МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ №3 (762)
ИЗДАЕТСЯ С 1992 г.
mat.1september.ru

издательский дом
1september.ru
Первое сентября
март 2015
МАТЕМАТИКА Подписка на сайте www.1september.ru или по каталогу «Почта России»: 79073 (бумажная версия); 12717 (CD-версия)

ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ДОМ
«ПЕРВОЕ СЕНТЯБРЯ»
Главный редактор:
Артем Соловейчик
(генеральный директор)
Коммерческая деятельность:
Константин Шмарковский
(финансовый директор)
Развитие, IT и координация проектов:
Сергей Островский
(исполнительный директор)
Реклама, конференции и техническое обеспечение Издательского дома:
Павел Кузнецов
Производство:
Станислав Савельев
Административно-хозяйственное обеспечение: Андрей Ушков
Педагогический университет:
Валерия Арсланьян
(ректор)

ЖУРНАЛЫ ИЗДАТЕЛЬСКОГО ДОМА:
Английский язык – А. Громушкина,
Библиотека в школе – О. Громова,
Биология – Н. Иванова,
География – А. Митрофанов, и.о.
Дошкольное образование – Д. Тюттерин,
Здоровье детей – Н. Сёмина,
Информатика – С. Островский,
Искусство – О. Волкова,
История – А. Савельев,
Классное руководство и воспитание школьников –М. Битянова,
Литература – С. Волков,
Математика – Л. Рослова,
Начальная школа – М. Соловейчик,
Немецкий язык – М. Бузоева,
ОБЖ – А. Митрофанов,
Русский язык – Л. Гончар,
Спорт в школе – О. Леонтьева,
Технология – А. Митрофанов,
Управление школой – Е. Рачевский,
Физика – Н. Козлова,
Французский язык – Г. Чесновицкая,
Химия – О. Блохина,
Школа для родителей – Л. Печатникова,
Школьный психолог – М. Чибисова.

Иллюстрации: фотобанк Shutterstock
на с 50 — Elnur / Shutterstock.com

На с. 1 и с. 64 — коллажи из иллюстраций, взятых с сайтов: http://sovsekretno.ru, www.youtube.com, baltzer.com, http://ru-travel.livejournal.com/24810341.html, http://andrewboykov 2013.andrewboykov.livejournal.com

УЧРЕДИТЕЛЬ:
ООО «ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ДОМ
«ПЕРВОЕ СЕНТЯБРЯ»
Зарегистрировано ПИ №ФС77-58424 от 25.06.14 в Роскомнадзоре
Подписано в печать: по графику 16.01.15, фактически 16.01.15 Заказ №
Отпечатано в ОАО «Первая Образцовая типография» филиал «Чеховский печатный двор» ул. Полиграфистов, д. 1, Московская область, г. Чехов, 142300; Сайт: www.chpd.ru; E-mail: sales@chpk.ru; факс: 8(496)726-54-10, 8(495)988-63-76

АДРЕС РЕДАКЦИИ И ИЗДАТЕЛЯ:
ул. Киевская, д. 24, Москва, 121165
Телефон/ факс: **(499) 249-3138**
Отдел рекламы: **(499) 249-9870**
Сайт: **1september.ru**

ИЗДАТЕЛЬСКАЯ ПОДПИСКА:
Телефон: **(499) 249-4758**

ПОДПИСНЫЕ ИНДЕКСЫ:
Почта России: бумажная версия – **79073**;
CD версия – **12717**

В НОМЕРЕ

К материалам, обозначенным этим символом, есть дополнительные материалы в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru

ОБЛАЧНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ ОТ ИЗДАТЕЛЬСКОГО ДОМА «ПЕРВОЕ СЕНТЯБРЯ»

УВАЖАЕМЫЕ ПОДПИСЧИКИ БУМАЖНОЙ ВЕРСИИ ЖУРНАЛА!

Дополнительные материалы к номеру и электронная версия журнала находятся в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru
Для доступа к материалам воспользуйтесь, пожалуйста, кодом доступа, вложенным в № 1.
Срок действия кода с 1 января по 30 июня 2015 года.

Для активации кода:
· Зайдите на сайт www.1september.ru
· Откройте Личный кабинет (зарегистрируйтесь)
· Введите код доступа и выберите свое издание

Справки: podpiska@1september.ru или через службу поддержки на портале «Первого сентября»

МАТЕМАТИКА. ПЕРВОЕ СЕНТЯБРЯ
Методический журнал для учителей математики
Издается с 1992 г.
Выходит один раз в месяц

РЕДАКЦИЯ:
Главный редактор: Л. Рослова
Отв. секретарь: Т. Черкавская
Редакторы: П. Камаев, О. Макарова, И. Коган
Дизайн макета: И. Лукьянов. Дизайн обложки: Э. Лурье
Корректор: Л. Громова. Верстка: Л. Кукушкина

Распространяется по подписке
Цена свободная
Тираж 20 000 экз.

Тел. редакции: **(499) 249-3460**
E-mail: **mat@1september.ru**
Сайт: **mat.1september.ru**

МОЛИТВА О ЗАЩИТЕ

Л. РОСЛОВА

Странное существо человек. Как стебались (в душе, разумеется) мы в далекие уже годы застоя над диктуемой извне нашего сознания необходимостью цитировать всуе и не к месту решения очередного партийного съезда или выступление генерального секретаря. Ну что можно было извлечь из этих «кладезей мысли» относительно методики изучения логарифмов или организации текущего контроля знаний учащихся? Не проникал свет партийной мысли в столь глубокий колодезь. И как радовались освобождению — снизошедшей на нас свободе мысли и свободе слова.

Что же происходит с нами спустя 30 лет? Почему сегодня мы не можем ни КИМы для ЕГЭ по математике сотворить без ссылки на Концепцию развития матобразования, ни статью с описанием урока по математике написать без цитаты из Путина? Снова внешние обстоятельства? Велят сверху? Или это следствие внутреннего беспокойства?

Чего же нам не хватает? Нет, понятно, что государственной идеи как не было, так и нет. Никто не объяснил нам, какое общество мы строим, каким идеалам служим или, в деталях, какое математическое образование нужно каждому гражданину нашего общества. Понятно также, что общественные идеалы не могут зависеть от цен на нефть.

Так почему же мы снова пытаемся открыть страницу, уже, казалось, перевернутую? Видимо, в поисках опоры. Однако мы снова ищем ее не в демократических принципах. Обидно. Да и страшно.

В качестве альтернативного примера вспомнились демонстрации, прошедшие по европейским странам в знак солидарности с погибшими журналистами из французского сатирического журнала «Charlie Hebdo». Демонстранты встали на защиту базовых ценностей современного европейского общества, прежде всего свободы слова. Они защищали сатиру (такую, какой они ее видят и понимают, исходя опять же из европейского менталитета) как один из способов проявления этой свободы.

И дай нам бог (и христианский, и мусульманский), чтобы нам не пришлось защищать математическое образование, которое, как известно, «ум в порядок приводит». Школьную математику — как способ развития этого самого ума.

О. ВОВДЕНКО,
Л. ДВУРЕЧЕНСКАЯ,
И. КРУГЛОВА,
О. ЛАВТОРОВА,
И. ЧЕБОТАРЕВА,
lip.olle@yandex.ru,
г. Липецк

РЕГИОНАЛЬНЫЙ КОМПОНЕНТ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

*Человек,
который не любит
свою Родину,
ничего
любить не может.
Байрон*

Региональный аспект образования несет в себе все богатство национально-региональной культуры, традиций, духовных устремлений и ценностей, он усиливает роль человеческого фактора в образовании, актуализируя вопросы развития духовной культуры школьника, его самостоятельности, творчества, активности.

Реализация регионального компонента осуществляется через введение в учебный план специальных предметов («Историческое краеведение», «Литературное краеведение») и совсем не затрагивает общеобразовательные области, в том числе математику.

Математика... Решение задач. На первый взгляд с краеведением нет ничего общего, но только на первый!

Введение элементов краеведения в преподавание математики преследует следующие цели: повышение интереса учащихся к изучению математики и углубление понимания изучаемого материала; расширение кругозора школьников и повышение их общей культуры.

Использование материала на основе регионального компонента на уроках и во внеурочной деятельности дает большой объем знаний по различным темам: природа, фольклор, литература, история края, интересные люди. Краеведческий материал на уроках математики положительно влияет на результативность знаний учащихся, на развитие их личности, способствует воспитанию гражданственности. Пробудить чувство гордости за свою малую родину можно через сюжеты задач.

Откуда начинается Россия?
С лозинки, что сбежала с речки синей?
А может, начинается с крыльца
Иль с поля, где пшеница раскачалась?
Откуда бы она ни начиналась –
Любви к России нет у нас конца.
Н. Кабушкин

Такие риторические вопросы должны не только отложиться в голове каждого ученика как математические правила и теоремы, но и глубоко проникнуть в их сердца.

Однако в учебниках краеведческий аспект практически не представлен. Перед учителем встает задача поиска и отбора материала по краеведению, привязки данного материала к учебной программе.

К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru (Урок по материалам статьи.)

Сначала мы сами составляли задачи, используя сведения, почерпнутые из трудов историков, археологов, географов, экологов. Затем к работе по составлению задач мы привлекли самих учащихся, которым очень понравилось изучать математику таким образом. Эта работа увлекательна и интересна, требует творчества и поиска, так как дети чувствуют себя новаторами и первопроходцами. Учащиеся с большим удовольствием подбирали материалы по различным темам: «История нашего края», «Из истории Липецкого курорта», «География и природа Липецкой области», «Памятные места нашего города», «Визитные карточки городов Липецкой области» и др. В работе используются архивные сведения, литературные источники, статьи из печатных изданий (областные детские газеты «Золотой ключик», «Сыроежка», корпоративный журнал «Компания НЛМК (Новолипецкий металлургический комбинат)». В целях большей информативности, наглядности материала задачи сопровождались справочной информацией, иллюстрировались рисунками, фотографиями (в настоящее время это легко осуществить, используя ИКТ). Такая работа развивает кругозор, научное мировоззрение, прививает любовь к родному краю, дает наглядное представление о связи математических знаний с окружающей действительностью, способствует развитию творческого мышления.

Интеграция элементов краеведения в математику дает возможность использовать активные формы и методы обучения: экскурсии, конкурсы, викторины, заочные экскурсии.

Разбудить не только мысль, но и душу ребенка помогают нетрадиционные уроки. Подготовку к ним можно совместить с экскурсиями. Например, ученики, вооруженные рулеткой, карандашами и блокнотами, под руководством учителя во время прогулки по городу исследуют достопримечательности, измеряют части памятников, имеющих форму геометрических тел. Все, что детям казалось давно знакомым, неожиданно открывается с новой стороны. В результате появляются первые записи в блокнотах: «Бульвар Неделина. Всего деревьев высажено 134, из них лип — 90, каштанов — 23, кустов сирени — 19, елей — 2», «Памятник первому градоначальнику Клюеву. Основания постамента — равнобокая трапеция с основаниями 1,38 м и 2,1 м и боковым ребром 0,65 м» и др. Позже ребята продолжат работать дома и в классе: найдут в литературе информацию о данном объекте, составят задачу, используя полученные результаты измерений, и предложат решить ее на уроке одноклассникам.

Проведение уроков нетрадиционной формы, применение различных методических приемов с использованием материалов регионального компонента формирует активную жизненную позицию учащихся, позволяет им ощутить себя частью мира, в котором мы живем. Прививается интерес к учебному труду, повышается уровень культуры учащихся, качество их подготовки, растет познавательная активность.

Предлагаем вашему вниманию ряд задач, составленных учащимися.

5-й класс

Тема: «Натуральные числа»

1. Запишите цифрами числа, встречающиеся в тексте, и прочитайте их: «Согласно ревизии (переписи населения) 1781 г. в уездном городе Липецке проживало “купцов 195, мещан 532, однодворцев 601, при казенном заводе мастеровых 1020, шляпников 238, погонщиков 229, положенных по штату 37, сверх штату 37. Итого 2975 душ мужского пола”. В то время при переписи считались только жители мужского пола, таким образом, жителей было примерно 6000 человек».

2. В Никоновской летописи 1146 г. написано: «Князь Святослав Ольгович, идя в Рязань, и был в Мценске, и в Туле, и в Ельце». Сколько лет назад упоминается Елец, город Липецкой области, в Никоновской летописи?

3. В 1380 г. произошла знаменитая Куликовская битва на Куликовом поле, расположенном в 10 км от северо-западной границы Липецкой области. Сколько лет назад произошла эта битва?

4. (*Легенда*) В Липецкой Вознесенской церкви в 1773 г. состоялось бракосочетание бабушки Пушкина, Марии Алексеевны, с Осипом Абрамовичем Ганнибалом — «любимым арапом» царя. Сколько лет назад состоялось это событие?

5. В феврале 1696 г. по указу Петра I «в лесных местах, ближайших к Дону: в Воронеже, Козлове, Добром и Сокольске — 26 000 работников должны были к весне срубить 300 лодок», плотов — на 200 меньше, чем лодок, и стругов — на 1000 больше, чем лодок. Сколько всего стругов, лодок и плотов должны были срубить по заданию Петра I?

6. В 1693 г., за два года до начала первого Азовского похода, на реке Белый Колодезь в Романовском уезде был построен первый в нашем крае доменный железоделательный завод. Завод был выстроен московским предпринимателем дьяком Бориным и купцом Н. Аристовым. Возникновение завода связано с подготовкой Петра I к Азовским походам. На Боринских заводах работало около 80 человек. Непосредственно в технологическом процессе было занято: мастеров доменного дела, котельного литья и других работ — 25 человек, подмастерьев — на 13 человек меньше, чем мастеров, плотников — 7, работников — на 25 больше, чем плотников, и 1 мелочный кузнец. Сколько человек было занято непосредственно в технологическом процессе?

7. С самого начала своего существования Боринский завод сослужил немалую службу при строительстве первых кораблей будущего Азовского флота. К концу XVII в. Боринский завод выпускал в год 8470 пудов железа, чугуна — на 20 130 пудов больше, чем железа. Сколько всего пудов чугуна и железа выпускал в год Боринский завод?

8. Один Боринский завод не мог полностью удовлетворить потребностей армии и флота, поэтому в одну из своих поездок в город Воронеж Петр I, осмотрев здешние места, повелел для нужд строящегося флота построить железный завод на речке Липовке, правом притоке реки Воронеж. В 1710 г. на Липецких железоделательных заводах было отлито корабельных пушек: 24-фунтовых — 72 штуки; 18-фунтовых — на 47 штук меньше, чем 24-фунтовых; 12-фунтовых — на 35 пушек больше, чем 18-фунтовых; на гарнизоны — 109 пушек, других калибров — 226. Сколько всего было отлито корабельных пушек?

9. Нижний (или Центральный) парк культуры и отдыха был открыт в 1805 г. В каком году парк отпраздновал свое 200-летие?

10. В 1809 г. при Липецком курорте минеральных вод открылась библиотека. Первоначально в ней насчитывалось на русском языке всего 18 книг, на немецком языке — на 100 книг больше, чем на русском, на французском языке — на 172 книги больше, чем на немецком, а также 234 книги на других языках. Сколько всего книг было в библиотеке курорта?

11. На Липецком курорте первый фонтан с минеральной водой был открыт в 1866 г. Сколько лет этому фонтану?

12. По территории Липецкой области протекает 127 рек. Самая главная река — Дон. Вторая большая река — Воронеж, она на 1498 км короче реки Дон. Протяженность обеих рек составляет 2436 км. Какова длина реки Дон и реки Воронеж, протекающих по Липецкой области?

13. В Воронежском заповеднике представлено 112 видов мохообразных растений, травянистых — на 888 видов больше, чем мохообразных, а кустарников — на 42 вида меньше, чем мохообразных, деревьев — на 50 видов меньше, чем кустарников. Сколькими видами растений представлена флора Воронежского заповедника?

14. Подсчитать потери фауны Земли за большой исторический отрезок времени невозможно. Но нам известно, что с 1600 г. по вине человека вымерло не менее 63 видов млекопитающих и более 230 видов прочих позвоночных животных. Территория Липецкой области в значительной мере освоена людьми для использования в хозяйственных целях, но, несмотря на это, она приютила 44 вида, включенных в Красную книгу Российской Федерации. На территории области обитают 22 вида птиц, включенных в Красную книгу Российской Федерации, насекомых — на 12 видов меньше, чем птиц, и на 5 видов больше, чем рыб. Сколько видов насекомых и рыб, включенных в Красную книгу Российской Федерации, обитает на территории нашей области?

Тема: «Дробные числа»

1. Высота обелиска Петру I на Петровском спуске в городе Липецке составляет 20 м, высота памятника Петру I — 5,6 м. Какую часть составляет высота обелиска от высоты памятника?

2. Площадь Липецкой области составляет примерно 24 тыс. км^2, площадь графства Люксембург около 3 тыс. км^2, Кувейта — 18 тыс. км^2, Сальвадора около 21 тыс. км^2. Какую часть территории Липецкой области составляет площадь Люксембурга? Кувейта? Сальвадора?

3. Река Дон — одна из трех рек, на водных путях которых некогда сложилось и окрепло Русское государство. Протяженность реки 1870 км. На территории Липецкой области Дон протекает своей $\frac{1}{6}$ частью. Какова длина Дона в границах Липецкой области?

4. Липецкая область небогата лесами, их площадь составляет 210 тыс. га. Площадь Липецкой области около 24 тыс. км^2. Какую часть территории Липецкой области составляют леса?

5. В результате пожара летом 2010 г. на участке «Морозова гора» заповедника «Галичья гора» уничтожено 37 га реликтового дуба (площадь «Морозовой горы» 100 га). Какая часть «Морозовой горы» была уничтожена?

6. Крупнейший проект 2010 г. на НЛМК — новая доменная печь № 7, производительностью 3,4 млн. т стали в год. Производительность старых доменных печей 2,2 млн. т в год. На сколько тонн увеличилось производство стали?

7. Годовое количество осадков на территории Липецкой области составляет около 550 мм. Около 70% осадков приходится на теплое время года. Сколько осадков выпадает в теплое время года в Липецкой области?

8. Площадь лесов на территории Липецкой области примерно 210 тыс. га. Территория Липецкой области 24 тыс. км^2. 40% всех лесов Липецкой области составляют дубравы. Какова площадь дубрав?

9. Запасы железной руды в Липецкой области составляют 20 млн. т. Эта руда содержит 48% железа. Сколько железа можно добыть из липецкой руды? До 1964 г. добыто более 10 млн. т железной руды. Сколько руды оставалось в недрах после 1964 г.?

10. На территории Липецкой области зарегистрировано 217 крупных болот общей площадью 7600 га. Наиболее распространены низинные болота, их более 96% от всего количества болот. Найдите общую площадь низинных болот.

11. 40% всей лесопокрытой площади Липецкой области (210 тыс. га) составляют сосновые леса, которые называют борами, 40% всех лесов занимают дубравы. Найдите площадь сосновых лесов Липецкой области.

12. Сельхозугодья Липецкой области составляют около 1900 тыс. га. Из них 65% — пашня, 26 тыс. га земли — под садами. Сколько гектаров составляет пашня? Сколько процентов составляет площадь садов от площади сельхозугодий?

13. Территория Липецкой области примерно 24 тыс. км^2. Около 5% площади земель области занято лугами. Найдите общую площадь лугов в Липецкой области.

14. В липецком зоопарке представлено более 300 видов животных и птиц. Из них 43 вида занесено в Международную Красную книгу, а 20 видов — в Красную книгу России. Найдите процент обитателей липецкого зоопарка, занесенных в Международную Красную книгу. Ответ округлите до сотых.

15. На территории нашей области обитает 10 тыс. видов насекомых. Из них причиняют вред 10% всех насекомых. Сколько видов насекомых приносят пользу для человека?

6-й класс

1. К декабрю 1970 г. часовой мастер М.Т. Гребенкин смонтировал на колокольне краеведческого музея (ныне Христорождественский собор) башенные электрические часы с четырьмя циферблатами. Диаметр одного из циферблатов составляет два метра. Найдите длину окружности этого циферблата.

2. Длина минутной стрелки часов на 60-метровой колокольне собора равна 40 см. Какой путь проделает ее конец за 1 минуту?

3. Нижний парк — дендрологический памятник природы, расположенный в центральной части города, у Соборной горы. Площадь парка 101 га. В нем произрастает 50 видов деревьев и кустарников. В составе древесных пород преобладают вековые дубы и липы. Имеются экзотические растения. Некоторым дубам более 200 лет. Длина окружности ствола одного из деревьев 4,5 м. Чему равен диаметр ствола этого дерева (ответ округлите до сотых)?

4. Самая крупная река Липецкой области — Дон протекает с севера на юг по Липецкой области, длина примерно 270 км. Какой длины будет изображение реки Дон на карте Липецкой области, масштаб которой 1 : 280 000?

5. На доломитовом комбинате города Данкова работают машины большой грузоподъемности — БелАЗы. Пять таких машин одновременно вывозят 200 т щебня. Сколько щебня вывезут 15 БелАЗов?

6. Длина реки Воронеж 469 км, в пределах Липецкой области находится 0,6 длины всей реки. Какова протяженность реки Воронеж по нашей области?

7. Заповедник «Галичья гора» состоит из 6 урочищ: «Галичья гора» площадью 19 га, «Морозова гора» — 100 га, «Воронов камень» — 11,4 га, «Воргольские скалы» — 30 га, «Плющань» — 39,5 га, «Быкова шея» — 30,1 га. Какую часть составляет:

а) территория урочища «Воргольские скалы» от площади всего заповедника «Галичья гора»;

б) территория урочища «Воронов камень» от площади урочища «Воргольские скалы»?

8. В Чаплыгинском районе по Рясскому полю протекают реки, которые носят названия Ряс. Сколько их, вы узнаете, решив следующее уравнение: $7x - 78 = 3x - 58$.

9. Реки Липецкой области впадают в Оку, Дон и Воронеж. Рек, впадающих в Дон, в 40 раз больше, чем тех, которые впадают в Оку, а рек, впадающих в Воронеж, на 35 меньше, чем тех, которые впадают в Дон. Сколько рек впадает в Дон, если в области всего 127 рек?

Геометрия

1. Определите площади равнобедренных трапеций, находящихся в основании постамента памятника М.А. Клюеву, если:

а) в трапеции $MKPT$ основания равны 1 м и 1,2 м, а высота равна 1,3 м;

б) в трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD $AB = 0{,}6$ м, $AD = 2$ м, $\angle A = 60°$, высота $BK = 0{,}52$ м.

2. В 1693 г. на реке Белый Колодезь в Романовском уезде был построен первый в нашем крае доменный железоделательный завод. Завод выстроен московскими предпринимателями дьяком Бориным и купцом Н. Аристовым. Источником двигательной силы для заводских машин была вода правого притока реки Воронеж — реки Белый Колодезь, перехваченной плотиной.

«Сечение насыпи плотины Боринского завода трапециевидное. Ширина ее по гребню 5,5 м, по подошве — 23 м, высота — 4,5 м». Найдите площадь сечения плотины Боринского завода.

3. Петровский спуск имеет 117 ступенек. Ширина ступеньки 35 см, высота 20 см. Определите длину подъема на Соборную площадь.

4. В солнечный летний день тень, падающая от обелиска Петру I на землю, имеет длину 10,5 м. Найдите высоту обелиска, если тень, падающая от человека ростом 160 см (в этот же день), имеет длину 84 см.

5. Рядом с заповедником «Галичья гора» на берегу реки Дон есть песчаный «язык», на котором любят отдыхать жители соседнего села Донское и многие приезжие. Но течение реки в этом месте очень быстрое, и хотя река здесь не очень широка, лучше ее не переплывать. Как можно найти ширину реки именно в этом месте, если есть прибор для измерения углов?

6. Высота обелиска Вечной славы на площади Героев 19 м. Найдите длину тени от памятника в летний день, если тень от человека ростом 160 см имеет длину 84 см.

7. Диаметр нижней чаши трехъярусного фонтана на площади И.В. Франценюка равен 10 м. Найдите длину окружности этой чаши.

8. С самого начала своего существования Боринский завод сослужил немалую службу при строительстве первых кораблей будущего Азовского флота. У левого края плотины Боринского завода находились две воронкообразные ямы. Диаметр первой ямы — 8 м, глубина около 1,5 м. Диаметр второй — 10 м, глубина почти 2 м. Сколько земли было извлечено, когда копали эти ямы?

9. Открытие целебных вод в Липецке уходит в глубь веков. По своим свойствам Липецкая вода была схожа с минеральной водой прославленного бельгийского курорта в городе Спа. Около источников минеральной воды в Нижнем парке установлены декоративные шары. Найдите объем шаров, если длина окружности центрального сечения равна 1,9 м.

Литература

1. *Колтаков В.М., Овчинников А.В.* Исторические и памятные места Липецка. — Липецк, 2007.

2. *Жирова И.* Липецк и Липецкие минеральные воды. Исторический буклет. — Липецк, 2003.

3. Моя Родина — Липецкий край. Вып. 1. Материалы 9-й областной конференции участников туристско-краеведческого движения «Отечество». — Липецк, 2002.

4. *Жирова И.* Петровские места в Липецке. Исторический буклет. — Липецк, 2003.

5. *Позняк Т.А., Рыманова Т.Е., Саввина О.А., Симоновская Г.А.* Воспитание и развитие учащихся при обучении математике (учебное пособие). — Елец, 2001.

6. Природа Липецкого края. Учебник для учащихся / под ред. М.Б. Раковского. — Липецк, 1996.

7. *Стрельникова Т.Д., Пешкова Н.В.* География Липецкой области. — Липецк: Неоновый город, 2006.

8. *Шахов В., Шальнев Б.* Липецк: годы и судьбы. — Липецк, 1993.

ФОТО НА КОНКУРС

Клубы по интересам

Автор: Н.И. Авилов,
учитель математики
Егорлыкской средней школы № 7
им. О. Казанского,
станица Егорлыкская,
Ростовская область


1 https://upload.wikimedia.org


2 Фото автора


3 http://album.foto.ru

8 класс

ГЕОМЕТРИЯ РОДНОГО КРАЯ

О. ВОВДЕНКО,
lip.olle@yandex.ru,
г. Липецк

Урок обобщения знаний в форме дидактической игры «Интеллектуальные гонки».
Цели урока: повторить и закрепить изученный материал по теме «Площади многоугольников» в процессе решения задач; рассмотреть некоторые применения формул площадей многоугольников в решении конкретных практических задач; проверка знаний и их коррекция.

Ход урока

Организационный момент

Класс разделен на три команды.

Учитель. Сегодня у нас урок пройдет в форме игры «Интеллектуальные гонки». На уроке вам предстоит решить задачи, составленные вашими соперниками и связанные с историей города Липецка. В ходе решения задач вам необходимо применить знания, полученные по темам «Многоугольники», «Площади многоугольников». Поэтому мы начнем урок с повторения основных понятий и формул.

Первая гонка: «Разминка»

(*Каждый правильный ответ — 2 балла.*)

1. Закончите фразу.

а) Параллелограмм, у которого все углы прямые называется...
[Прямоугольник.]

б) Ромб — это параллелограмм, у которого...
[Все стороны равны.]

в) Диагонали ромба точкой пересечения делятся пополам и пересекаются...
[Под прямым углом.]

К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru (презентация) г) В прямоугольном треугольнике катет, лежащий против угла в 30°, равен...

[Половине гипотенузы.]

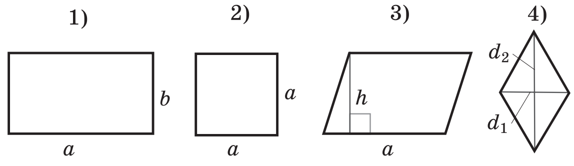
д) В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен...

[Сумме квадратов катетов.]

2. Установите соответствие между видом четырехугольника и формулой площади (*слайд 2*):

а) $S = a \cdot h$; б) $S = a \cdot b$;

в) $S = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$; г) $S = a^2$.



Ответ: 1) — б; 2) — г; 3) — а; 4) — а, в.

(*Члены каждой команды дома самостоятельно готовили сообщение из истории родного края, выполняли необходимые измерения и составляли задачу на основе этого материала; учитель проверяет их готовность заранее. Составленные дома задачи предлагаются командам-соперницам: кто быстрее решит, а сама команда решает задачу, предложенную учителем.*)

Учитель (*слайд 3*).

