

Считаю, что разбор формул «по косточкам» и рассмотрение их в совокупности (например, площадь квадрата и периметр квадрата, площадь прямоугольного треугольника и теорема Пифагора) способствует долгосрочному запоминаю данного материала.

Формулы, представленные в табличках:

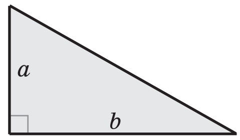
– периметр и площадь квадрата;
– периметр и площадь прямоугольника;
– площадь параллелограмма;
– площадь ромба;
– площадь трапеции;
– площадь треугольника;
– площадь прямоугольного треугольника, теорема Пифагора;
– периметр и площадь равностороннего треугольника.

От редакции. После того, как учащиеся потренировались в заполнении пустых ячеек, можно распечатать для них карточки, все ячейки которых пусты. Теперь заданием для учащихся будет составление карточки с задачами для своих товарищей. Можно выдвинуть дополнительные условия, например, чтобы все вычисляемые величины принимали натуральные значения или могли быть записаны как конечные десятичные дроби.

К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru

Площадь прямоугольного треугольника, теорема Пифагора

Вариант 1



Заполни пустые ячейки таблицы, если S — площадь треугольника, a и b — его катеты, c — гипотенуза.

S	a	b	c
$S=\frac{1}{2}\cdot a\cdot b$	$a=\frac{2\cdot S}{b}$, $a=\sqrt{c^2-b^2}$	$b=\frac{2\cdot S}{a}$, $b=\sqrt{c^2-a^2}$	$c=\sqrt{a^2+b^2}$ $(c^2=a^2+b^2)$
	4	3	
	1	1	
24	6		
		5	13
	8		17
8		4	

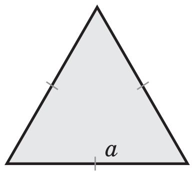
Вариант 2

Заполни пустые ячейки таблицы, если S — площадь треугольника, a и b — его катеты, c — гипотенуза.

S	a	b	c
	4	3	
	1	1	
24	6		
		5	13
	8		17
8		4	

Периметр и площадь равностороннего треугольника

Вариант 1



Заполни пустые ячейки таблицы, если S — площадь равностороннего треугольника, p — его периметр, a — сторона.

S	p	a
$S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$	$p=3a$	$a=\frac{p}{3}$, $a=\sqrt{\frac{4\cdot S}{\sqrt{3}}}$
		8
	6	
$25\sqrt{3}$		
		1,2
	1,5	

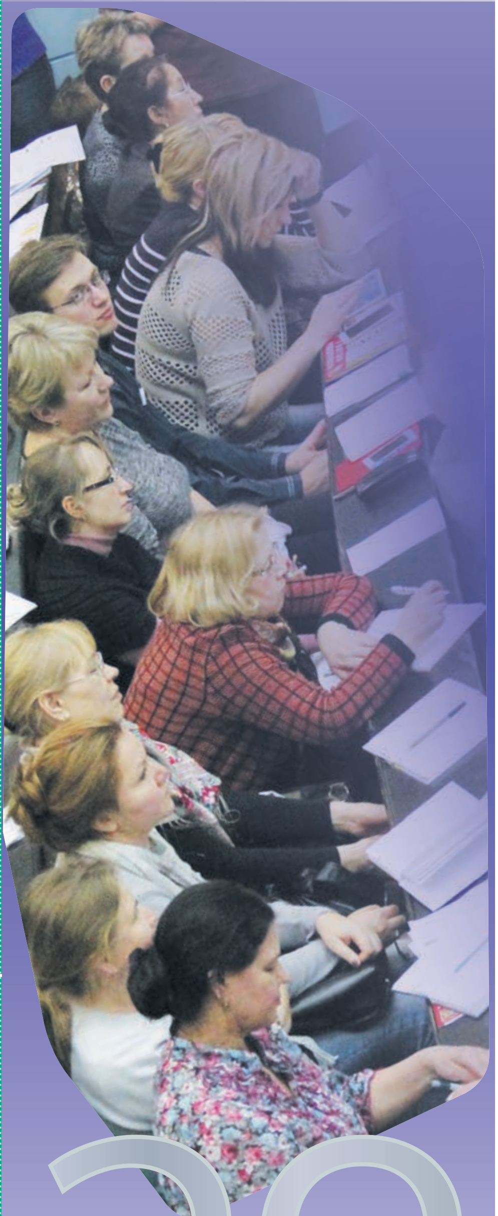
Вариант 2

Заполни пустые ячейки таблицы, если S — площадь равностороннего треугольника, p — его периметр, a — сторона.

S	p	a
		8
	6	
$25\sqrt{3}$		
		1,2
	1,5	
3		

А. БЛИНКОВ, И. ЯЩЕНКО,
г. Москва

X ЗАОЧНЫЙ ТВОРЧЕСКИЙ КОНКУРС УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ



Подведены итоги Десятого заочного творческого конкурса учителей по математике, который был организован Московским центром непрерывного математического образования и журналом «Математика» совместно с Центром педагогического мастерства (см. № 1/2015). Информация о конкурсе традиционно размещалась на сайте www.mccme.ru. Материалы прошедших очных и заочных конкурсов также опубликованы на этом сайте и ежегодно публиковались в журнале «Математика. Первое сентября». Материалы первых конкурсов можно найти также в брошюре «Творческие конкурсы учителей математики», вышедшей в издательстве МЦНМО в 2008 году. Проведение конкурса традиционно поддерживалось фондом Дмитрия Зимина «Династия».

Подчеркнем в очередной раз, что основная цель конкурса — стимулировать проявление профессиональных качеств учителя. В ходе выполнения работы участники могли продемонстрировать умение решать задачи, умение найти ошибку в чужом решении и отличить верное решение от неверного, знание и понимание взаимосвязей различных разделов школьного курса, свою математическую эрудицию. Отдельно отметим важность «методической» составляющей, так как она в большей степени отражает повседневную работу учителя. На выполнение заданий конкурса отводилось около трех месяцев.

Задания для проведения конкурса были подготовлены методической комиссией, работавшей на базе МЦНМО. Вариант включал в себя три блока.

Первый блок («математический») — математические задачи, которые требовалось решить; *второй блок* («методический») — формулировки задач и их «решения», в которых требовалось найти ошибки и, по возможности, привести верные решения. Эти блоки включали в себя задания по арифметике, алгебре и началам анализа, геометрии, комбинаторике. *Третий блок* («аналитический») состоял из одного задания, в котором требовалось выявить общий подход к ряду алгебраических тождеств.

В этом году на конкурс было прислано 146 работ (26 коллективных и 120 индивидуальных). В целом уровень участников конкурса оказался весьма достойным, что подтверждается статистикой выполнения заданий, но, к сожалению, встречались и работы, в которых выполнялось только одно или два задания.

География участников конкурса, как всегда, обширна и разнообразна — от Москвы и Санкт-Петербурга до маленьких поселков и деревень из многих краев, областей и республик России (от Калининграда до Камчатки), а также из Беларуси, Казахстана и Украины.

Каждое задание «математического» и «методического» блоков оценивалось исходя из 10 баллов, а задание «аналитического» блока — исходя из 20 баллов. Победителями конкурса объявлены участники, набравшие не менее 80 баллов из 100 возможных (5 коллективных работ и 11 индивидуальных). Призерами конкурса стали участники, набравшие не менее 60 баллов (5 коллективных работ и 34 индивидуальных). Список победителей и призеров публикуется на сайте МЦНМО.

Отметим, что многие из участников не впервые становятся победителями или призерами заочного конкурса, некоторые из них уже были и лауреатами очных конкурсов в различные годы. Все победители и призеры, имеющие нагрузку в школе не менее 9 уроков в неделю и не являющиеся победителями или призерами очного конкурса учителей математики, были приглашены в Москву для участия в очном туре XII творческого конкурса учителей математики с оплатой проживания и питания в г. Москве.

В очном туре конкурса могут также принять участие все желающие. Для участия достаточно зарегистрироваться на сайте конкурса. Информация об очном туре конкурса и о следующем заочном конкурсе будет опубликована в журнале «Математика. Первое сентября» и на сайте МЦНМО. Как всегда, параллельно с очным туром конкурса будет проводиться и интернет-тур.

Организаторы будут благодарны за любые идеи и замечания по дальнейшему совершенствованию конкурса, которые просим присылать в редакцию журнала или по электронному адресу olteach@mccme.ru.

В тексте, приведенном ниже, наряду с решениями жюри мы, по традиции, использовали понравившиеся нам решения участников конкурса. *(В скобках указаны предложившие задачи или их авторы, а также первоисточники.)*

Задания конкурса, ответы, решения, комментарии, критерии проверки

I. Решите задачи

1. (*Фольклор, предложил А. Блинков*) Какую часть сотрудников фирмы надо уволить, чтобы при уменьшении фонда заработной платы на 20% повысить среднюю зарплату оставшихся сотрудников на 20%?

Ответ: $\frac{1}{3}$.

Решение. Пусть в фирме работало N сотрудников, а фонд заработной платы составлял S рублей, тогда средняя зарплата была $\frac{S}{N}$ рублей. После увольнения средняя заплата должна равняться $\frac{6S}{5N}$ рублей, фонд заработной платы станет $\frac{4}{5}S$ рублей, значит, сотрудников должно стать $\frac{4S}{5}:\frac{6S}{5N}=\frac{2}{3}N$. Таким образом, надо уволить $\frac{1}{3}$ часть сотрудников фирмы.

Критерии проверки. Приведено полное обоснованное решение — 10 баллов.

Приведен только верный ответ — 1 балл.

2. (*В. Гуровиц, VIII Турнир им. А.П. Савина*) На плоскости отметили 8 точек. Каждую пару точек соединили отрезком и к каждому такому отрезку построили серединный перпендикуляр. Могло ли оказаться так, что на каждом построенном перпендикуляре лежит ровно две отмеченные точки?

Ответ: да, могло.

Решение. Например, построим квадрат, а вне его на каждой стороне — равносторонний треугольник (рис. 1).

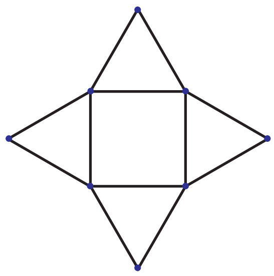


Рис. 1

Восемь отмеченных точек — их вершины. Отрезки, соединяющие остальные пары точек, проводить не будем (*чтобы не загромождать чертеж*).

Ввиду симметрии, образуются отрезки шести видов: 1) и 2) — стороны и диагонали квадрата; 3) остальные стороны построенных треугольников; 4), 5) — отрезки, соединяющие «дальние» вершины соседних или противолежащих треугольников; 6) — отрезки, соединяющие наиболее удаленные друг от друга вершины квадрата или треугольников.

Тогда: 1) серединный перпендикуляр к стороне квадрата содержит ровно две вершины противолежащих треугольников; 2) одна диагональ квадрата является серединным перпендикуляром к другой; 3) серединный перпендикуляр к стороне треугольника (но не стороне квадрата) содержит сторону соседнего треугольника; 4) серединный перпендикуляр к отрезку, соединяющему соседние «дальние» вершины, содержит диагональ квадрата; 5) один отрезок, соединяющий противолежащие «дальние» вершины, является серединным перпендикуляром к другому. Для каждого отрезка такого вида найдется другой отрезок того же вида, являющийся к нему серединным перпендикуляром.

Комментарий. Отметим, что ту же самую конфигурацию точек можно было получить из других соображений (что и сделали некоторые участники). Рассмотрим единичный квадрат и на прямых, содержащих его стороны, отложим от каждой вершины по два отрезка длины $x=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$. Полученные 8 точек — искомые (рис. 2).

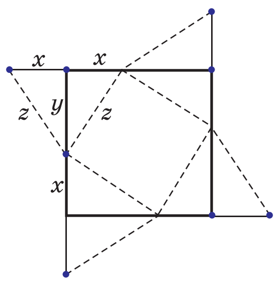


Рис. 2

Проведя линии, показанные на этом чертеже пунктиром, несложно убедиться в том, что такое расположение точек аналогично показанному на рисунке 1. Действительно,

$$y=1-x=\frac{3-\sqrt{3}}{2},$$

$$y=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{4}+\frac{12-6\sqrt{3}}{4}}=$$

$$=\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}=\sqrt{3}-1=2x.$$

Кроме того, равносторонние треугольники на сторонах квадрата можно было строить и внутрь квадрата.

Критерии проверки. Приведено полное обоснованное решение — 10 баллов.

Приведен только верный чертеж без пояснений — от 6 до 8 баллов.

3. (*Киевские математические олимпиады*) Известно, что при любых целых значениях x выражение ax^3+bx^2+cx принимает целые значения. Докажите, что $6a$ — целое число.

Решение. Способ I. Пусть $f(x)=ax^3+bx^2+cx$ — целое число при любых целых x, тогда $g(x)=f(x+1)-f(x)=3ax^2+2bx+c$ также целое. Аналогично, $h(x)=g(x+1)-g(x)=6ax+2b$ — целое и $h(x+1)-h(x)=6a$ — целое число.

Способ II. Пусть $f(x)=ax^3+bx^2+cx$. Из условия следует, что $f(1)=a+b+c$ и $f(2)=8a+4b+2c$ — целые числа. Тогда число $f(2)-2f(1)=6a+2b$ также целое. Кроме того, целым является число $f(-1)=-a+b-c$, значит, число $f(1)+f(-1)=2b$ также целое. Если $6a+2b$ — целое и $2b$ — целое, то $6a$ — целое.

Критерии проверки. Приведено полное обоснованное решение — 10 баллов.

Задача не решена, но есть верные идеи и нет грубых ошибок — 1–2 балла.