На город глянь со стороны —
В нем столько всемогущей славы...
С кувалды или с топора
Завод рождался самый первый —
В его дыхании, наверно,
Есть дух великого Петра.

Вторая гонка: «Ты — мне, я — тебе»

(*Каждое правильное решение — 4 балла.*)

– Когда на территории нашего края появились первые металлургические заводы? (*Слайд 4*)

[1696 г. — Боринский железоделательный завод; в начале XVIII века строятся Липецкие железоделательные заводы.]

– Какие памятники напоминают нам о размещении на территории нашего города железоделательных заводов времен Петра I?

[«Пушки» в Нижнем парке; стела на спуске к Нижнему парку [1].]

Задание, подготовленное 1-й командой

Краткая историческая справка (ученик 1-й команды делает сообщение: *слайд 5*). Пушки Липецких железоделательных заводов гремели под Азовом, Полтавой и Нарвой, на кораблях Балтийского флота, прорубая «окно в Европу», ковали победу и славу России, русскому оружию.

Долгое время на Петровском спуске сохранялось строение заводской канцелярии железоделательных заводов. Весной 1974 г. постройка была снесена. При строительстве подземного перехода к Нижнему парку на месте, где была заводская канцелярия, разбивается клумба, в центре которой устанавливается огромный камень девонской эры, а ближе к тротуару возводится остроконечная стела с надписью: «Здесь находилась контора Липецких железных заводов эпохи Петра I». [2]

Задача 1 (*слайд 6*). Найдите стороны прямоугольного элемента на стеле, если его площадь равна 0,125 м^2, а одна сторона в 2 раза больше другой. [0,25 м, 0,5 м]

(*Ученики 2-й и 3-й команд решают на местах, кто решит быстрее — идет к доске объяснять решение; ученики 1-й команды в это время решают задачу, предложенную учителем.*)

Задача для 1-й команды

От липецких заводов сохранился пруд Верхних железоделательных заводов (ныне Комсомольский). В 2003 г. на берегу Комсомольского пруда был установлен символический знак: на самом верху памятной стелы бегущий в волнах парусный военный корабль как символ российского флота, вооруженного пушками, изготовленными на Липецких железоделательных заводах. На боковых гранях стелы на прямоугольных табличках изображены барельефы Петра I, Екатерины II, сделаны памятные надписи. [3]

Найдите площадь прямоугольной таблички на стеле, если ее периметр равен 2,7 м, а одна сторона в 0,8 раза больше другой. [0,45 м^2]

Учитель. Липецкий край был в зените славы в начале XVIII в., когда снабжал российский флот металлом и военным снаряжением. Потом, в связи с закрытием заводов, Липецк был забыт. А затем о нем вновь заговорили.

– В связи с каким событием заговорили вновь о нашем городе? (*Слайд 7*)

[В связи со строительством в городе курорта минеральных вод.]

Задание, подготовленное 2-й командой

Краткая историческая справка (ученик 2-й команды делает сообщение: *слайд 8*). После закрытия железоделательных заводов именно минеральные источники дали городу как бы «второе дыхание» [4]. По настоянию русской знати царь Александр I в 1805 г. подписал указ об открытии государственного курорта «Липецкие минеральные воды». В XIX в. Липецк модно было называть «русским Висбаденом» благодаря ежегодному посещению его знатью московской, петербургской и окрестных губерний. Популярность

Липецка была так велика, что А.С. Пушкин в шутку вел летоисчисление с года «липецкого потопа». В настоящее время на стенах в подземном переходе к Нижнему парку внутри кругов, ромбов и шестиугольников выложены мозаичные изображения из истории Липецка. 5

Задача 2 (*слайды 9 и 10*). Найдите площадь ромба, выложенного на стенах подземного перехода, если его сторона 0,6 м, а один из углов равен 60°.

(*Один ученик из 1-й или 3-й команды (по желанию) решает у доски; ученики 2-й команды в это время решают задачу, предложенную учителей.*)

Задача для 2-й команды

В подземном переходе к Нижнему парку мозаикой выложены картины из истории нашего города. Картины выполнены внутри ромбов и шестиугольников.

Найдите площадь такого ромба, если его сторона 0,6 м, один из углов 60°. Решите задачу, используя формулу площади параллелограмма.

Учитель. Как еще можно было решить эту задачу? (*Слайд 11*)

Теперь небольшая пауза, и мы с вами повторим еще некоторые понятия и формулы, необходимые нам для дальнейшей работы.

Третья гонка: «Дальше, дальше...»

(*Каждый правильный ответ — 2 балла.*)

1. Закончите фразу.

а) Четырехугольник, у которого две стороны параллельны, называется... [Трапецией.]

б) Трапеция называется равнобедренной, если...

[Ее боковые стороны равны.]

в) В равнобедренной трапеции углы при основании... [Равны.]

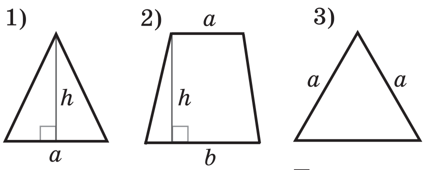
г) В равнобедренном треугольнике высота, проведенная к основанию, является...

[Биссектрисой и медианой.]

д) Отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны, называется...

[Медианой треугольника.]

2. Установите соответствие между видом многоугольника и формулой площади (*слайд 12*):



а) $S=\dfrac{a+b}{2}\cdot h$; б) $S=\dfrac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4}$; в) $S=\dfrac{a\cdot h}{2}$.

Ответ: 1) — в; 2) — а; 3) — б.

4

Гонка «Ты — мне, я — тебе» (продолжение)

(*Правильное решение — 4 балла.*)

Учитель. Живым музеем зеленой архитектуры можно назвать парки нашего города. Их тенистые аллеи являются свидетелями многих событий.

Задание, подготовленное 3-й командой

Краткая историческая справка (ученик 3-й команды делает сообщение: *слайд 13*). История создания и развития Нижнего парка тесно переплетается с историей становления курорта «Липецкие минеральные воды». Как вы знаете, 25 мая 1805 г. царь Александр I подписывает указ об открытии курорта в Липецке. А 19 июля 1805 г. был утвержден генеральный план застройки города и курорта. На своем веку Липецкий курорт и Нижний парк повидали многих замечательных людей России. Здесь бывали: русский историк Н.М. Карамзин, поэт А.С. Грибоедов, семья Гончаровых с будущей женой А.С. Пушкина, наследник престола Александр II, был проездом А.С. Пушкин и др. Сейчас Нижний парк излюбленное место липчан и отдыхающих на курорте. В Нижнем парке находятся источники минеральных вод. В 2005 г. Нижний парк и санаторий «Липецк» отметили свой 200-летний юбилей.

Задача 3 (*слайд 14*). Источники минеральной воды в Нижнем парке на зиму закрывают колпаками в форме пирамид, четыре боковые грани которых — правильные треугольники со стороной 50 см. 6 Найдите площадь одной такой грани. Сколько железа потребуется для закрытия на зиму всех 6 минеральных источников? [≈3 м^2]

(*Ученики 1-й и 2-й команд решают на местах, кто решит быстрее — идет к доске объяснять решение; ученики 3-й команды в это время решают задачу, предложенную учителем.*)

5

6

Задание для 3-й команды

Живым музеем зеленой архитектуры можно назвать парки нашего города. Их тенистые аллеи являются свидетелями многих событий.

Источники минеральной воды в Нижнем парке на зиму закрывают колпаками в форме пирамид, четыре боковые грани которых — правильные треугольники со стороной 50 см. Найдите площадь одной такой грани. Сколько железа потребуется для закрытия на зиму всех 6 минеральных источников? Решите задачу, используя формулу площади треугольника $S = \frac{a \cdot h}{2}$.
[≈3 м^2]

Учитель. Как еще можно решить эту задачу? (*Слайд 15*)

Четвертая гонка: «Кто это?»

(*Правильное решение — 4 балла.*)

(*Представление учителем известной личности; слайд 16.*)

Учитель. Этот человек родился в Липецке в середине XIX в. в семье купца. За свои добрые дела и благотворительную помощь многим нуждающимся учреждениям города в 1903 году, он избирается городским головой Липецка. 19 ноября 1912 г. ему присвоено «звание почетного гражданина града Липецка». В истории города Липецка этот человек оставил след благодаря активной хозяйственной деятельности. Он содействовал строительству напорного водопровода, гидроэлектростанции на реке Липовка, городской телефонной станции, большого торгового корпуса. При нем была открыта первая поликлиника, первый кинотеатр, реальное училище и женская гимназия, музей и городская библиотека, городское попечительство о бедных. Он был инициатором строительства Никольского храма в Липецке. Память о добрых делах этого человека сохранилась в документах и дошла до наших дней. 15 июля 2006 г. на улице Советской недалеко от драмтеатра ему был воздвигнут памятник. Кто этот человек?

[Митрофан Алексеевич Клюев 7,
сын купца Алексея Герасимовича Клюева,
родился в Липецке 21 апреля 1848 года.]

Задача 4 (*слайд 17*). Определите площадь равнобедренной трапеции $ABCD$ (основания трапеции BC и AD), находящейся в основании постамента памятника М.А. Клюеву, если $AB = 0{,}6$ м, $AD = 2$ м, $\angle A = 60°$, высота $BK = 0{,}52$ м.
[0,884 м^2]

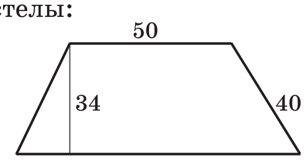
Итог урока

Подведение итогов игры (*слайд 19*). Выставление отметок.

Задание на дом

1. Решите задачу 4. (*Анализ решения задачи; слайд 18.*)

2. 1-я команда проводила измерения стелы, установленной на месте снесенной канцелярии Липецких заводов, и получила следующие размеры равнобедренной трапеции, находящейся в основании стелы:



Составьте и решите задачу по теме «Трапеция» или «Площадь трапеции», используя эти данные.

Учитель (*слайд 20*). Вот и подошло к концу путешествие в историю нашего города.

Мы помним голоса ушедших поколений
И с будущим уже налаживаем связь.
Нам надо землю так любить,
Чтобы в нее влюбился пришедший после нас.
И вдохновенья свет переполняет город,
Весенний город наш...

Все мы, для кого Липецк стал родным городом, живем и трудимся во славу родного края. И наша с вами задача эту славу приумножить.

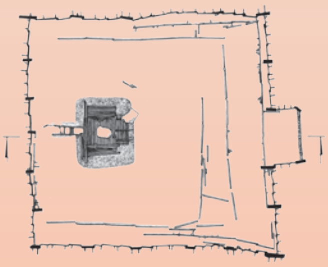
Литература

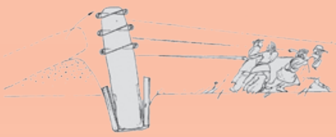
1. *Колтаков В.М., Овчинников А.В.* Исторические и памятные места Липецка. — Липецк. 2. *Жирова И.* Липецк и Липецкие минеральные воды. Исторический буклет. — Липецк, 2003. 3. Моя Родина — Липецкий край. Вып. 1. Материалы 9-й областной конференции участников туристско-краеведческого движения «Отечество». — Липецк, 2002. 4. *Жирова И.* Петровские места в Липецке. Исторический буклет. — Липецк, 2003

ЗАДАЧИ О МАЛОЙ РОДИНЕ

Г. ВОРОНИНА,
г. Абакан,
Фото с http://santekan.ru.

ХАКАСИЯ: ПИРАМИДЫ ИЗ ДОЛИНЫ ЦАРЕЙ



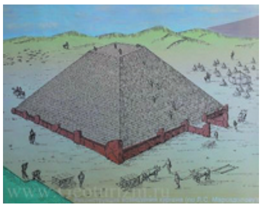


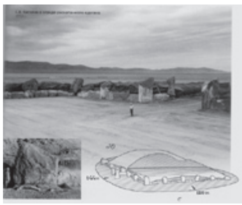
Большой Салбыкский курган, сооруженный в конце IV века до нашей эры, расположен недалеко от города Абакана, в так называемой Долине Царей. Это самое грандиозное погребальное сооружение, когда-либо построенное на территории Евразии. Когда-то высота этой пирамиды достигала 30–35 м. Каменоломни, в которых почти три тысячи лет назад люди добывали камень для строительства кургана, находятся на берегу Енисея... за 70 км от строительной площадки. Плиты перемещали волоком, подкладывая под них катки из бревен. Доставка одной плиты от каменоломни до кургана составляла примерно неделю.

Задача 1. (*От редакции.*) На сколько километров в среднем перемещали плиту за один день?

Первое упоминание о Салбыкском кургане относится к 1739 году. Известный ученый Миллер писал в своем дневнике: «На полпути, но несколько ближе к Уйбату, чем к Коксинским рудникам, я встретил в степи чрезвычайно много больших курганов, между которыми один, направо от дороги, возбудил во мне желание узнать настоящую величину его. Я смерил подошву его, которая была обставлена в виде четырехугольника двойным рядом больших каменных плит и имела в длину с севера на юг сто шагов, а в ширину восемьдесят. Вышина его с северной стороны, которая была выше и круче других, составляла около пятидесяти шагов, так что отвесную вышину его можно считать, по крайней мере, в десять саженей. Поразительнее всего мне показались огромные камни, окружавшие его. Некоторые из них торчали над поверхностью земли больше чем на две сажени и при этом были такой же ширины, а толщиною в один аршин».

К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru

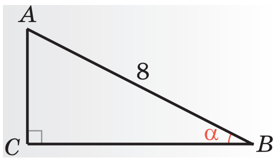




Задача 2. (*От редакции.*) Выразите указанные длины в метрах. Длину шага взрослого человека можно считать равной 0,5 м.

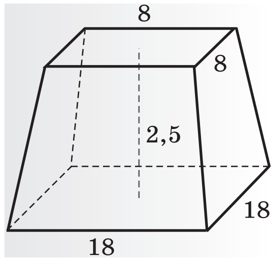
Научные раскопки Большого Салбыкского кургана начались в 1954 году. К моменту раскопок высота насыпи составляла высоту четырехэтажного дома, а объем — 24 000 м^3. Это грандиозное погребальное сооружение было огорожено огромными каменными плитами, вкопанными по периметру квадрата со стороной 70 м, которые возвышались над уровнем почвы на 2 м, а по углам высота их иной раз достигала 6 м. Чтобы установить эти плиты вертикально, строители поступали так, как показано на рисунке.

Задача 3. Вычислите угол наклона насыпи к поверхности земли, зная, что ее высота равна 2 м, а длина ее полотна 8 м.



Ограда кургана была сплошной. Внутри каменной ограды поставили деревянный склеп в виде усеченной пирамиды. Его потолок, сложенный из шести слоев бревен, имел высоту 2,5 м.

Задача 4. Склеп имеет форму усеченной пирамиды, основаниями которой служат квадраты со сторонами 8 м и 18 м. Высота пирамиды 2,5 м. Пирамида сложена из лиственничных бревен диаметром 30 см и длиной от 8 до 18 м. Какое количество бревен потребовалось на строительство деревянного склепа (не забудьте, что потолок склепа был сделан в шести слоев)?



Когда ограда и склеп уже стояли, пространство между ними полностью засыпали землей. На этой площадке выше плит ограды возвели стену из плашмя положенных без всякого раствора каменных плит. Вместе с кладкой ограда поднялась над землей еще на метр. Внутри этой ограды, имевшей с восточной стороны вход шириной 5 м, возвели из блоков дерна огромную пирамиду высотой с одиннадцатиэтажный дом.

Задача 5. Салбыкский курган имеет форму пирамиды, основанием которой служит правильный четырехугольник со стороной 70 м, высота пирамиды 35 м. Вычислите полную поверхность и объем этой пирамиды.

Задача 6. (*От редакции.*) Вы нашли объем Салбыкской пирамиды сразу после ее постройки. На сколько кубических метров он уменьшился к моменту начала раскопок?

АЛТАЙ: «ЦАРИЦА ВАЗ»

Г. ЕФИМЕНКО,
с. Первомайское, Алтайский край

Мировую славу Алтаю принесло камнерезное искусство. В Эрмитаже экспонируется Большая колыванская ваза — «царица ваз», изготовленная в 1843 году. На ее изготовление ушло 23 года.

Размеры этой вазы мы узнаем, решив уравнения из задания 1.

Задание 1.

а) Вес вазы около a тонн. 70% от 70% числа a равны 9,8. Найдите число a.

б) Большой диаметр овальной части вазы равен x м.

$$2x = 4\frac{1}{6}\cdot 2,4.$$

в) Малый диаметр ее овальной части равен y м.

$$8 - 2y = 1,6.$$

Из истории вазы. В 1815 году расчистили от осадочных пород довольно крупный утес зеленой яшмы. От этой находки удалось отделить монолит длиной 8,5 м, который из-за трещины пришлось разделить на две неравные части. Пригодной для работы была признана бóльшая часть камня, имевшая длину 5,6 м.

Задание 2. (*От редакции.*) В каком примерно отношении был разделен камень?

В феврале 1828 года, как свидетельствует документ, «к настоящему делу чаши приступлено было». Сначала работы шли в каменоломне. 230 человек вытащили камень и с помощью воротов и бревенчатых лежней подтащили его к камнетесному сараю, подняли от земли на метровую высоту, утвердив на стойках. Около сотни камнетесов со всех сторон разом начали обрабатывать его долотами. Спустя два года камень уложили на особо устроенные деревянные дровни и вручную, с помощью воротов и бурлацких лямок, потащили в Колывань на шлифовальную фабрику. 567 человек впряглись в канаты и за восемь дней передвинули глыбу на 30 верст — расстояние, отделявшее каменоломню от фабрики.

Задание 3. (*От редакции*) На сколько километров в среднем перемещали вазу за один час, если считать, что рабочий день продолжался 10 часов?

Там рабочие приступили к обтеске верхней части чаши. На это ушел год. В 1832 году началось «вынятие внутренности чаши долотною работою» — кропотливейший, однообразный труд… Обтесывали, шлифовали, полировали. Практически все вручную. С предельной осторожностью, вручную, долотами бригада резчиков — 42 человека — вела резьбу орнамента. И только в 1842 году все работы подошли к концу.

Задание 4. (*От редакции.*) В каком году закончились бы работы по созданию вазы, если бы резчиков в бригаде было в 2 раза меньше? Если бы в бригаде было 14 резчиков?

После того, как «орнамент проглажен, выровнен и в приличных местах отполирован», еще почти год девять мастеровых подправляли полировку.

Задание 5. (*От редакции.*) Сколько мастеров должны были работать, чтобы закончить полировку вазы за полгода?

В общей сложности почти четверть века прошло от того времени, когда была найдена грандиозная яшмовая глыба, до дня, когда из Колывани сообщили о готовности отправить гигантскую вазу в столицу. Ее высота в готовом виде имела 2,5 м.

19 февраля 1843 года караван из 154 лошадей, впряженных в особо приспособленные сани (вроде «вагонов», как писалось в отчетах), повез чашу из Колывани к Барнаулу. Оттуда путь лежал к Уткинской пристани, что на уральской реке Чусовой. Через шесть месяцев «царица» была доставлена в Санкт-Петербург. «Вещи таковой тяжести и величины, — писал впоследствии горный начальник Колывано-Воскресенских заводов Бегер, — до ныне отправляемо еще не было, потому и требовалось в пути особенно сметливое управление и неусыпная бдительность, чтобы при перегрузках чаши и в особенности следования ее сухим путем упреждать все случаи, могущия повредить вещь, из каменных изделий столь редкую и драгоценную».

Задание 6. (*От редакции.*) Вычислите среднюю скорость (км/сутки) перемещения вазы по пути в Санкт-Петербург.

В Петербурге «царицу ваз», похоже, мало кто ждал. Баржа с ней долго стояла на Фонтанке у Аничкова моста. Только в 1845 году «царице» отвели проезд недавно выстроенного здания Нового Эрмитажа. Там еще в течение четырех лет сооружали для нее особый автономный фундамент. Осенью 1849 года 770 рабочих подняли и поставили чашу на место.

А. СНИГИРЕВА,
д. Киршонки,
Удмурдская Республика

ЧТОБЫ СЕРДЦА НЕ ЧЕРСТВЕЛИ

В нашем стремительно меняющемся мире многое безвозвратно уходит из жизни народа. И наш долг сохранить для будущих поколений все ценное и достойное памяти из народной культуры, материального и духовного наследия. Сельская школа была и остается культурным центром села, оказывающим огромное влияние на воспитание подрастающего поколения.

В последнее время часто меняется то базисный план, то программы, то введут новый предмет, то его уберут. Недавно ввели предмет «История культуры народов», где учащиеся изучали местные обычаи, обряды, историю создания района, колхоза и многое другое. Сейчас его убрали. Вот и приходится нам, учителям-предметникам, на своих уроках знакомить ребят с историей нашей малой родины.

Наша Киршонская школа находится на севере Балезинского района, в глубинке, среди живописной природы Удмуртии. История нашего края неотделима от истории России, все, что происходило в стране, гулким эхом отдавалось в наших маленьких деревушках.

На своих уроках, начиная с 5-го класса, при решении примеров и задач мы с учащимися узнаем много интересного из истории родной земли. Например, нынешние ученики не знают, что раньше были такие праздники, как День пионерии, День комсомола. Я рассказываю детям, что в этот день лучшие пионерские отряды и лучшие пионеры школы ездили на торжественное празднование в район. После этого я предлагаю им выполнить самостоятельно следующее задание.

Найдите значения выражений:

$\text{О} = 11{,}2 + 1{,}9$; $\text{Н} = 4{,}29 + 5{,}634$;
$\text{Р} = 4{,}7 + 0{,}2$; $\text{И}_2 = 0{,}856 + 0{,}2$;
$\text{П} = 16{,}5 + 24$; $\text{И}_3 = 5 - 4{,}12$;
$\text{Е} = 4{,}59 + 3{,}8$; $\text{И}_1 = 18 - 0{,}247$.

Расставьте их в порядке убывания, и вы узнаете, какой праздник отмечали наши родители, бабушки и дедушки 19 мая.

[День пионерии.]

На устном счете дети узнают фамилию первого командира пионерского отряда нашего села, выполняя следующее задание.

Выполните действия и заполните таблицу:

90 – 45	40 · 4	70 – 26	570 : 19
: 15	: 2	: 2	· 4
· 17	+ 40	+ 38	: 4
+ 49	+ 170	: 15	+ 50
–28	– 220	· 10	– 38
О	А	А	Р

40 · 20	25 · 40	82 – 14
– 120	: 50	: 4
: 17	· 5	· 5
– 40	– 99	+ 15
+ 54	+ 37	–38
М	К	В

71	40	38	54	42	70	62

Литература

1. Об успехах народного образования по Глазовскому благочинию // Вятские епархиальные ведомости (выпуски разных лет). **2.** *Пыжьянова Л.С.* Из опыта работы по использованию регионального компонента при изучении отдельных предметов. — [Б.и.], 2001. **3.** *Семенова М.* У очага наших предков // Очаг, 1993, № 5, 6.

Из букв составляем фамилию: Макаров. А выполнив следующее задание, узнаем его имя.

$25 + 13 + \square = 45$	31 — Матвей,
$+ \quad + \quad + \quad +$	67 — Карп,
$18 + 19 + \square = 45$	54 — Евсей,
$+ \quad + \quad + \quad -$	80 — Ефтей,
$\square + \square + \square = \square$	60 — Степан
————————	
$45 + 45 - \square = \square$	[Степан.]

Затем я рассказываю, что Степан Макаров — это прадедушка таких-то учащихся нашей школы. К сожалению, часто даже родственники этого не знают.

А в каком году в нашем селе был создан первый пионерский отряд, узнаем, решая уравнения. Сначала находим корни всех уравнений и их сумму. Потом складываем цифры этой суммы и увеличиваем ее на 1920.

1. $(3{,}9 - x) : 4 = 0{,}7$. **2.** $2{,}6 + 7x = 6{,}8$.
3. $6(x + 1{,}5) = 25{,}2$. **4.** $x : 6 + 2{,}8 = 3{,}7$.

Ко Дню Победы в Великой Отечественной войне узнаем, сколько человек ушло на фронт из нашего села и сколько из них возвратилось. Темам Великой Отечественной войны посвящаем по несколько минут на нескольких уроках, так как с помощью примеров, уравнений, задач можно дать учащимся много материала. В 8-м классе дети узнают, что на строительстве железной дороги Балезино – Ижевск, которая должна была связать заводы Северного Урала с районами Поволжья и Юга, трудилось 18 подростков-односельчан. Нужно было построить 150 км железной дороги. 15 тысяч человек начали одновременно работы на северном и южном направлениях, с концов и с середины трассы. За нашим районом был закреплен участок от Андрейшура до Люка. На данный момент в живых осталось только шестеро строителей. А кто именно, можно узнать, выполнив самостоятельную работу на тему «Преобразование рациональных выражений» (дается 6 выражений). На столе учителя на 6 карточках записаны ответы (с одной стороны ответ, с другой — фамилия, имя, отчество одного из строителей железной дороги). Кто выполнил хотя бы одно задание, берет со стола карточку с ответом (если такой есть, а если нет, то ищет ошибку в решении), переворачивает ее и таким образом узнает имя участника строительства железной дороги. Задания могут быть выполнены в различном порядке.

Далее я говорю детям, что подростки, работавшие на строительстве железной дороги, получали в день пайку хлеба. А вот сколько эта пайка весила, предстоит узнать из уравнения

$$\sqrt{13+\sqrt{4+\sqrt{\frac{x}{10}}}}=4.$$

[250 г]

Изучая тему «Площади», на уроках геометрии мы учимся находить площади колхозных полей. По возможности приглашаем на уроки специалистов сельского хозяйства и решаем предложенные ими задачи.

Не остается без внимания и прошлое нашей школы. Нет в живых уже тех, кто учился в старой школе и помнил первых учителей. Но, тем не менее, мы узнаем, что первыми учителями при Карсовайской Сретенской церкви были священник Николай Широкшин и дьякон Петр Тронин. А изучали всего три предмета: арифметику, чистописание и... А какой предмет был третьим, можно узнать, решив следующие примеры и выбрав единственный правильный ответ среди перечисленных ниже.

1. $-28 : 7 + 8 \cdot (-9) + 63$.
2. $20 : (33 - 4 \cdot (-7)) - 47$.
3. $(-66 + 58 - 13) : 7 \cdot (-10)$.
4. $15 : (-3) + 8 \cdot (26 - 31)$.
5. $-30 : (-2 + (-10) \cdot 6 + 52)$.
6. $-19 + 7 \cdot (-13 - 10 : (-2))$.
7. $-14 + 30 : (-5) \cdot 10 - (-47)$.
8. $8 \cdot (-3) : (71 - 67) - 19$.
9. $3\,(-12 + 12 : 2) - 35$.
10. $14 : (54 - 56) \cdot 3 - 28$.

20 — геометрия, 187 — география, 17 — рисование, 806 — история, 305 — закон Божий и др.

[Закон Божий.]

А как не рассказать нашим детям, что через нашу деревню прошел Колчак? Сколько вопросов возникает у учащихся после этого! Это побуждает к самостоятельному поиску дополнительной информации. Я прошу, чтобы дети все узнанное приносили в класс на «математическом» языке, то есть в примерах, уравнениях, задачах.

Диаграммы нам помогают узнать о рождаемости в определенные годы. Например, в 1956 году родилось 39 детей. Далее: в 1978 г. родилось 23 ребенка, в 1981 г. — 18, в 1991 г. — 9, в 2001 г. — 6, в 2009 г. — ни одного, в 2012 г. — 3 ребенка. Соответственно, нужно сделать вывод, что при таком спаде рождаемости скоро некому будет выращивать и убирать урожай.

Вот так ненавязчиво при изучении математики учащиеся узнают некоторые интересные сведения из жизни односельчан, что также стимулирует и повышение интереса к изучаемому предмету.

Почему нужно знать прошлое? Философ А. Хомяков говорил, что сегодняшний человек, оторвавшись от прошедшего, приобрел какое-то искусственное безродство, грустное право на сердечный холод. А знание прошлого пробуждает в нас заглохнувшие силы, расширяет нашу мысль и выводит нас из нашего безродного сиротства.