4. (*А. Блинков, XX Турнир им. А.П. Савина*) В шахматном турнире участвуют 2014 игроков. В каждом туре они произвольным образом разбиваются на пары так, чтобы шахматисты в каждой паре ранее в этом турнире между собой не играли. Турнир заканчивается, когда такое разбиение провести невозможно. Какое наибольшее количество туров можно гарантированно провести в таком турнире?

Ответ: 1007.

Решение. Докажем, что может возникнуть ситуация, при которой нельзя будет провести больше 1007 туров. Занумеруем шахматистов в каком-нибудь порядке числами от 1 до 2014. Пусть в каждом туре встречались игроки с номерами разной четности, тогда за 1007 туров все такие пары уже сыграют, а в следующем туре в каждой паре должны играть шахматисты, у которых номера одной четности. Но как четных, так и нечетных номеров — по 1007, поэтому разбить на пары всех шахматистов уже невозможно.

Пусть проведено не больше 1006 туров. Докажем, что всегда можно провести хотя бы еще один тур. Разобьем шахматистов на пары произвольным образом. Пусть игроки A и B, оказавшиеся в одной паре, уже встречались до этого. Тогда среди 1006 других пар шахматистов обязательно найдется такая пара (C; D), с игроками которой A и B провели в совокупности не более одной игры. Поэтому, перегруппировав этих четырех шахматистов одним из двух способов: (A; C), (B; D) или (A; D), (B; C), мы получим две пары, в которых шахматисты еще не играли между собой. Повторив, при необходимости, эту процедуру еще несколько раз, мы получим разбиение, при котором шахматисты в каждой паре между собой еще не играли.

Комментарий. В работах участников встречались также решения, использующие теорию графов, в частности, теорему Дирака.

Критерии проверки. Приведено полное обоснованное решение — 10 баллов.

Доказано только, что возможна ситуация, когда больше 1007 туров провести нельзя, — 4 балла.

К сожалению, не все участники конкурса правильно поняли условие этой задачи. Встречались работы, в которых «доказывалось», что всегда можно провести 2013 туров. Как и следовало ожидать, эта задача оказалась наиболее трудной — верные решения приведены только в двенадцати работах.

5. (*Ленинградские математические олимпиады, вариация, предложил А. Блинков*) В равнобедренном треугольнике ABC проведена окружность с центром C, касающаяся основания AB, которая пересекает боковые стороны в точках A' и B'. В образовавшейся трапеции $AA'B'B$ проведен отрезок DE, параллельный ее основаниям и разбивающий ее на две подобные трапеции. Сравните длину DE и длину дуги окружности, лежащей внутри трапеции.

Ответ: длина DE больше.

Решение. Способ I. Соединим вершину C и точку M касания окружности и AB (рис. 3). Так как CM — высота равнобедренного треугольника, то она является его медианой и биссектрисой. Пусть CM пересекает $A'B'$ в точке N, тогда CN — высота, медиана и биссектриса треугольника $A'CB'$.

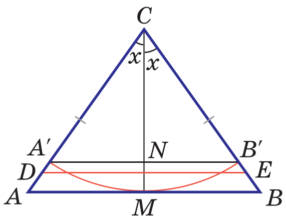


Рис. 3

Обозначим: $CM = R$, $\angle BCM = x$ (радиан), где $0<x<\frac{\pi}{2}$, тогда длина дуги $A'B'$ равна $2Rx$. Основания трапеции $AA'B'B$: $A'B' = 2R\sin x$, $AB = 2R\operatorname{tg} x$. Так как отрезок DE им параллелен и разбивает трапецию на две подобные, то $\frac{A'B'}{DE}=\frac{DE}{AB}$, то есть

$$DE=\sqrt{A'B'\cdot AB}=2R\sqrt{\sin x\cdot \operatorname{tg} x}.$$

Таким образом, для ответа на вопрос задачи достаточно сравнить значения выражений $\sin x\cdot\operatorname{tg} x$ и x^2 при $0<x<\frac{\pi}{2}$.

Для этого рассмотрим на $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$ две функции

$$f(x)=\sin x\cdot\operatorname{tg} x \text{ и } g(x)=x^2.$$

Так как $f(0) = g(0)$, то достаточно доказать, что

$$\forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\quad f'(x)>g'(x),$$

где

$$f'(x)=\sin x+\frac{\sin x}{\cos^2 x},\ g'(x)=2x.$$

Так как $f'(0) = g'(0)$, то для этого достаточно доказать, что

$$\forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\quad f''(x)>g''(x),$$

где

$$f''(x)=\cos x+\frac{1}{\cos x}+\frac{2\sin^2 x}{\cos^3 x},\ g''(x)=2.$$

Требуемое неравенство выполняется, так как

$$\forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\quad \cos x+\frac{1}{\cos x}>2 \text{ и } \frac{2\sin^2 x}{\cos^3 x}>0.$$

Комментарий. Отметим, что в таком рассуждении можно обойтись без второй производной, так как

$$\forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin x+\frac{\sin x}{\cos^2 x}=\operatorname{tg} x\left(\cos x+\frac{1}{\cos x}\right)>2\operatorname{tg} x>2x.$$

Кроме того, существует и чисто тригонометрический способ доказательства неравенства $\sin x\cdot\operatorname{tg} x > x^2$ при $0<x<\frac{\pi}{2}$, который указал в своей работе А.Г. Песков (Республика Татарстан). Для этого он использовал универсальную тригонометрическую подстановку:

$$\sqrt{\sin x\cdot\operatorname{tg} x}=\sqrt{\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}}=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{1-\operatorname{tg}^4\frac{x}{2}}}>2\operatorname{tg}\frac{x}{2},$$

так как

$$0<\sqrt{1-\operatorname{tg}^4\frac{x}{2}}<1 \text{ и } \operatorname{tg}\frac{x}{2}>0.$$

Следовательно,

$$x=2\cdot\frac{x}{2}<2\operatorname{tg}\frac{x}{2}<\sqrt{\sin x\cdot\operatorname{tg} x}.$$

Способ II. (*И.Н. Пономарева, г. Екатеринбург*) В силу симметрии достаточно рассмотреть «половину» треугольника ABC, сохранив основные обозначения рисунка 3. Так как отрезок DE являлся средним геометрическим оснований трапеции $AA'B'B$, то и его половина будет обладать тем же свойством в трапеции $MNB'B$. В этой трапеции проведем через точку T пересечения ее диагоналей отрезок PQ, параллельный основаниям (рис. 4).

Проведем также биссектрису CK треугольника MCB и докажем, что $MK = PT$.

Пусть

$$CB = 1,\ \angle MCK = \angle BCK = \alpha,$$

тогда

$$MB = \sin 2\alpha,\ CM = \cos 2\alpha,$$
$$MK = CM\cdot\operatorname{tg}\alpha = \cos 2\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha.$$

Так как треугольники CNB' и CMB подобны и $CB' = CM$, то $\dfrac{NB'}{MB} = \dfrac{CB'}{CB}$, откуда

$$NB' = \sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha.$$

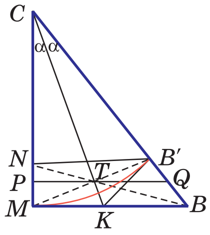


Рис. 4

Отрезок PQ является средним гармоническим оснований трапеции $MNB'B$, значит,

$$PT = \frac{1}{2}PQ = \frac{MB \cdot NB'}{MB + NB'} = \frac{\sin^2 2\alpha \cdot \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha\,(1+\cos 2\alpha)} =$$
$$= \frac{2\sin\alpha\,\cos\alpha\,\cos 2\alpha}{2\cos^2\alpha} = \cos 2\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha = MK.$$

Заметим, что длина дуги MB' меньше, чем

$$MK + KB' = 2MK = 2PT = PQ.$$

Но по неравенству между средним гармоническим и средним геометрическим, $PQ < \frac{1}{2}DE$, откуда и следует утверждение задачи.

Критерии проверки. Приведено полное обоснованное решение — 10 баллов.

Верно получено тригонометрическое неравенство, но оно не доказано или доказано неверно — 1–2 балла.

II. Методический блок

В предложенных текстах (№ 6–8) могут содержаться математические ошибки (как в условиях «задач», так и в «ответах» и «решениях»). Если некорректно условие «задачи», то объясните, почему это так. Если неверно только «решение», то укажите все ошибки и приведите верное решение.

6. (*Предложил А. Хачатурян*) «Задача». При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x, \\ x^2 + y^2 + a^2 = 2x + 2ay \end{cases}$$

имеет ровно одно решение?

«Ответ»: при $a = 0{,}25$.

«Решение». Подставив значение $x^2 - 2x$ из первого уравнения во второе, получим:

$$y^2 + a^2 - 2ay + y = 0.$$

Рассмотрим это уравнение как квадратное относительно y, тогда

$$y^2 + y(1 - 2a) + a^2 = 0.$$

Чтобы решение было единственным, потребуем равенства нулю дискриминанта:

$$D = 1 - 4a + 4a^2 - 4a^2 = 1 - 4a = 0,$$

откуда $a = 0{,}25$.

Комментарий. «Ответ» и «решение» неверны. Из того, что одно из уравнений системы имеет единственное решение, не следует, что система также имеет единственное решение.

Действительно, в нашем случае при $a = 0{,}25$ решением рассмотренного уравнения является $y = -0{,}25$. Тогда первое уравнение системы примет вид: $x^2 - 2x + 0{,}25 = 0$. Так как его упрощенный дискриминант $D' = 1 - 0{,}25 > 0$, то оно имеет два различных корня. Значит, при $a = 0{,}25$ система имеет два решения.

Приведем *одно из возможных верных решений.*

Запишем равносильную систему, преобразовав второе уравнение:

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x, \\ (x-1)^2 + (y-a)^2 = 1. \end{cases}$$

Тогда графиком первого уравнения в декартовой системе координат xOy является парабола, а графиком второго уравнения — окружность (для каждого значения a). Заметим, что прямая $x = 1$ является осью симметрии параболы и окружности (рис. 5), поэтому точки их пересечения (если они есть) симметричны относительно этой прямой.

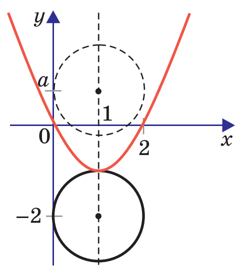


Рис. 5

Значит, система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда графики пересекаются только на оси симметрии. Этот случай соответствует их касанию в вершине параболы, причем окружность расположена ниже параболы. Отсюда следует ответ: при $a = -2$.

Критерии проверки (баллы за 1 и 2 суммируются).

1. Указана ошибка в «решении» и объяснено, из-за чего она возникла, — 5 баллов.

Ошибка в «решении» указана, но ее суть не объяснена, а показано только, что она привела к неверному ответу, — 3 балла.

2. Приведено полное обоснованное решение — 5 баллов.

Приведено верное решение, которое недостаточно обосновано (например, не указана симметрия: она возникает и при алгебраическом способе решения), — 3–4 балла.

7. (*Предложила Е. Горская*) «Задача». Сколькими способами можно выбрать из полной колоды (52 карты) 10 карт так, чтобы среди них был хотя бы один туз?

«Ответ»: $4C_{51}^{9}$.

«Решение». Поскольку требуется туз, то сначала выберем его, это можно сделать четырьмя способами. Затем достаточно выбрать произвольные 9 карт из 51. Количество способов, которыми это можно сделать, равно C_{51}^{9}. Так как оба выбора происходят независимо, то искомое количество способов равно $4C_{51}^{9}$.

Комментарий. Приведенное рассуждение и ответ неверны. Ошибка состоит в том, что некоторые случаи подсчитаны несколько раз (причем не одинаковое количество раз, поэтому верный ответ невозможно получить, разделив полученный результат на фиксированное число). В частности, в приведенном подсчете дважды учтены такие случаи: 1) выбран туз пик, а среди девяти других карт есть ровно один туз — туз треф; 2) выбран туз треф, а среди девяти других карт есть ровно один туз — туз пик.

Есть и случаи, подсчитанные трижды. Например, пусть среди выбранных десяти карт оказались три туза и еще 7 каких-то карт. Этот набор, исходя из приведенного рассуждения, можно было получить тремя способами: сначала выбирая один из тузов и дополняя его еще девятью картами. Получается, что один конкретный набор подсчитан три раза как разный. Возможны два способа рассуждения, приводящие к верному ответу, который будет записан по-разному.

Способ I. Отдельно подсчитаем количество способов выбрать ровно один туз, ровно 2 туза, ровно 3 туза и ровно 4 туза. Один туз можно выбрать C_4^1 способами, а еще 9 карт, среди которых нет тузов, — C_{48}^{9} способами. Аналогично, 2 туза можно выбрать C_4^2 способами, а добавить к ним 8 карт без тузов — C_{48}^{8} способами. 3 туза выбираются C_4^3 способами, а дополняются семью картами C_{48}^{7} способами, а 4 туза — C_4^4 способами и дополняются C_{48}^{6} способами. Используя правила умножения и сложения, получим ответ: $C_4^1C_{48}^9+C_4^2C_{48}^8+C_4^3C_{48}^7+C_4^4C_{48}^6$.

Способ II. Количество способов выбрать любые 10 карт из 52 равно C_{52}^{10}, а количество способов выбрать 10 карт, среди которых нет тузов, равно C_{48}^{10} (для этого подсчета достаточно «вынуть» тузы из колоды). Следовательно, искомое количество способов равно $C_{52}^{10}-C_{48}^{10}$.

Критерии проверки (баллы за 1 и 2 суммируются).

1. Указана ошибка в «решении» и подробно объяснено, из-за чего она возникла, — 5 баллов.

Указано только, что решение неверно, так как в колоде не один туз, а несколько, но не сказано, что это приводит к тому, что различные способы считаются различное количество раз, — 1–2 балла.

2. Приведено полное решение — 5 баллов.

8. (*Р. Пименов, использована задача № 4.12 из книги В.В. Прасолова «Задачи по стереометрии»*) «Задача». Даны три окружности: α, β и γ. Никакие две из этих окружностей не лежат в одной плоскости, но каждые две из них имеют ровно две общие точки. Докажите, что все три окружности принадлежат одной сфере.