ДЕПАРТАМЕНТ ОБРАЗОВАНИЯ г. МОСКВЫ
ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ДОМ «ПЕРВОЕ СЕНТЯБРЯ»
МОСКОВСКИЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
СТРАТЕГИЧЕСКИЙ ПАРТНЕР: ИЗДАТЕЛЬСТВО «ПРОСВЕЩЕНИЕ»

ММ
МОСКОВСКИЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
МАРАФОН
УЧЕБНЫХ ПРЕДМЕТОВ

2015

23 МАРТА – 17 АПРЕЛЯ

РАСПИСАНИЕ ДНЕЙ ПЕДАГОГИЧЕСКОГО МАРАФОНА

23 марта	День учителя технологии *
24 марта	**Открытие Марафона** День классного руководителя
25 марта	День школьного психолога День учителя ОБЖ
26 марта	День здоровья детей, коррекционной педагогики, логопеда, инклюзивного образования и лечебной физической культуры
27 марта	День учителя начальной школы (день первый)
28 марта	День учителя начальной школы (день второй)
29 марта	День дошкольного образования
31 марта	День учителя географии
1 апреля	День учителя химии
2 апреля	День учителя биологии
3 апреля	День учителя информатики
4 апреля	День учителя физики
5 апреля	День учителя математики
7 апреля	День учителя истории и обществознания
8 апреля	День учителя МХК, музыки и ИЗО
9 апреля	День школьного и детского библиотекаря
10 апреля	День учителя литературы
11 апреля	День учителя русского языка
12 апреля	День учителя английского языка
14 апреля	День учителя французского языка
15 апреля	День школьной администрации
16 апреля	День учителя физической культуры
17 апреля	День учителя немецкого языка **Закрытие**

marathon.1september.ru

! Обязательная предварительная регистрация на все дни Марафона с 20 февраля 2015 года на сайте marathon.1september.ru

! Каждый участник Марафона, посетивший три мероприятия одного дня, получает официальный именной сертификат (6 часов)

В дни Марафона ведущие издательства страны представляют книги для учителей

Начало работы каждого дня – 9.00. Завершение работы – 15.00

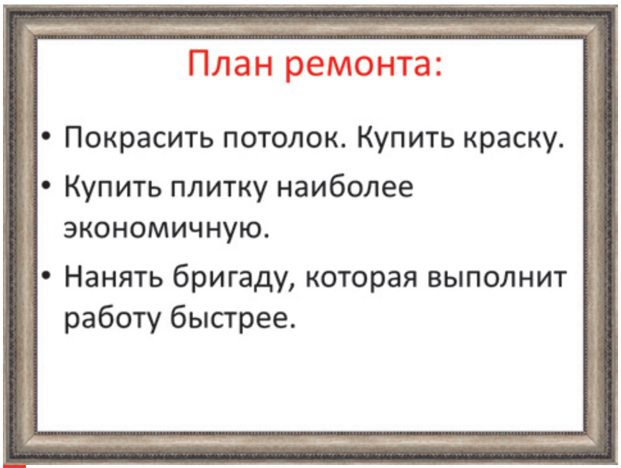
УЧАСТИЕ БЕСПЛАТНОЕ. ВХОД ПО БИЛЕТАМ

РЕГИСТРИРУЙТЕСЬ, РАСПЕЧАТЫВАЙТЕ СВОЙ БИЛЕТ И ПРИХОДИТЕ!

Место проведения Марафона: МПГУ, ул. Малая Пироговская, дом 1, стр. 1 (в 5 минутах ходьбы от ст. метро «Фрунзенская»)
* Место проведения Дня учителя технологии: ЦО № 293, ул. Касаткина, 1а (ст. метро «ВДНХ»)

По всем вопросам обращайтесь, пожалуйста, по телефону **8-499-249-3138** или по электронной почте marathon@1september.ru


1



2

3

Презентация публикуется в авторской редакции

Сегодня в рубрике «Разбор урока» мы обсуждаем урок в 6-м классе. Урок проводят учителя математики и информатики Наталья Николаевна КОМАРОВА, г. Озерск, Челябинская обл. Урок обсуждают: главный редактор журнала «Математика» Лариса Олеговна РОСЛОВА, редакторы – Петр Михайлович КАМАЕВ и Ольга Васильевна МАКАРОВА

Изучая математику, ученики не вполне осознают значение и, гланое, практическое применение изученного. Для темы «Прямая и обратная пропорциональные зависимости» существует много задач, показывающих значимость изученных на доступном для детского понимания уровне свойств и законов. Я предложила рассмотреть применение пропорции на практике, в частности, для «ремонта ванной комнаты».

6 класс

ТЕМА УРОКА: «ПРЯМАЯ И ОБРАТНАЯ ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ»

Цели урока:

обучающие:

– ввести понятия прямой и обратной пропорциональных зависимостей; изучить алгоритм решения задач по этой теме;

развивающие:

– использование полученных знаний для достижения поставленной задачи;

– развивать умение обобщать, конкретизировать;

воспитательные:

– расширение кругозора и развитие интереса к предмету посредством введения практико-экономической составляющей.

Ход урока

Мотивация учебной деятельности учащихся

Учитель. Перед вами молодая семья (*слайд 1*). Им нужно сделать ремонт в ванной комнате. Предлагаю вам помочь им, используя те знания, которые у вас есть.

Устная работа

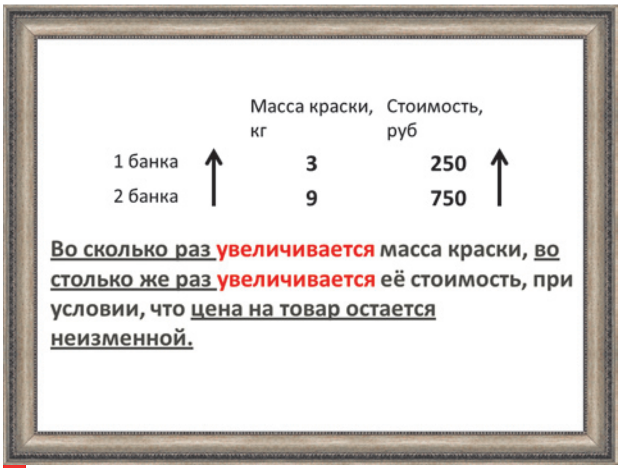
Учитель. Проверим ваши знания.

• Что такое отношение? • Что показывает отношение?

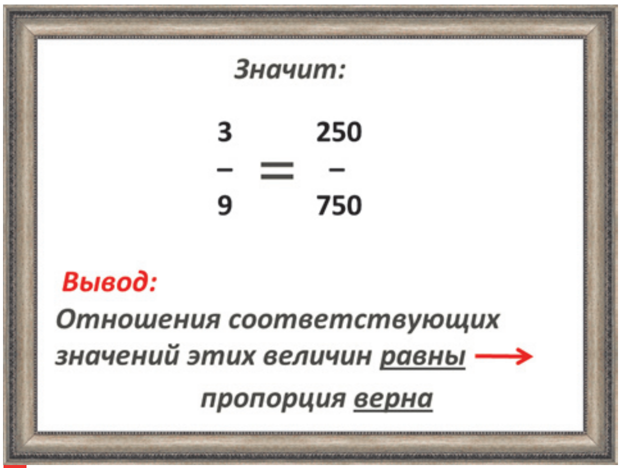
Вспомним: если значения двух величин выражены одной и той же единицей измерения, то их отношение называют отношением этих величин: отношением масс, отношением длин и т.д.

• А что называют пропорцией? • Каково основное свойство пропорции?

К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru (презентация в авторской редакции)



4



5

Актуализация знаний

Учитель. Из каких этапов состоит ремонт в ванной комнате? (*Спросить детей, выслушать их варианты, подчеркнуть, что семья молодая и ремонт бюджетный, совместно составить план работ.*)

План ремонта (*слайд 2*):

1) купить краску, чтобы покрасить потолок;

2) купить плитку исходя из требования экономии средств;

3) нанять бригаду, которая выполнит работу быстрее.

План постепенно, по мере рассуждений, появляется на слайде. После вывешивается на доске (*заранее распечатать*).

Учитель. Решим задачу.

1. Задача о покраске потолка (*слайд 3*). 3 кг специальной краски для ванных комнат в среднем стоят 250 рублей. Хозяевам необходимо приобрести 9 кг краски. Сколько будет стоить покупка?

(*Результат: 750 рублей*).

Появляется схема (*слайд 4*):

	Масса краски (кг)	Стоимость (руб.)
1-й случай	↓ 3	250 ↓
2-й случай	9	750

Учитель. Посмотрите на схему. Заметили ли вы зависимость?

(*Масса краски увеличилась в 3 раза, стоимость тоже увеличилась в 3 раза.*)

Обратите внимание на направление стрелок.

Во сколько раз увеличивается масса краски, **во столько же раз** увеличивается стоимость покупки при условии, что **цена товара остается неизменной.**

Каковы по величине (больше, меньше, равно) значения отношений одной величины к другой в 1-м и 2-м случаях?

(*Будут равны.*)

Учитель. Итак, мы пришли к выводу, что отношения соответствующих значений этих величин равны. Следовательно, пропорция (*слайд 5*) $\frac{3}{9}=\frac{250}{750}$ верна.

Решим вторую задачу.

2. Задача о двух бригадах (*слайд 6*). Первая бригада состоит из 8 человек, они могут выложить плитку за 3 дня. Сколько дней будет выполнять эту же работу вторая бригада, работая с той же производительностью труда, состоящая из 4 человек?

(*Ответ*: 6.)

Учитель. Посмотрите на схему (*слайд 7*).

	Количество (чел.)	Время (дни)
1-я бригада	↓ 8	3 ↑
2-я бригада	4	6

Заметили ли вы зависимость?

(*Количество человек в бригаде уменьшилось в 2 раза, во столько же раз увеличилось количество дней.*)

Обратите внимание на направление стрелок.

Во сколько раз уменьшается число человек, выполняющих с одинаковой производительностью труда работу, **во столько же раз** увеличивается время выполнения работы при условии, что **объем работы**, которую выполняют бригады, **одинаковый.**

Учитель. Равны ли отношения значений одной величины и отношение значений другой величины?

(*Не будут равны; слайд 8.*)

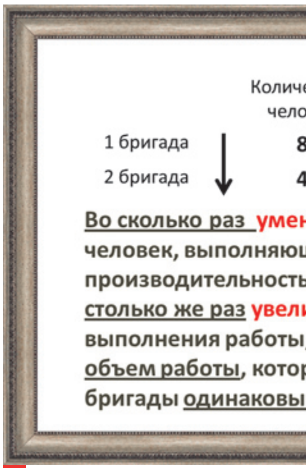
Учитель. А будут ли равны отношение значений одной величины и обратное отношение значений другой величины?

(*Будут равны.*)

Учитель. Итак, мы пришли к выводу, что отношение значений одной величины равно об-

6

7



8

ратному отношению соответствующих значений другой величины. Пропорция $\frac{8}{4} = \frac{6}{3}$ верна.

Создадим сравнительную таблицу решений наших задач (*слайд 9*), (внизу страницы).

Учитель. Общий вид таблицы вы видите на *слайде 10*. Такая же есть у каждого на столе. (*Таблицы следует распечатать каждому заранее.*) Она поможет вам при решении задач.

Сформулируйте тему сегодняшнего урока.

(*«Прямая и обратная пропорциональные зависимости»; слайд 11.*)

Учитель. Открываем тетради, записываем число и тему урока.

Перед молодой семьей встала проблема выбора плитки. Имеется два вида плитки. (*Лучше показать оригиналы, я показываю квадратную плитку с размером* 20 см × 20 см *и прямоугольную плитку размером* 25 см × 36 см, *размеры написаны на плитках маркером.*) Размер меньшей плитки 20 см × 20 см. Переведите сантиметры в дециметры.

(20 см = 2 дм; *следует результат вычислений написать маркером на плитке.*)

Учитель. Найдите площадь одной плитки.

(*Форма — квадрат, площадь* $S = 4$ дм².)

Учитель. Размер большей плитки 25 см × × 36 см. Переведите сантиметры в дециметры.

(25 см = 2,5 дм; 36 см = 3,6 дм.)

Учитель. Найдите площадь плитки.

(*Прямоугольник, площадь* $S = 9$ дм².)

Первичное усвоение новых знаний

3. Задача о керамической плитке (*слайд 12*).

1. Необходимо выложить стены ванной комнаты керамической плиткой. Имеется плитка двух видов: площадью 4 дм² и площадью 9 дм². Сколько потребуется упаковок плитки площадью 4 дм², если плитки площадью 9 дм² требуется 12 упаковок?

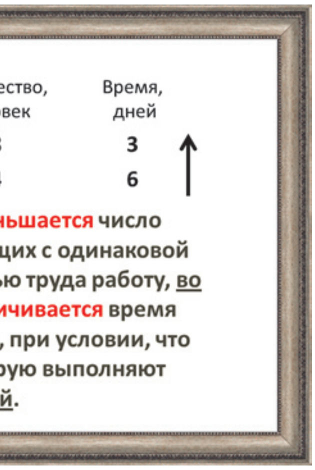
Учитель. Задачи на пропорциональные зависимости решаются с помощью пропорции по следующему алгоритму (*слайд 13*).

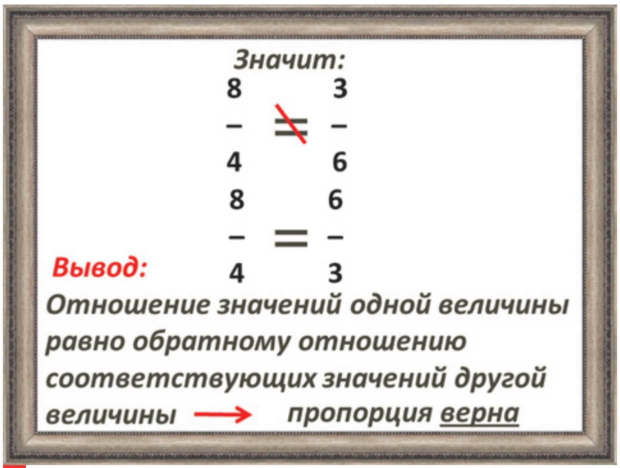
1) Составить схему.
2) Неизвестное число обозначить за x.
3) Установить вид зависимости между величинами.
4) Записать пропорцию.
5) Найти ее неизвестный член.

Будем решать задачу по алгоритму. Составим схему (*слайд 14*).

<table>
<tr><td>Масса краски (кг)
↑ 3
9</td><td>Стоимость (руб.)
250 ↑
750</td><td>Количество (чел.)
↓ 8
4</td><td>Время (дни)
3 ↑
6</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\frac{3}{9} = \frac{250}{750}$</td><td colspan="2">$\frac{8}{4} = \frac{6}{3}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Если одна величина увеличивается в несколько раз, то и другая увеличивается во столько же раз.
При этом отношение соответствующих значений этих величин равны.

Стрелки при этом направлены в одну сторону</td><td colspan="2">Если одна величина уменьшается в несколько раз, то другая увеличивается во столько же раз.
При этом отношение значений одной величины равно обратному отношению соответствующих значений другой величины.
Стрелки при этом направлены в разные стороны</td></tr>
<tr><td colspan="2">Такие величины называют
прямо пропорциональными</td><td colspan="2">Такие величины называют
обратно пропорциональными</td></tr>
</table>





9

10

	Площадь плитки (дм^2)	Количество (упаковка)
1-й вид	↓ 9	12 ↑
2-й вид	4	x

Установите вид зависимости между величинами. Как составить пропорцию? Используйте шпаргалку.

(*Пригласить к доске одного ученика для решения пропорции. Записать ответ:* 27 *упаковок.*)

Учитель. Теперь определимся со стоимостью упаковок (*слайд 15*).

2. Плитки площадью 4 дм^2 требуется 27 упаковок. Стоимость 50 упаковок такой плитки составляет 20 000 рублей. Сколько стоят 27 упаковок такой плитки?

3. Плитки площадью 9 дм^2 требуется 12 упаковок. Стоимость 40 упаковок такой плитки составляет 28 000 рублей. Сколько стоят 12 упаковок такой плитки?

Учитель. Решим сначала задачу 2. Один ученик решает у доски, проговаривая алгоритм. (*Схему проверить по слайду. Ответ проверить по слайду*: 10 800 *рублей.*)

Самостоятельно в тетрадях решите задачу 3. Проговорите алгоритм. (*Схему и ответ проверить по слайду*: 8400 *рублей*).

Учитель. Какую плитку выгоднее купить?

(*Учащиеся рассуждают и приходят к ответу: плитку большей площади.*)

Вернемся к задаче про бригады. Какую бригаду выгоднее нанять, если за работу они берут одну и ту же сумму денег (*слайд 17*)?

(*Учащиеся рассуждают и приходят к ответу: бригаду, состоящую из* 8 *человек.*)

Первичная проверка понимания

Учитель. Ребята, мы определили, какую плитку выгоднее купить, какую бригаду нанять.

• Справились ли мы с поставленной задачей в начале урока? • А помогло нам в этом знание прямой и обратной пропорциональных зависимостей. • Что показывает прямая пропорциональная зависимость? Обратная? • Как составить пропорцию при решении задач на прямую пропорциональную зависимость? На обратную?

А все ли в этом мире находится в пропорциональной зависимости?

(*Учащиеся рассуждают и приходят к ответу: нет. Попросить привести примеры; если у них не получится, то подсказать такой пример: возраст человека и его рост.*)

Первичное закрепление

Выполнить задание (*при условии, что есть Интернет*). http://learningapps.org/633824.

Рефлексия

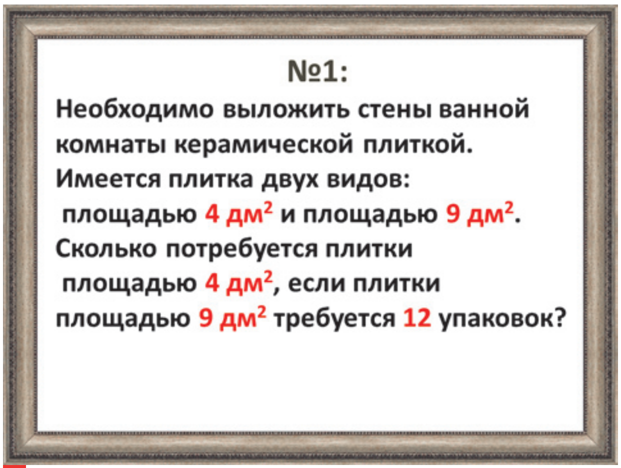
Учитель. Что сегодня вы узнали на уроке? Спасибо за урок. Молодцы! (*Слайд 18*)

Обсуждение урока

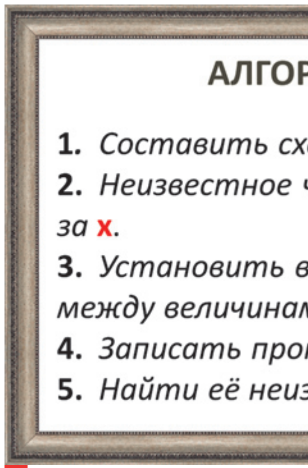
Л.Р. Урок окончен. Поблагодарим учителя и начнем наше ставшее уже традиционным обсуждение. Почему мы выбрали этот урок? Причин, наверное, несколько. Во-первых, захотелось «заглянуть» в 5–6-е классы. Во-вторых, тема важная, причем и для математики, и для жизни. В-третьих, есть возможность поговорить о формировании интереса к предмету, умения применять знания в реальных жизненных ситуациях, о мотивации и прочих важных аспектах обучения, на которых в настоящее время акцентируется внимание всех педагогов.

Урок получился хорошим: и содержательным, и нескучным. В нем сочетаются разные виды учебной деятельности, решаются задачи из разных тем.

11



12



13

П.К. Действительно, урок неплохо выстроен. Кроме того, видно, что учитель владеет классом и по ходу урока своими вопросами направляет деятельность детей в нужное ему русло. Такая классическая схема: сначала обсудили, после этого учитель подводит итог и переходит к следующему вопросу.

Л.Р. Но это не просто череда вопросов, связанных известным только учителю образом. Все логично выстроено. Мне понравилось, что решаемые на уроке задачи увязаны между собой не только методически, но и единым сюжетом, заявленным в начале урока. Нравится, что учитель ставит перед учениками цель помочь молодой семье, а в конце урока обсуждает, удалось ли ее выполнить. Таким образом, есть сюжетная линия, а у сюжета есть начало, содержательное наполнение и завершение.

П.К. Меня, честно говоря, не впечатлила устная работа в начале урока. Мне кажется, она проведена формально. Во-первых, в отведенное для нее время мы опять услышим ответы лишь трех-четырех человек. Во-вторых, услышим только заученные определения и формулировку основного свойства пропорции. Я бы предложил в данной ситуации следующие вопросы: Где здесь записана пропорция? Можно ли составить пропорцию из данных чисел? Зная три члена пропорции, как найти четвертый член? Причем ответы на эти вопросы можно организовать так, чтобы отвечали все учащиеся. После этого уже можно попросить дать определение пропорции и сформулировать основное свойство пропорции. И еще мне кажется, что не надо торопиться с напоминанием определения отношения, целесообразнее и в этом случае начать с задач на распознавание.

Л.Р. Рискну предположить, что учитель экономит время для основной работы, зная, что учащиеся неплохо владеют тем материалом, который потребуется для изучения новой темы, и проблем возникнуть не должно.

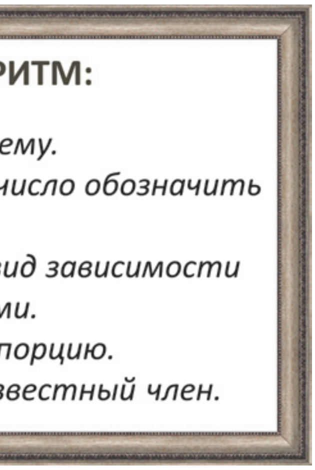
П.К. А вот мотивация введения новых понятий через постановку естественной проблемы, которая нередко стоит перед семьей, — ремонт ванной комнаты, задумана хорошо.

Л.Р. Да, тема мотивирования учащихся сейчас актуальна и учителям приходится искать новые возможности, придумывать «заходы», которые могли бы «зацепить» учащихся. В результате такого педагогического творчества и получаются интересные уроки.

Мне здесь хочется продолжить мысленную отсылку к стандарту и вспомнить о проблеме личностного развития средствами математики. Мы сейчас много говорим о личностных результатах обучения, думаем о том, как сделать обучение личностно ориентированным, поэтому если благоприятные для этого моменты создаются, то надо использовать их на полную катушку. А это можно делать, обращая учащихся к их личному опыту. Возможно, у кого-то есть опыт участия в ремонте своей квартиры, скажем, помогал родителям или просто был в курсе, слышал обсуждение в семье. Может, стоит попросить в качестве необязательного домашнего задания рассказать родителям о решенных на уроке задачах, выяснить, сталкивались ли они с аналогичными ситуациями, как с ними справлялись.

П.К. И, может, на следующий урок кто-то принесет свою семейную задачу-историю, чтобы предложить ее одноклассникам.

Л.Р. Мы уже пришли к мнению, что урок хорошо организован, и я хочу добавить, что это подчеркивает и хорошая презентация. Можно пролистать презентацию, и весь урок будет как на ладони. Но прежде чем мы перейдем к разговору о презентации, я бы хотела обратить ваше внимание на самый первый ее слайд — рисунок молодой семьи. Мне такой ход очень понравился. Неожиданно. И это сразу переводит задуманную историю из разряда абстрактных в абсолютно конкретную, персонифицированную, я бы даже сказала душевную. Рисунок симпатичный, сразу возникает теплое чувство к этой семье и желание помочь ей. Мне такие теплые нотки на уроке, в отношениях между



14

15

учителем и его учениками импонируют чрезвычайно.

О.М. Хочется отметить, что презентация практически идеальна. Я бы дала ей очень высокую оценку. Посмотрите, как цельно она смотрится. А все потому, что в презентации реализовано единое оформление слайдов. Автор использует один стандартный шрифт Calibri — это дает уверенность, что при просмотре презентации на любом Windows-компьютере текст будет отображаться корректно: не будет «сползать» ни вверх, ни вниз, не появятся «лишние» строки. Очень удачно смотрится черный текст на белом фоне. При этом автор расставил акценты красным цветом, а где-то изменил написание текста, что позволяет сконцентрировать внимание учеников на важных моментах новой темы.

Л.Р. Я бы сказала, что презентация смотрится стильно.

О.М. И за содержание могу поставить высокую отметку. Каждый слайд является опорой и наглядной иллюстрацией к словам учителя. Необязательных, «пустых» по смыслу слайдов в презентации нет.

Л.Р. Нельзя не согласиться. Я хочу отметить, что у меня при просмотре довольно многих презентаций быстро устают глаза, в голове появляется тяжесть и возникает чувство нервозности. Боюсь, что не только у меня, но и у детей. А здесь как-то все спокойно и ясно, без суеты.

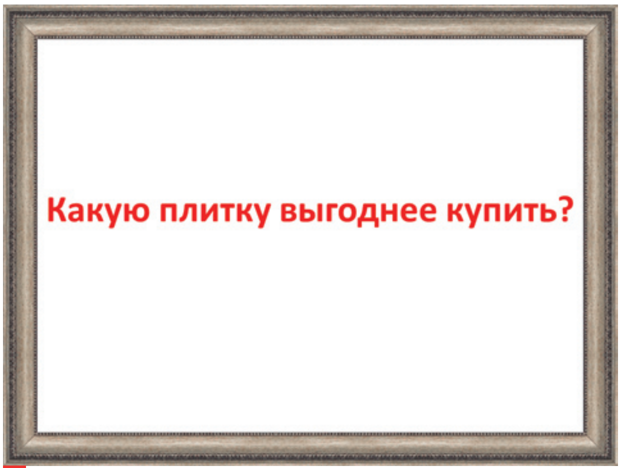
О.М. Это происходит в силу разумного оформления, как я уже сказала. И еще потому, что презентация не перегружена анимацией. Полезно помнить, что анимация – вещь полезная, но чрезмерное мелькание может мешать ученику, а не помогать ему сосредоточиться на восприятии учебного материала. Автор применил «мягкие» эффекты анимации типа «растворение» и «выцветание». При этом переход от слайда к слайду не заметен, так как автор использовал единый шаблон для всех слайдов.

Л.Р. Тем самым мы видим не отдельные слайды, а цельный продукт.

О.М. Обратите внимание, что на слайдах много «воздуха». Пустое пространство не только несет изящество и чистоту, но и служит прекрасным инструментом для расстановки акцентов. Пространство усиливает информационные элементы. И чем его больше, тем больше проявляется этот эффект усиления.

В общем, очень достойная презентация. Но два замечания все же сделаю. В презентации использованы изображения другого автора (слайды 1, 6 и 17), но не указано их авторство ни в списке используемой литературы, ни в плане урока. Хочу призвать учителей уважать результаты чужого интеллектуального труда и приучать к этому своих учеников. И еще не забывайте о титульном слайде, он придает презентации завершенность, что особенно важно, если вы собираетесь поделиться ею с коллегами.

Л.Р. Хорошо, о презентации поговорили, вернемся к уроку. Он дает нам повод поговорить о проблеме практической ориентации при обучении математике. И здесь важно различать практические сюжеты и реальные задачи, возникающие в жизни. Поясню на примере задач нашего урока, что я имею в виду. Задача о покраске потолка по сюжету практическая, но в жизни такие задачи, думаю, никогда нам не встречаются. В жизни мы приходим в магазин и видим цену за одну банку указанной вместимости или массы, а если они продаются в упаковке, то за несколько банок. Это не означает, что такие задачи не нужны. Нет, надо лишь понимать, что применять математические знания в жизненных ситуациях они не учат. Более того, жизнь вообще не дает нам рафинированных условий и не формулирует вопрос. В жизни мы должны самостоятельно сформулировать для себя задачу: и данные для условия выбрать, и вопрос поставить. Возвращаясь к нашему уроку, я бы сказала, что это могла бы быть задача о том, какую плитку выгоднее купить, если в магазине есть подходящая плитка двух видов. Это вполне реальная ситуация.



16

17

Кстати, сюжет про кафельную плитку вообще богат на математическое содержание. Здесь есть несколько интересных для обсуждения тем, помимо затронутых на уроке площадей и пропорциональностей. Например, в каком из двух случаев меньше обрезков, ведь плитку придется резать, вряд ли она и в первом случае, и во втором уляжется без остатков. Что можно сделать, чтобы минимизировать отходы? А еще для укладки плитки надо покупать крестики и уголки, чтобы ширина швов была постоянной. Как подсчитать их количество? Еще есть проблема выставления вертикалей и горизонталей. Какими инструментами пользуются для этих целей в быту? В общем, это я все к тому говорю, что на материале о ремонте можно делать отдельные обобщающие уроки. Но сейчас у нас урок про пропорциональности.

П.К. Я хочу подкрепить мысль о реальности задач примером с урока. Точнее, о нереальности условия. Как будут работать 8, да пусть даже 4 человека в ванной комнате? Трудно представить, как они все туда войти-то смогут. В наши-то ванные комнаты! Ну возьмите бригады из двух-трех человек и время соответственно 6 дней и 4 дня, это уже смотрится правдоподобнее.

Л.Р. А у меня вот такой неожиданный вопрос возник: куда направлять стрелочки в краткой записи условия задачи? Нигде не встречала никаких разъяснений по этому поводу.

П.К. Я тоже нигде не встречал ответа на этот вопрос. Думаю, что это не принципиально, но я бы следовал за речью. Например, если в задаче о краске я ставлю стрелку от 9 к 3, то и говорю, что если масса уменьшилась в несколько раз, то и цена уменьшится во столько же раз. А уж если говорю про увеличение одной величины в несколько раз, то и стрелку ставлю от 3 к 9. Хорошо, когда слова и зрительные образы соответствуют друг другу.

Л.Р. Я вас поняла. Стрелка вверх ассоциируется с ростом и увеличением, а стрелка вниз — с падением и снижением. Это сформированный стереотип. С учетом того, что мы привлекаем стрелки для придания наглядности происходящему изменению, логично, если оно так и будет воспринято, а не вступит в противоречие с визуальными стереотипами.

О.М. А я вот заглянула в учебник, проанализировала записи с урока и прихожу к такому выводу: стрелка вверх заменяет записанное в условии задачи слово «увеличилось», стрелка вниз — «уменьшилось», и с остальными данными они не связаны. То есть ставятся сами по себе, а не от большего к меньшему или наоборот. И нужны они только для того, чтобы определить тип зависимости: стрелки одинаково направлены — имеем прямую пропорциональность, разнонаправленны — обратную. А что писать в числителе, что в знаменателе — неважно, главное, соответствие не нарушить.

П.К. Вполне логичное объяснение. Принимается. И хочу еще сказать, что очень приятное впечатление произвела на меня концовка урока: интерактивное задание на отработку понимания вида зависимости.

О.М. И на мой взгляд, это очень интересный момент урока, с которым мы пока не встречались. Речь о том, что на этапе первичного закрепления автор предлагает ученикам выполнить задание с онлайн-сервиса http://learningapps.org. Это приложение для поддержки обучения и процесса преподавания с помощью интерактивных модулей. Существующие на этом сервисе модули, достаточно многочисленные, могут быть непосредственно включены в содержание обучения, а кроме того, их можно изменять или создавать в оперативном режиме. Удобно. Целью сервиса является собрание интерактивных блоков и возможность сделать их общедоступным. Можно занести его в личную копилку полезных Интернет-ресурсов.

П.К. Вообще урок хорош. Учитель вложил много труда и времени, чтобы донести до ребят этот материал, а некоторые недочеты можно исправить.

Л.Р. Да, достоинств урока они не умаляют. Спасибо автору за вдумчивую работу, что дала нам пищу для размышлений. Надеемся, что она заинтересовала не только нас, но будет интересна и полезна нашим читателям.

С. ШЕСТАКОВ,
И. ЯЩЕНКО,
г. Москва

Разбор реального варианта, типовые ошибки, статистика

ИТОГИ ЕГЭ-2014

В 2014 году Единый государственный экзамен по математике состоял из 21 задания: 15 заданий (B1–B15) с кратким ответом (часть 1) и 6 заданий (C1–C6) с полным решением (часть 2). Июньский экзамен сдавали 702 690 человек. Минимальный порог из трех правильно решенных задач (не менее 3 первичных баллов, то есть не менее 20 баллов по стобалльной шкале) не преодолели 5,39% выпускников, не менее 15 первичных баллов (не менее 68 — средний балл успешного абитуриента технического вуза) получили 11,12% выпускников, не менее 19 первичных баллов (не менее 75 баллов) получили 3,18% выпускников, не менее 22 первичных баллов (не менее 80 баллов по стобалльной шкале) получили 1,07% выпускников, не менее 28 первичных баллов (не менее 90 баллов по стобалльной шкале) получили 0,12% выпускников. Приведем разбор одного из реальных вариантов ЕГЭ-2014 с краткими статистическими сведениями и указанием типичных ошибок.

Часть 1

Задание B1

Теплоход рассчитан на 550 пассажиров и 15 членов команды. Каждая спасательная шлюпка может вместить 60 человек. Какое наименьшее число шлюпок должно быть на теплоходе, чтобы в случае необходимости в них можно было разместить всех пассажиров и всех членов команды?

Решение. Всего теплоход вмещает 565 человек. Задачу можно решить формально, разделив 565 на 60 с остатком и округлив результат до большего целого числа, а можно обойтись оценкой или прикидкой: понятно, что десяти шлюпок хватит для размещения 600 человек, а если их число уменьшить на одну, то разместить 565 человек не получится.

Ответ: 10.

Статистика и краткий анализ выполнения задания по результатам 2014 года (далее то же, но сокращенно). Средний процент правильных ответов — 87,9% (далее только цифра в заданиях B1—B15). Статистика подтверждает, что арифметические текстовые задачи вызывают трудности даже в простейших вариантах. Поэтому особое внимание следует уделить арифметическим вычислениям, в том числе устному счету, навыки которого у части выпускников либо частично утрачены, либо недостаточно сформированы. Часть ошибочных ответов обусловлена невнимательностью и неумением выполнять арифметические действия без калькулятора.

Задание B2

Система навигации самолета информирует пассажира о том, что полет проходит на высоте 26 000 футов. Выразите высоту полета в метрах. Считайте, что 1 фут равен 30,5 см.

Решение. Поскольку в 1 м = 100 см, то, чтобы ответить на вопрос задачи, достаточно вычислить значение выражения

$$\frac{26\,000\cdot 30,5}{100}=260\cdot 30,5=26\cdot 305=7930 \text{ м}.$$

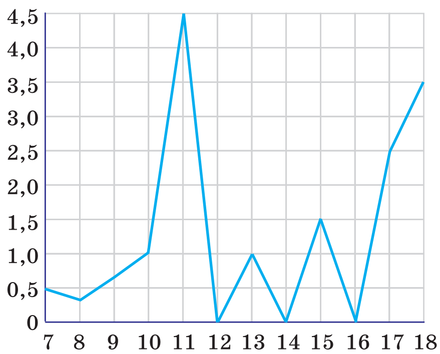
Ответ: 7930.

К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru

Статистика и краткий анализ. 70,2%. Умножение и деление чисел без калькулятора, особенно если одно из них является дробью, вызывает непреодолимые трудности почти у трети выпускников, как и простейшие арифметические задачи на проценты: посчитать, сколько рублей составляет пятипроцентная скидка на пакет кефира стоимостью 40 рублей, не в состоянии примерно треть семнадцатилетних граждан России.

Задание B3

На рисунке жирными точками показано суточное количество осадков, выпадавших в Элисте с 7 по 18 декабря 2001 года. По горизонтали указаны числа месяца, по вертикали — количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку наибольшее суточное количество осадков, выпадавших в Элисте в период с 12 по 16 декабря. Ответ дайте в миллиметрах.



Решение. Для ответа на вопрос задачи нужно найти ординату самой высокой точки графика на отрезке [12; 16]. Эта ордината равна 1,5.

Ответ: 1,5.

Статистика и краткий анализ. 93,1%. Около семи процентов выпускников не смогли правильно ответить на этот вопрос.

Задание B4

Для группы иностранных гостей требуется купить 10 путеводителей. Нужные путеводители нашлись в трех интернет-магазинах. Цена путеводителя и условия доставки всей покупки приведены в таблице.

Во сколько рублей обойдется наиболее дешевый вариант покупки с доставкой?

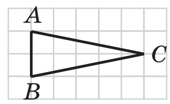
Решение. Стоимость покупки в первом магазине равна 2560 + 250 = 2810 рублей, во втором магазине — 2600 + 200 = 2800 рублей, а в третьем — 2750 рублей.

Ответ: 2750.

Статистика и краткий анализ. 79%. Значительная часть неправильных ответов обусловлена арифметическими ошибками. Эта задача, как и предыдущие, позволяет сделать общий вывод о недостаточных навыках решения задач на арифметические действия у примерно 20% выпускников.

Задание B5

На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображен треугольник ABC. Найдите длину его средней линии, параллельной стороне AB.



Решение. $AB = 2$, поэтому средняя линия равна 1.

Ответ: 1.

Статистика и краткий анализ. 64,1%. Около 35% выпускников не помнят простейших фактов и теорем планиметрии.

Задание B6

Перед началом первого тура чемпионата по настольному теннису участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 26 спортсменов, среди которых 17 спортсменов из России, в том числе Денис Полянкин. Найдите вероятность того, что в первом туре Денис Полянкин будет играть с каким-либо спортсменом из России.

Решение. Поскольку искомая вероятность P равна отношению числа $n = 16$ благоприятных для данного события исходов к числу $N = 25$ всех равновозможных исходов, находим

$$P = \frac{16}{25} = 0,64.$$

Ответ: 0,64.

Интернет-магазин	Цена путеводителя (руб. за шт.)	Стоимость доставки (руб.)	Дополнительные условия
А	256	250	Нет
Б	260	200	Доставка бесплатная, если сумма заказа превышает 3000 руб.
В	275	300	Доставка бесплатная, если сумма заказа превышает 2500 руб.

Статистика и краткий анализ. 57,5%. Высокий процент тех, кто не приступал к решению, то есть не может найти вероятность элементарного события даже в простейшем случае.

Задание В7

Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+6} = 16^x$.

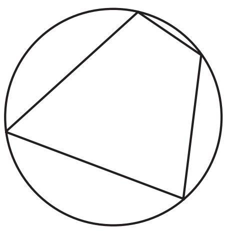
Решение. Для решения уравнения достаточно привести степени к одному основанию, получив уравнение $2^{-x-6} = 2^{4x}$, откуда $-x - 6 = 4x$ и $x = -1,2$.

Ответ: –1,2.

Статистика и краткий анализ. 75,6%. Наибольшие трудности — в уравнениях, правая часть которых является относительно высокой степенью двойки (пятой или шестой), тройки (третьей или четвертой), четверки (третьей) и пятерки (третьей). Часть ошибочных ответов обусловлена неумением выполнять действия с дробями и степенями, в частности, переходить к степеням с отрицательным показателем, а также ошибками решения линейных уравнений. Для того чтобы исключить возможность арифметической ошибки, в этой задаче следует делать обязательную проверку полученного ответа путем его подстановки в данное уравнение.

Задание В8

Два угла вписанного в окружность четырехугольника равны 63° и 76°. Найдите меньший из оставшихся углов. Ответ дайте в градусах.



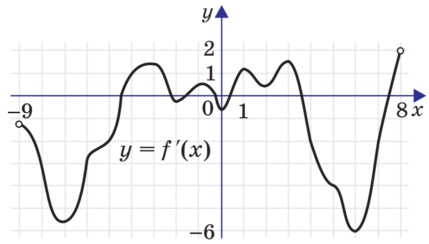
Решение. Поскольку сумма противоположных углов вписанного в окружность четырехугольника равна 180°, то меньший из двух других его углов равен 180° – 76° = 104°.

Ответ: 104°.

Статистика и краткий анализ. 51,2%. Результаты предсказуемы на фоне статистики по задаче В5. Ошибки связаны с плохим знанием простейших геометрических фактов и определений.

Задание В9

На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале (–9; 8). Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку [–7; 5].



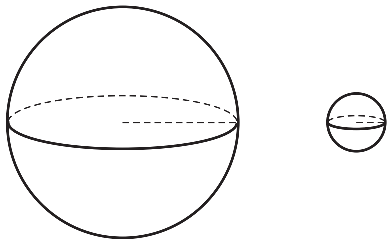
Решение. Условие задачи предполагает подсчет точек максимума — точек, в которых производная равна нулю и меняет знак с плюса на минус. То есть это точки, в которых график производной пересекает ось абсцисс сверху вниз, если мысленно двигаться по нему в положительном направлении оси абсцисс. Таких точек в данном случае ровно три.

Ответ: 3.

Статистика и краткий анализ. 44,2%. Ошибки связаны с плохим или формальным усвоением темы, не позволяющим делать правильные выводы и использовать графические интерпретации.

Задание В10

Дано два шара. Радиус первого шара в 8 раз больше радиуса второго. Во сколько раз площадь поверхности первого шара больше площади поверхности второго?



Решение. Отношение площадей поверхностей двух сфер равно отношению квадратов их радиусов, то есть в данном случае это $8^2 : 1^2 = 64$.

Ответ: 64.

Статистика и краткий анализ. 44,2%. Ошибки связаны с недостаточным знанием основных фактов и формул стереометрии, неумением сделать правильный вывод при отсутствии конкретных числовых данных.

Часть 2

Задание В11

Найдите значение выражения

$$\sqrt{27} - \sqrt{108}\sin^2\frac{11\pi}{12}.$$

Решение. Выполним действия:

$$\sqrt{27}\left(1 - 2\sin^2\frac{11\pi}{12}\right) = \sqrt{27}\cdot\cos\frac{11\pi}{6} = \sqrt{27}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 4,5.$$

Ответ: 4,5.

Статистика и краткий анализ. 23,7%. Наибольшие проблемы — в незнании или недостаточном знании основных формул тригонометрии (в других вариантах — свойств логарифмов) и табличных значений тригонометрических функций. Еще раз отметим плохие навыки арифметических вычислений без применения калькулятора.

Задание B12

Автомобиль разгоняется на прямолинейном участке шоссе с постоянным ускорением $a = 2450$ км/ч². Скорость v вычисляется по формуле $v=\sqrt{2la}$, где l — пройденный автомобилем путь. Найдите, сколько километров проедет автомобиль к моменту, когда он разгонится до скорости 70 км/ч.

Решение. Из условия задачи следует, что

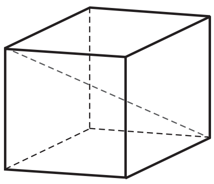
$$v = \sqrt{2l\cdot 2450}=70, \quad l=\frac{70^2}{2\cdot 2450}=\frac{4900}{4900}=1.$$

Ответ: 1.

Статистика и краткий анализ. 44,9%. Наибольшие трудности связаны с неумением оптимизировать вычисления. Высокий процент тех, кто даже не приступал к решению.

Задание B13

Диагональ куба равна $\sqrt{3}$. Найдите его объем.



Решение. Если сторона куба равна a, то его объем равен a^3, а его диагональ равна $a\sqrt{3}$. По условию $a\sqrt{3}=\sqrt{3}$, откуда $a = 1$ и $a^3 = 1$.

Ответ: 1.

Статистика и краткий анализ. 40,8%. Ошибки связаны с недостаточным знанием основных фактов и формул стереометрии и планиметрии, а также слабыми вычислительными навыками.

Задание B14

Имеется два сплава. Первый содержит 5% меди, второй — 13% меди. Масса второго сплава больше массы первого на 9 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 11% меди. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.

Решение. Пусть масса первого сплава равна x кг. Тогда масса второго сплава равна $x + 9$, а масса третьего сплава равна $2x + 9$. Первый сплав содержит $0{,}05x$ кг меди, второй — $0{,}13(x + 9)$ кг меди, третий — $0{,}11(2x + 9)$ кг меди. Поскольку третий сплав получен из двух первых, масса меди в нем равна сумме масс меди в первом и втором сплавах, то есть

$$0{,}05x + 0{,}13(x + 9) = 0{,}11(2x + 9).$$

Умножив обе части уравнения на 100, раскрыв скобки и приведя подобные, получим $4x = 18$. Поэтому $2x = 9$, а $2x + 9 = 18$.

Ответ: 18.

Статистика и краткий анализ. 26,7%. Наибольшие трудности: в составлении уравнения по условию задачи и его решении; понимании того, что процент — это одна сотая часть величины; неумении оптимизировать вычислительные сложности при решении уравнения. Высокий процент тех, кто даже не приступал к решению.

Задание B15

Найдите точку минимума функции

$$y = 10x - \ln (x + 3)^5 + 7.$$

Решение. Сначала воспользуемся свойством логарифма:

$$y = 10x - 5\ln (x + 3) + 7.$$

Найдем производную данной функции, считая, что $x > -3$. Получим:

$$y'=10-\frac{5}{x+3}, \quad y'=\frac{10(x+2,5)}{x+3}.$$

Производная обращается в нуль при $x=-2{,}5$. Поскольку $x + 3 > 0$, производная в точке $x = -2{,}5$ меняет свой знак с минуса на плюс, то есть $x = -2{,}5$ — точка минимума.

Ответ: $-2{,}5$.

Статистика и краткий анализ. 25,6%. Высокий процент тех, кто даже не приступал к решению. Ошибки связаны с арифметическими действиями, неуверенным владением алгоритмом вычисления наибольшего и наименьшего значений непрерывной на отрезке функции (как в случае знакопостоянства производной на данном отрезке, так и в случае принадлежности точки экстремума данному отрезку).

Задание C1

а) Решите уравнение

$$\cos 2x-\sqrt{2}\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)-1=0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку

$$\left[\frac{3\pi}{2};3\pi\right].$$

Решение. а) Запишем данное уравнение в виде

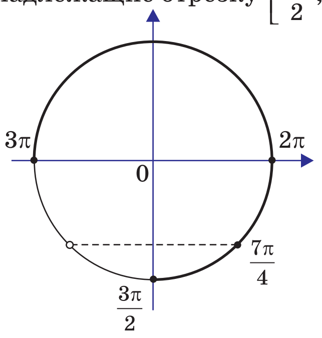
$$1-2\sin^2 x-\sqrt{2}\sin x-1=0,$$

откуда

$$2\sin^2 x+\sqrt{2}\sin x=0, \quad \sin x\cdot\left(2\sin x+\sqrt{2}\right)=0.$$

Значит, или $\sin x = 0$, откуда $x = \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, или $\sin x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, откуда $x = -\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, или $x = -\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi m$, $m \in \boldsymbol{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберем корни, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.



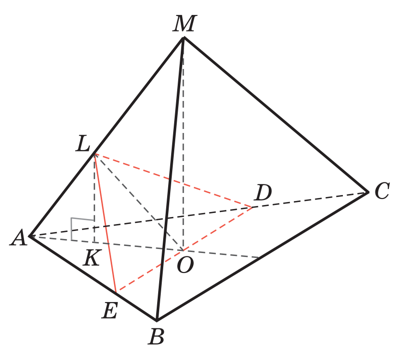
Получим числа: $\dfrac{7\pi}{4}$; 2π; 3π.

Ответ: а) πk, $k \in \boldsymbol{Z}$; $-\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $-\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi m$, $m \in \boldsymbol{Z}$; б) $\dfrac{7\pi}{4}$; 2π; 3π.

Статистика и краткий анализ. Средний процент решений, оцененных максимальным числом баллов 15,4% (далее только цифра в заданиях С1—С6). Положительный результат, отличный от максимального (не менее одного балла за решение), 8,3% (далее только цифра в заданиях С1—С6) . Основные проблемы: неумение решать простейшие тригонометрические уравнения, незнание свойств ограниченности синуса и косинуса, неумение отбирать решения с помощью тригонометрической окружности или неравенств.

Задание С2

В правильной треугольной пирамиде $MABC$ с основанием ABC стороны основания равны 6, а боковые ребра равны 8. На ребре AC находится точка D, на ребре AB находится точка E, а на ребре AM — точка L. Известно, что $CD = BE = LA = 2$. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точки E, D и L.



Решение. Пусть O — центр основания пирамиды. В треугольнике ABC имеем:

$$AE : EB = AD : DC = 2 : 1,$$

значит, $DE = \dfrac{2}{3} BC = 4$,

отрезок DE делит медиану, проведенную из вершины A, в отношении $2 : 1$, то есть содержит точку O. Кроме того, O — середина отрезка DE.

Рассмотрим прямоугольный треугольник AMO. В нем $AO = 2\sqrt{3}$. Опустим из точки L перпендикуляр LK на прямую AO. Тогда

$$AK = \frac{1}{4} AO = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad KO = \frac{3}{4} AO = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Значит,

$$LK = \sqrt{LA^2 - AK^2} = \frac{\sqrt{13}}{2},$$

$$LO = \sqrt{LK^2 + KO^2} = \sqrt{10}.$$

Равнобедренный треугольник DLE — искомое сечение, а LO — его высота. Площадь искомого сечения равна

$$\frac{1}{2} LO \cdot DE = 2\sqrt{10}.$$

Ответ: $2\sqrt{10}$.

Статистика и краткий анализ. 2,2%; 2,4%. Основные проблемы: неумение анализировать пространственные конфигурации, использовать факты и теоремы, связанные с перпендикулярностью прямых и плоскостей; неумение строить простейшие линейные углы и проекции; ошибки в определении вида треугольника; вычислительные ошибки.

Задание С3

Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{3-x}(x+3) \cdot \log_{x+4}(5-x) \le 0, \\ 16^{x^2-5x+5} - 0{,}25^{2x^2+8x-30} \le 0. \end{cases}$$

Решение. 1. Решим первое неравенство системы:

$$\log_{3-x}(x+3) \cdot \log_{x+4}(5-x) \le 0.$$

Значения x, при которых определено неравенство:

$$-3 < x < 2,\ 2 < x < 3.$$

Рассмотрим два случая.

1-й случай: $-3 < x < 2$. Получаем, что

$$\log_{x+4}(5-x) > 0,\ 3 - x > 1,$$

тогда

$$\begin{cases} \log_{3-x}(x+3) \le 0, \\ -3 < x < 2; \end{cases} \quad \begin{cases} 0 < x+3 \le 1, \\ -3 < x < 2, \end{cases}$$

откуда $-3 < x \le -2$.

2-й случай: $2 < x < 3$. Получаем, что

$$\log_{3-x}(x+3) < 0,\ \log_{x+4}(5-x) > 0,$$

следовательно, при $2 < x < 3$ первое неравенство данной системы верно.

Решение первого неравенства данной системы: $-3 < x \le -2$; $2 < x < 3$.

2. Решим второе неравенство системы:

$$16^{x^2-5x+5}-0,25^{2x^2+8x-30}\le 0;$$

$$4^{2x^2-10x+10}\le 4^{-2x^2-8x+30};$$

$$2x^2-10x+10\le -2x^2-8x+30;$$

$$2x^2-x-10\le 0,$$

откуда

$$-2\le x\le \frac{5}{2}.$$

Решение второго неравенства данной системы: $-2\le x\le \frac{5}{2}$.

3. Решение данной системы неравенств: $x=-2$; $2<x\le \frac{5}{2}$.

Ответ: -2; $\left(2;\ \frac{5}{2}\right]$.

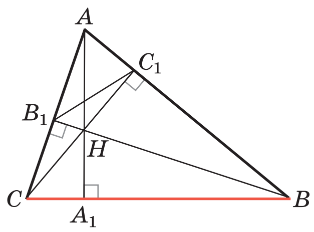
Статистика и краткий анализ. 4,1%; 13,1%. Основные проблемы: неумение решать логарифмические неравенства; арифметические ошибки; плохое знание свойств логарифмов и свойств неравенств.

Задание С4

Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H.

а) Докажите, что $\angle AHB_1=\angle ACB$.

б) Найдите BC, если $AH=10\sqrt{3}$ и $\angle BAC=30°$.



Решение. а) Проведем высоту AA_1. Получим, что

$\angle AHB_1=90°-\angle HAB_1=90°-\angle A_1AC=\angle ACB$,

что и требовалось доказать.

б) В четырехугольнике AB_1HC_1 углы B_1 и C_1 — прямые, следовательно, около этого четырехугольника можно описать окружность, причем AH — ее диаметр.

Тогда из теоремы синусов получим, что

$$\frac{B_1C_1}{\sin A}=AH,\quad B_1C_1=AH\cdot\sin A.$$

Треугольники AB_1C_1 и ABC подобны, поскольку имеют общий угол A и

$$\frac{AB_1}{AB}=\cos A=\frac{AC_1}{AC}.$$

Из последнего равенства следует, что коэффициент подобия равен $\cos A$. Поэтому и

$$\frac{B_1C_1}{BC}=\cos A,$$

откуда

$$BC=\frac{B_1C_1}{\cos A}=\frac{AH\cdot\sin A}{\cos A}=AH\cdot\mathrm{tg}\ A=10\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=10.$$

Ответ: 10.

Статистика и краткий анализ. 0,7%; 2,2%. Наибольшие проблемы связаны с анализом геометрической конфигурации, незнанием свойств окружностей и касательных, рассмотрением одного случая вместо двух.

Задание С5

Найдите все значения a, при которых уравнение

$$(\log_7(x+a)-\log_7(x-a))^2-$$
$$-3a(\log_7(x+a)-\log_7(x-a))+2a^2+3a-9=0$$

имеет ровно два корня.

Решение. Пусть

$$t=\log_7(x+a)-\log_7(x-a),$$

тогда уравнение запишется в виде

$$t^2-3at+2a^2+3a-9=0,$$

откуда

$$t=2a-3 \text{ или } t=a+3.$$

Значит, корни данного уравнения — это корни уравнений

$$\log_7(x+a)-\log_7(x-a)=2a-3 \qquad (1)$$

или

$$\log_7(x+a)-\log_7(x-a)=a+3. \qquad (2)$$

Исследуем, сколько корней имеет уравнение

$$\log_7(x+a)-\log_7(x-a)=b$$

в зависимости от a и b. При $a\ne 0$ и $x>a$ и $x>-a$, то есть при $x>|a|$, левая часть определена и принимает вид

$$\log_7\frac{x+a}{x-a}=\log_7\left(1+\frac{2a}{x-a}\right).$$

При $x>|a|$ выражение $1+\frac{2a}{x-a}$ принимает по одному разу все значения из промежутка $(1;+\infty)$ для $a>0$ и принимает по одному разу все значения из промежутка $(0;1)$ для $a<0$. Значит, при $x>|a|$ выражение $\log_7\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)$ принимает по одному разу все значения из промежутка $(0;+\infty)$ при $a>0$ и принимает по одному разу все значения из промежутка $(-\infty;0)$ при $a<0$. Таким образом, уравнение

$$\log_7(x+a)-\log_7(x-a)=b$$

имеет один корень при $ab>0$ и не имеет корней при $a\ne 0$ и $ab\le 0$. При $a=0$ и $x>0$ уравнение принимает вид $0=b$ и либо имеет бесконечно много корней, либо не имеет корней вовсе.

Уравнения (1) и (2) могут иметь общие корни при $2a-3=a+3$, то есть при $a=6$. При $a=6$ оба уравнения принимают вид

$$\log_7(x+6)-\log_7(x-6)=9$$

и имеют один общий корень.

При других значениях a данное уравнение имеет два корня, если уравнения (1) и (2) имеют по одному корню. Получаем систему неравенств

$$\begin{cases}(2a-3)a>0,\\(a+3)a>0,\end{cases}$$

откуда

$$a<-3,\ a>\frac{3}{2}.$$

Таким образом, данное уравнение имеет ровно два корня при $a<-3$, $\frac{3}{2}<a<6$, $a>6$.

Ответ: $(-\infty;\,-3)$; $\left(\frac{3}{2};\,6\right)$; $(6;\,+\infty)$.

Статистика и краткий анализ. 0,2%; 1,7%. Наибольшие проблемы: в понимании логики задачи и анализа условия; неумение искать ключевые факты и делать необходимые обоснования; применять свойства функций и строить графики, использовать геометрические интерпретации.

Задание С6

Семь экспертов оценивают кинофильм. Каждый из них выставляет оценку — целое число баллов от 1 до 15 включительно. Известно, что все эксперты выставили различные оценки. По старой системе оценивания рейтинг кинофильма — это среднее арифметическое всех оценок экспертов. По новой системе оценивания рейтинг кинофильма вычисляется следующим образом: отбрасываются наименьшая и наибольшая оценки и подсчитывается среднее арифметическое пяти оставшихся оценок.

а) Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равняться $\frac{2}{45}$?

б) Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равняться $\frac{2}{35}$?

в) Найдите наибольшее возможное значение разности рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания.

Решение. Обозначим рейтинг кинофильма, вычисленный по старой системе оценивания, через A, а рейтинг кинофильма, вычисленный по новой системе оценивания, через B.

а) Заметим, что $A=\frac{m}{7}$, $B=\frac{n}{5}$, где m и n — некоторые натуральные числа. Значит,

$$A-B=\frac{m}{7}-\frac{n}{5}=\frac{5m-7n}{35}.$$

Если $A-B=\frac{2}{45}$, то

$$5m-7n=\frac{70}{45},$$

что невозможно. Таким образом, разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, не может равняться $\frac{2}{45}$.

б) Например, для оценок экспертов 1, 2, 4, 5, 6, 7, 9 разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равна

$$\frac{1+2+4+5+6+7+9}{7}-\frac{2+4+5+6+7}{5}=\frac{34}{7}-\frac{24}{5}=\frac{2}{35}.$$

в) Пусть x — наименьшая из оценок, z — наибольшая, а y — сумма остальных пяти оценок. Тогда

$$A-B=\frac{x+y+z}{7}-\frac{y}{5}=\frac{5x-2y+5z}{35}\le$$

$$\le\frac{5x+5z-2\big((x+1)+(x+2)+\ldots+(x+5)\big)}{35}=$$

$$=\frac{5z-5x-30}{35}\le\frac{5\cdot15-5\cdot1-30}{35}=\frac{8}{7}.$$

Для оценок экспертов 1, 2, 3, 4, 5, 6, 15 разность $A-B$ равна $\frac{8}{7}$. Значит, наибольшее возможное значение разности рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равно $\frac{8}{7}$.

Ответ: а) нет; б) да; в) $\frac{8}{7}$.

Статистика и краткий анализ. Средний процент решений, оцененных максимальным числом баллов, — 0,2%. Положительный результат, отличный от максимального (не менее одного балла за решение), — 6,6%. Наибольшие проблемы: в понимании логики задачи и анализа условия; неумение использовать свойства целых чисел, делать необходимые обоснования и выводы. Значительный процент участников экзамена не приступил к решению задачи.

liberty.ru; http://news.chita.ru/42591

Н. ЖАРКОВСКАЯ,
zharkovskaya@gmail.com,
г. Санкт-Петербург

ТЕСТИРОВАНИЕ «КЕНГУРУ» — ВЫПУСКНИКАМ

Серия тестирований под общим девизом «Кенгуру» — выпускникам» возникла около 10 лет назад как продолжение работы по организации конкурса «Кенгуру». Дело в том, что основу российского оргкомитета конкурса составили сотрудники Лаборатории проблем школьного математического образования, созданной М.И. Башмаковым еще в 70-е годы. Лаборатория участвовала в целом ряде образовательных проектов, как теоретической направленности, так и нацеленных на практическую работу со школами. Организация тестирований, которые соединили теоретические наработки лаборатории с технологиями, обкатанными при работе над конкурсом «Кенгуру», была совершенно естественным шагом.

Сейчас российский оргкомитет совместно с Инновационным институтом продуктивного обучения СЗО РАО проводит тестирования для выпускников всех трех ступеней школы (начальной, основной и старшей). Эти мероприятия проводятся в январе и организованы в основных чертах так же, как и конкурс «Кенгуру».

Задания всех тестирований разработаны на единой методологической основе, они состоят из большого числа вопросов, максимально широко охватывающих материал курса математики соответствующей ступени. Каждый вопрос предполагает ответ «Да» или «Нет», за верный ответ баллы начисляются, за неверный — снимаются. Если вопрос оставлен без ответа, то баллы не начисляются и не снимаются. Но самой значимой особенностью этих тестирований является развернутая индивидуальная рецензия, которую получает каждый участник.

При составлении этой рецензии используется система оценки математической подготовки школьников, разработанная в упомянутой лаборатории. Отличительной чертой такой оценки является внимание не только к конкретным знаниям и навыкам по предмету, но и к некоторым показателям более общего характера, таким как готовность использовать наглядные представления или умение провести логическое рассуждение. Уровень математической подготовки школьников в зависимости от параллели оценивается по 15–18 параметрам. За счет большого количества заданий в тесте суждение об успешности по конкретному параметру выносится на основании как минимум 4–5 ответов. Кроме индивидуальных рецензий, школа получает итоговый отчет, содержащий все результаты ее учеников, а также некоторые статистические данные как по школе, так и по всему массиву проверенных работ. С заданиями всех проведенных тестирований можно ознакомиться на сайте российского оргкомитета конкурса «Кенгуру»: www.mathkang.ru.

Всего в этих трех тестированиях ежегодно участвуют сотни тысяч школьников. Кроме того, начиная с 2010 года учителя могут зарегистрироваться на сайте конкурса и принять участие во входном контроле для учеников 5-х и 7-х классов, а также в итоговом контроле для выпускников начальной школы. Преимуществом этих мероприятий является то, что они не требуют пересылки материалов тестирования по почте, поэтому результаты становятся известны в школе через несколько дней после проведения работы. С другой стороны, эта технология требует заметно больших усилий от учителя, проводящего тестирование в школе: надо самостоятельно распечатать задания, а потом внести выбранные учениками ответы в специальные бланки на сайте. И хотя эти тестирования, в отличие от «Кенгуру» — выпускникам», бесплатные, в них участвует существенно меньше школьников (10–15 тыс. в параллели).

Конечно, результаты проверки работ участников тестирований дают очень интересный статистический материал. Если говорить о начальной школе, то в первую очередь привлекают внимание более высокие, чем в других параллелях, показатели успешности выполнения работы. Так, например, во время тестирования в январе 2014 года половина учеников 4-х классов набрала не менее 64 баллов (59% от максимально возможного результата), в то время как для 9-х классов эта величина равна 49 баллам (34%), а для 11-х классов — 60 баллам (33%). Конечно, эти данные надо воспринимать с известной осторожностью, ведь речь идет о различных тестах, хотя и составленных на общих принципах. В то же время наши результаты показывают сильную неоднородность подготовки выпускников начальной школы.

Например, в следующем сюжете более трети учащихся допустили не менее одной ошибки, хотя это первое и одно из самых простых заданий теста (здесь и далее рядом с заданием мы указываем процент учащихся, которые выбрали верный ответ к нему).

1) Дан ряд чисел:

2198, 384, 5036, 53, 3048, 538, 429, 393, 5306, 371.

Верно ли утверждение?

(91%) В этом ряду есть число **пятьсот тридцать шесть.**

(90%) Трехзначных чисел в этом ряду больше, чем четырехзначных.

(61%) В этом ряду ровно 4 нечетных числа.

(78%) Разность самого большого и самого маленького из данных чисел меньше 5000.

Эти данные показывают, что заметная доля выпускников начальной школы на входе в основную школу не имеет запаса прочности по самым базовым навыкам, что сильно затрудняет их адаптацию к новым, более жестким условиям.

Рассмотрим некоторые задания тестирований для 9-х и 11-х классов, проведенных в январе 2014 года.

Отметим, что целый ряд заданий, которые никак не могут быть отнесены к разряду сложных, вызывают значительные трудности у многих девятиклассников. Вот некоторые примеры (мы указываем номера, под которыми задания входили в соответствующий вариант).

4) (38%) Верно ли равенство

$$\left|\sqrt{7}-3\right|+\left|5-\sqrt{28}\right|=\sqrt{7}-2\,?$$

7) (39%) Верно ли равенство

$$\sqrt{x^3}\cdot\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[6]{x^5}=x^3\,?$$

19) (38%) Верно ли неравенство $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}>\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$?

Кстати, на вопросы 7 и 19 не стали отвечать около 20% участников тестирования, то есть примерно пятая часть участников тестирования сочла их трудными или незнакомыми. Для сравнения: в своей способности проверить равенство $\frac{3^4\cdot4^3}{6^6}=\frac{1}{9}$ (задание 2) усомнились всего 3% тестируемых, при этом около 38% выбрали неверный ответ, то есть даже это задание оказалось для многих непростым, хотя и хорошо знакомым.

Заметим, что вопросы, на которые не отвечали 20% участников или более, составляют примерно четверть всего теста, причем значительная часть их приходится на последние три сюжета, где должен заметно сказываться дефицит времени.

В целом среди заданий, оказавшихся наиболее трудными для участников тестирования, значительную часть составляют вопросы, связанные с использованием наглядных представлений (либо построение формулы по графику, либо создание эскиза по формуле), а также задания, требующие пусть и несложного, но самостоятельного рассуждения. Рассмотрим некоторые из них.

16) (34%) Верно ли, что уравнение

$$\sqrt{2x-1}\cdot\left(12x^2-13x+3\right)=0$$

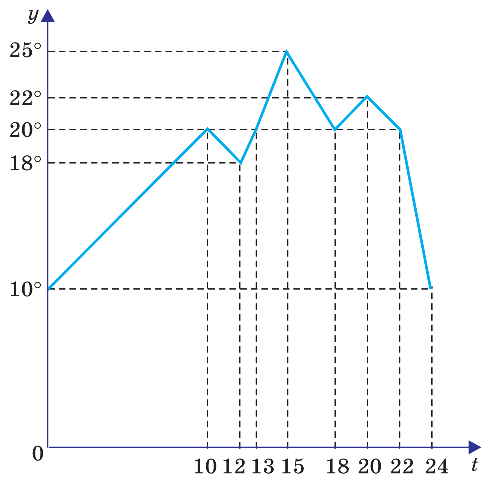
имеет три корня?

Для ответа на этот вопрос можно было либо решить квадратное уравнение и убедиться, что меньший корень $\left(\frac{1}{3}\right)$ не входит в ОДЗ исходного уравнения, либо просто подставить $x=\frac{1}{2}$ (границу области определения корня) в квадратный трехчлен и заметить, что при этом получается отрицательная величина, следовательно, меньший корень квадратного уравнения меньше чем $\frac{1}{2}$ и его следует отбросить. Итак, правильный ответ — «Нет», но 50% участников выбрали «Да», а 16% не стали отвечать на этот вопрос.

28) (42%) Верно ли, что если угол между двумя касательными, проведенными из одной точки к данной окружности, равен 120°, то расстояние между точками касания равно радиусу этой окружности?

Задача несложная, но надо самостоятельно построить чертеж и связать в цепочку несколько простых наблюдений. Примерно 20% участников не стали отвечать на этот вопрос.

32) (35%) На рисунке показана зависимость $y = y(t)$ температуры (в градусах Цельсия) от времени (в часах) в течение суток. Верно ли, что если от 22 до 24 часов температура менялась по закону $y = kt + b$, то $k = -5$.



Не стали отвечать на этот вопрос 27% участников тестирования. Интересно отметить, что в тестировании 2010 года было аналогичное задание, но с более привычной формулировкой: «Верно ли, что на данном участке график функции совпадает с прямой, заданной уравнением...?» Тех, кто не стал отвечать на этот вопрос, было заметно меньше, хотя тоже немало: примерно 18%, соответственно, выше был и процент верных ответов (около 40%).

Вот еще два очень характерных примера. Эти задания являются рекордсменами по количеству участников, оставивших их без ответа (соответственно, 34% и 35%).

38) (30%) Верно ли, что точки плоскости xOy, у которых абсцисса составляет 75% от ординаты, лежат на прямой $y = \frac{3}{4}x$?

40) (36%) Верно ли, что множество точек плоскости xOy, удовлетворяющих равенству $|x-2| = |y-3|$, — это две перпендикулярные прямые?

Отметим, что оба задания не являются технически сложными и не требуют для решения никаких специальных знаний, но требуют некоторой самостоятельности и уверенного владения материалом.

И еще один пример.

44) (39%) Верно ли, что у выпуклого 8-угольника ровно 20 диагоналей?

Надо сказать, что задания по комбинаторике всегда вводятся в вариант с большой осторожностью: с одной стороны, эта тема уже много лет входит в стандарты и действующие учебники, с другой — эта тематика так пока и не стала полноправной частью школьного курса математики. Однако, несмотря на то, что этот вопрос располагался близко к концу теста, не стали отвечать на него всего 12% участников тестирования. Остальных он, судя по всему, не напугал.

Первое, что бросается в глаза при сравнении результатов тестирования 9-х и 11-х классов, — это в целом более адекватная оценка одиннадцатиклассниками сложности заданий: они заметно чаще пользуются возможностью не отвечать на вопрос, при этом, как правило, остаются без ответа действительно более сложные задания.

Впрочем, и здесь можно отметить ряд несложных вопросов, которые многим участникам показались трудными или незнакомыми. Вот несколько примеров.

14) (62%) Верно ли, что если числа 1, x, 2 — три последовательных члена геометрической прогрессии, то $x > \frac{3}{2}$?

На этот простой вопрос не стали отвечать 18% участников, а на следующие два — 25%.

42) (45%) Верно ли, что если на отрезке [0; 1] производная функции $y = f(x)$ равна $x - 2$, то функция $y = f(x)$ на этом отрезке возрастает?

43) (43%) Верно ли, что функция $y = 2^{x^3} + 2^{-x^3}$ является нечетной?

И в завершение нашего обзора рассмотрим несколько заданий, оказавшихся наиболее сложными для участников.

10) (27%) Верно ли тождество

$$\lg^2(\lg x) + \lg(\lg^2 x) + \lg(\lg 10^{10}) = \lg^2(10\lg x)?$$

Для того, чтобы проверить это тождество, достаточно заметить, что

$$\lg(\lg^2 x) = 2\lg(\lg x)$$

и

$$\lg(\lg 10^{10}) = \lg(10\lg 10) = \\ = \lg 10 + \lg(\lg 10) = 1,$$

а правая часть выражения — это квадрат суммы $1 + \lg(\lg x)$, но выглядит оно непривычно, и 30% участников не стали отвечать на вопрос.

Не менее трудными оказались следующие два задания с общим вопросом «Верно ли, что сумма всех корней уравнения больше, чем 4?».

19) (28%) $\cos x = \sqrt{6x - x^2}$.

20) (22%) $7|x| = 2^x$.

Для ответа на первый из этих вопросов надо заметить, что левая часть уравнения определена только на отрезке [0; 6], на всей области определения неотрицательна и равна 0 на концах промежутка. В то же время $\cos 0 = 1$, а

$$\cos 6 = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right),$$

где α — положительная величина, следовательно, $\cos 6 > 0$. Остается заметить, что при $x = \frac{\pi}{2}$ и $x = \frac{3\pi}{2}$ левая часть уравнения равна 0, следовательно, оно имеет два положительных корня, один из которых больше чем $\frac{3\pi}{2} > 4$. Итак, правильный ответ: «Да»; не стали отвечать на этот вопрос 35% участников.

Для ответа на второй вопрос надо вспомнить, что показательная функция растет быстрее степенной, или просто заметить, что, например, при $x = 4$ левая часть уравнения больше правой, а при $x = 6$ — левая меньше правой. Таким образом, уравнение имеет корень, лежащий на отрезке [4; 6], следовательно, правильный ответ «Да». Не отвечали на этот вопрос 32% участников.

Вполне вероятно, что в задании 19 многих смутило использование радианной меры угла, не выраженной явно через значение π. По всей видимости, это же стало основным препятствием при решении следующего задания.

30) (36%) Верно ли, что для всех x из отрезка $\left[\frac{\pi}{2} - 1; \frac{\pi}{2} + 1\right]$ выполняется неравенство $\sin x \geq \cos x$?

Для ответа на этот вопрос достаточно заметить, что 1 радиан больше, чем 45° (точка, в которой $\sin x = \cos x$, следовательно, на левом конце рассматриваемого промежутка неравенство нарушается. Не отвечали на этот вопрос 33% участников.

И еще один пример.

55) (28%) Верно ли, что если уравнение $f(x) = 0$ имеет ровно три различных корня, то уравнение $\frac{f(x)\cdot(x-1)}{x-2} = 0$ может иметь ровно два различных корня?

Правильный ответ на этот вопрос, конечно же, «Да», достаточно рассмотреть такую функцию $f(x)$, для которой 1 и 2 являются корнями, например, $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$.

Не стали отвечать на этот вопрос 45% участников тестирования. Конечно, здесь может сказываться близость задания к концу общего списка, но у соседних заданий эта величина заметно меньше, так что, скорее всего, это задание воспринималось как более трудное.

Многие из рассмотренных выше примеров показывают, что для значительной части учащихся самостоятельная оценка сложности задания является непростой задачей. Кроме того, большинство участников тестирования рассматривает их как часть подготовки к государственным испытаниям (ЕГЭ и ГИА), в которых разные уровни сложности уже явно выделены. В то же время наличие разных по уровню заданий с разнообразными формулировками является принципиально важной чертой всех тестирований нашей серии. Чтобы сгладить некоторые противоречия между этими целями, планируется в тестированиях, намеченных на текущий учебный год, явно выделять задания повышенного уровня сложности, а также, помимо традиционной оценки успешности выполнения работы в целом, указывать в рецензии успешность выполнения базовой части работы. Мы надеемся, что эти изменения помогут участникам тестирований более точно оценивать уровень своей математической подготовки.

ФИНАНСОВАЯ ГРАМОТНОСТЬ РОССИЙСКИХ УЧАЩИХСЯ

Г. КОВАЛЕВА,
г. Москва

Информация о международном исследовании PISA-2012, представлена на сайтах:
•http:/www.oecd.org/finance/financial-education/oecdpisafinanciallitera-cyassessment.htm#_blank
•www.oecd.org/edu/pisa
•http://www.centeroko.ru

■ Первое исследование финансовой грамотности учащихся было реализовано в рамках международной программы ОЭСР по оценке образовательных достижений учащихся PISA. Исследование в России проводилось в рамках проекта «Содействие повышению уровня финансовой грамотности населения и развитию финансового образования в Российской Федерации», который Минфином РФ реализуется с 2011 года совместно со Всемирным банком.

Главный вопрос исследования: ***Насколько 15-летние учащиеся готовы к принятию эффективных решений в разнообразных финансовых ситуациях, к адаптации и использованию новых финансовых систем?***

В исследовании PISA оценивается способность 15-летних учащихся получать, понимать и оценивать релевантную информацию, необходимую для принятия решений с учетом возможных финансовых последствий; способность высказывать информированные суждения и принимать эффективные решения относительно использования и управления деньгами; применять знания, понимание, умения и ценности при покупках и в других финансовых контекстах, а также соответствующие решения по отношению к себе, другим, обществу и окружающей среде.

В оценке финансовой грамотности приняли участие около 29 тысяч учащихся из 18 ведущих стран и экономик мира, представляющих 40% мирового ВВП. В России исследование было проведено Центром оценки качества образования Института содержания и методов обучения Российской академии образования. В нем приняли участие 1187 учащихся 15-летнего возраста из 227 образовательных учреждений 42 субъектов Российской Федерации.

Впервые получены ответы на следующие вопросы:

• Каков реальный уровень финансовой грамотности российских учащихся? Отличаются ли страны по уровню финансовой грамотности учащихся? • Имеется ли связь финансовой грамотности с уровнем овладения математикой и читательской грамотностью? • Какие социально-демографические факторы определяют разные уровни овладения финансовой грамотностью? • Как связана финансовая грамотность с опытом обучения и опытом финансовой деятельности?

Определение финансовой грамотности в исследованиях PISA:

Финансовая грамотность представляет собой знание и понимание финансовых понятий и рисков, а также навыки, мотивацию и уверенность, необходимые для принятия эффективных решений в разнообразных финансовых ситуациях, способствующих улучшению финансового благополучия личности и общества, а также возможности участия в экономической жизни.

Составляющие финансовой грамотности

Содержание: знание и понимание

• Деньги и операции с ними • Планирование и управление финансами • Риски и вознаграждения • Финансовая среда (отдельные вопросы из области финансов).

Познавательная деятельность: познавательные умения, действия и стратегии

• Выявление финансовой информации • Анализ информации в финансовом контексте • Оценка финансовых проблем • Применение финансовых знаний и понимание.

Контекст: предлагаемые ситуации

• Образование и работа • Дом и семья • Личные траты, досуг и отдых • Общество и гражданин.

Общие выводы

Содержание. Наиболее сложной областью содержания оказалась область «Деньги и операции с ними». Российским учащимся недостаточно знакомы механизмы кредитования, операции с банковскими вкладами, вопросы обеспечения безопасности при покупке товаров в интернет-магазине; проблемы инвестирования, действие механизмов налогообложения.

Познавательная деятельность. Наиболее успешно российскими учащимися были выполнены задания на применение финансовых знаний в знакомых ситуациях реальной жизни. Заметные затруднения вызывали задания на выявление финансовой информации, а также на аргументацию своей или высказанной позиции.

Контекстов, вызывающих очевидное непонимание российских учащихся, не выявлено.

Результаты стран по финансовой грамотности

	Страна	Финансовая грамотность	
		средний балл*	рейтинг страны
1	Шанхай (Китай)	603	1
2	Бельгия	541	2
3	Эстония	529	3–4
4	Австралия	526	3–5
5	Новая Зеландия	520	4–6
6	Чешская Республика	513	5–7
7	Польша	510	6–7
8	Латвия	501	8–9
	Среднее значение шкалы PISA 500		
9	США	492	8–12
10	Россия	486	9–14
11	Франция	486	9–14
12	Словения	485	9–14
13	Испания	484	10–15
14	Хорватия	480	11–16

Каков реальный уровень финансовой грамотности российских учащихся? Отличаются ли страны по уровню финансовой грамотности учащихся?

Средний результат российских учащихся составил 486 баллов, средний результат по странам ОЭСР — 500 баллов. В рейтинге стран Россия заняла 10-е место среди 18 стран-участниц. Результаты российских учащихся статически значимо не отличаются от результатов группы из 6 стран (США, Франция, Словения, Испания, Хорватия и Израиль).

«Для России, у которой пока недолгий опыт рыночной экономики и развития финансовых рынков, это неплохой результат, — отметил заместитель министра финансов Сергей Сторчак. — Но для успешной и эффективной жизни в XXI веке этого уже недостаточно. Молодые люди сегодня вступают в жизнь во все более сложном финансовом мире и должны быть готовы к принятию индивидуальных финансовых решений».

Имеется ли связь финансовой грамотности с уровнем овладения математикой и читательской грамотностью?

В большинстве стран-участниц выявлена сильная связь между результатами по финансовой грамотности и результатами по математической и читательской грамотности (средние коэффициенты корреляции составляют соответственно 0,83 и 0,79). Для ряда стран и экономик (Шанхай, Новая Зеландия и США) более 80% разброса результатов по финансовой грамотности объясняется результатами по математике и чтению. Для России, а также Италии, Испании и Колумбии, эта связь значительно слабее. Для России коэффициенты корреляции равны соответственно 0,73 и 0,68.

В целом Россия показала результаты по финансовой грамотности лучше, чем ожидалось из результатов тестов PISA по математической и читательской грамотности: более 60% российских учащихся продемонстрировали более высокие результаты по финансовой грамотности, чем можно было ожидать, учитывая их результаты по математике и чтению. Полученный результат для России предполагает, что повышение уровня финансовой грамотности российских учащихся может быть достигнуто в большей степени не за счет обучения математике и чтению, а за счет других факторов.

Примеры заданий

Ниже приведены примеры заданий, иллюстрирующие, какие знания и умения могли продемонстрировать учащиеся, имеющие разные уровни финансовой грамотности.

Пример 1. Новое предложение

Алла Петровна получила кредит в 8000 зедов от финансовой компании «Первый кредит». Годовая процентная ставка на кредит составляет 15%. Ее ежемесячные выплаты по возврату кредита составляют 150 зедов.

После одного года долг Аллы Петровны все еще составляет 7400 зедов.

Другая финансовая компания, «Лучший кредит», предлагает Алле Петровне кредит в 10 000 зедов с годовой процентной ставкой 13%.

Ее ежемесячные выплаты по возврату кредита также будут составлять 150 зедов.

Вопрос 1. (*Полный ответ: уровень 5 — 663 балла; частично верный ответ: уровень 3 —510 баллов.*) Если Алла Петровна возьмет кредит от компании «Лучший кредит», она тут же вернет свой нынешний долг. Какие две другие финансовые выгоды получит Алла Петровна, если возьмет кредит от компании «Лучший кредит»?

Вопрос 2. (*Уровень 4, 582 балла.*) С каким возможным негативным последствием столкнется Алла Петровна, если согласится взять кредит от компании «Лучший кредит»?

Информация о заданиии

Тип задания: задание с открытым свободно конструируемым ответом.

Описание: понимать позитивные последствия понижения процентной ставки.

Содержание: планирование и управление финансами.

Вид деятельности: вопрос 1 — анализ информации в финансовом контексте; вопрос 2 — оценка финансовых проблем.

Контекст: индивидуальный.

Пример 2. На рынке

На рынке помидоры можно купить килограммами или ящиками.

2,75 зеда за 1 кг

22 зеда за ящик 10 кг

Вопрос 1. (*Уровень 2, 459 баллов.*) Выгоднее купить ящик помидоров, чем отдельные помидоры на вес. Запишите обоснование, поддерживающее данное утверждение.

Вопрос 2. (*Уровень 1, 398 баллов.*) Для некоторых людей покупка ящика помидоров может быть плохим финансовым решением. Объясните, почему.

Информация о задании

Тип задания: задание с открытым свободно конструируемым ответом.

Описание: оценить стоимости товара, сравнивая цены за единицу упаковки.

Содержание: деньги и операции с ними.

Вод деятельности: вопрос 1 — анализ информации в финансовом контексте; вопрос 2 — оценка финансовых проблем.

Контекст: дом и семья.

Пример 3. Счет

Анжела заметила, что компания «Одежда ВС» сделала ошибку в счете.

Одежда ВС	Номер счета: 2034			
Дата выставления: 28 февраля				
Анжела Берг	Одежда ВС			
ул. Пикк, 29	ул. Лайма, 498			
Кингтаун Вески				
Зедландия 3122	Зедландия 2090			
Код товара	**Описание**	**Количество**	**Стоимость 1 единицы**	**Общая сумма (без налога)**
T011	Футболка	3	20	60 зедов
J023	Джинсы	1	60	60 зедов
S002	Шарф	1	10	10 зедов
Итого без налога: 130 зедов				
Налог 10%: 13 зедов				
Почтовые расходы: 10 зедов				
Итого, включая налог: 153 зеда				
Предварительно оплачено: 0 зедов				
Итого к оплате: 153 зеда				
Срок оплаты: 31 марта				

Анжела заказала и получила 2 футболки, не 3. Оплата за почтовые расходы неизменна. Какой будет итоговая сумма в новом счете?

Общая сумма в зедах: ___________.

Информация о задании

Описание: определить новую сумму на счете с учетом нескольких факторов.

Содержание: деньги и денежные операции.

Процесс: применять финансовые знания.

Контекст: личный.

С. ГРИГОРЬЕВ, Л. ДЕНИЩЕВА,
Denisheva@inbox.ru,
г. Москва

УРОК МАТЕМАТИКИ В «УМНОЙ АУДИТОРИИ»

В настоящее время в школах многие кабинеты математики оборудованы смарт-досками, которые управляются с компьютера учителя. Какие возможности в организации обучения открывает перед учителем такая «умная аудитория»? Какими могут стать схемы проведения урока? Что изменится в подготовке учителя к работе?

Наличие такого технического обеспечения дает учителю возможность:

– демонстрации различных электронных наглядных пособий для иллюстрации изучаемых математических понятий и практических ситуаций, которые описываются с помощью математических моделей, и пр.;

– использования лично разработанных методических материалов (в частности, презентаций);

– записи (и последующего хранения) решений учеников, которые моделируют типичные ошибки, допускаемые при изучении различных тем и разделов курса математики;

– использования в качестве «рабочей» классной доски.

Вместе с тем указанные возможности работы со смарт-доской не позволяют в полной мере реализовать основной девиз, провозглашенный стандартами второго поколения: «поставить во главу угла» реализацию деятельностного подхода в обучении. Нам нужно задействовать каждого ученика, создавая удобство организации его работы и учитывая его физические возможности не только в режиме фронтальных форм обучения, но и индивидуализируя его развитие. В определенной степени решить эту задачу можно при наличии «умной аудитории».