«Решение». Пусть окружности α и β пересекаются в точках P и Q. Докажем, что существует сфера, на которой лежат обе окружности. Действительно, каждая окружность однозначно задается тремя точками, то есть окружность α задается точками A, P и Q, а окружность β — точками B, P и Q. Значит, пара окружностей задается четырьмя точками: A, B, P и Q, а через любые четыре точки пространства можно провести сферу. Третья окружность γ имеет с этой сферой четыре общие точки (две — с α и две — с β), поэтому γ принадлежит сфере.

Комментарий. Утверждение «задачи» неверно. Действительно, рассмотрим какую-нибудь сферу и две ее большие окружности, пересекающиеся в точках P и Q (рис. 6). Эти окружности однозначно задают сферу с диаметром PQ. Но через точки P и Q проходит бесконечно много окружностей, не лежащих в плоскостях рассмотренных окружностей, для которых PQ не будет диаметром, поэтому ни одна из таких окружностей не принадлежит рассмотренной сфере, а условие задачи при этом выполняется.

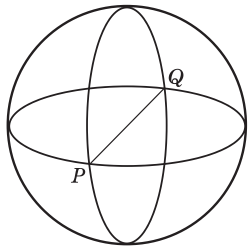


Рис. 6

Ошибка произошла из-за того, что в условии «задачи» не указано, что точки попарного пересечения окружностей должны быть различными. Если добавить это условие, то утверждение «задачи» и ее «решение» станут верными.

Кроме того, в «решении» есть неверное утверждение: «...через любые четыре точки пространства можно провести сферу».

Критерии проверки (баллы за 1 и 2 суммируются).

1. Указано, что утверждение задачи неверно и приведен контрпример, — 9 баллов.

Указано только, что утверждение неверно, — 1 балл.

2. Указана мелкая неточность в тексте «решения» — 1 балл.

III. Аналитический блок

9. (*Предложил А. Блинков*) При изучении темы «Арифметический квадратный корень» рассматриваются два тождества:

$$1)\ \left(\sqrt{x}\right)^2 = x;\ 2)\ \sqrt{x^2} = |\,x\,|.$$

1. Запишите все известные вам аналогичные пары тождеств из других разделов школьного курса.

2. Что общего у всех пар тождеств такого вида?

3. Чем принципиально различаются два тождества в каждой паре и в связи с чем возникает это различие?

4. Какие общие свойства функций используются при доказательстве тождества 2 и ему аналогичных тождеств в других парах?

Комментарий. 1. Можно указать такие пары аналогичных тождеств:

а) $a^{\log_a x} = x$ и $\log_a a^x = x$ $(a > 0$ и $a \neq 1)$;

б) $\sin(\arcsin x) = x$ и

$$\arcsin(\sin x) = \begin{cases} x - 2\pi n, \text{ если } x \in \bigcup\limits_{n\in Z}\left[-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n;\ \dfrac{\pi}{2}+2\pi n\right], \\ \pi - x - 2\pi n, \text{ если } x \in \bigcup\limits_{n\in Z}\left(\dfrac{\pi}{2}+2\pi n;\ \dfrac{3\pi}{2}+2\pi n\right); \end{cases}$$

в) $\cos(\arccos x) = x$ и

$$\arccos(\cos x) = \begin{cases} x - 2\pi n, \text{ если } x \in \bigcup\limits_{n\in Z}\left[2\pi n;\ \pi + 2\pi n\right], \\ -x + 2\pi n, \text{ если } x \in \bigcup\limits_{n\in Z}\left(-\pi + 2\pi n;\ 2\pi n\right); \end{cases}$$

г) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$ и

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x - \pi n,\ x \in \bigcup\limits_{n\in Z}\left(-\dfrac{\pi}{2}+\pi n;\ \dfrac{\pi}{2}+\pi n\right);$$

д) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x$ и

$$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x - \pi n,\ x \in \bigcup\limits_{n\in Z}\left(\pi n;\ \pi + \pi n\right).$$

2. В каждой паре тождеств используется основное свойство взаимно обратных функций; если f — некоторая функция, а f^{-1} — функция, ей обратная, заданная на промежутке строгой монотонности функции f, то первое тождество каждой пары имеет вид $f(f^{-1}(x)) = x$, а второе тождество использует равенство $f^{-1}(f(x)) = x$, но не ограничивается этим равенством, так как функция f имеет не единственный промежуток строгой монотонности.

3. Первые тождества в каждой паре таковы, что равенства выполняются при всех x, входящих в область определения внутренних функций f^{-1}, а при других значениях x выражение в их левых частях не имеет смысла. Вторые тождества в каждой паре (кроме пункта «а») устроены более сложным образом из-за того, что область определения функций f шире, чем промежуток, на котором определяются функции, им обратные.

4. Помимо уже указанного равенства $f^{-1}(f(x)) = x$, где $x \in D_f$, для доказательства тождества 2) из условия используется четность функции, стоящей в левой части. Четность может быть также использована при доказательстве второго тождества из пункта «в», а в пунктах «б», «г» и «д» может быть использована нечетность функций. Кроме того, при доказательстве вторых тождеств в пунктах «б»–«д» используется периодичность функций, стоящих в левых частях равенств.

Существует и другой способ доказательства всех таких тождеств, использующий дифференцируемость функций. Достаточно показать, что у функций, стоящих в обеих частях равенства, совпадают производные и что у этих функций равны значения хотя бы в одной точке.

Критерии проверки (баллы за 1–4 суммируются, каждый пункт оценивался из 5 баллов).

1. Верно приведены аналогичные тождества из других разделов школьного курса, причем второе тождество — для всей области определения его левой части (без ограничений), — по 1 баллу за каждое.

2. Приведено полное объяснение (общее для всех тождеств с позиции свойства взаимно обратных функций) — 5 баллов.

Приведены только верные объяснения частных случаев без обобщений — от 1 до 3 баллов.

3. Верно выделено основное отличие в общем виде — 5 баллов.

Приведены только верные объяснения частных случаев без обобщений — от 1 до 3 баллов.

4. Верно и полностью указаны только те свойства функций, которые используются при доказательствах, — 5 баллов.

Наряду с реально используемыми свойствами функций указаны также и другие, например, непрерывность и/или монотонность, которые не требуются при доказательствах, — 2–3 балла.

Указаны только те свойства функций, которые на самом деле не используются при доказательстве, — 0 баллов.

Отметим, что значительное количество участников конкурса недостаточно глубоко вникли в суть этого задания. Вместо тождеств, связанных со взаимно обратными функциями из других разделов школьного курса, записывались какие-то другие равенства (аналогичные свойства корней или свойства логарифмов и тому подобные). В этом случае выполнение всего задания оценивалось не более чем 3 баллами (в сумме). В случае, если записывались тождества, связанные со взаимно обратными функциями, но вторые тождества в парах были приведены не полностью (только для одного промежутка монотонности), то задание оценивалось не более чем 10 баллами (в сумме).

КОНКУРС «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ»

Организация конкурса. В сентябре – декабре 2015 года проходит второй тур конкурса «Математический потенциал». В туре четыре этапа, на каждом этапе — одно задание.

Участники конкурса. В конкурсе могут принять участие, начиная с любого этапа, коллективы учащихся (класс, кружок), группы учащихся разного возраста или отдельные ученики 5–10-х классов. Все участники, как коллективные, так и индивидуальные, должны иметь руководителя из числа учителей математики или преподавателей кружка. Задача руководителя: оказывать участнику организационную помощь в работе, в оформлении и отправке ее результатов.

Лауреаты и победитель конкурса. Участник, выполнивший хотя бы одно задание, будет объявлен лауреатом конкурса, а участник, выполнивший наибольшее число заданий, — победителем.

Тематика тура. В этом туре предлагается выполнение проекта под названием «Оформляем кабинет математики». Как можно узнать, что ты входишь в кабинет математики? По таблицам с математическими формулами на стене, по моделям многогранников в шкафу, по чертежным инструментам у доски. Но со временем все это требует обновления и нового взгляда. Это и есть цель проекта.

Куда отправлять работы. Почтовое отправление с пометкой на конверте «Математический потенциал» следует выслать по адресу: редакция журнала «Математика», Издательский дом «Первое сентября», ул. Киевская, д. 24, Москва, 121165.

Электронное письмо направляйте на электронный адрес: mat@1september.ru, написав «Математический потенциал. Задание: Нескучная таблица» в поле «Тема».

Сроки. Продолжительность тура: с 1 сентября по 31 декабря 2015 года.

Последний срок отправки работ любого этапа — до 1 февраля 2016 года (по почтовому штемпелю).

Заявка участника конкурса

Форма участия: индивидуальная / коллективная (*нужное подчеркнуть*) Название команды (*если есть*)	
Фамилия, имя (каждого участника)	
Школа, класс	
ФИО руководителя	
Контакты (адрес и телефон руководителя)	

К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru (Заявка участника.)

Задание 3. Нескучная таблица. Учебные таблицы по математике, которые выпускаются в настоящее время, предназначены для того, чтобы служить опорой для памяти ученика. Они содержат теоретическую информацию, необходимую для решения задач, представленную формально, следовательно, довольно скучно. Очевидно, что стен кабинета математики они не украшают, да и интерес к математике не развивают. Но так было не всегда. Самая первая выпущенная в России настенная таблица не зря хранится в Государственном Эрмитаже наряду с произведениями великих художников. Она сродни произведению искусства. Ценна она не только содержанием своим, но и богатым оформлением. В качестве очередного задания конкурса мы предлагаем вам создать свою интересную, яркую (не только по цвету, но и по идеям, которые вы заложите в ее математическое содержание и оформление) полезную таблицу (или серию таблиц для одного класса – выбор за вами). Отразите в ней свою любовь к математике, ваше понимание этой науки и ее значимости для современного общества. А вдохновением вам послужит та самая первая таблица, выпущенная во времена Петра I. Нам же присылайте фотографии того, что у вас получилось и как ваши одноклассники приняли ваше творение.

Настенная таблица «Новый способ арифметики теоретики или зрительныя», составленная Василием Ануфриевичем Киприановым и гравированная Федором Никитиным с Марком Петровым, была издана в «великом граде Москве» в 1705 году. Она хорошо продумана и весьма интересна. Многочисленные тексты удачно расположены среди художественного оформления. В центре основной текст — определение содержания арифметики, «сиречь числителницы», и общие сведения о ней, расположенные в виде горизонтальной полосы, которую подпирают пять вертикальных текстовых полос. Первая из них содержит общие сведения о числах, а каждая из остальных — одно из основных арифметических правил.

Тексты таблицы написаны на основе «Арифметики» Л.Ф. Магницкого. Кроме того, много отдельных текстов расположено в виде медальонов. Среди них тексты, прославляющие Петра I и его победы, что дает основание рассматривать эту настенную таблицу и как своеобразное политическое издание. Оформление таблицы показывает, что при ее составлении В.А. Киприанов исходил из тех же замыслов, что и при оформлении «Арифметики» Магницкого. Здесь же изображена арифметика в виде символической женской фигуры, сидящей на троне, к которому ведут ступени с теми же надписями, что и на фронтисписе книги Магницкого. Аналогичны надписи на колоннах, расположенных по обеим ее сторонам. Однако имеется и новое. У основания восьми колонн помещены рисунки, раскрывающие содержание геометрии, стереометрии, астрономии, оптики, меркатории (навигации), географии, фортификации и архитектуры. Над колоннами, прилегающими к трону, имеются изображения: над одной из них показан шар с десятью цифрами и с надписью «Сим возлетают», а над второй — шар с циркулем и надписью вверху «До звезд достигают».

Представляют интерес и восемь медальонов с портретами по бокам таблицы. Слева в этих медальонах изображены, как показывают надписи под ними, Пифагор, Гиппарх, Птолемей, Коперник; справа — Архимед, «Царь Алфонский», «Тихо Брахий», «Фоцилид».

Так в 1705 году В.А. Киприанов создал научно-технический настенный плакат, содержание которого не ограничивается областью одной математики. Наряду с наглядным показом элементов математики он раскрыл в нем содержание мореходной науки, астрономии, оптики, географии, фортификации и архитектуры, в понимание которой тогда входила и строительная техника.

Д. АЛЕКСЕЕВ,
А. ЗЕЛЕНСКИЙ,
г. Москва

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ЛОМОНОСОВ-2014»

Приводятся задания, предлагавшиеся учащимся 7–9-х классов на олимпиаде «Ломоносов» по математике 2014 года, которую проводит МГУ им. М.В. Ломоносова. Все задания даются с ответами и решениями.

В соответствии с порядком проведения олимпиад школьников олимпиада «Ломоносов-2014» по математике проводилась в два этапа: отборочный и заключительный. Отборочный этап проводился с ноября 2013 г. по январь 2014 г. Задания публиковались на сайте олимпиады olymp.msu.ru, участники выполняли их дома и высылали на проверку. К участию в заключительном (очном) этапе, который проводился в марте 2014 г. в Москве и ряде городов России, допускались только победители и призеры отборочного этапа.

Задания отборочного этапа

1. *(7–9-е классы)* В классе состоялись выборы двух учеников для поездки на международный фестиваль. Каждый из шести членов жюри выдвинул трех кандидатов:

1. Аня, Ваня, Таня;
2. Ваня, Таня, Оля;
3. Таня, Оля, Поля;
4. Оля, Поля, Коля;
5. Поля, Коля, Толя;
6. Коля, Толя, Аня.

Было решено, что в каждой выдвинутой тройке должен быть ровно один будущий участник фестиваля. Можно ли выбрать пару участников, исходя из таких правил отбора?

2. *(7–8-е классы)* Если ровно три числа в этом квадрате изменить на единицу (прибавить 1 или отнять 1), то получится «магический квадрат»: сумма трех чисел в каждой строке, в каждом столбце и на двух больших диагоналях будет одинакова. Восстановите этот квадрат.