При этом важно знать возможности взаимодействия структурных компонентов этой системы, правила управления входящих в нее устройств. Для учителя особый интерес представляют методы и приемы обучения в особых условиях, связанных с комплексным подходом к информатизации и ресурсному обеспечению, что реализует принцип методической проработки.

Рассмотрим, какие схемы работы в «умной аудитории» может применить учитель при подготовке и проведении урока при реализации *принципа кроссплатформенности,* когда в одну систему включены планшет учителя, смарт-доска и индивидуальные компьютеры или планшеты учеников.

Схема 1

1. Планшет учителя — доска — планшет ученика
2. Управление осуществляет учитель, реализуется идея демонстрации
3. Фронтальная форма организации обучения

Фронтальные формы работы достаточно часто и эффективно применяются при обучении математике. Они актуальны и при объяснении нового материала, и при проведении актуализации знаний (например, в форме устных упражнений), и при первичном закреплении [3].

В указанном режиме работы тексты объяснения, практической работы, упражнения для закрепления или проверки усвоения па-

Фото – Н.И. Куксина

Литература

1. *Григорьев С.Г., Гриншкун В.В., Реморенко И.М.* «Умная аудитория» — шаг на пути интеграции средств информатизации образования // Информатика и образование. 2013. № 10.

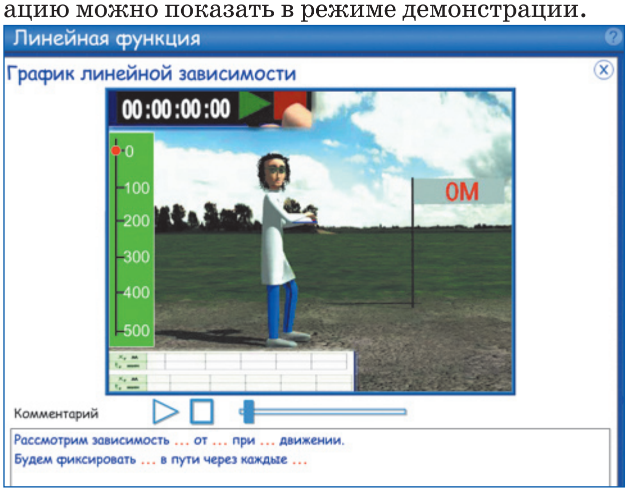
2. *Григорьев С.Г., Гриншкун В.В.* Цели, содержание и особенности подготовки педагогов в области информатизации образования в магистратуре педагогического вуза // Вестник Московского городского педагогического университета. Серия «Информатика и информатизация образования». 2013. № 1 (25).

3. *Денищева Л.О.* и др. Теория и методика обучения математике в школе / Под ред. Л.О. Денищевой. – М.: БИНОМ, Лаборатория знаний, 2011.

4. *Кудрявцева Л.В., Кудрявцев А.А.* Графики функций [Электронное пособие]. — М.: Новый диск, 2007.

раллельно показываются на экране планшета учителя, экране планшета ученика и смарт-доске, управление всеми устройствами осуществляется учителем. При этом решаются различные методические и эргонометрические проблемы.

Во-первых, в рамках реализации основных идей стандартов второго поколения при обучении математике необходимо мотивировать ученика на изучение того или иного теоретического вопроса курса. Для этого мы зачастую обращаемся к практике и показываем, что математика играет важную роль в реальном мире, служит языком описания действительности, что многие математические объекты (например, функции — зависимости) реально существуют в нашей жизни. В большинстве учебников математики введение новых понятий предваряется описанием какой-либо практической ситуации или проблемы, разрешение которой проводится средствами математики. Иллюстрация такой ситуации средствами анимации (при использовании мультимедийных средств) привлекает внимание учащихся, вызывает интерес к происходящему, а впоследствии — и к самой математике. Такую практическую ситуацию можно показать в режиме демонстрации.



Во-вторых, в процессе демонстрации учитель может привлечь внимание учащихся к смарт-доске, дополнив имеющиеся записи, и прокомментировать какой-либо рисунок или формулу. При этом ему не обязательно находиться около доски, чтобы сделать какие-то пометки или исправления, так как управление доской он осуществляет с планшета с того места, где он находится.

В-третьих, в настоящее время в классах слишком много учащихся, у которых имеются недостатки зрения. Врачи рекомендуют рассаживать таких учеников на первые парты. Но ситуация такова, что число таких мест ограничено. А в «умной аудитории» эта проблема решена, так как на личном планшете ученик имеет всю необходимую информацию.

Важно, что при такой форме работы наряду с презентациями, подготовленными учителем к данному уроку, можно использовать мультимедийные средства, в частности, разрабатываемые фирмами диски. Определенный интерес представляет электронное наглядное пособие [4], которое содержит опорные конспекты; практические задания, представленные в анимационном формате; пошаговые интерактивные сюжеты, способствующие пониманию изучаемого материала и формированию алгоритмов действий; упражнения для закрепления и контроля усвоения. Эти материалы можно применять в указанном режиме работы «умной аудитории».

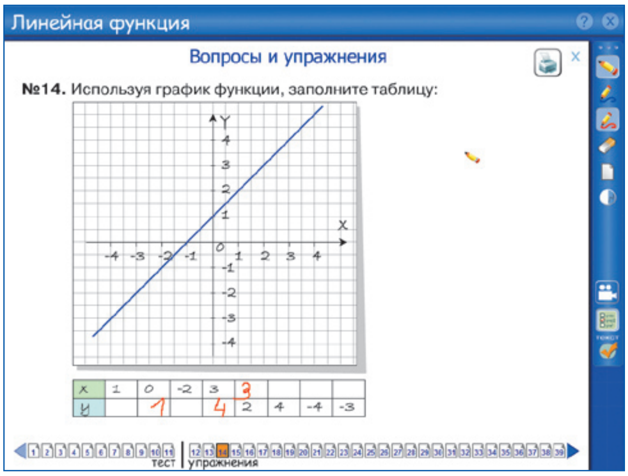
Схема 2

1. Планшет учителя — доска — планшет ученика — планшет ученика, работающего в индивидуальном режиме
2. На компьютере учителя режим «конференция», управление осуществляет учитель, для решения дидактических проблем может передать управление одному из учеников
3. Фронтально-индивидуальная форма организации обучения

В стандартах второго поколения делается акцент на организацию обучения, учитывающего индивидуальное развитие каждого ученика. После объяснения нового материала часто создается такая ситуация, когда значительное число учащихся еще не освоили основные положения нового алгоритма вычислений (преобразований) или нового метода решения. Для них требуется еще раз организовать показ образцов выполнения тех или иных действий, которые перед этим иллюстрировал учитель [3]. Вместе с тем есть ученик (или группа учеников), который понял материал, и для его полного осознания ему необходимо самостоятельно от начала до конца выполнить все процедуры и на словах объяснить суть проводимых операций. При этом учителю важно прослушать эти объяснения, — возможно, подкорректировать их, показать, где и как может меняться алгоритм действий, а где последовательность операций жестко регламентирована. В этом случае учителю необходимо организовать «выступление» этого ученика с показом его работы.

При общей фронтальной работе класса (по одному и тому же заданию) учитель «передает управление» смарт-доской ученику. На компьютере учителя, на планшетах (компьютерах) учеников, на смарт-доске демонстрируется изображение «рабочего стола» отвечающего ученика.

Если класс работает с электронным пособием, которое содержит тренировочные упражнения [4], то, выполняя, например, некоторые задания по



изучаемой теме, учащиеся могут увидеть вариант решения «ведущего управление» ученика, задать вопросы по тем или иным шагам, а учитель может проверить правильность выполнения задания. На приведенном выше рисунке красным цветом отмечены результаты выполнения задания учеником.

Схема 3

1. Планшет учителя — доска — планшет ученика — планшет ученика, работающего по индивидуальному заданию
2. На компьютере учителя режим «конференция», управление осуществляет учитель, при необходимости передает управление одному из учеников
3. Фронтальная и индивидуально-дифференцированная (сильные, средние, слабые ученики) формы организации обучения

Организуя обучение, учитывающее индивидуальный темп освоения учебного материала каждым школьником, мы сталкиваемся с такой ситуацией, когда после первичного закрепления значительное число учащихся еще не освоили основные теоретические положения курса. В то же время есть небольшая часть учеников, готовых двигаться дальше, им вредно топтаться на месте, они могут создать нерабочую атмосферу в классе. В этом случае учителю необходимо организовать индивидуальную работу ученика или группы учеников. Обычно организация подобной индивидуальной работы планируется заранее, а задания разрабатываются учителем с учетом индивидуальной подготовки ученика или группы учеников. Очевидно, что в индивидуальном задании может быть представлен частный случай или технически более сложная ситуация, например, более сложные вычисления или преобразования, связанные с темой, которая изучается в классе [3].

В таком режиме работы учитель на своем планшете подключает режим «чат» и пересылает заранее подготовленный файл тому ученику (или группе учеников), который и получает индивидуальное задание. А с оставшейся частью класса учитель продолжает фронтальную работу.

Ученик, получивший индивидуальное задание, самостоятельно выполняет его на своем планшете или в тетради, записывая ответы на планшете.

Заметим, что учитель в любое время (например, после завершения учеником выполнения задания) может подключить режим «разрешить управление», и на экранах планшетов учителя и учеников и на смарт-доске появится изображение экрана ученика для проверки правильности ответа или решения. При этом ученик, получивший индивидуальное задание, фактически дополняет объяснение учителя, показывает другие способы решения и пр. Он выступает в роли учителя, предлагая свое объяснение.

Схема 4

1. Планшет учителя — планшет ученика, работающего по индивидуальному или общему для всех заданию
2. На компьютере учителя режим «конференция», управление осуществляет учитель
3. Наблюдение за индивидуально-дифференцированной (сильные, средние, слабые ученики) самостоятельной работой

При традиционном обучении наблюдение за такой работой учитель проводит, только перемещаясь по классу и просматривая тетради учеников во время выполнения ими заданий (что отвлекает их и сокращает время, отводимое на работу). Последующая проверка проводится после сбора решений и их просмотра учителем. При работе в «умной аудитории» учитель может по-другому построить наблюдение за самостоятельной работой учеников. Имеющиеся *кроссплатформенные* средства обучения позволяют более эффективно организовать самостоятельную работу. Так, например, возможности «умной аудитории» позволяют учителю в режиме «просмотр» открыть у себя на планшете экран любого ученика для проверки решения (если оно выполняется на планшете) или ответа, полученного при решении в индивидуальной тетради. При этом ученик не отвлекается на действия учителя, не теряет то время, когда учитель просматривает его работу, а учитель не тратит времени на хождение по классу, а выполняет всю проверку на своем рабочем месте.

В статье описано несколько схем организации обучения математике при работе в «умной аудитории». Надеемся, что это только начало эффективного использования ее возможностей, а учителя, имеющие такое же оборудование смогут описать еще множество схем конструирования процесса обучения при сочетании фронтально-индивидуальных форм работы.

XXIV ТУРНИР АРХИМЕДА

Оргкомитет Турнира Архимеда совместно с редакцией журнала «Математика» объявляет конкурс решения задач для учащихся 6–7-х классов.

Решения просим выслать до 15 апреля 2015 г. (по почтовому штемпелю) по адресу: 121165, Москва, ул. Киевская, 24, редакция журнала «Математика», с пометкой на конверте «Турнир», или отправить через форму на сайте www.arhimedes.org (просьба указывать свой полный почтовый адрес). При возникновении вопросов по отправке заданий пишите на info@arhimedes.org. В письмо следует также вложить конверт с маркой и надписанным адресом участника – в нем будут высланы результаты проверки.

И не забудьте указать номер школы, класс, а также фамилию, имя, отчество учителя математики.

Победителей конкурса ждут призы от оргкомитета Турнира Архимеда.

Желаем успеха!

Задача 1. Шкатулки

В некоторые из 18 больших шкатулок, лежащих на столе, положили по 6 шкатулок поменьше. В некоторые из шкатулок поменьше положили по 6 совсем маленьких шкатулок. Сколько всего шкатулок могло лежать на столе, если пустых среди них 88 штук?

Задача 2. Карточки на столе

На столе выложены в ряд в некотором порядке карточки с цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9. Какова вероятность того, что полученное девятизначное число кратно 11?

Задача 3. Необычный год

«Я родился в необычный год, — сказал Вася. — Год был високосный и в нём три пятницы выпали на 13 число».

– Когда у тебя день рождения? — спросил Федя.

– Первого апреля, — ответил Вася.

Мог ли день рождения Васи приходиться на пятницу?

Задача 4. В шахматном турнире

участвовали учащиеся 10-го класса и два ученика 9-го класса. Каждый участник турнира сыграл с остальными по одной партии. Два девятиклассника набрали вместе 3,5 очка, а все десятиклассники набрали очков поровну. Сколько десятиклассников участвовало в турнире? За выигрыш в партии в шахматах присуждают 1 очко, за ничью — 0,5 очка, за проигрыш — 0 очков

Задача 5. Золото и серебро

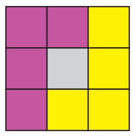
Если в сплав золота и серебра добавить 3 кг золота, то процентное содержание золота в сплаве увеличится вдвое. Если же к исходной смеси добавить 3 кг серебра, то процентное содержание золота уменьшится вдвое. Какого вещества в исходном сплаве больше: золота или серебра, и во сколько раз?

Задача 6. Опять лжецы

На острове Рыцарей и Лжецов — 100 жителей. Однажды один из них сказал: «Среди нас ровно один рыцарь»; второй: «Количество рыцарей делится на 2»; третий: «Среди нас ровно два рыцаря»; четвертый: «Количество рыцарей делится на 3»; ...; девяносто восьмой: «Количество рыцарей делится на 50»; девяносто девятый: «Среди нас ровно пятьдесят рыцарей». Последний островитянин промолчал. Сколько рыцарей среди них могло быть?

Задача 7. Частный случай

Клетки таблицы 3×3 раскрашены в три цвета, как показано на рисунке. За одну операцию разрешается изменить цвет клеток в какой-либо строке (или в каком-нибудь столбце), соблюдая два правила:



1) каждая клетка в выбранной строке (или выбранном столбце) должна изменить свой цвет;

2) если у двух каких-либо клеток цвета совпадали до изменения, то цвета этих клеток должны совпадать и после изменений, если цвета двух клеток были различны, то должны остаться различными и после изменений.

Можно ли сделать данную таблицу одноцветной, выполнив не более 10 операций?

Задача 8. Продолжение предыдущей задачи

Докажите, что можно сделать произвольную таблицу 3×3 одноцветной, выполнив не более 15 операций.

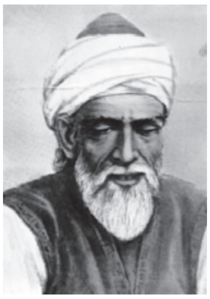
В. ПЫРКОВ,
г. Батайск, Ростовская обл.

МАТЕМАТИКИ — ЮБИЛЯРЫ 2015 ГОДА

1200 лет
МАГАВИРА
(815 – 880)

Индийский математик, автор «Краткого курса математики». Впервые сформулировал правило деления числа на дробь и правило нахождения неизвестного члена пропорции. Решал неопределенные уравнения вида $x^2 + y^2 = z^2$; суммировал квадраты и кубы членов арифметической прогрессии; предложил способы решения задач на проценты и др.

Вот одна из задач Магавира: *Стоимость 9 лимонов и 7 лесных яблок равна 107; стоимость 7 лимонов и 9 лесных яблок равна 101. О математик! Быстро назови мне цену лимона и лесного яблока!*



1075 лет
АБУ-Л-ВЕФА
(940 – 998)

Арабский математик и астроном. Составил наиболее подробные и точные для своего времени таблицы синусов и тангенсов. Сформулировал теоремы, соответствующие формулам:

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \text{ и } 1-\cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Ему принадлежит одно из первых доказательств теоремы синусов в сферической тригонометрии и доказательство теоремы тангенсов для прямоугольного сферического треугольника. Переводил и комментировал труды Диофанта, Евклида, Гиппарха; является автором «Книги о том, что надо знать ремесленнику из геометрических построений», в которой впервые привел способы построения с помощью линейки и циркуля постоянного раствора стороны квадрата, равновеликого трем равным квадратам, а также параболы и различных правильных и полуправильных многогранников, вписанных в сферу. В арифметическом трактате «О том, что нужно знать писцам и дельцам из науки арифметики» впервые в арабоязычной литературе при решении квадратных уравнений появляются отрицательные числа, которые далее поясняются как «долг».

Задача Абу-л-Вефы: *Два из трех равновеликих квадратов разрезать на 8 частей так, чтобы из них и из третьего равновеликого квадрата можно было составить квадрат.*

1050 лет
ИБН АЛ-ХАЙСАМ
(965 – 1039)

Арабский математик. В трактате «Об изопериметрических фигурах» доказал, что круг имеет самую большую площадь из всех фигур

К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru

равного периметра, а шар — самый большой объем из всех тел с равными поверхностями. В «Трактате об измерении шара» предложил метод кубатуры шара, сходный с интегрированием. Близко подошел к понятию определенного интеграла как средства нахождения площадей и объемов. Его именем называется задача об отыскании числа, делящегося на 7 и при делении на 2, 3, 4, 5, 6 дающего в остатке 1.

Задача Ибн ал-Хайсама: *Найди сумму четвертых степеней n первых натуральных чисел:* $1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4$.

550 лет
ФЕРРО дель Спицион
(6 февраля 1465 – 16 ноября 1526)

Итальянский математик, профессор Болонского университета. Нашел общий способ решения неполных кубических уравнений вида $x^3 + ax = b$, где $a, b > 0$:

$$x=\sqrt[3]{\frac{b}{2}+\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{\frac{b}{2}-\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{3}\right)^3}}.$$

Метод Дель Ферро был обнародован в книге Кардано «Великое искусство» (1545), но, несмотря на указание автора формулы, она стала известна в математике как формула Кардано.

475 лет
ВИЕТ Франсуа
(1540 – 13 декабря 1603)

Французский математик, основоположник символической алгебры. Будучи молодым офицером, нашел ключ к шифру, который применяли испанцы во время войны с Францией, за что был обвинен испанским королем Филиппом II в использовании черной магии.

В тригонометрическом трактате «Математический канон» (1570) дал полное решение плоского и сферического треугольников по трем данным элементам; вывел разложение величин $\cos nx$ и $\sin nx$ в ряд по степеням $\cos x$ и $\sin x$.

В работе «Введение в аналитическое искусство» (1591) предложил общую теорию алгебраических уравнений, за что и получил статус «отца алгебры». Он первым ввел буквенные обозначения не только для неизвестных, но и для коэффициентов уравнений. Благодаря этому смог сформулировать общие методы решения уравнений второй, третьей и четвертой степени, унифицировал методы, найденные ранее Ферро и Феррари, а также вывел формулы суммы и произведения корней квадратного уравнения. Виет первый из математиков рассмотрел бесконечное произведение и показал, что

$$\frac{2}{\pi}=\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\left[1+\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}\right]}\cdot\ldots$$

Задача Виета: *Докажите, что*
$\sin nx = 2\sin x \cos (n-1)x + \sin (n-2)x.$

475 лет
ЛУДОЛЬФ ван Келен
(28 января 1540 – 31 декабря 1610)

Голландский математик, профессор Лейденского университета. Важнейшей работой было вычисление числа π, которое он довел до 35 десятичных знаков. В истории это число известно также под именем Людольфского, согласно его завещанию оно должно было быть выбито на его надгробии.

400 лет
СКОУТЕН ван Франц
(1615 – 29 мая 1660)

Голландский математик, профессор Лейденского университета. Был другом и учеником Р. Декарта, учителем Х. Гюйгенса. Написал работы по арифметике, геометрии и истории математики. В 1646 г. опубликовал математические работы Франсуа Виета. В работе «Математические этюды» (1656) применил методы алгебраического исчисления к решению арифметических и геометрических задач, а также привел занимательные задачи из работ других авторов.

Задача ван Скоутена: *Найти число делителей* $x(m)$ *числа* $m = p_1^{a_1}\cdot p_2^{a_2}\cdot\ldots\cdot p_n^{a_n}$, *где* $p_1, p_2, \ldots, p_n$ *– простые числа.*

375 лет
МОР Георг
(1 апреля 1640 – 25 января 1697)

В книге «Датский Евклид» (1672) показал, что все задачи, которые сводятся к квадратным уравнениям, можно решить геометрически с помощью одного циркуля. Через 100 лет задача выполнения циркулем построений, для которых требуется линейка, была поставлена и решена Л. Маскерони. Соответствующее утверждение теперь называют теоремой Мора–Маскерони.

375 лет
ОЗАНАМ Жак
(1640 – 3 апреля 1717)

Французский математик и педагог. Написал ряд учебников по геометрии, алгебре, тригонометрии, в частности, 5-томный «Курс математики» (1693). Особой популярностью пользовались его «Математические и физические развлечения» (1696), из которой брали задачи для своих работ по занимательной математике почти все позднейшие авторы.

Задача Озанама: *Семь провинциалов собрались к обеду, но между ними возник церемонный спор, кому и с кем садиться. Чтобы прекратить пререкания, кто-то из присутствующих предложил всем сесть за стол как придется, но с условием, чтобы вновь собраться на другой день и затем в следующие дни обедать вместе, причем каждый раз садиться по-разному до тех пор, пока не будут использованы все возможные комбинации. Спрашивается, сколько раз придется им обедать вместе для этой цели?*

Озанам дает ответ — 5040 раз. Прав ли он?

325 лет
ГОЛЬДБАХ Христиан
(18 марта 1690 – 1 декабря 1764)

Шведский математик. В 1725 г. приехал в Россию, став одним из первых членов Петербургской академии наук. В переписке с Л. Эйлером высказал гипотезу, известную под названием проблемы Гольдбаха: каждое целое число, большее чем 2, есть сумма трех чисел, которые либо просты, либо 1. Экспериментальной проверкой эта проблема подтверждается, но общего доказательства ее до сих пор нет.

Задача Гольдбаха: *Доказать, что при натуральных числах a и b сумма всех дробей вида* $\frac{1}{(a+1)^{b+1}}$ *имеет пределом 1.*

300 лет
ФАНЬЯНО де Тоски Джанфранческо Онорио
(31 января 1715 – 14 мая 1797)

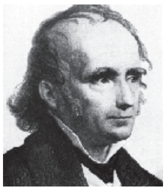
Итальянский математик. Продолжил исследования И. Бернулли, посвященные решению задач о делении дуги окружности на произвольное количество равных частей.

Задача Фаньяно: *В данный треугольник вписать треугольник наименьшего периметра.*

250 лет
ОСИПОВСКИЙ Тимофей Федорович
(2 февраля 1765 – 24 июня 1832)

Русский математик и физик, один из учителей М.В. Остроградского. Написанный им «Курс математики» наиболее полно освещал математические знания того времени, начиная от элементарных, начальных сведений по арифметике и кончая вариационным исчислением.

Приведем задачу из этого курса: *Пушечные ядра кладут иногда так: сверху — одно ядро, во втором слое — 3 ядра, в третьем — 6, в четвертом — 10 и так далее по порядку. Найдите число всех ядер, если бок такой пирамиды содержит в себе 20 ядер.*

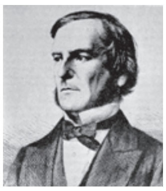


225 лет
ДИСТЕРВЕГ Фридрих Адольф Вильгельм
(29 октября 1790 – 7 июля 1866)

Немецкий педагог-математик. Организатор объединения учителей «Педагогические общества». Его работа «Руководство для немецких учителей» (1834) переведена на русский язык. В ней он разработал дидактику развивающего обучения, сформулировав ее основные требования в виде 33 законов и правил; выдвинул ряд требований, касающихся наглядного обучения, установления связи между родственными учебными предметами, систематичности преподавания, прочности усвоения знаний, воспитывающего характера обучения. Непременным условием образования считал развитие самостоятельности ученика во всех ее проявлениях. Свои педагогические идеи реализовал в написанных им учебниках и руководствах по математике.

225 лет
МЁБИУС Август Фердинанд
(17 ноября 1790 – 26 сентября 1868)

Немецкий геометр. Впервые ввел в проективную геометрию систему координат и аналитические методы исследования, установил существование односторонних поверхностей (лист Мёбиуса); многогранников, для которых неприменим «закон ребер» и которые не имеют объема; ввел барицентрические координаты и разработал основы барицентрического исчисления. Один из основоположников теории геометрических преобразований (проективные преобразования Мёбиуса), а также топологии, теории векторов и многомерной геометрии. Ему принадлежат важные результаты в теории чисел (функция Мёбиуса и формула обращения).



200 лет
БУЛЬ Джордж
(2 ноября 1815 – 8 декабря 1864)

Английский математик, основоположник математической логики. В сочинении «Исследование законов мышления» (1854) предпринял попытку построить формальную логику в виде некоторого «исчисления», «алгебры». В современной алгебре используют так называемые булевы кольца, булевы алгебры. В общей топологии известно булево пространство, в математических проблемах управляющих систем — булев разброс, булево разложение, булева регулярная точка ядра и др.

200 лет
ВЕЙЕРШТРАСС
Карл Теодор Вильгельм
(31 октября 1815 – 19 февраля 1897)

Немецкий математик. Сформулировал логическое обоснование анализа на основе построенной им теории действительных чисел и так называемого ε–δ-языка. Из результатов Вейерштрасса в области математического анализа: систематическое использование понятий верхней и нижней грани числовых множеств, учение о предельных точках, строгое обоснование свойств непрерывных функций, построение примера непрерывной функции, нигде не имеющей производной, доказательство теоремы о возможности разложения любой непрерывной на отрезке функции в равномерно сходящийся ряд многочленов и др. Именем Вейерштрасса названа апроксимационная теорема, признак равномерной сходимости, функция.

Вейерштрасс далеко продвинул теорию эллиптических и абелевых функций, заложил основы теории целых функций и функций нескольких комплексных переменных. Создал теорию делимости степенных рядов. В вариационном исчислении он открыл условия сильного экстремума и достаточные условия экстремума, исследовал разрывные решения классических уравнений. В геометрии создал теорию минимальных поверхностей, внес вклад в теорию геодезических линий. В линейной алгебре разработал теорию элементарных делителей. Вейерштрасс также доказал, что поле комплексных чисел — единственное коммутативное расширение поля действительных чисел без делителей нуля.

200 лет
ЛАВЛЕЙС Августа Ада
(10 декабря 1815 – 27 ноября 1852)

Английский математик, дочь Байрона. Известна созданием описания вычислительной машины, проект которой был разработан Ч. Бэббиджем. Составила первую в мире программу для этой машины. Написала также программу для вычисления чисел Бернулли. Ввела в употребление термины «цикл» и «рабочая ячейка», считается первым программистом. Ее именем назван универсальный язык программирования «Ада».

200 лет
СОМОВ Осип Иванович
(13 июня 1815 – 8 мая 1876)

Русский математик и механик. Его учебник «Начальная алгебра» (1862) был признан одним из лучших учебников алгебры для средних учебных заведений. В своих научных работах он развивал математический анализ, векторный анализ и теорию эллиптических функций и применял их к геометрии и механике. Издал первый курс теории эллиптических функций на русском языке. Теория дифференциальных параметров, изложенная ученым на векторной основе, до сих пор широко используется в теории поля.

175 лет
ЛЕМУАН Эмиль
(22 ноября 1840 – 21 февраля 1912)

Французский математик. Посвятил ряд работ свойствам треугольника, показал, что с ним связано целое созвездие интересных точек, несколько прямых, окружностей и более сложных кривых. Одна из интересных точек была названа точкой Лемуана. Положил начало специальному разделу геометрии — геометрографии.

150 лет
АДАМАР Жак
(8 декабря 1865 – 17 октября 1963)

Французский математик. Автор фундаментальных исследований в различных областях математики. В теории чисел доказал асимптотический закон распределения простых чисел, создал значительную часть современной теории целых аналитических функций, получил существенные результаты в теории дифференциальных уравнений. Его идеи оказали большое влияние на создание функционального анализа и вариационного исчисления.

Уделял большое внимание вопросам школьного преподавания. Широкое распространение получил его учебник элементарной геометрии.

В книге «Исследование психологии процесса изобретения в области математики» собрал наблюдения за мыслительным процессом, в том числе со слов А. Эйнштейна, А. Пуанкаре и др. В результате работы выяснилось, что мышление не всегда сводится к процессу логического рассуждения, что логическое рассуждение всего лишь оформление результатов более сложных процессов мышления, природа которых непонятна.