298	3	192
59	164	268
136	324	31

3. *(9-й класс)* Впишите в девять пустых ячеек этого квадрата девять подряд идущих натуральных чисел так, чтобы получился «магический квадрат» с суммой 2013. Это означает, что сумма трех чисел в каждой строке, в каждом столбце и на двух больших диагоналях одинакова и равна 2013.

4. *(7-й класс)* В прямоугольном треугольнике длины обоих катетов и гипотенузы — целые числа. Может ли площадь этого треугольника быть не целым числом?

5. *(7–8-е классы)* Возраст трех могучих дубов в сумме составляет ровно 500 лет. Когда самый молодой из этих дубов достигнет нынешнего возраста среднего, средний дуб будет в том же возрасте, в котором сейчас находится старший, и будет в четыре раза старше нынешнего возраста самого младшего дуба. Назовите нынешний возраст всех трех дубов.

6. *(7-й класс)* Петя задумал трехзначное число. Когда Петя поделил это число на сумму его цифр, он получил частное (неполное) 15 и 9 в остатке. Отгадайте, какое число задумал Петя.

7. *(7–8-е классы)* В равнобедренном треугольнике ABC каждый из углов содержит нецелое число градусов. Известно, что через одну из вершин этого треугольника можно провести прямолинейный разрез, разбивающий треугольник ABC на два равнобедренных треугольника. Найдите углы треугольника ABC.

8. *(7-й класс).* Найдите все пары натуральных m и n таких, что НОД$(m; n) = 1000$, а НОК$(m; n) = 1\,000\,000$.

9. *(8–9-е классы)* Найдите все пары натуральных m, n таких, что НОД$(m; n) = 2015!$, а НОК$(m; n) = 2016!$ (где $k!$ обозначает произведение $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k$). В ответе укажите количество таких пар (пары $(m; n)$ и $(n; m)$ считаются как одна пара).

10. *(8–9-е классы)* Можно ли в выражении $\pm 1 \pm 2 \pm 2^2 \pm 2^3 \pm \ldots \pm 2^{10}$ расставить знаки «+» и «–» так, чтобы результат был равен: а) 2014; б) 2013?

11. *(8–9-е классы)* Внутри круга с диаметром AB выбрана точка C и проведены прямые AC и BC, пересекающие окружность в точках M и N соответственно. Известно, что

$$\frac{AC}{CM} = \frac{2014}{1711} \text{ и } \frac{BC}{CN} = \frac{3422}{1007}.$$

Найдите угол ACB.

12. *(8–9-е классы)* Известно, что x_1, x_2, x_3 — различные корни уравнения $x^3 - x - 1 = 0$. Составьте уравнение наименьшей степени, корнями которого являются числа

$$\frac{x_1+1}{x_1-1},\ \frac{x_2+1}{x_2-1},\ \frac{x_3+1}{x_3-1}.$$

13. *(9-й класс)* На урок химии учительница принесла полную колбу с 40%-й соляной кислотой. Она отлила некоторое количество в первую пробирку, долила колбу дистиллированной водой доверху и перемешала. Потом такое же количество отлила во вторую пробирку, долила колбу дистиллированной водой и перемешала. Потом такое же количество отлила в третью пробирку, опять долила дистиллированной воды и перемешала. В результате концентрация кислоты в колбе стала равна $16\frac{7}{8}\%$. Какова концентрация кислоты во второй пробирке (в процентах)?

14. *(9-й класс)* Решите уравнение

$$\left(x^2-7x\right)\cdot\sqrt[2013]{\left(x^2-7x\right)^2+1}+$$
$$+(2x+6)\cdot\sqrt[2013]{(2x+6)^2+1}=0.$$

15. *(9-й класс)* В равнобедренном треугольнике ABC $(AB = AC)$ проведена биссектриса BL. Ее длина равна разности $BC - AL$. Найдите углы треугольника ABC.

Задания заключительного этапа

1. *(7–9-й классы)* На острове рыцарей и лжецов живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды путешественник забрел на вечеринку, на которой собралось 12 жителей острова (назовем их для краткости A, B, ..., L). Путешественник подсел к A и начал задавать вопросы: «B — рыцарь или лжец?»; «C — рыцарь или лжец»?; ...; «L — рыцарь или лжец?» По полученным одиннадцати ответам путешественник смог определить, сколько всего рыцарей среди A, ..., L. Сделайте это и вы.

2. *(7-й класс)* Найдите количество таких натуральных n, при которых $n^2 + 2^{100}$ является точным квадратом (то есть квадратом целого числа).

3. *(8-й класс)* Найдите количество пар целых чисел $(m; n)$, для которых выполнено равенство $m^2 + 2^{2014} = n^2$.

4. *(7-й класс)* Найдите наименьшее целое $n > 3$, при котором не существует выпуклого n-угольника, каждый внутренний угол которого составляет четное число градусов.

5. *(7–8-е классы)* Незнайка придумал фантастическое умножение $\otimes$, которое для любых x и y удовлетворяет аксиомам нуликативности $x \otimes x = 0$ и тилимилитивности: $x \otimes (y \otimes z) = (x \otimes y) + z$. Помогите Знайке вычислить $1755 \otimes 2014$.

6. *(7-й класс)* 2014-значное число обладает следующим свойством: если взять любые 6 цифр, идущих подряд (в том порядке, в каком они идут), то образованное ими 6-значное число будет делиться на 7, на 11 и на 13. Первые три цифры этого числа — 3, 5 и 7. Найдите три последние цифры. В ответе укажите 3-значное число, которое они образуют.

7. *(8–9-е классы)* Хорда AC образует угол 32° с диаметром AD. Из центра окружности O опущен перпендикуляр OH на хорду AC, его продолжение пересекает окружность в точке B. Найдите угол между прямыми BC и AD.

8. *(8–9-е классы)* Дан правильный 27-угольник $A_1A_2...A_{27}$. Найдите количество неравнобедренных треугольников с вершинами в точках A_1, A_2, ..., A_{27}. Треугольники, отличающиеся порядком вершин (например, $A_1A_2A_4$ и $A_2A_4A_1$), считаются за один треугольник.

9. *(8–9-е классы)* Многочлен

$$a_{2014}x^{2014} + a_{2013}x^{2013} + ... + a_1x + a_0$$

при всех значениях x совпадает с функцией

$$y = \frac{(x-1)\cdot(x-2)\cdot ... \cdot(x-2014)}{2014!}.$$

Найдите сумму чисел

$$a_2 + a_4 + ... + a_{2012} + a_{2014}.$$

10. *(9-й класс)* Найдите все значения a, при которых сумма модулей корней уравнения $x(x + a - 1) = a^2$ равна 2.

11. *(9-й класс)* Множество X состоит из пяти различных чисел x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, а множество Y — из семи различных чисел y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7. Какое наибольшее количество различных чисел заведомо содержит множество, состоящее из сумм вида $x_i + y_j$, где $i \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$, $j \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$?

Ответы и решения

Задания отборочного этапа

1. Можно. Участники: Таня, Коля.

Аню, Ваню и Толю брать нельзя, так как они встречаются в списке только 2 раза. Заметим, что Таня встречается в тройке 1, 2, 3, Оля — в 2, 3, 4; Поля — в 3, 4, 5 и Коля — в 4, 5, 6. Очевидно, только Таня и Коля подходят.

2. Ответ см. на рисунке.

297	3	192
59	164	269
136	325	31

Суммы по строкам равны 493, 491 и 491. Очевидно, какое-то число в первой строке надо уменьшить на 1, а во второй и третьей — увеличить на 1. Аналогично, суммы по столбцам равны 493, 491, 491, то есть в первом столбце уменьшаем на 1, а во 2 и 3 — увеличиваем. Учитывая суммы на диагоналях (493 и 492), получаем ответ.

3. Ответ см. на рисунке.

670	675	668
669	671	673
674	667	672

Возможны и другие решения, полученные из данного с помощью поворотов и симметрий.

Заметим, что в магическом квадрате, составленном из чисел 1, 2, ..., 9, сумма чисел в каждой строке, столбце и диагонали равна 15.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Очевидно, если прибавить к каждому числу $\frac{2013-15}{3} = 666$, то указанные суммы станут равны 2013.

4. Нет.

Если хотя бы один катет четный, то площадь — целое число. Допустим, что оба катета нечетные: $a = 2n + 1$, $b = 2m + 1$. Тогда $c^2 = a^2 + b^2 = 4n^2 + 4n + 4m^2 + 4m + 2$ кратно 2, но не кратно 4. Следовательно, c не может быть квадратом целого числа.

5. 66 лет 8 месяцев; 166 лет 8 месяцев; 266 лет 8 месяцев.

Обозначим возрасты дубов как x, y, z. Самый молодой дуб достигнет возраста среднего через $y - x$ лет. Тогда условия задачи можно записать в виде системы:

$$\begin{cases} x + y + z = 500, \\ 2y - x = z, \\ 2y - x = 4x. \end{cases}$$

Решив ее, получим:

$$x = \frac{200}{3},\quad y = \frac{500}{3},\quad z = \frac{800}{3}.$$

6. 279.

По условию

$$\overline{abc} = 100a + 10b + c = 15(a + b + c) + 9,$$

причем $a + b + c > 9$. Преобразовав, получим:

$$85a - 5b = 9 + 14c.$$

Видно, что $9 + 14c$ кратно 5, что возможно только при $c = 9$. Поэтому $17a = b + 27$, откуда $a = 2$, $b = 7$.

7. $\frac{180°}{7}$, $\frac{540°}{7}$ и $\frac{540°}{7}$.

Допустим, что $AB = BC$. Рассмотрим следующие случаи.

1. Прямая проходит через вершину B и пересекает AC в точке D. Заметим, что $BD < AB$, поэтому в треугольнике ABD они не могут быть равными. Возможны два случая.

а) Случай $AD = BD$. Если $BD = DC$, то BD — медиана, биссектриса и высота, следовательно, $\angle A = 45°$, что противоречит условию. Значит, $BC = CD$. Обозначим $\angle A = \angle C = \alpha$. Тогда $\angle BDC = \angle DBC = 2\alpha$, откуда (сложив углы в треугольнике BCD) получим:

$$5\alpha = 180°, \alpha = 36°,$$

что снова противоречит условию.

б) Случай $AD = AB$ разбирается аналогично.

2. Прямая проходит через вершину A и пересекает сторону BC в точке E. Заметим, что $BE < AB$, поэтому возможны два случая.

а) Случай $AB = AE$. Заметим, что в этом случае $AC > AE$, а $CE < AE$, значит, $AC = CE$. Обозначив $\angle BAC = \angle C = \alpha$, получим:

$$\angle ABE = \angle AEB = 180° - 2\alpha,$$

следовательно,

$$\angle BAE = 4\alpha - 180°,$$

$$\angle CAE = 180° - 3\alpha = \angle CEA.$$

Сложив углы в треугольнике CAE, получаем: $360° - 5\alpha = 180°$, $\alpha = 36°$, что противоречит условию задачи.

б) Случай $BE = AE$. Если в треугольнике ACE выполнено равенство $AE = EC$, то AE — медиана, равная половине стороны BC, то есть $\angle A = 90°$, что невозможно. Если $AE = AC$, то снова получается треугольник с углом 36°.

Если же $AC = CE$, то, обозначив $\angle BAC = \angle ACB = \alpha$, получим:

$$\angle AEC = \frac{180° - \alpha}{2},$$

тогда

$$\angle AEB = \frac{180° + \alpha}{2}.$$

Сложив углы в треугольнике ABE (учитывая, что $\angle ABE = \angle BAE = 180° - 2\alpha$), получаем:

$$360° - 4\alpha + \frac{180° + \alpha}{2} = 180°, \quad \alpha = \frac{540°}{7},$$

что и дает ответ.

8. (1000; 1 000 000), (1 000 000; 1000), (8000; 125 000) и (125 000; 8000).

НОК$(m; n) = 1\,000\,000 = 2^6 \cdot 5^6$, поэтому m и n должны иметь вид: $m = 2^a \cdot 5^b$ и $n = 2^c \cdot 5^d$, причем $\max(a; c) = \max(b; d) = 6$.

Кроме того, НОД$(m; n) = 1000 = 2^3 \cdot 5^3$, следовательно, $\min(a; c) = \min(b; d) = 3$. Таким образом, в каждой из пар $(a; c)$, $(b; d)$ одно из чисел равно 3, а другое — 6. Например, для пары $(a; c)$ возможно два варианта: $a = 3$, $c = 6$ или $a = 6$, $c = 3$. Также возможно два варианта для пары $(b; d)$.

В итоге получаем 4 комбинации, которые и дают ответ.

9. 4.

Поскольку НОД$(m; n) = 2015!$, то m и n будут кратны 2015!. Обозначим

$$m = 2015! \cdot m_1,\ n = 2015! \cdot n_1,$$

тогда НОД$(m_1; n_1) = 1$ (если m_1 и n_1 имеют общие делители, то НОД$(m; n) > 2015!$).

Из условия

$$\text{НОК}(m; n) = 2015! \cdot \text{НОК}(m_1; n_1) = 2016!$$

вытекает, что

$$\text{НОК}(m_1; n_1) = 2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7.$$

Каждый из множителей 2^5, 3^2, 7 должен присутствовать ровно в одном из чисел m_1, n_1. Тогда либо одно из чисел равно 1, а другое 2016 (одна пара), либо в одном присутствует один какой-то множитель, а в другом два оставшихся (3 пары). Получаем всего 4 пары:

$(1; 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7)$, $(2^5; 3^2 \cdot 7)$, $(3^2; 2^5 \cdot 7)$, $(7; 2^5 \cdot 3^2)$.

10. а) Нет; б) да.

а) Результат всегда будет нечетным числом.