Среди учеников Адамара такие известные математики, как М. Фреше и А. Вейль.

150 лет

КОТЕЛЬНИКОВ Александр Петрович

(20 октября 1865 – 6 марта 1944)

Отечественный геометр и механик, лауреат Государственной премии СССР. Профессор высших учебных заведений Киева, Казани, Москвы. Основные работы посвящены теории кватернионов и комплексных чисел в применении к геометрии и механике. В магистерской диссертации создал оригинальное винтовое исчисление, приложение исчисления бикватернионов к теоретической механике. В докторской диссертации проработал обобщения векторного исчисления и винтового исчисления для пространств Римана и Лобачевского. Исследовал вопросы связи специальной теории относительности и геометрии Лобачевского с позиций проективной геометрии. В учебниках по механике впервые использовал векторное исчисление.

125 лет

БЕРЕЗАНСКАЯ Елизавета Савельевна

(9 января 1890 – 13 декабря 1969)

Математик-педагог. Участвовала в создании отечественной методики преподавания арифметики в средней школе, один из первых авторов программы по методике преподавания математики для педвузов. Ее «Сборник задач по арифметике» (1933) долгое время являлся стабильным пособием для учащихся, а «Методика арифметики» (1934) стала обязательным руководством для каждого учителя; обе книги переведены на иностранные языки. Инициатор внедрения в школьную практику системы устных упражнений как средства формирования интереса к математике, развития мышления учащихся. Внесла большой вклад в подготовку научно-педагогических кадров в области методики преподавания математики.

125 лет

БРАДИС Владимир Модестович

(23 декабря 1890 – 23 мая 1975)

Математик-педагог. Его «Методика преподавания математики в средней школе» переиздавалась много раз и переведена на другие языки. В 1921 г. впервые вышли его «Таблицы четырехзначных логарифмов и натуральных тригонометрических величин». Учителям математики хорошо известны его книги «Ошибки в математических рассуждениях» и «Средства и способы элементарных вычислений».

125 лет

ДЕЛОНЕ Борис Николаевич

(15 марта 1890 – 17 июля 1980)

Отечественный математик. Работы Делоне находятся на границе алгебры, геометрии и теории чисел. Теория бинарных кубических уравнений с отрицательным дискриминантом получила в его работах полное завершение; он показал также, что с помощью «алгоритма повышения» можно практически решать в целых числах любое уравнение такого типа. Получил ряд результатов по геометрии чисел. Занимался историей математики. Написанный им в соавторстве с Д.А. Райковым курс «Аналитической геометрии» пользовался популярностью.

Делоне один из основоположников советского альпинизма. В честь него названы пик Делоне и перевал Делоне на Катунском хребте Горного Алтая.

100 лет

ЛИННИК Юрий Владимирович

(8 января 1915 – 30 июня 1972)

Отечественный математик. Дал элементарное решение проблемы Варинга, доказал, что каждое большое натуральное число есть сумма семи кубов натуральных чисел; дал новое доказательство теоремы для тернарной проблемы Гольдбаха о представлении каждого достаточно большого числа в виде суммы трех простых чисел, доказал теорему о том, что каждое достаточно большое число можно представить в виде суммы двух простых чисел и нескольких степеней двойки. Ему принадлежат предельные теоремы для независимых случайных величин и неоднородных цепей Маркова, теория проверки сложных гипотез и теории оценивания, работы по теории метода наименьших квадратов

90 лет

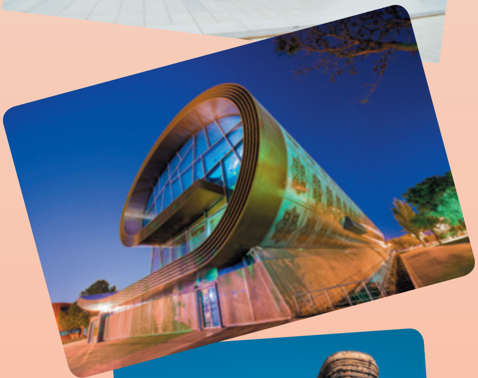
БОЛТЯНСКИЙ Владимир Григорьевич

(род. 1925 г.)

Отечественный математик. Основные работы относятся к комбинаторной геометрии (в частности, связанные с третьей проблемой Гильберта), топологии и теории оптимального управления (в частности, связанные с принципом максимума Понтрягина). Также широко известен своими трудами по методике преподавания математики и популярными книгами по математике для учащихся и учителей.

А. НАБИЕВ,
С. НАБИЕВА,
asif.nebiyev@mail.ru,
г. Баку

ОБРАЗОВАНИЕ В АЗЕРБАЙДЖАНЕ



После распада Советского Союза бывшие республики, в том числе и Азербайджан, стали независимыми во всех областях, в том числе и в образовании, и взяли курс на самостоятельное развитие. Попробуем кратко охарактеризовать состояние школьного образования в Азербайджане.

1. Образование в республике регулируется законом «Об образовании», утвержденным указом Президента Азербайджана И. Алиевым 19 июня 2009 г. и находится под постоянным его наблюдением. До этого другим указом с 2008 г. проводится конкурс «Лучший учитель года», победители которого получают денежное вознаграждение в сумме $6500.

Строительство и оборудование новых школ контролирует первая леди республики, президент фонда им. Г. Алиева, депутат Милли Меджлиса Мехрибан Алиева.

Министерство образования Азербайджанской Республики возглавляет Микаил Джаббаров, человек молодой, энергичный, склонный к реформам.

2. *Учитель — основа школьного образования.* Подготовка учителей осуществляется в педагогических университетах. Здесь студенты изучают основы предмета, педагогику, психологию и методику. Так как Азербайджан с 19 мая 2005 г. входит в Болонскую систему, то обучение в вузах продолжается 4 года в бакалавриате (на заочном отделении 5 лет) и 2 года в магистратуре (на заочном отделении 3 года). Педпрактика проходит на третьем курсе (1,5 месяца), на четвертом курсе (1 месяц) и на втором курсе магистратуры (1 месяц).

Бакалавриат считается полным высшим образованием и дает право преподавать в 5–11-х классах школ. Магистр имеет право и на преподавание в университетах и на работу в научно-исследовательских институтах.

Работающие учителя примерно раз в 4 года проходят курсы повышения квалификации при Институте усовершенствования учителей. На этих курсах они повышают свои знания по методике, информационным технологиям или по своему предмету.

3. *Средняя школа — база непрерывного образования.* Срок общего среднего образования составляет 9 лет, а полного среднего образования — 11. Есть много специализированных школ по разным направлениям: физико-математическое, гуманитарное, спортивное и др. Помимо этого, во многих школах есть специализированные классы по разным предметам. Преподавание в специализированных школах или классах отличается тем, что, например, на изучение математики в 10-х математических классах выделяется 7 часов в неделю, а в гуманитарных и общеобразовательных классах всего 3 часа.

В средней школе 3 ступени обучения: начальная ступень обучения — с 1-го по 4-й класс; ступень общего среднего образования — с 5-го по 9-й; ступень полного среднего образования — с 10-го по 11-й класс. В 1-й класс детей принимают с 6 лет. Обязательное образование 9 лет.

К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru (Тест к вступительным экзаменам.)

4. *Олимпиады.* Для выявления одаренных и мотивированных детей в республике действует система олимпиад. Сначала в школах проводится отборочный тур. Потом проводится районный, республиканский и международный туры. Победителям республиканских и международных олимпиад предоставляется право поступления в вузы без вступительных экзаменов.

5. *Прием в вузы и колледжи* проводит Государственная комиссия при президенте республики, которую возглавляет председатель комиссии М. Аббасзаде, пользующийся авторитетом как среди абитуриентов, так и среди родителей. Экзамены проводятся по группам специальностей:

– 1-я группа (технические специальности) сдает экзамены по математике, физике, химии, азербайджанскому и иностранному языкам;

– 2-я группа (финансовые специальности) сдает экзамены по математике, географии, истории Азербайджана, азербайджанскому и иностранному языкам;

– 3-я группа (гуманитарные специальности) сдает экзамены по азербайджанскому языку, литературе, географии, истории, иностранному языку и математике;

– 4-я группа (медицинские и сельскохозяйственные специальности) сдает экзамены по биологии, химии, физике, азербайджанскому языку и математике.

С экзаменационными вариантами вы можете ознакомиться в электронном приложении.

Абитуриенты, обучавшиеся на русском языке, вместо экзамена по азербайджанскому языку сдают экзамен по русскому языку. При приеме в магистратуру сдают экзамены по специальности и логике. Государственная комиссия по приему студентов составляет несколько экзаменационных вариантов для каждой группы специальностей. Экзаменационные материалы по математике для первой и второй групп сложнее, чем для третьей и четвертой.

Проводятся экзамены в заранее подготовленных аудиториях университетов, колледжей или средних школ. На экзамен для каждой группы специальностей случайным образом выбираются четыре варианта одинаковой сложности. Работы абитуриентов проверяются с помощью компьютера примерно 10 дней.

Прием в колледжи с 9-летней базой проводится отдельно, не поступившие в колледжи продолжают учебу в средней школе или профтехучилищах. В колледжи с 11-летней базой прием проводится по результатам экзаменов в вузы, то есть не поступившие в вузы могут принять участие в конкурсе для поступления в колледжи. При этом они не сдают никаких дополнительных экзаменов.

Учителя средних школ принимают участие в приемных экзаменах в качестве контролеров. Они объясняют правила поведения на экзамене, следят за дисциплиной во время его проведения, а в конце экзамена собирают и опечатывают ответы абитуриентов и составляют акты проведения экзамена, указывая в них о нарушениях по ходу проведения экзамена. Такая практика проведения экзаменов нравится и абитуриентам, и их родителям. Они считают объективными результаты экзамена.

6. *Газеты и журналы.* Министерство образования Азербайджана издает как ежедневные газеты: «Азербайджан муаллими» («Азербайджанский учитель»), а для учителей города Баку — «Техсил» («Образование»), так и периодические научно-методические журналы: «Куррикулум», «Азербайджан мектеби» («Азербайджанская школа»), «Физика, риязийят ве информатика тедриси» («Преподавание физики, математики и информатики») и др. Но учителя математики Азербайджана любят и выписывают журнал «Математика», считая его более народным, более «учительским» и, что немаловажно, более доступным.

7. *Куррикулум.* Этот концептуальный документ, отражающий организацию и внедрение новых видов деятельности, связанных с процессом образования, утвержден постановлением кабинета министров Азербайджана № 233 в октябре 2006 года. Куррикулум отражает цели, содержание, учебную деятельность современного урока по всем предметным курсам (в России — это Федеральный базисный учебный план для образовательных учреждений Российской Федерации).

8. *Учебники.* В Министерстве образования Азербайджана создан сектор по работе с учебниками, который ведет мониторинги и выдает гранты на написание новых учебников. Но пока новые учебники, соответствующие «Куррикулуму», выпущены только для 1–6-х классов, а с 7-го по 11-й классы действуют учебники, созданные еще в советские времена.

9. *Государственная программа «Образование за рубежом».* Указом Президента Республики Азербайджан от 16 апреля 2007 г. утверждена «Государственная программа по образованию азербайджанской молодежи за рубежом в 2007–2015 годах». По этой программе молодежь имеет возможность продолжить учебу за рубежом, в том числе и в университетах Российской Федерации.

10. *Институт проблем образования* решает перспективные и текущие проблемы образования, готовит программу, помогает учителям. Там есть сектор куррикулума.

Мы коротко описали образование в Азербайджане. Мы и дальше хотим сотрудничать с вами. Желаем удачи!

1 апреля открывается прием заявок на 2015/16 учебный год

Фестиваль педагогических идей «Открытый урок»
festival.1september.ru

Свидетельство о регистрации СМИ Эл. № ФС77-53231

В течение 12 лет – самый массовый, представительный и посещаемый педагогический форум Рунета. Самая большая коллекция авторских разработок учителей.

Разместить публикацию может каждый педагог. Всем авторам предоставляются документы о публикации. По итогам каждого учебного года выпускаются электронные и бумажные сборники.

В рамках фестиваля для желающих проводится конкурс презентаций. Всем участникам конкурса высылаются специальные дипломы.

Удобный Личный кабинет участника фестиваля, возможность автоматического создания личного профессионального портфолио. В помощь участникам – квалифицированные сотрудники оргкомитета. Единственный в России образовательный сайт, имеющий службу поддержки в режиме on-line 7 дней в неделю.

Участвуйте в фестивале, размещайте свои работы, получайте документы о публикации!

Фестиваль творческих и исследовательских работ учащихся «Портфолио ученика»
project.1september.ru

Свидетельство о регистрации СМИ Эл. № ФС77-53211

Площадка для публикации работ учащихся, выполненных под руководством педагогов.

Всем ученикам и педагогам предоставляются документы о публикации. По итогам каждого учебного года выпускаются электронные и бумажные сборники.

В рамках фестиваля для желающих проводится **конкурс проектных работ**.

Все участники конкурса награждаются специальными дипломами.

Участвуйте вместе с учениками!

9–11 классы. Начало см. в № 1,2/2015

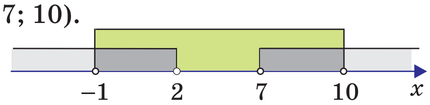
С. ШЕСТАКОВ,
isser@yandex.ru,
г. Москва

РЕШАЕМ НЕРАВЕНСТВА

1.4. Метод введения новой переменной

Метод введения новой переменной является одним из общих для каждой функционально-алгебраической линии школьного курса математики методом решения уравнений и неравенств, позволяющим свести данное уравнение или неравенство к одному или нескольким более простым по сравнению с данным. Основной идеей метода является замена повторяющегося алгебраического выражения в данном уравнении (неравенстве) некоторой (обычно латинской) буквой, играющей роль новой переменной. Решив после такой замены уравнение (неравенство) относительно новой переменной, нужно сделать обратную замену, вернувшись к данной переменной, и решить полученные уравнения (неравенства) уже относительно данной переменной. Заметим, что устоявшееся название «метод замены переменной» является терминологически не вполне точным, поскольку заменяется не переменная, а алгебраическое выражение. Правильнее называть этот метод методом введения новой переменной. Такое название используется в ряде пособий и в этом цикле статей. При решении систем неравенств с одной переменной новая переменная может вводиться как в пределах всей системы, так и в пределах одного из неравенств системы. Проиллюстрируем применение метода примерами.

Пример 1. Решить неравенство
$$(x^2-9x)^2+4x^2<36x+140.$$
Решение. Перепишем неравенство в виде
$$(x^2-9x)^2+4(x^2-9x)-140<0$$
и введем новую переменную $t=x^2-9x$. Неравенство примет вид
$$t^2+4t-140<0.$$
Корнями квадратного трехчлена в левой части полученного неравенства являются числа -14 и 10 (их можно найти с помощью формулы корней квадратного уравнения или с помощью формул Виета). Старший коэффициент квадратного трехчлена положителен, поэтому решение неравенства — промежуток $(-14;\ 10)$. Сделаем обратную замену, перейдя к системе
$$\begin{cases}x^2-9x>-14,\\ x^2-9x<10,\end{cases}\quad \begin{cases}x^2-9x+14>0,\\ x^2-9x-10<0.\end{cases}$$
Корнями квадратного трехчлена в левой части первого неравенства системы являются числа 2 и 7, старший коэффициент трехчлена положителен, значит, решение неравенства — объединение промежутков $(-\infty;\ 2)\cup(7;\ +\infty)$. Корнями квадратного трехчлена в левой части второго неравенства системы являются числа -1 и 10, старший коэффициент трехчлена положителен, значит, решение неравенства — промежуток $(-1;\ 10)$. Следовательно, решение системы — объединение $(-1;\ 2)\cup(7;\ 10)$.



Ответ: $(-1;\ 2)\cup(7;\ 10)$.

К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru (Упражнения к пунктам 1.1–1.5.)

Если при решении систем неравенств с помощью метода введения новой переменной такая переменная вводится в пределах всей системы, можно не записывать решение каждого неравенства относительно данной переменной, а сделать это сразу для всей системы.

Пример 2. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} 3\mathrm{tg}^2 x - 2\mathrm{tg}\ x - 5 \le 0, \\ 2\mathrm{tg}^2 x - 5\mathrm{tg}\ x - 7 \ge 0. \end{cases}$$

Решение. Введем новую переменную $z = \mathrm{tg}\ x$. Система примет вид

$$\begin{cases} 3z^2 - 2z - 5 \le 0, \\ 2z^2 - 5z - 7 \ge 0. \end{cases} \qquad (*)$$

Корнями квадратного трехчлена в левой части первого неравенства полученной системы являются числа -1 и $\frac{5}{3}$. Старший коэффициент квадратного трехчлена положителен, поэтому решение неравенства — промежуток $\left[-1; \frac{5}{3}\right]$. Корнями квадратного трехчлена в левой части второго неравенства той же системы являются числа -1 и 3,5. Старший коэффициент квадратного трехчлена положителен, поэтому решение неравенства — объединение промежутков $(-\infty; -1] \cup [3{,}5; +\infty)$. Поскольку $\frac{5}{3} < 3{,}5$, единственным решением системы (*) является $z = -1$. Вернувшись к исходной переменной, получим: $\mathrm{tg}\ x = -1$, откуда $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ: $-\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Во многих случаях решение системы двух неравенств с одной переменной (а именно такие системы наиболее часто встречаются в ЕГЭ по математике) целесообразно проводить в три этапа:

1) решить первое неравенство системы;

2) решить второе неравенство системы;

3) решить систему, найдя пересечение решений, полученных на двух предыдущих этапах.

За правильное выполнение каждого этапа при решении задачи C3 дается 1 балл, поэтому желательно фиксировать полученные на каждом этапе ответы в тексте решения. Разумеется, решать неравенства системы можно в любом порядке, а начинать нужно с того, которое кажется более простым. Кроме того, решение одного из неравенств системы иногда можно упростить, учитывая область допустимых значений или решение другого ее неравенства. В следующем примере такой учет позволяет рассматривать не два случая «раскрытия» модуля, а только один.

Пример 3. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} \log_2^2(-\log_2 x) + \log_2\left(\log_2^2 x\right) \le 3, \\ -4\left|\ x^2 - 1\ \right| - 3 \ge \dfrac{1}{x^2 - 1}. \end{cases}$$

Решение. 1. Левая часть первого неравенства системы определена, если

$$\begin{cases} x > 0, \\ \log_2 x < 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0, \\ x < 1, \end{cases}$$

то есть $x \in (0; 1)$. Если $x \in (0; 1)$, то $x^2 < 1$. Поэтому $x^2 - 1 < 0$ и $|\ x^2 - 1\ | = -x^2 + 1$. Теперь систему можно переписать так:

$$\begin{cases} \log_2^2(-\log_2 x) + \log_2\left(\log_2^2 x\right) \le 3, \\ 4\left(x^2 - 1\right) - 3 \ge \dfrac{1}{x^2 - 1}. \end{cases}$$

Решим первое неравенство системы, введя новую переменную $t = -\log_2 x$, где $t > 0$. Неравенство примет вид $\log_2^2 t + \log_2 t^2 \le 3$. Заметим, что $\log_2 t^2 = 2\log_2 t$, поскольку $t > 0$. Таким образом приходим к неравенству $\log_2^2 t + 2\log_2 t - 3 \le 0$. Полученное неравенство является квадратным относительно $z = \log_2 t$ и имеет вид $z^2 + 2z - 3 \le 0$. Корнями квадратного трехчлена в левой части этого неравенства являются числа -3 и 1 (их можно найти с помощью формулы корней квадратного уравнения или с помощью формул Виета). Старший коэффициент квадратного трехчлена положителен, поэтому решение неравенства — промежуток $[-3; 1]$. Сделаем обратную замену, перейдя к системе неравенств с переменной t. Имеем:

$$\begin{cases} \log_2 t \ge -3, \\ \log_2 t \le 1, \end{cases} \quad \begin{cases} t \ge \frac{1}{8}, \\ t \le 2. \end{cases}$$

Теперь вернемся к переменной x. Получим:

$$\begin{cases} -\log_2 x \ge \frac{1}{8}, \\ -\log_2 x \le 2, \end{cases} \quad \begin{cases} \log_2 x \le -\frac{1}{8}, \\ \log_2 x \ge -2, \end{cases} \quad \begin{cases} x \le \frac{1}{\sqrt[8]{2}}, \\ x \ge \frac{1}{4} \end{cases}.$$

Итак, решением первого неравенства системы является промежуток $\left[\frac{1}{4}; \frac{1}{\sqrt[8]{2}}\right]$.

2. Решим второе неравенство системы, введя новую переменную $y = x^2 - 1$, $y < 0$. Получим:

$$\begin{cases} 4y - 3 \ge \frac{1}{y}, \\ y < 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 4y^2 - 3y \le 1, \\ y < 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 4y^2 - 3y - 1 \le 0, \\ y < 0. \end{cases}$$

Корнями трехчлена в левой части квадратного неравенства системы являются числа $-\frac{1}{4}$ и 1, старший коэффициент трехчлена положителен, значит, решение неравенства — промежуток $\left[-\frac{1}{4}; 1\right]$. Следовательно, решение системы — промежуток $\left[-\frac{1}{4}; 0\right)$. Сделаем обратную замену, перейдя к системе неравенств с переменной x.

Имеем:

$$\begin{cases} x^2-1\ge -\dfrac{1}{4}, \\ x^2-1<0, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2\ge \dfrac{3}{4}, \\ x^2<1, \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x\ge \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ x\le -\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \end{array} \right. \\ -1<x<1. \end{array} \right.$$

Поэтому решение второго неравенства с учетом условия $x \in (0; 1)$ — промежуток $\left[\dfrac{\sqrt{3}}{2}; 1\right)$.

3. Найдем решение данной системы как пересечение промежутков

$$\left[\frac{1}{4}; \frac{1}{\sqrt[8]{2}}\right] \text{ и } \left[\frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right).$$

Поскольку

$$\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{4}>\frac{1}{4},\quad \frac{1}{\sqrt[8]{2}}<1,$$

остается сравнить $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ и $\dfrac{1}{\sqrt[8]{2}}$, или $\sqrt{3}$ и $\dfrac{2}{\sqrt[8]{2}}$, или $\left(\sqrt{3}\right)^8$ и $\left(\dfrac{2}{\sqrt[8]{2}}\right)^8$, или 3^4 и 2^7, или 81 и 128. Поскольку $81 < 128$, то и $\dfrac{\sqrt{3}}{2}<\dfrac{1}{\sqrt[8]{2}}$. Следовательно, решением данной системы является промежуток $\left[\dfrac{\sqrt{3}}{2}; \dfrac{1}{\sqrt[8]{2}}\right]$.

Ответ: $\left[\dfrac{\sqrt{3}}{2}; \dfrac{1}{\sqrt[8]{2}}\right]$.

Замечание. Сравнение чисел на последнем этапе решения можно провести «от противного»: допустим, что

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\ge\frac{1}{\sqrt[8]{2}} \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^8\ge\left(\frac{1}{\sqrt[8]{2}}\right)^8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3^4}{2^8}\ge\frac{1}{2} \Rightarrow 3^4\ge 2^7 \Rightarrow 81\ge 128$$

— противоречие, значит, допущение неверно и $\dfrac{\sqrt{3}}{2}<\dfrac{1}{\sqrt[8]{2}}$.

1.5. Применение свойств функций к решению неравенств

Существует довольно большой класс неравенств, решение которых с помощью только стандартных методов (алгебраических преобразований, замены переменной, метода интервалов и метода знакотождественных множителей) невозможно. Решение таких неравенств и их систем существенным образом опирается на некоторые свойства элементарных функций, изучаемых в школьном курсе, прежде всего монотонность (напомним, что монотонными называются возрастающие и убывающие функции) и ограниченность. В некоторых случаях приходится использовать свойства периодичности, четности (нечетности), инвариантности, дифференцируемости, а также графические интерпретации неравенств (подробней об этом см. в [1]).

Прежде чем переходить к решению примеров, приведем наиболее часто используемые при решении уравнений и неравенств утверждения о монотонных функциях, начав с тех, которые играют вспомогательную роль.

Утверждение 1. Функции $y = x^{2n-1}$, $y=\sqrt[n]{x}$, $y = a^x$ (при $a > 1$), $y = \log_a x$ (при $a > 1$) монотонно возрастают, каждая на своей области определения; функции $y = a^x$ (при $0 < a < 1$), $y = \log_a x$ (при $0 < a < 1$) монотонно убывают, каждая на своей области определения (n — натуральное число; $n > 1$ для $y=\sqrt[n]{x}$).

Утверждение 2. Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ монотонно возрастают (убывают) на некотором промежутке, то и функция $y = f(x) + g(x)$ монотонно возрастает (убывает) на том же промежутке (краткая формулировка: сумма возрастающих (убывающих) функций является возрастающей (убывающей) функцией).

Утверждение 3. а) Если функция $y = f(x)$ монотонно возрастает на некотором промежутке и $a > 0$, то функции $y = af(x) + b$ и $y = f(ax + b)$ монотонно возрастают на том же промежутке, а функции $y = -af(x) + b$ и $y = f(-ax + b)$ монотонно убывают на том же промежутке (b — любое действительное число).

б) Если функция $y = f(x)$ монотонно убывает на некотором промежутке и $a > 0$, то функции $y = af(x) + b$ и $y = f(ax + b)$ монотонно убывают на том же промежутке, а функции $y = -af(x) + b$ и $y = f(-ax + b)$ монотонно возрастают на том же промежутке (b — любое действительное число).

Как уже отмечалось, приведенные утверждения обычно играют вспомогательную роль: они позволяют обосновать монотонное возрастание или убывание функции. Для непосредственного же решения неравенств применяют следующие утверждения.

Утверждение 4. Если функция $y = f(x)$ монотонно возрастает на всей числовой прямой, а функция $y = g(x)$ монотонно убывает на всей числовой прямой, то справедливы следующие утверждения:

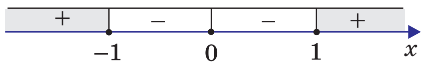
а) $f(\alpha) \le f(\beta)$ в том и только том случае, когда $\alpha \le \beta$;

б) $g(\alpha) \le g(\beta)$ в том и только том случае, когда $\alpha \ge \beta$.

Это утверждение является простой переформулировкой определения возрастающей и убывающей функции.

Пример 1. Функция $y = f(t)$ монотонно убывает на всей числовой прямой. Найти все значения x, для которых $f(x^2 + x^3) \ge f(x^3 + x^4)$.

Решение. В силу монотонного убывания функции $y = f(t)$ неравенство $f(t_1) \ge f(t_2)$ выполняется в том и только том случае, если $t_1 \le t_2$. В нашем случае $t_1 = x^2 + x^3$, $t_2 = x^3 + x^4$. Поэтому данное неравенство равносильно неравенству $x^2 + x^3 \le x^3 + x^4$, откуда $x^4 - x^2 \ge 0$. Вынесем за скобку общий множитель x^2 в левой части и разложим на множители выражение в скобках по формуле разности квадратов: $x^2(x - 1)(x + 1) \ge 0$. Последнее неравенство легко решается методом интервалов:



Ответ: $(-\infty; -1] \cup \{0\} \cup [1; +\infty)$.

Пример 2. Решить неравенство

$$f(3x + 4^x + 5) \le f(5x + 4^x + 3),$$

если

$$f(x) = x + 3\sqrt[5]{x+5} + 5\sqrt[3]{x+3} + 7.$$

Решение. Разумеется, можно записать данное неравенство в явном виде — и удивиться бессмысленности совершенного. Чтобы избежать не слишком приятных ощущений, пойдем иным путем. Функция $y = f(x)$ монотонно возрастает на всей числовой прямой (как сумма возрастающих функций), поэтому неравенство $f(\alpha) \le f(\beta)$ будет выполняться в том и только том случае, если $\alpha \le \beta$. В нашем случае

$$\alpha = 3x + 4^x + 5,\ \beta = 5x + 4^x + 3.$$

Таким образом,

$$3x + 4^x + 5 \le 5x + 4^x + 3,\ \ 2x \ge 2,\ \ x \ge 1.$$

Ответ: $[1; +\infty)$.