б) Если поставить в выражение все знаки «+», то получится:

$$1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{10} = 2^{11} - 1 = 2047.$$

Обозначив через S_+ сумму чисел, перед которыми стоит знак «плюс», а через S_- — сумму модулей чисел, перед которыми стоит знак «минус», получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} S_+ + S_- = 2047, \\ S_+ - S_- = 2013. \end{cases}$$

Решив ее, получим $S_+ = 2030$, $S_- = 17$. Заметим, что $17 = 1 + 16$ (например, представив в двоичной системе счисления $17 = 10001_2$). Значит, перед числами 1 и 16 нужно поставить знак «–», а перед остальными — знак «+».

Возможно и решение подбором: постепенное приближение к 2013. Заметим, что

$$1024 + 512 + 250 + 128 + 64 + 32 = 2016.$$

Отнимем 16, получим 2000; прибавив 8, получаем 2008. Осталось из чисел 4, 2, 1 «набрать» +5, это $4 + 2 - 1$.

11. 120°.

Обозначив
$$AC = 2014x,\ CM = 1711x,$$
$$BC = 3422y,\ CN = 1007y,$$
запишем равенство
$$AC \cdot CM = BC \cdot CN,$$
из которого следует, что $x = y$.

Угол $\angle ANB = 90°$, так как опирается на диаметр. Тогда $\angle NAC = 30°$, поскольку $CN = \frac{1}{2}AC$, следовательно,
$$\angle ACN = 60° \text{ и } \angle ACB = 120°.$$

12. Уравнение $t^3 - 7t^2 - t - 1 = 0$ или получающееся из него умножением на постоянный множитель.

Обозначим
$$t_1 = \frac{x_1+1}{x_1-1},\quad t_2 = \frac{x_2+1}{x_2-1},\quad t_3 = \frac{x_3+1}{x_3-1}$$
и выразим x_i через t_i, $i = 1, 2, 3$.

Тогда $x_i = \frac{t_i+1}{t_i-1}$. Подставляя в уравнение, получим:
$$\left(\frac{t_i+1}{t_i-1}\right)^3 - \frac{t_i+1}{t_i-1} - 1 = 0,$$
откуда
$$\frac{-t_i^3 + 7t_i^2 + t_i + 1}{(t_i-1)^3} = 0.$$

Поскольку $t_i \neq 1$, то все они являются корнями уравнения
$$-t^3 + 7t^2 + t + 1 = 0.$$

13. 30%.

Обозначим через q ту часть кислоты, которая остается в колбе. Заметим, что каждый раз количество чистой кислоты в сосуде умножается на это q, следовательно, концентрация кислоты после разбавления водой тоже умножается на q.

Тогда после трех разбавлений концентрация равна
$$40q^3 = 16\frac{7}{8} = \frac{135}{8},$$
то есть
$$q^3 = \frac{27}{64},\quad q = \frac{3}{4}.$$
Значит, после первого разбавления концентрация стала равна
$$40q = 40 \cdot \frac{3}{4} = 30\%,$$
это и есть концентрация во второй пробирке.

14. $x = 2$, $x = 3$.

Пусть
$$f(t) = t \cdot \sqrt[2013]{t^2+1}.$$

Заметим, что функция $f(t)$ является нечетной. Несложно показать, что при неотрицательных t_1, t_2 из $t_1 > t_2$ следует, что
$$t_1 \cdot \sqrt[2013]{t_1^2+1} > t_2 \cdot \sqrt[2013]{t_2^2+1}.$$

Из нечетности вытекает, что это верно и в случае, когда оба числа t_1, t_2 неположительны. Если же $t_1 > 0 > t_2$, то $f(t_1) > 0 > f(t_2)$. Таким образом, $f(t)$ возрастает на всей числовой оси.

Уравнение можно записать как
$$f(x^2 - 7x) + f(2x + 6) = 0,$$
откуда, используя нечетность, получим:
$$f(x^2 - 7x) = f(-2x - 6).$$

Поскольку функция возрастает, указанное равенство возможно только при $x^2 - 7x = -2x - 6$. Это квадратное уравнение имеет корни: $x = 2$, $x = 3$.

15. 100°, 40°, 40°.

Выберем на основании BC точку M так, чтобы $CM = AL$ (рис. 1), тогда
$$BM = BC - AL = BL.$$

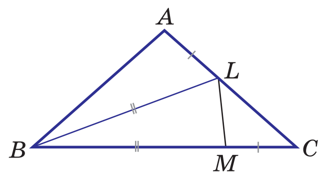


Рис. 1

Заметим, что $\frac{AC}{BC} = \frac{AB}{BC}$, что по свойству биссектрисы равно $\frac{AL}{LC} = \frac{MC}{LC}$. Следовательно, треугольники ABC и MLC подобны (по двум сторонам и углу).

Обозначим $\angle ABC = 2\alpha$, тогда $\angle LBM = \alpha$ и $\angle BML = \frac{180° - \alpha}{2}$. С другой стороны, $\angle LCM = \angle MLC = 2\alpha$, следовательно, $\angle LMC = 180° - 4\alpha$.

Сложив получившиеся смежные углы, получим уравнение
$$\frac{180° - \alpha}{2} + 180° - 4\alpha = 180°,$$
решение которого: $\alpha = 20°$. Поэтому
$$\angle B = \angle C = 40°,\ \angle A = 100°.$$

Задания заключительного этапа

1. 6.

Допустим, A назвал n человек рыцарями и $(11 - n)$ лжецами. Если A — рыцарь, то это означает, что на вечеринке присутствует $n + 1$ рыцарь. Если A — лжец, то это значит, что присутствует $(11 - n)$ рыцарей. Чтобы путешественник смог гарантированно определить число рыцарей, эти два числа должны совпасть, что будет только при $n = 5$. Значит, было 6 рыцарей.

2. 49.

Пусть $n^2 + 2^{100} = m^2$, тогда
$$(m + n)(m - n) = 2^{100}.$$

Числа должны быть целыми, поэтому $m + n = 2^k$, $m - n = 2^l$, где $k + l = 100$.

Поскольку $n > 0$, то $k > l$. Так как $m=\dfrac{2^k+2^l}{2}$ — целое, то $l > 0$. Получаем пары: (99; 1), (98; 2), ..., (51; 49) — всего 49 вариантов.

3. 4026.

Так как $m^2 + 2^{2014} = n^2$, то $(n + m)(n - m) = 2^{2014}$. Отсюда $n + m = \pm 2^k$, $n - m = \pm 2^l$ (одновременно знак «плюс» или «минус»), где $k + l = 2014$. Так как $n=\pm\dfrac{2^k+2^l}{2}$ — целое, то k, $l > 0$. Получаем пары: (2013; 1), (2012; 2), ..., (1; 2013) — всего 2013 пар, которые дают 4026 вариантов.

4. 181.

Сумма внешних углов должна составлять 360°. Каждый из этих углов не может быть меньше 2°. Если $n = 181$, то их сумма будет не менее 362, что ведет к противоречию. Если же $n \le 180$, то можно построить многоугольник с внешними углами, сумма которых составляет 360°.

5. –259.

Заметим, что

$$x\otimes 0 = x\otimes(x\otimes x) = (x\otimes x) + x = x.$$

Следовательно,

$$x = x\otimes(z\otimes z) = (x\otimes z) + z,$$

откуда $x\otimes z = x - z$ при любых x и z. Значит,

$$1755\otimes 2014 = 1755 - 2014 = -259.$$

6. 573.

Если число делится на 7, 11 и 13, то оно кратно $7 \cdot 11 \cdot 13 = 1001$. Шестизначные числа, кратные 1001, должны иметь вид $\overline{abcabc}$, где a, b и c — цифры. Поэтому искомое число имеет вид $\underbrace{357357...3573}_{2014}$ (так как $2014 = 671 \cdot 3 + 1$).

7. 3°.

Заметим, что

$$\smile CD = 2 \cdot \angle CAD = 2 \cdot 32^\circ = 64^\circ$$

(рис. 2), а

$$\smile AB = \angle AOB = 90^\circ - 32 = 58^\circ.$$

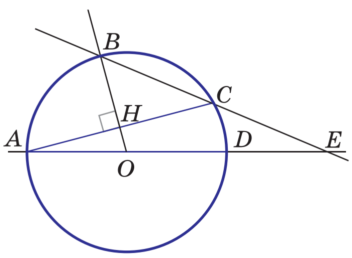


Рис. 2

Следовательно, угол между прямыми BC и AD равен $\dfrac{\smile CD - \smile AB}{2} = 3^\circ.$

8. 2592.

Всего существует $C_{27}^3 = 2925$ треугольников. Каждой вершине соответствует 13 равнобедренных треугольников (с вершиной треугольника в этой точке). При этом если взять $27 \cdot 13 = 351$, то получится, что каждый равносторонний треугольник мы посчитали 3 раза. Значит, равнобедренных треугольников $351 - 2 \cdot 9 = 333$, а неравнобедренных — $2925 - 333 = 2592$.

9. 1006,5.

Обозначим многочлен как $P(x)$. Подставляя в условие $x = 1$, получаем:

$$P(1) = a_{2014} + a_{2013} + ... + a_1 + a_0 = 0.$$

Аналогично при $x = -1$:

$$P(-1) = a_{2014} - a_{2013} + ... - a_1 + a_0 =$$

$$=\frac{(-1-1)\cdot(-1-2)\cdot\ ...\ \cdot(-1-2014)}{2014!}=\frac{2015!}{2014!}=2015.$$

Тогда

$$a_{2014} + a_{2012} + ... + a_2 + a_0 =$$

$$=\frac{P(-1)+P(1)}{2}=1007{,}5.$$

Чтобы получить искомую сумму, надо отнять $a_0 = y(0) = 1$.

10. $-\dfrac{3}{5}$; 1.

Получающееся уравнение $x^2 + (a - 1)x - a^2 = 0$ всегда имеет корни, и эти корни имеют разные знаки ($x_1 \cdot x_2 = -a^2 \le 0$). Поэтому по теореме Виета:

$$(|x_1| + |x_2|)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2|x_1 \cdot x_2| =$$

$$= (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 =$$

$$= (a - 1)^2 + 4a^2 = 5a^2 - 2a + 1.$$

По условию $5a^2 - 2a + 1 = 4$, откуда $a = 1$ или $a=-\dfrac{3}{5}$.

11. 11.

Упорядочим элементы множеств X и Y. Пусть для определенности:

$$x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5,$$

$$y_1 < y_2 < y_3 < y_4 < y_5 < y_6 < y_7.$$

Тогда можно гарантированно построить 11 различных чисел:

$$x_1 + y_1 < x_1 + y_2 < x_1 + y_3 < ... < x_1 + y_7 <$$

$$< x_2 + y_7 < ... < x_5 + y_7.$$

При этом 12 чисел построить можно не всегда. Пример:

$$X = \{1; 2; 3; 4; 5\},\ Y = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}.$$

Тогда можно получить числа:

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12

— ровно 11 чисел.

журнал

Математика – Первое сентября

1-е полугодие 2016 года

ПОДПИСКА

на сайте www.1september.ru и в почтовых отделениях РФ

Индекс	Название издания	Периодичн. в полугодие	1 месяц: Каталожная цена (руб.)	1 месяц: Подписная цена (руб.)	6 месяцев: Каталожная цена (руб.)	6 месяцев: Подписная цена (руб.)
Название блока в разделе «Журналы»	**ПЕРВОЕ СЕНТЯБРЯ. ЖУРНАЛЫ ИЗДАТЕЛЬСКОГО ДОМА** (499)249-31-38					
79073	**Математика – Первое сентября. Бумажная версия** *В июне не выходит.* *Подписка на июнь не принимается* *(-) 160 г 64 стр.*	5	440.00		2200.00	
12717	**Математика – Первое сентября. Электронная версия на CD (полная копия бумажной версии)** *В июне не выходит.* *Подписка на июнь не принимается* *(-) 75 г*	5	160.00		800.00	
сайт 1september.ru	**Математика – Первое сентября. Электронная версия**	5	–		–	500.00

Подписку принимают во всех отделениях связи Российской Федерации, а также на сайте www.1september.ru

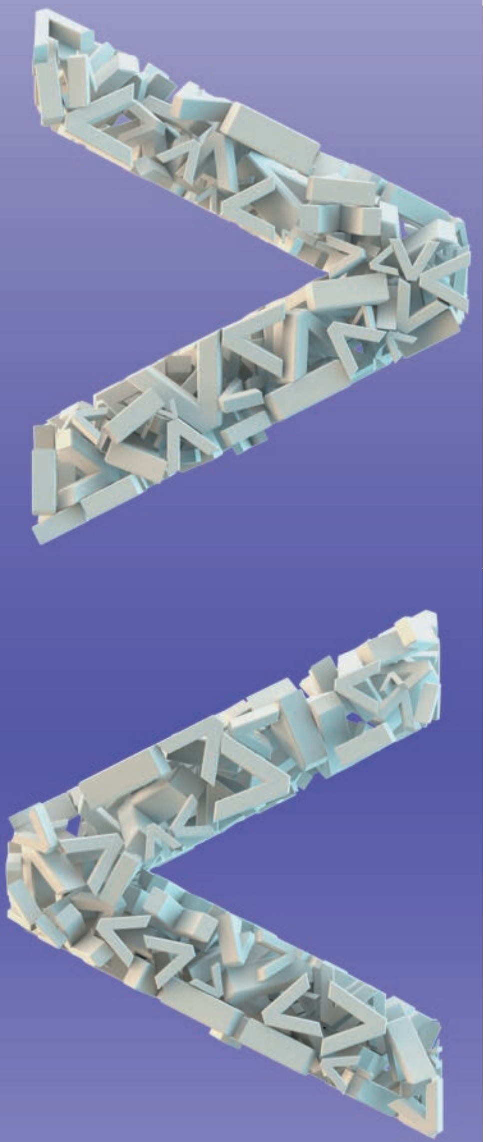
При подключении школы к проекту «Школа цифрового века» (см. digital.1september.ru) каждый учитель получает доступ ко всем журналам Издательского дома «Первое сентября». Стоимость подключения школы на год – 6 тыс. рублей независимо от количества учителей

При оформлении подписки на сайте оплата производится по квитанции в отделении банка или электронными платежами on-line

9–11 классы. Начало см. в № 1–10/2015

С. ШЕСТАКОВ,
isser@yandex.ru,
г. Москва

РЕШАЕМ НЕРАВЕНСТВА



2.3. Неравенства, содержащие переменную под знаком абсолютной величины (модуля). Более сложные неравенства

Равносильные преобразования

Метод равносильных преобразований, как уже отмечалось, во многих случаях оказывается эффективней метода промежутков, поскольку позволяет, используя свойства 12 и 13 (или их модификации для нестрогих неравенств) свести неравенство с модулем к системе или совокупности двух неравенств, не содержащих знака модуля. При этом не нужно находить нули подмодульных выражений, что сокращает вычисления даже в тех случаях, когда указанные свойства приходится применять несколько раз (не говоря уже о том, что не во всех случаях возможно эти нули найти). Кстати, довольно легко подсчитать число неравенств, не содержащих знаков модуля, которые придется решать, используя метод равносильных преобразований: освобождение от каждого знака модуля приводит к двум неравенствам, поэтому общее число неравенств равно степени двойки, показателем которой является число знаков модуля в данном неравенстве. Так, неравенство примера 2 свелось бы к решению восьми неравенств. Следует отметить, что во многих случаях половина полученных при таком решении неравенств после их приведения к виду $f(x) \vee 0$ будет отличаться от другой половины только знаком неравенства. Поэтому решать придется вдвое меньше неравенств: ведь определяя промежутки знакоположительности алгебраического выражения $f(x)$, мы находим и промежутки его знакоотрицательности. Например, неравенство примера 2 потребовало бы в действительности решения четырех квадратных неравенств вместо восьми.

Отметим еще, что при наличии «вложенных» модулей метод промежутков приводит к огромному числу ошибок, поскольку после раскрытия «внутреннего» модуля приходится на каждом из полученных промежутков раскрывать еще и «внешний» модуль, получая новые промежутки. С таким ветвлением не справляется подавляющее большинство школьников, выпускников и абитуриентов; для решения подобных неравенств рекомендуется использовать метод равносильных преобразований.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 3. Решить неравенство

$$|x^2 - 4x - 8| \le x - 2.$$

Решение. Данное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 4x - 8 \le x - 2, \\ x^2 - 4x - 8 \ge -x + 2, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 5x - 6 \le 0, \\ x^2 - 3x - 10 \ge 0. \end{cases}$$

К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru (Упражнения к 2.3, диагностические работы 5, 6.)

Корнями квадратного трехчлена $x^2 - 5x - 6$ являются числа -1 и 6, старший коэффициент трехчлена положителен. Поэтому множеством решений первого неравенства системы является отрезок $[-1; 6]$. Корнями квадратного трехчлена $x^2 - 3x - 10$ являются числа -2 и 5, старший коэффициент трехчлена положителен. Поэтому множеством решений второго неравенства системы является объединение $(-\infty; -2] \cup [5; +\infty)$. Следовательно, множество решений системы, а значит, и данного неравенства: $[5; 6]$.

Ответ: $[5; 6]$.

В более сложных случаях, чтобы не запутаться, лучше разбивать решение неравенства на несколько этапов (шагов).

Пример 4. Решить неравенство

$$||x^2 + 3x + 2| - 1| \geq 1.$$

Решение. 1. Данное неравенство равносильно совокупности неравенств

$$\left[\begin{array}{l} |x^2+3x+2|-1\geq 1 \\ |x^2+3x+2|-1\leq -1, \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} |x^2+3x+2|\geq 2 \\ |x^2+3x+2|\leq 0. \end{array}\right.$$

Найдем множество решений каждого из неравенств последней совокупности, после чего объединим найденные множества.

2. Неравенство $|x^2 + 3x + 2| \geq 2$ равносильно совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} x^2+3x+2\geq 2 \\ x^2+3x+2\leq -2, \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x^2+3x\geq 0 \\ x^2+3x+4\leq 0. \end{array}\right.$$

Неравенство $x^2 + 3x \geq 0$ приводится к виду $x(x + 3) \geq 0$; множеством его решений является $(-\infty; -3] \cup [0; +\infty)$. Неравенство $x^2 + 3x + 4 \leq 0$ решений не имеет, поскольку дискриминант квадратного трехчлена $x^2 + 3x + 4$ отрицателен, а старший коэффициент положителен. Следовательно, множеством решений совокупности

$$\left[\begin{array}{l} x^2+3x\geq 0 \\ x^2+3x+4\leq 0, \end{array}\right.$$

а значит, и неравенства $|x^2 + 3x + 2| \geq 2$ является $(-\infty; -3] \cup [0; +\infty)$.

3. Решим неравенство $|x^2 + 3x + 2| \leq 0$. В силу неотрицательности модуля это неравенство выполняется, только если $x^2 + 3x + 2 = 0$, откуда $x = -2$ или $x = -1$. Таким образом, множество $\{-2; -1\}$ решений неравенства $|x^2 + 3x + 2| \leq 0$ состоит из двух чисел.

4. Объединением множеств $(-\infty; -3] \cup [0; +\infty)$ и $\{-2; -1\}$, а следовательно, и решением данного неравенства является $(-\infty; -3] \cup \{-2; -1\} \cup [0; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -3] \cup \{-2; -1\} \cup [0; +\infty)$.

Пример 5. Решить неравенство

$$|x^2 - 6x + 8| - |2x - 5| < x^2 - 3x + 2.$$

Решение. 1. Чтобы использовать метод равносильных преобразований, «уединим» один из модулей:

$$|x^2 - 6x + 8| < x^2 - 3x + 2 + |2x - 5|.$$

Полученное неравенство равносильно системе неравенств

$$\left\{\begin{array}{l} x^2-6x+8<x^2-3x+2+|2x-5|, \\ x^2-6x+8>-x^2+3x-2-|2x-5|, \end{array}\right.$$

откуда

$$\left\{\begin{array}{l} |2x-5|>-3x+6, \\ |2x-5|>-2x^2+9x-10. \end{array}\right.$$

Решим каждое из неравенств системы, после чего найдем пересечение множеств решений.

2. Неравенство $|2x - 5| > -3x + 6$ равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} 2x-5>-3x+6 \\ 2x-5<3x-6, \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x>2,2 \\ x>1. \end{array}\right.$$

Множеством решений последней совокупности, а значит, и множеством решений неравенства $|2x - 5| > -3x + 6$ является $(1; +\infty)$.

3. Решим неравенство

$$|2x - 5| > -2x^2 + 9x - 10.$$

Оно равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} 2x-5>-2x^2+9x-10 \\ 2x-5<2x^2-9x+10, \end{array}\right.$$

откуда

$$\left[\begin{array}{l} 2x^2-7x+5>0 \\ 2x^2-11x+15>0. \end{array}\right.$$

Корнями квадратного трехчлена $2x^2 - 7x + 5$ являются числа 1 и 2,5, старший коэффициент трехчлена положителен. Поэтому множеством решений неравенства $2x^2 - 7x + 5 > 0$ является $(-\infty; 1) \cup (2,5; +\infty)$. Корнями квадратного трехчлена $2x^2 - 11x + 15$ являются числа 2,5 и 3, старший коэффициент трехчлена положителен. Поэтому множеством решений неравенства $2x^2 - 11x + 15 > 0$ является $(-\infty; 2,5) \cup (3; +\infty)$. Следовательно, множеством решений совокупности $\left[\begin{array}{l} 2x^2-7x+5>0 \\ 2x^2-11x+15>0, \end{array}\right.$ а значит, и неравенства $|2x - 5| > -2x^2 + 9x - 10$ является $(-\infty; 2,5) \cup (2,5; +\infty)$.

4. Пересечением множеств $(1; +\infty)$ и $(-\infty; 2,5) \cup (2,5; +\infty)$, а следовательно, и решением данного неравенства является $(1; 2,5) \cup (2,5; +\infty)$.

Ответ: $(1; 2,5) \cup (2,5; +\infty)$.

Пример 6. Решить неравенство

$$\left|\frac{4x^2-9x+5}{2x-5}\right| \leq 2x+1.$$

Решение. 1. Данное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{4x^2-9x+5}{2x-5} \le 2x+1, \\ \dfrac{4x^2-9x+5}{2x-5} \ge -2x-1, \end{cases}$$

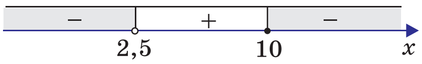
откуда

$$\begin{cases} \dfrac{4x^2-9x+5}{2x-5} - 2x - 1 \le 0, \\ \dfrac{4x^2-9x+5}{2x-5} + 2x + 1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4x^2-9x+5-4x^2+10x-2x+5}{2x-5} \le 0, \\ \dfrac{4x^2-9x+5+4x^2-10x+2x-5}{2x-5} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

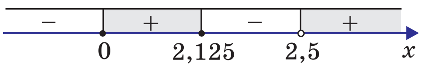
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{10-x}{2x-5} \le 0, \\ \dfrac{x(8x-17)}{2x-5} \ge 0. \end{cases}$$

2. Решим первое неравенство последней системы методом интервалов:



Множество решений неравенства: $(-\infty;\ 2{,}5) \cup [10;\ +\infty)$.

3. Решим второе неравенство последней системы методом интервалов:



Множество решений неравенства: $[0;\ 2{,}125] \cup (2{,}5;\ +\infty)$.

4. Найдем множество решений данного неравенства как пересечение множеств $(-\infty;\ 2{,}5) \cup [10;\ +\infty)$ и $[0;\ 2{,}125] \cup (2{,}5;\ +\infty)$. Получим множество $[0;\ 2{,}125] \cup [10;\ +\infty)$.

Ответ: $[0;\ 2{,}125] \cup [10;\ +\infty)$.

Замечание. Иногда полезно коротко проанализировать возможные пути решения неравенства: это позволит сэкономить время решения задачи. Например, для решения неравенства вида $\left|\dfrac{a(x)}{b(x)}\right| \vee 1$ можно воспользоваться свойством 12 или 13 и получить систему или совокупность двух дробно-рациональных неравенств (как при решении предыдущего примера), а можно, используя свойства модуля и учитывая ОДЗ неравенства, перейти к равносильной системе неравенств:

$$\begin{cases} |a(x)| \vee |b(x)|, \\ b(x) \ne 0, \end{cases} \quad \begin{cases} a^2(x) \vee b^2(x), \\ b(x) \ne 0 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} (a(x)-b(x))(a(x)+b(x)) \vee 0, \\ b(x) \ne 0. \end{cases}$$

Аналогично, неравенство $\left|\dfrac{a(x)}{b(x)}\right| \vee c$ (здесь c — положительное действительное число) равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} |a(x)| \vee |c \cdot b(x)|, \\ b(x) \ne 0, \end{cases}$$

а неравенство $\left|\dfrac{a(x)}{b(x)}\right| \vee \left|\dfrac{c(x)}{d(x)}\right|$ равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} |a(x) \cdot d(x)| \vee |c(x) \cdot b(x)|, \\ b(x) \ne 0, \\ d(x) \ne 0. \end{cases}$$

Первое неравенство каждой из двух последних систем решается с помощью свойства 11.

Пример 7. Решить неравенство

$$\left|\frac{x^2+3x+2}{x^2-3x+2}\right| \ge 1.$$

Решение. Для решения неравенства воспользуемся предыдущим замечанием. В данном случае

$$a(x) = x^2 + 3x + 2,\ b(x) = x^2 - 3x + 2$$

и неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} \left(x^2+3x+2-x^2+3x-2\right)\left(x^2+3x+2+x^2-3x+2\right) \ge 0, \\ x^2-3x+2 \ne 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x\left(2x^2+4\right) \ge 0, \\ x^2-3x+2 \ne 0. \end{cases}$$

Поскольку $2x^2 + 4 > 0$ при любом значении переменной, первое неравенство последней системы приводится к виду $x \ge 0$. Корнями квадратного трехчлена $x^2 - 3x + 2$ являются числа 1 и 2; их нужно исключить из множества решений первого неравенства. Следовательно, множеством решений системы, а значит, и данного неравенства будет $[0;\ 1) \cup (1;\ 2) \cup (2;\ +\infty)$.

Ответ: $[0;\ 1) \cup (1;\ 2) \cup (2;\ +\infty)$.

Пример 8. Решить неравенство

$$||3-2x|-1| \le 2|x|.$$

Решение. Обе части неравенства неотрицательны, поэтому возведение их в квадрат является равносильным преобразованием. Учитывая, что квадрат числа и квадрат модуля этого числа равны (свойство 8), получим после возведения в квадрат неравенство

$$(|3-2x|-1)^2 \le 4x^2.$$

Здесь применение формулы разности квадратов приведет к более громоздкому неравенству по сравнению с тем, которое получится после раскрытия скобок и приведения подобных:

$$(3-2x)^2 - 2|3-2x| + 1^2 \le 4x^2 \Leftrightarrow |3-2x| \ge 5-6x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3-2x \ge 5-6x \\ 3-2x \le -5+6x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 0{,}5 \\ x \ge 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \ge 0{,}5.$$

Ответ: $[0{,}5;\ +\infty)$.

Метод интервалов

Метод интервалов при решении неравенств с модулем применяется не так часто, но его применение может несколько сократить время решения некоторых неравенств сравнительно с другими методами.

Пример 9. Решить неравенство

$$(|3x-2|-4x+3)(|2x-3|+x-3)\times$$
$$\times(4x^2-5x-6)\ge 0.$$

Решение. 1. Пусть

$$f_1(x)=|3x-2|-4x+3,\ f_2(x)=|2x-3|+x-3,$$
$$f_3(x)=4x^2-5x-6,$$
$$f(x)=f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot f_3(x).$$

Решим неравенство $f(x)\ge 0$ методом интервалов. Функция $y=f(x)$ определена и непрерывна на всей числовой прямой.

2. Найдем нули $f(x)$. Решим уравнения

$$f_1(x)=0,\ f_2(x)=0,\ f_3(x)=0,$$

начав с первого из них:

$$|3x-2|-4x+3=0\Leftrightarrow|3x-2|=4x-3\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}4x-3\ge 0,\\ \left[\begin{array}{l}3x-2=4x-3\\ 3x-2=-4x+3\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x-3\ge 0,\\ \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=\dfrac{5}{7}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=1.$$

Решим уравнение $f_2(x)=0$, используя то же свойство модуля (свойство 10), что и при решении предыдущего уравнения:

$$|2x-3|+x-3=0\Leftrightarrow|2x-3|=3-x\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}3-x\ge 0,\\ \left[\begin{array}{l}2x-3=3-x\\ 2x-3=-3+x\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3-x\ge 0,\\ \left[\begin{array}{l}x=2\\ x=0\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\ x=0.\end{array}\right.$$

Корнями квадратного трехчлена $4x^2-5x-6$, а значит, и нулями $f_3(x)$ являются числа $-0{,}75$ и 2.

3. Теперь можно применить метод интервалов, изобразив соответствующую «таблицу», первые три строки которой, начиная с верхней, предназначены для определения промежутков знакоположительности и знакоотрицательности алгебраических выражений $f_1(x)$, $f_2(x)$ и $f_3(x)$, а последняя (нижняя) — для определения промежутков знакоположительности и знакоотрицательности $f(x)$. При этом, как обычно, на каждой оси отмечаются не все нули, а только нули соответствующих множителей. Поскольку единственным нулем алгебраического выражения $f_1(x)=|3x-2|-4x+3$ является $x=1$, с помощью «пробных» точек легко определить, что $f_1(x)>0$ при $x<1$ (например, $f_1(0)=5>0$), и $f_1(x)<0$ при $x>1$ (например, $f_1(2)=-1<0$). Аналогичным образом легко определить, что $f_2(x)<0$ при $0<x<2$ и $f_2(x)>0$ при $x>2$ или $x<0$. Наконец, согласно свойствам квадратного трехчлена с положительным старшим коэффициентом $f_3(x)<0$ при $-0{,}75<x<2$ и $f_3(x)>0$ при $x>2$ или $x<-0{,}75$. Воспользовавшись «столбцами» таблицы, легко найти промежутки знакоположительности и знакоотрицательности $f(x)$:

$f_1(x)=\lvert 3x-2\rvert-4x+3$	+	+	+	−	−
$f_2(x)=\lvert 2x-3\rvert+x-3$	+	+	−	−	+
$f_3(x)=4x^2-5x-6$	+	−	−	−	+
$f(x)=f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot f_3(x)$	+	−	+	−	−

$-0{,}75$ 0 1 2 x

Множество решений данного неравенства: $(-\infty;-0{,}75]\cup[0;1]\cup\{2\}$.

Ответ: $(-\infty;-0{,}75]\cup[0;1]\cup\{2\}$.

Метод введения новой переменной

Метод введения новой переменной, как и метод интервалов, используется при решении неравенств с модулем довольно редко.

Пример 10. Решить неравенство

$$|x^2-3|x|+2|\ge|x^2-4|x|+3|.$$

Решение. Пусть $|x|=t$, тогда $x^2=t^2$ и данное неравенство можно переписать в виде

$$|t^2-3t+2|\ge|t^2-4t+3|.$$

Возведем обе части полученного неравенства в квадрат и воспользуемся формулой разности квадратов:

$$(t^2-3t+2)^2\ge(t^2-4t+3)^2\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(t^2-3t+2)^2-(t^2-4t+3)^2\ge 0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(t-1)(2t^2-7t+5)\ge 0.$$

Корнями квадратного трехчлена $2t^2-7t+5$ являются числа 1 и 2,5. Поэтому последнее неравенство можно переписать в виде

$$(t-1)\cdot 2\cdot(t-1)(t-2{,}5)\ge 0\Leftrightarrow(t-1)^2(t-2{,}5)\ge 0.$$

Если $t=1$, неравенство выполнено. При $t\ne 1$ выражение $(t-1)^2$ принимает только положительные значения, поэтому неравенство будет выполнено, лишь если $t\ge 2{,}5$. Значит, множеством решений неравенства $(t-1)^2(t-2{,}5)\ge 0$ является $\{1\}\cup[2{,}5;+\infty)$. Сделаем обратную замену:

$$\left[\begin{array}{l}|x|=1\\ |x|\ge 2{,}5,\end{array}\right.$$

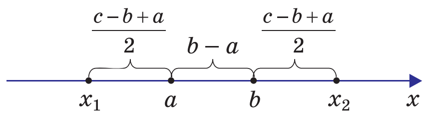
откуда *ответ*: $(-\infty;-2{,}5]\cup\{-1;1\}\cup[2{,}5;+\infty)$.

Применение геометрического смысла модуля

Применение геометрического смысла модуля может дать некоторый выигрыш во времени по сравнению с другими методами при решении всего нескольких типов неравенств, прежде всего неравенств вида $|x-a|+|x-b|\vee c$, а также $|x-a|-|x-b|\vee c$, $|x-a|\vee c|x-b|$, где $c>0$, и некоторых других. Решить неравенство $|x-a|+$ $+|x-b|\vee c$ — значит, найти все точки x числовой оси, сумма расстояний от каждой из которых до точек a и b больше (больше или равна) или меньше (меньше или равна) c. Будем считать, что $a < b$. Если расстояние между точками a и b больше c, то множеством решений неравенств $|x - a| + |x - b| > c$ и $|x - a| + |x - b| \geq c$ является все множество действительных чисел, а неравенства $|x - a| + |x - b| < c$ и $|x - a| + |x - b| \leq c$ решений не имеют. В самом деле, если предположить, что искомая точка принадлежит отрезку $[a; b]$, то сумма расстояний от такой точки до концов отрезка окажется больше c (поскольку эта сумма равна длине отрезка, а длина отрезка больше c). Ясно, что для любой точки, лежащей вне рассматриваемого отрезка, сумма расстояний от нее до концов отрезка будет еще больше. Если расстояние между точками a и b равно c, то множеством решений неравенства $|x - a| + |x - b| \leq c$ будет отрезок $[a; b]$, неравенство $|x - a| + |x - b| < c$ решений не имеет, неравенство $|x - a| + |x - b| \geq c$ выполняется при любом значении переменной, а множеством решений неравенства $|x - a| + |x - b| > c$ является вся числовая прямая за исключением чисел отрезка $[a; b]$, то есть множество $(-\infty; a) \cup (b; +\infty)$. Если же расстояние между точками a и b меньше c, то для решения любого из рассматриваемых неравенств нужно вначале найти все точки числовой оси, сумма расстояний от каждой из которых до точек a и b равна c. Ясно, что каждая из искомых точек лежит вне отрезка $[a; b]$, а сумма расстояний от нее до точек a и b будет равна сумме длины отрезка $[a; b]$ (то есть $b - a$) и удвоенного расстояния от этой точки до ближайшего к ней конца отрезка. Это удвоенное расстояние, очевидно, равно $c - (b - a) = c - b + a$, а искомых точек всего две: первая (обозначим ее x_1) лежит на числовой оси левее точки a на расстоянии $\frac{c-b+a}{2}$ от нее, а вторая (обозначим ее x_2) — правее точки b на том же расстоянии от нее. Поэтому

$$x_1 = a - \frac{c-b+a}{2} = \frac{a+b-c}{2},$$

$$x_2 = b + \frac{c-b+a}{2} = \frac{a+b+c}{2}:$$



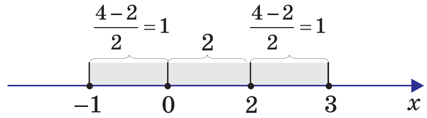
Теперь уже ясно, что множеством решений неравенства $|x - a| + |x - b| < c$ будет $(x_1; x_2)$, множеством решений неравенства $|x - a| + |x - b| \leq c$ будет $[x_1; x_2]$, а множествами решений неравенств $|x - a| + |x - b| > c$ и $|x - a| + |x - b| \geq c$ будут соответственно $(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$ и $(-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$.

Если метод освоен — решение подобных неравенств осуществляется почти мгновенно. Для этого нужно изобразить числовую ось, отметить на ней «ключевые» точки a и b и расстояние между ними, после чего, найдя точки x_1 и x_2, выписать ответ. Рассуждения, аналогичные приведенным, используются для решения неравенств вида $|x - a| - |x - b| \vee c$, $|x - a| \vee c|x - b|$ и некоторых других.

Пример 11. Решить неравенство

$$|2x^2 + x - 7| + |2x^2 + x - 9| \leq 4.$$

Решение. Обозначим $2x^2 + x - 7$ через t. Неравенство примет вид $|t| + |t - 2| \leq 4$. Согласно геометрическому смыслу модуля левая часть полученного неравенства равна сумме расстояний от точки t числовой оси до точек 0 и 2. Для того чтобы решить неравенство, найдем сначала точки t числовой оси, сумма расстояний от каждой из которых до точек 0 и 2 равна 4. Понятно, что на отрезке $[0; 2]$ искомых точек быть не может, поскольку сумма расстояний от любой точки отрезка до его концов равна длине отрезка и в данном случае равна 2. Значит, искомые точки лежат вне отрезка. Рассмотрим точку, лежащую правее точки 2 на числовой оси. Сумма расстояний от этой точки до концов отрезка складывается из длины отрезка и удвоенного расстояния от этой точки до точки 2. Таким образом, это удвоенное расстояние равно $4 - 2 = 2$, а искомая точка находится правее точки 2 на расстоянии $2 : 2 = 1$ от нее. Следовательно, первая из искомых точек — это $t = 3$. Абсолютно аналогично получаем, что вторая искомая точка находится на числовой оси левее точки 0 на расстоянии 1 от нее. Следовательно, вторая из искомых точек — это $t = -1$. Поэтому все точки t числовой оси, сумма расстояний от каждой из которых до точек 0 и 2 меньше или равна 4, лежат на отрезке $[-1; 3]$, который и является множеством решений неравенства $|t| + |t - 2| \leq 4$:



Таким образом, $\begin{cases} t \geq -1, \\ t \leq 3. \end{cases}$ Сделав обратную замену, получим

$$\begin{cases} 2x^2 + x - 7 \geq -1, \\ 2x^2 + x - 7 \leq 3, \end{cases} \quad \begin{cases} 2x^2 + x - 6 \geq 0, \\ 2x^2 + x - 10 \leq 0. \end{cases}$$

Корнями квадратного трехчлена $2x^2 + x - 6$ являются числа -2 и $1{,}5$, старший коэффициент трехчлена положителен. Следовательно, множество решений первого неравенства системы: $(-\infty; -2] \cup [1{,}5; +\infty)$. Корнями квадратного трехчлена $2x^2 + x - 10$ являются числа $-2{,}5$ и 2, старший коэффициент трехчлена положителен. Следовательно, множество решений второго неравенства системы: $[-2{,}5; 2]$. Пересечением множеств $(-\infty; -2] \cup [1{,}5; +\infty)$ и $[-2{,}5; 2]$, а значит, и решением данного неравенства является множество $[-2{,}5; -2] \cup [1{,}5; 2]$.

Ответ: $[-2{,}5; -2] \cup [1{,}5; 2]$.

Метод знакотождественных множителей

Метод знакотождественных множителей при решении некоторых типов неравенств с модулем дает ощутимый выигрыш во времени по сравнению с любым другим методом и позволяет избежать ветвления задачи и связанных с ним ошибок. Напомним, что любой из множителей в левой части неравенства вида $a_1(x) \cdot a_2(x) \cdot \ldots \cdot a_n(x) \vee 0$ или $\dfrac{a_1(x)\cdot a_2(x)\cdot \ldots \cdot a_n(x)}{a_{n+1}(x)\cdot a_{n+2}(x)\cdot \ldots \cdot a_{n+m}(x)} \vee 0$, являющийся разностью модулей двух алгебраических выражений (или вообще разностью двух любых алгебраических выражений, принимающих только неотрицательные значения), можно заменить разностью квадратов этих выражений (учитывая при необходимости ОДЗ каждого из таких выражений).

Пример 12. Решить неравенство

$$\frac{\left(|x| - \sqrt{x+2}\right)\left(|x| - 2\right)}{|x+3| - |x|} \le 0.$$

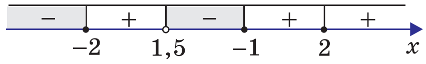
Решение. Применим метод знакотождественных множителей, заменив каждую из трех разностей в левой части неравенства разностью квадратов соответствующих алгебраических выражений (с учетом того $|a|^2 = a^2$ и $\sqrt{x+2}$ определен лишь при $x \ge -2$). Получим систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{(x^2 - x - 2)(x^2 - 4)}{(x+3)^2 - x^2} \le 0, \\ x \ge -2. \end{cases}$$

Корнями квадратного трехчлена $x^2 - x - 2$ являются числа -1 и 2. Разложив этот трехчлен на множители и применив формулу разности квадратов, придем к системе неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{(x+1)(x-2)^2(x+2)}{3(2x+3)} \le 0, \\ x \ge -2. \end{cases}$$

Применим метод интервалов к решению первого неравенства полученной системы неравенств:



Множество решений неравенства: $(-\infty; -2] \cup (-1{,}5; -1] \cup \{2\}$. Учитывая второе неравенство системы, найдем множество решений данного неравенства: $\{-2; 2\} \cup (-1{,}5; -1]$.

Ответ: $\{-2; 2\} \cup (-1{,}5; -1]$.

Уже этот относительно несложный пример демонстрирует преимущество метода знакотождественных множителей по сравнению с методом промежутков, применение которого потребовало бы рассмотрения четырех случаев и решения четырех систем неравенств вместо одной.

Применение свойств функций

Перейдем теперь к неравенствам с модулем, решение которых основано на применении свойств функций, прежде всего ограниченности и монотонности. Для решения неравенств с модулем использование свойства ограниченности связано преимущественно со свойством 6:

$|a| \ge a$, причем

$$|a| = a \Leftrightarrow a \ge 0,$$
$$|a| > a \Leftrightarrow a < 0;$$

$|a| \ge -a$, причем

$$|a| = -a \Leftrightarrow a \le 0,$$
$$|a| > -a \Leftrightarrow a > 0;$$

а также неравенством треугольника (свойство 14) и его модификацией:

$|a| + |b| \ge |a+b|$, причем

$$|a| + |b| = |a+b| \Leftrightarrow ab \ge 0,$$
$$|a| + |b| > |a+b| \Leftrightarrow ab < 0;$$

$|a| + |b| \ge |a-b|$, причем

$$|a| + |b| = |a-b| \Leftrightarrow ab \le 0,$$
$$|a| + |b| > |a-b| \Leftrightarrow ab > 0.$$

Пример 13. Решить неравенство

$$|2x^2 - 3x - 5| + |x^2 - 2x - 3| \le x^2 - x - 2.$$

Решение. Заметим, что разность подмодульных выражений равна правой части неравенства, то есть данное неравенство имеет вид

$$|a| + |b| \le a - b,$$

где $a = 2x^2 - 3x - 5$, $b = x^2 - 2x - 3$.

Из неравенств $|a| \ge a$, $|b| \ge -b$, следует, что $|a| + |b| \ge a - b$. Но $|a| + |b| \le a - b$ по условию. Таким образом, $|a| + |b| = a - b$, что возможно в том и только том случае, если $\begin{cases} a \ge 0, \\ b \le 0. \end{cases}$ Значит, данное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} 2x^2 - 3x - 5 \ge 0, \\ x^2 - 2x - 3 \le 0. \end{cases}$$

Корнями квадратного трехчлена $2x^2 - 3x - 5$ являются числа -1 и $2{,}5$, старший коэффициент трехчлена положителен. Следовательно, множество решений первого неравенства системы: $(-\infty; -1] \cup [2{,}5; +\infty)$. Корнями квадратного трехчлена $x^2 - 2x - 3$ являются числа -1 и 3, старший коэффициент трехчлена положителен. Следовательно, множество решений второго неравенства системы: $[-1; 3]$. Пересечением полученных множеств, а значит, и решением данного неравенства является множество $\{-1\} \cup [2{,}5; 3]$.

Ответ: $\{-1\} \cup [2{,}5; 3]$.

Пример 14. Решить неравенство

$$|3x^2 + 4x - 4| + |4x^2 - 8x - 5| > |x^2 - 12x - 1|.$$

Решение. Заметим, что данное неравенство имеет вид

$$|a| + |b| > |a - b|,$$

где $a = 4x^2 - 8x - 5$, $b = 3x^2 + 4x - 4$.

В соответствии с неравенством треугольника

$$|a| + |b| > |a - b| \Leftrightarrow ab > 0.$$

Таким образом, данное неравенство равносильно неравенству

$$(4x^2 - 8x - 5)(3x^2 + 4x - 4) > 0.$$

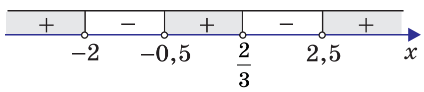
Корнями квадратного трехчлена $4x^2 - 8x - 5$ являются числа $-0{,}5$ и $2{,}5$. Корнями квадратного трехчлена $3x^2 + 4x - 4$ являются числа -2 и $\frac{2}{3}$. Следовательно, полученное неравенство можно переписать в виде

$$4(x+0{,}5)(x-2{,}5)\cdot 3(x+2)\left(x-\frac{2}{3}\right)>0,$$

откуда

$$(x+0{,}5)(x-2{,}5)(x+2)\left(x-\frac{2}{3}\right)>0.$$

Применим метод интервалов:



Множеством решений данного неравенства является $(-\infty; -2) \cup \left(-0{,}5; \frac{2}{3}\right) \cup (2{,}5; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -2) \cup \left(-0{,}5; \frac{2}{3}\right) \cup (2{,}5; +\infty)$.

Пример 15. Решить неравенство

$$|x - 1| + |x - 2| + \ldots + |x - 100| \le 2500.$$

Решение. Воспользуемся неравенством треугольника:

$$|a| + |b| \ge |a - b|,$$

причем

$$|a| + |b| = |a - b| \Leftrightarrow ab \le 0.$$

Получим пятьдесят неравенств:

$|x - 1| + |x - 51| \ge 50$, причем

$$|x - 1| + |x - 51| = 50 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x - 1)(x - 51) \le 0 \Leftrightarrow 1 \le x \le 51;$$

$|x - 2| + |x - 52| \ge 50$, причем

$$|x - 2| + |x - 52| = 50 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x - 2)(x - 52) \le 0 \Leftrightarrow 2 \le x \le 52; \ldots$$

$|x - 50| + |x - 100| \ge 50$, причем

$$|x - 50| + |x - 100| = 50 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x - 50)(x - 100) \le 0 \Leftrightarrow 50 \le x \le 100.$$

Следовательно, левая часть данного неравенства не меньше $50 \cdot 50 = 2500$. Поэтому данное неравенство выполняется в том и только том случае, когда его левая часть равна 2500, что возможно, только если выполняются все неравенства $1 \le x \le 51$, $2 \le x \le 52$, ..., $50 \le x \le 100$, откуда $50 \le x \le 51$.

Ответ: $[50; 51]$.

Рассмотрим теперь два примера на применение свойств монотонных функций к решению неравенств с модулем.

Пример 16. Решить неравенство

$$|x + 2| - 2|x - 1| + |2x + 1| \le 6x.$$

Решение. Перепишем неравенство в виде

$$6x - |x + 2| + 2|x - 1| - |2x + 1| \ge 0,$$

и рассмотрим функцию

$$f(x) = 6x - |x + 2| + 2|x - 1| - |2x + 1|,$$

определенную и непрерывную на всей числовой прямой. График функции представляет собой ломаную, состоящую из отрезков прямых и лучей. Каждое звено этой ломаной является частью прямой вида $y = kx + l$, где $k > 0$ (поскольку $k = 6 \pm 1 \pm 2 \pm 2$, и вне зависимости от «раскрытия» модулей коэффициент при x будет положителен). Следовательно, функция $y = f(x)$ возрастает на $(-\infty; +\infty)$. Поскольку $f(1) = 0$, неравенство $f(x) \ge 0$ выполнено в том и только том случае, если $x \in [1; +\infty)$.

Ответ: $[1; +\infty)$.

Пример 17. Решить неравенство

$$3(x^2 + 4x + 2) + |x - 1| \ge 3x + |x^2 + 4x + 1|.$$

Решение. Перепишем данное неравенство в виде

$$3x - |x - 1| \le 3(x^2 + 4x + 2) - |x^2 + 4x + 1|$$

и рассмотрим функцию

$$f(t) = 3t - |t - 1|.$$

Если $t \ge 1$, то $f(t) = 2t + 1$; если $t < 1$, то $f(t) = 4t - 1$. Следовательно, функция $y = f(x)$ возрастает на $(-\infty; +\infty)$. Значит, неравенство $f(\alpha) \le f(\beta)$ будет выполняться тогда и только тогда, когда $\alpha \le \beta$. В данном случае $\alpha = x$, $\beta = x^2 + 4x + 2$. Поэтому $x \le x^2 + 4x + 2$, откуда $x^2 + 3x + 2 \ge 0$. Корнями квадратного трехчлена $x^2 + 3x + 2$ являются числа -2 и -1, старший коэффициент трехчлена положителен. Следовательно, множеством решений неравенства является $(-\infty; -2] \cup [-1; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -2] \cup [-1; +\infty)$.

Н. АВИЛОВ,
avilow@rambler.ru,
ст. Егорлыкская, Ростовская обл.

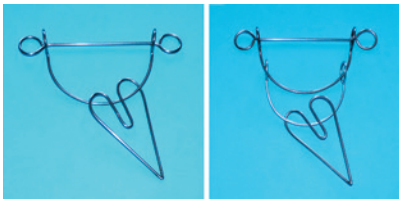
ОСВОБОДИ СЕРДЦЕ

Ведущий рубрики — Николай Иванович Авилов — на фоне своей коллекции головоломок

Эта головоломка – классический представитель большого семейства проволочных головоломок. Для меня она памятна тем, что благодаря ей состоялось мое знакомство с этим большим и удивительно красивым миром умных игрушек.

Помню, как кто-то из стариков хутора, где прошло мое босоногое детство, смастерил мне такую головоломку и попросил отцепить сердечко. Повертев безуспешно головоломку в руках, я подумал, что старик разыгрывает меня и отцепить сердечко невозможно! Но когда старик, словно фокусник, освободил сердечко, я не поверил глазам своим.

Показал эту занятную игрушку своим друзьям, и каждый из них захотел смастерить себе такую. Благо, в это время на хуторе проводилась долгожданная электрификация, поэтому обрезков мягкой алюминиевой проволоки было в достатке.



Возможно, я и не вспомнил бы про эту широко известную головоломку, если бы на ежегодном Съезде любителей головоломок всероссийского клуба «Диоген» не произошла новая встреча с ней. Александр Кузьмич Башкиров из Подмосковья добавил в конструкцию головоломки ещё одну дугу. Получилась усложненная головоломка со всё той же романтической формой в виде сердца. Попробуйте найти решение и освободить «пойманное» сердце, используя только силу своего ума и ловкость пальцев.

Головоломка действительно стала трудней, потому что количество манипуляций с ее элементами значительно увеличилось.

Для изготовления головоломки можно использовать медную, алюминиевую или мягкую стальную проволоку. Кольца лучше выполнить круглогубцами, а изгибы — плоскогубцами, при этом соблюдайте необходимые соотношения размеров: все кольца одного диаметра, а ширина челнока на сердечке должна быть такой, чтобы челнок входил в кольцо и был достаточно длинным.

Еще одним важным условием является тщательная подгонка концов проволоки на стыках, чтобы отдельные элементы головоломки нельзя было рассоединить на них, поэтому эти стыки, если можно, лучше запаять.

Не пожалейте времени и сил, сделайте оба варианта. Умение решать головоломку в более простом первом варианте, вам обязательно поможет в успешном поиске решения второго варианта.

К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru

ЭЛЕКТРОННАЯ ФОРМА УЧЕБНИКА

НОВАЯ ФОРМА — НОВЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ

СООТВЕТСТВУЕТ
СОДЕРЖАНИЮ
ПЕЧАТНОЙ
ФОРМЫ УЧЕБНИКА

вентана
граф

ЭФУ содержит текст учебника, расширенный и дополненный педагогически обоснованным количеством мультимедийных и интерактивных элементов, необходимых для усвоения учебного материала.

ИНФОРМАЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ

- Дополнительный текст
- Примеры решения задач
- Из истории, это интересно
- Справочные материалы
- Аудиоматериалы
- Видеоматериалы
- Изображения
- Карты
- Схемы, диаграммы, графики
- Гиперссылки
- Интерактивные иллюстрации

ПРАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

- Задания с прослушиванием
- Интерактивные задания
- Интерактивные задания сложного уровня
- Интерактивные задания дополнительные
- Практикум (набор интерактивных заданий для самоконтроля)
- Задание неинтерактивное

КОНТРОЛЬНО-ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

- Итоговая работа

ЭЛЕКТРОННЫЕ ФОРМЫ УЧЕБНИКОВ:

- Доступны
- Мобильны
- Удобны
- Содержат интерактивные материалы
- Предоставляют дополнительные образовательные возможности всем участникам образовательных отношений

WWW.VGF.RU

127422, Москва,
ул. Тимирязевская,
д. 1, стр. 3.

+7 (499) 641 55 29
+7 (495) 234 07 53
efu@vgf.ru

Колесо обозрения «Лондонский глаз»

«Лондонский глаз» — одно из крупнейших колес обозрения в мире. Расположено оно в самом центре Лондона на берегу Темзы, а открыли его накануне празднования Миллениума. Выглядит сооружение как большое велосипедное колесо, видимо, за счет «спиц», поддерживающих обод колеса.

У «Лондонского глаза» 32 закрытые кабинки-капсулы, форма которых близка к эллипсоиду. Это первое в мире колесо обозрения нового типа — типа «наблюдательные колеса»; главная их особенность заключается в том, что кабинки всегда расположены с внешней стороны обода. (Сравните, например, с колесом обозрения в московском парке им. Горького.)

Вес каждой капсулы 10 т. Принять она может до 25 пассажиров. Колесо вращается с постоянной скоростью в 26 см/с. Скорость вращения выбрана с учетом того, чтобы один оборот длился приблизительно 30 минут.

Да, это колесо может стать объектом немалого числа познавательных задач, но самая интересная из них, пожалуй, задача о том, как далеко видит наблюдатель, находящийся в высшей точке сооружения, ведь с высоты 135 метров (а это приблизительно 45 этажей) открывается вид практически на весь город. Как мы помним из книг Я.И. Перельмана, дальность видимого горизонта (в км) вычисляется по формуле:

$$\text{дальность горизонта} = 80\sqrt{2h} = 113\sqrt{h},$$

где h — высота глаз наблюдателя над уровнем земли (в км). Вычисления дают нам примерно 42 км. Интересно, а видна ли Гринвичская обсерватория? Ответить на этот вопрос предлагаю читателю самостоятельно.

Л. Рослова

mat.1september.ru | Подписка на сайте www.1september.ru или по каталогу «Почта России»: 79073 (бумажная версия); 12717 (CD-версия)