Эти относительно несложные примеры показывают, что для успешного решения подобных задач нужно хорошо знать свойства монотонных функций и уметь их использовать. Так, если при допустимых значениях переменных функция $y = f(t)$ монотонно возрастает, а функция $t = g(x)$ монотонно убывает, то функция $y = f(g(x))$ будет монотонно убывающей; если же при допустимых значениях переменных и функция $y = f(t)$ монотонно возрастает, и функция $t = g(x)$ монотонно возрастает, то функция $y = f(g(x))$ также будет монотонно возрастающей. Фактически именно эти утверждения, которые являются обобщением утверждения 3 и которые довольно просто получить непосредственно из определения возрастающей и убывающей функций, были неявным образом использованы при решении предыдущего примера.

Пример 3. Решить неравенство

$$(3x+1)\left(1+\sqrt{(3x+1)^2+9}\right)+2x\left(1+\sqrt{4x^2+9}\right)\le 0.$$

Решение. Перепишем данное неравенство в виде

$$(3x+1)\left(1+\sqrt{(3x+1)^2+9}\right)\le -2x\left(1+\sqrt{4x^2+9}\right)$$

и рассмотрим функцию

$$f(t)=t\left(1+\sqrt{t^2+9}\right).$$

Эта функция является возрастающей, что — в отличие от функции из примера 2 — куда менее очевидно и должно быть обосновано более подробно. В самом деле, если $t_1 < 0 < t_2$, то $f(t_1) < f(t_2)$, поскольку в этом случае $f(t_1) < 0$, а $f(t_2) > 0$. Если $0 \le t_1 < t_2$, то

$$0<1+\sqrt{t_1^2+9}<1+\sqrt{t_2^2+9},$$

следовательно,

$$t_1\left(1+\sqrt{t_1^2+9}\right)<t_2\left(1+\sqrt{t_2^2+9}\right),\ \text{то есть } f(t_1)<f(t_2).$$

Наконец, если $t_1 < t_2 \le 0$, то $|t_1| > |t_2| \ge 0$, откуда

$$t_1^2>t_2^2\ge 0 \ \text{ и } \ 1+\sqrt{t_1^2+9}>1+\sqrt{t_2^2+9}>0.$$

Поэтому

$$t_1\left(1+\sqrt{t_1^2+9}\right)<t_2\left(1+\sqrt{t_2^2+9}\right)\le 0,\ \text{то есть } f(t_1)<f(t_2).$$

Таким образом доказано, что для любой пары чисел t_1 и t_2 таких, что $t_1 < t_2$, выполняется неравенство $f(t_1) < f(t_2)$, то есть функция

$$f(t)=t\left(1+\sqrt{t^2+9}\right)$$

является возрастающей. Разумеется, доказательство возрастания функции $y = f(t)$ можно было провести и с помощью производной. В силу возрастания функции $y = f(t)$ неравенство $f(\alpha) \le f(\beta)$ будет выполняться тогда и только тогда, когда $\alpha \le \beta$. В данном случае $\alpha = 3x + 1$, $\beta = -2x$. Поэтому $3x + 1 \le -2x$, откуда $x \le -0{,}2$.

Ответ: $(-\infty; -0{,}2]$.

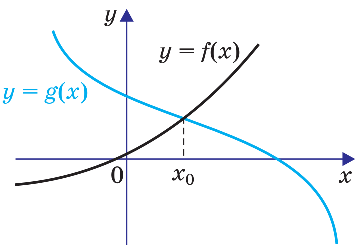
Сформулируем еще одно утверждение о свойствах монотонных функций, которое довольно часто используется при решении неравенств.

Утверждение 5. Если функция $y = f(x)$ монотонно возрастает на всей числовой прямой, функция $y = g(x)$ монотонно убывает на всей числовой прямой и $f(x_0) = g(x_0)$, то справедливы следующие утверждения:

а) $f(x) \le g(x)$ в том и только том случае, когда $x \in (-\infty; x_0]$;

б) $f(x) \ge g(x)$ в том и только том случае, когда $x \in [x_0; +\infty)$.

Наглядный смысл утверждения 2 очевиден.



Попробуйте доказать это утверждение формально, опираясь на определение возрастающей (убывающей) функции.

Аналогичное утверждение справедливо и в том случае, если правая часть неравенства является числом. Сформулируем это утверждение.

Утверждение 6. а) Если функция $y = f(x)$ монотонно возрастает на всей числовой прямой, c — действительное число и $f(x_0) = c$, то

- $f(x) \le c$ в том и только том случае, когда $x \in (-\infty; x_0]$;
- $f(x) \ge c$ в том и только том случае, когда $x \in [x_0; +\infty)$;

б) Если функция $y = g(x)$ монотонно убывает на всей числовой прямой и $g(x_0) = c$, то справедливы следующие утверждения:

- $g(x) \le c$ в том и только том случае, когда $x \in [x_0; +\infty)$;
- $g(x) \ge c$ в том и только том случае, когда $x \in (-\infty; x_0]$.

Утверждения 5 и 6 с соответствующей коррекцией справедливы и для строгих неравенств (для них число x_0 в ответ не включается).

Пример 4. Решить неравенство

$$7x^7 + 5x^5 + 3x^3 + x + 16 < 0.$$

Решение. Заметим, что функция

$$f(x) = 7x^7 + 5x^5 + 3x^3 + x + 16$$

монотонно возрастает на всей числовой прямой (как сумма возрастающих функций) и $f(-1) = 0$. Поэтому неравенство $f(x) < 0$ выполняется в том и только том случае, если $x < -1$.

Ответ: $(-\infty; -1)$.

Монотонное возрастание (убывание) функций можно использовать и при решении вполне стандартных неравенств. Иногда такое решение будет короче традиционного.

Пример 5. Решить неравенство

$$21x + 3|2x + 1| + 7 \ge 4|3x - 2| + 2|x - 1|.$$

Решение. Перепишем неравенство в виде

$$21x + 3|2x + 1| - 4|3x - 2| - 2|x - 1| + 7 \ge 0$$

и рассмотрим функцию

$$f(x) = 21x + 3|2x + 1| - 4|3x - 2| - 2|x - 1| + 7,$$

определенную и непрерывную на всей числовой прямой. График функции представляет собой ломаную, состоящую из отрезков прямых и лучей. Каждое звено этой ломаной является частью прямой вида $y = kx + l$, где $k > 0$ (поскольку $k = 21 \pm 3 \cdot 2 \pm 4 \cdot 3 \pm 2$, откуда $k = 21 \pm 6 \pm 12 \pm 2$, то вне зависимости от «раскрытия» модулей коэффициент при x будет положителен). Следовательно, функция $y = f(x)$ возрастает на $(-\infty; +\infty)$. Поскольку $f(0) = 0$, неравенство $f(x) \ge 0$ будет выполнено в том и только том случае, если $x \in [0; +\infty)$.

Ответ: $[0; +\infty)$.

Заметим, что далеко не каждая функция является монотонной на всей числовой прямой. Во многих случаях приходится применять сформулированные выше утверждения, учитывая область определения функции не только при обосновании монотонности, но и при записи ответа.

Пример 6. Решить неравенство

$$\sqrt[3]{x^3 - 19} > \log_2(7 - 2x) + 2.$$

Решение. Перебирая небольшие по модулю целые числа, довольно быстро можно установить, что левая и правая части данного неравенства равны при $x = 3$. Функция $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 19}$ монотонно возрастает на всей числовой прямой, а функция $g(x) = \log_2(7 - 2x) + 2$ монотонно убывает на всей области определения. Поэтому неравенство $f(x) > g(x)$ выполняется, если $x > 3$ и $x \in D(g)$, где $D(g)$ — область определения функции $y = g(x)$. Таким образом,

$$\begin{cases} x > 3, \\ 7 - 2x > 0, \end{cases} \quad 3 < x < 3{,}5.$$

Ответ: $(3; 3{,}5)$.

Обратим внимание на то, что если функция возрастает (убывает) на каждом из двух промежутков, то на их объединении она далеко не всегда является возрастающей (убывающей). Например, утверждение о том, что функция $y = \frac{1}{x}$ убывает на множестве $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, является математической ошибкой. В самом деле, из того, что $13 > -7$, отнюдь не следует, что $\frac{1}{13} < \frac{1}{-7}$, следовательно, функция $y = \frac{1}{x}$ не является убывающей на объединении промежутков $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. Перечислять промежутки возрастания лучше, используя точку, точку с запятой или союз «и», а не знак объединения множеств, а при решении неравенств рассматривать каждый из промежутков возрастания (убывания) отдельно.

Пример 7. Решить неравенство $\frac{4}{x} < \sqrt{x+2}$.

Решение. Областью допустимых значений неравенства является множество $[-2; 0) \cup (0; +\infty)$. При любом значении переменной из промежутка $[-2; 0)$ неравенство, очевидно, выполняется, поскольку его левая часть отрицательна, а правая — неотрицательна. На промежутке $(0; +\infty)$ функция $f(x) = \frac{4}{x}$ монотонно убывает, а функция $g(x) = \sqrt{x+2}$ монотонно возрастает. Поскольку $f(2) = 2 = g(2)$, неравенство $f(x) < g(x)$ на промежутке $(0; +\infty)$ выполняется в том и только том случае, если $x \in (2; +\infty)$.

Ответ: $[-2; 0) \cup (2; +\infty)$.

Пример 8. Решить неравенство

$$10^{4x-5} + \lg(4x-3) \le 10^{2x+3} + \lg(2x+5).$$

Решение. Обратим внимание на «похожесть» левой и правой частей неравенства. Рассмотрим функцию $f(t) = 10^t + \lg(t+2)$, монотонно возрастающую на всей области определения. В силу возрастания функции $y = f(t)$ неравенство $f(\alpha) \le f(\beta)$ будет выполняться при допустимых α и β в том и только том случае, если $\alpha \le \beta$. В нашем случае $\alpha = 4x - 5$, $\beta = 2x + 3$. Таким образом,

$$\begin{cases} 4x-5 \le 2x+3, \\ 4x-5 > -2, \\ 2x+3 > -2, \end{cases} \qquad 0{,}75 < x \le 4.$$

Ответ: $(0{,}75; 4]$.

Пример 9. Решить неравенство

$$\sqrt[11]{2x^2+3x+8} + \sqrt[11]{2-3x^2} + \log_{11}\frac{2x^2+3x+12}{3x^2+2} \ge 0.$$

Решение. Если $a > 0$ и $b > 0$, то

$$\log_{11}\frac{a}{b} = \log_{11} a - \log_{11} b.$$

В данном случае $a = 2x^2 + 3x + 12$ (этот квадратный трехчлен принимает только положительные значения в силу отрицательности дискриминанта и положительности коэффициента при второй степени переменной), $b = 3x^2 + 2$ (при любом значении переменной правая часть этого выражения является суммой неотрицательного и положительного чисел, а следовательно, положительна). Поэтому данное неравенство можно переписать в виде

$$\sqrt[11]{2x^2+3x+8} + \sqrt[11]{2-3x^2} + \log_{11}(2x^2+3x+12) - \log_{11}(3x^2+2) \ge 0,$$

откуда

$$\sqrt[11]{2x^2+3x+8} + \log_{11}\left(2x^2+3x+12\right) \ge \sqrt[11]{3x^2-2} + \log_{11}\left(3x^2+2\right).$$

Заметим, что выражения под знаками корня и логарифма в каждой из частей полученного неравенства отличаются на 4. Рассмотрим функцию

$$f(t) = \sqrt[11]{t} + \log_{11}(t+4).$$

Эта функция возрастает на всей области определения (как сумма возрастающих функций). Поэтому неравенство $f(t_1) \ge f(t_2)$ будет выполняться при допустимых t_1 и t_2 в том и только том случае, если $t_1 \ge t_2$. Положив

$$t_1 = 2x^2 + 3x + 8,\ t_2 = 3x^2 - 2,$$

приходим к системе

$$\begin{cases} 2x^2+3x+8 \ge 3x^2-2, \\ 2x^2+3x+8 > -4, \\ 3x^2-2 > -4. \end{cases}$$

Два последних неравенства системы выполняются при любых действительных значениях переменной, а первое неравенство приводится к виду $x^2 - 3x - 10 \le 0$. Корнями квадратного трехчлена в левой части последнего неравенства являются числа -2 и 5, старший коэффициент положителен, поэтому решение неравенства — отрезок $[-2; 5]$.

Ответ: $[-2; 5]$.

Наряду со свойствами монотонных функций при решении нестандартных уравнений и неравенств часто используются свойства ограниченных функций. Напомним основные свойства, связанные с ограниченностью функций, изучаемых в школьном курсе математики, и некоторые стандартные неравенства, которые понадобятся в дальнейшем.

1. $a^2 + b^2 \ge 2ab$ для любых действительных a и b, причем $a^2 + b^2 = 2ab$, только если $a = b$.

2. $a + b \ge 2\sqrt{ab}$ для любых неотрицательных a и b, причем $a + b = 2\sqrt{ab}$, только если $a = b$.

3. $a + \frac{1}{a} \ge 2$ при $a > 0$, причем $a + \frac{1}{a} = 2$, только если $a = 1$;

$a + \frac{1}{a} \le -2$ при $a < 0$, причем $a + \frac{1}{a} = -2$, только если $a = -1$.

4. $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} \ge c - \frac{b^2}{4a}$ при $a > 0$;

$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} \le c - \frac{b^2}{4a}$ при $a < 0$.

5. $|\sin x| \le 1$, $|\cos x| \le 1$ при любых действительных x.

6. $|a\sin x + b\cos x| \le \sqrt{a^2 + b^2}$ при любых действительных a, b, x.

7. $-\frac{\pi}{2} \le \arcsin x \le \frac{\pi}{2}$; $0 \le \arccos x \le \pi$; $-\frac{\pi}{2} < \mathrm{acrtg}\ x < \frac{\pi}{2}$; $0 < \mathrm{arcctg}\ x < \pi$.

Во многих случаях при решении нестандартных неравенств оказывается полезным следующее очевидное утверждение.

Утверждение 7. Чтобы неравенство $f(x) \ge g(x)$ имело хотя бы одно решение, необходимо, чтобы $\max f(x) \ge \min g(x)$.

Пример 10. Решить неравенство
$$\sin^9 x + \cos^{11} x \ge 1.$$
Решение. Так как
$$0 \le |\sin x| \le 1 \text{ и } 0 \le |\cos x| \le 1,$$
то
$$\sin^9 x \le \sin^2 x,\ \cos^{11} x \le \cos^2 x.$$
Поэтому левая часть данного неравенства не превосходит $\sin^2 x + \cos^2 x$, то есть 1. Тем самым данное неравенство будет выполнено, только когда его левая часть равна 1, что возможно в том и только том случае, если
$$\begin{cases} \sin^9 x = \sin^2 x, \\ \cos^{11} x = \cos^2 x, \end{cases} \quad \begin{cases} \sin^2 x\left(\sin^7 x - 1\right) = 0, \\ \cos^2 x\left(\cos^9 x - 1\right) = 0. \end{cases}$$
Из первого уравнения последней системы получаем, что $\sin x = 1$ или $\sin x = 0$.

Если $\sin x = 1$, то $\cos x = 0$ и второе уравнение системы выполнено. Следовательно, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Если $\sin x = 0$, то $\cos x = \pm 1$, но второму уравнению последней системы удовлетворяет только $\cos x = 1$. Значит, $x = 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 11. Решить неравенство
$$8\sin 7x + 7\cos 8x \ge 15.$$
Решение. Так как $\sin 7x \le 1$ и $\cos 8x \le 1$, левая часть данного неравенства не превосходит 15. Следовательно, неравенство имеет решения в том и только том случае, если его левая часть равна 15. Равной 15 она будет тогда и только тогда, когда
$$\begin{cases} \sin 7x = 1, \\ \cos 8x = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{14} + \frac{2\pi n}{7}, \\ x = \frac{\pi k}{4}, \end{cases} \quad \text{где } k \in \boldsymbol{Z},\ n \in \boldsymbol{Z}.$$
Остается установить, существуют ли такие целые k и n, при которых последняя система имеет хотя бы одно решение. Для этого приравняем правые части уравнений системы: $\frac{\pi}{14} + \frac{2\pi n}{7} = \frac{\pi k}{4}$, откуда после умножения обеих частей полученного равенства на 28 и деления на π получим $2 + 8n = 7k$. Существует стандартный способ решения полученного уравнения в целых числах, который не входит в программу средней школы. Тем не менее подобные задачи попадаются и в экзаменационных вариантах, и на олимпиадах разного уровня. Для их решения, как правило, достаточно использовать элементарные соображения, связанные с делимостью целых чисел, либо воспользоваться единичной окружностью, отметив на ней точками решения каждого из уравнений и выбрав совпавшие точки. Последний способ часто ведет к необходимости отмечать большое число точек, поэтому воспользуемся соображениями делимости. Перепишем равенство $2 + 8n = 7k$ в виде $2 + n = 7k - 7n$. Очевидно, что при любых целых k и n число $7k - 7n$ делится на 7. Поэтому равенство возможно лишь в случае, если $2 + n$ делится на 7, то есть если $2 + n = 7l$, где $l \in \boldsymbol{Z}$. Таким образом, $n = 7l - 2$, где $l \in \boldsymbol{Z}$. Но тогда
$$7k = 2 + 8n = 2 + 8(7l - 2) = 56l - 14,\ \ k = 8l - 2.$$
Таким образом, найдены целые k и n, при которых выполняется система
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{14} + \frac{2\pi n}{7}, \\ x = \frac{\pi k}{4}. \end{cases}$$
Осталось правую часть любого из уравнений этой системы выразить через l. Получим: $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi l$, $l \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi l$, $l \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 12. Решить неравенство
$$\log_2(16x^4 - 8x^2 + 9) \le 2\sin 3\pi x + 1.$$
Решение. Понятно сразу, что стандартные приемы и методы здесь не помогут. Попробуем использовать ограниченность синуса: $-1 \le \sin 3\pi x \le 1$. Поэтому правую часть неравенства можно оценить так: $-1 \le 2\sin 3\pi x + 1 \le 3$. Что касается левой части неравенства, то здесь сначала нужно выделить полный квадрат:
$$16x^4 - 8x^2 + 9 = (4x^2 - 1)^2 + 8.$$
Поскольку $(4x^2 - 1)^2 + 8 \ge 8$, получим, что
$$\log_2(16x^4 - 8x^2 + 9) = \log_2((4x^2 - 1)^2 + 8) \ge \log_2 8,$$
откуда
$$\log_2(16x^4 - 8x^2 + 9) \ge 3.$$
Таким образом, левая часть неравенства не меньше 3, а правая его часть не больше 3. Поэтому данное неравенство будет выполнено, только если и левая, и правая его части равны 3, что возможно в том и только том случае, когда
$$\begin{cases} \sin 3\pi x = 1, \\ \left(4x^2 - 1\right)^2 = 0. \end{cases}$$
Корнями второго уравнения системы являются $x = -\frac{1}{2}$ и $x = \frac{1}{2}$. Проверкой легко убедиться, что только $x = -\frac{1}{2}$ является и корнем первого уравнения системы.

Ответ: $-0{,}5$.

Используя свойства ограниченных функций, можно в некоторых случаях решать и неравенства с двумя неизвестными.

Пример 13. Найти все пары $(x; y)$ действительных чисел x и y, для каждой из которых

$$2y+11\geq y^2+x^2+\frac{36}{x^2}.$$

Решение. Перепишем неравенство в виде

$$-y^2+2y+11\geq x^2+\frac{36}{x^2}.$$

Выделим в левой части полученного неравенства полный квадрат:

$$-y^2 + 2y + 11 = 12 - (y - 1)^2.$$

Следовательно,

$$-y^2 + 2y + 11 \leq 12.$$

Оценим правую часть неравенства, воспользовавшись тем, что $a^2 + b^2 \geq 2ab$. В нашем случае $a=|x|,\ b=\dfrac{6}{|x|}$. Поэтому

$$x^2+\frac{36}{x^2}\geq 2\cdot|x|\cdot\frac{6}{|x|},\quad x^2+\frac{36}{x^2}\geq 12.$$

Таким образом, левая часть неравенства не больше 12, а правая его часть не меньше 12. Поэтому данное неравенство будет выполнено, только если и левая, и правая его части равны 12, что возможно в том и только том случае, когда

$$\begin{cases}12-(y-1)^2=12,\\ |x|=\dfrac{6}{|x|},\end{cases}\qquad \begin{cases}y=1,\\ x=\pm\sqrt{6}.\end{cases}$$

Ответ: $\left(-\sqrt{6};\,1\right)$; $\left(\sqrt{6};\,1\right)$.

Пример 14. Найти все пары $(x; y)$ действительных чисел x и y, для каждой из которых

$$8\cos x-y^3\geq\sqrt{y-3x^2-2}.$$

Решение. Перепишем данное неравенство в виде

$$8\cos x\geq y^3+\sqrt{y-3x^2-2}$$

и попытаемся оценить левую и правую части полученного неравенства. С левой частью все понятно: $-8 \leq 8\cos x \leq 8$. Для правой части единственной зацепкой является то, что она определена только при условии $y - 3x^2 - 2 \geq 0$, откуда $y \geq 3x^2 + 2$ и, следовательно, $y \geq 2$. Но тогда $y^3 \geq 8$. Таким образом, правая часть неравенства не меньше 8, а левая — не больше 8. Поэтому неравенство будет выполняться, только если и левая, и правая его части равны 8. Для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{cases}\cos x=1,\\ y=2,\\ \sqrt{y-3x^2-2}=0,\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=0,\\ y=2.\end{cases}$$

Ответ: (0; 2).

Конкурс фотографий «Зима–весна-2015»

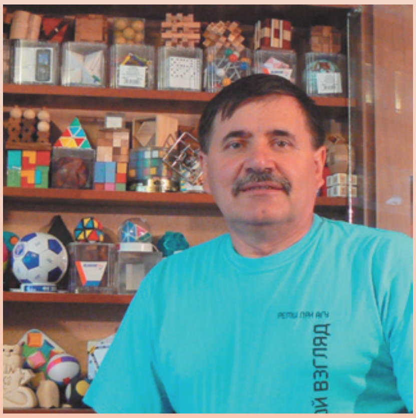
На конкурс принимаются фотографии, на которых запечатлены учителя математики и их ученики 5–11-х классов в учебном процессе, на занятиях кружка, олимпиадах, в летних математических школах и пр. К каждой фотографии необходимо приложить краткое описание изображенного на ней события (место, время, действующие лица).

Фотографии могут быть цветными или черно-белыми. Формат для фотографий, отпечатанных на фотобумаге, не менее 10 × 15 см. Цифровые фотографии могут быть присланы на электронном носителе или по электронной почте. Размер цифровых фотографий не менее 800 × 600 пикселей, формат — JPG, качество, используемое при сохранении JPG-файлов, — высокое (high).

Лучшие фотографии будут напечатаны в журнале, а победитель получит бесплатную электронную подписку на второе полугодие 2015 года.

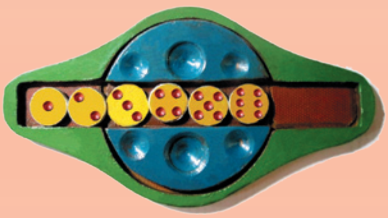
Н. АВИЛОВ,
avilow@rambler.ru,
ст. Егорлыкская, Ростовская обл.

ЛИНЕЙКА ДАНИЛОВА



Ведущий рубрики — Николай Иванович Авилов — на фоне своей коллекции головоломок

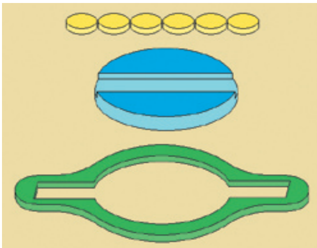
Головоломок на перемещение круглых фишек по определенным правилам придумано много, и каждая из них интересна по-своему. Познакомимся еще с одним представителем этого класса. Головоломку «Линейка» придумал мой земляк А.В. Данилов из донского города Белая Калитва. На фото можно увидеть головоломку, изготовленную руками автора.

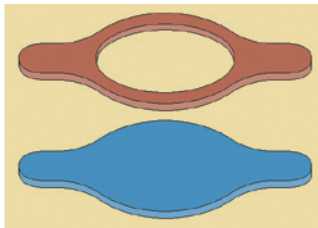


Головоломка состоит из корпуса, круглой поворотной платформы и круглых фишек, пронумерованных числами от 1 до 6. Вдоль корпуса и платформы проделан паз, в котором и размещены шесть фишек, хотя в нем могут поместиться восемь. За счет двух вакантных мест фишки могут перемещаться по пазу влево или вправо. В пазу платформы могут находиться не более четырех фишек, и при повороте платформы на 180° поворачиваются и эти фишки.

Чередование перемещения фишек влево или вправо по пазу с поворотом платформы нарушает естественную нумерацию фишек, и играющему требуется восстановить первоначальное их расположение в натуральном порядке от 1 до 6.

Я не припомню другой такой простой по устройству и одновременно трудной в решении головоломки. Если придумать некий коэффициент, отражающий трудность решения головоломки и простоту ее устройства, и по нему определять рейтинг головоломок, то «Линейка» Данилова будет в нем на одном из первых мест.





Конструкция головоломки на удивление проста. По приведенной схеме можно понять устройство головоломки и, самое главное, изготовить головоломку самостоятельно. Для этого нужно лобзиком выпилить из фанеры или пластика три фигурные детали корпуса головоломки и, склеив их вместе, получить трехслойный корпус. Из кругов, получившихся при выпиливании, склеим поворотную платформу с пазом. Размеры головоломки определяются в зависимости от имеющихся в наличии круглых фишек. Важно учесть, что в пазу платформы помещается ровно четыре фишки, а в боковых отсеках корпуса — ровно по две фишки.

Проделав это, можно заняться решением головоломки. Уверяю вас, найти решение будет нелегко! Поиграв с головоломкой, вы по достоинству оцените изобретение А.В. Данилова.

Алексей Васильевич — человек разносторонний и творческий. Благодаря своим головоломкам он стал дипломантом международного конкурса «Игры в защиту мира». Его игра-головоломка «Радуга» выпускалась стотысячным тиражом. Кроме того, он с успехом занимается составлением кроссвордов самых разных жанров, которые публикуются в газетах издательского дома «Крестьянин», там же он ведет и рубрику «Головоломки от Данилова».

К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru

9 класс. Продолжение. начало в №2/2015

ПОРА ГОТОВИТЬСЯ К ОГЭ

Продолжаем рассказывать о пособиях, предназначенных тем, кто готовится сдавать или готовит к сдаче основного государственного экзамена, подготовленных издательством «Экзамен».

6. Минаева С.С., Мельникова Н.Б. **ОГЭ (ГИА-9) 2015. Математика. 9 класс.** Основной государственный экзамен. Тематические тестовые задания: Три модуля: алгебра, геометрия, реальная математика. ФГОС. — М.: Экзамен, 2015.

Пособие содержит по 5 тестов каждого модуля экзаменационной работы; каждый тест представлен в двух вариантах. Адресовано пособие учащимся 9-го класса для самостоятельной отработки практических навыков по подготовке к экзамену.

7. Ященко И.В. и др. **ОГЭ (ГИА-9): 3000 задач с ответами по математике.** Все задания части 1 / под ред. И.В. Ященко. — М.: Экзамен; изд-во МЦНМО, 2015.

Пособие содержит задания части 1 экзаменационной работы. Возможно, пособие будет полезно учителям и репетитором с целью подбора упражнений, относящихся к уровню базовой математической подготовки, для проведения занятий по подготовке к экзамену. Рекомендовать пособие учащимся, наверное, не стоит, так как решение большого количества однотипных заданий не дает педагогического эффекта.

8. Ященко И.В. и др. **ОГЭ (ГИА-9) 2015. Математика. 9 класс.** Основной государственный экзамен. Типовые тестовые задания. — М.: Экзамен, 2015.

9. Ященко И.В. и др. **ОГЭ (ГИА-9) 2015. Математика. 3 модуля.** Основной государственный экзамен. 30 вариантов типовых тестовых заданий. — М.: Экзамен; изд-во МЦНМО, 2015.

Пособия 8 и 9 отличаются друг от друга только числом представленных в них типовых вариантов экзаменационной работы и предназначены для отработки практических навыков учащихся по подготовке к экзаменам. Пособие адресовано учителям и методистам, но как использовать его в работе с классом — не сказано. Третьим адресатом являются учащиеся 9-х классов. Это пособие рекомендовано им для самоподготовки и самоконтроля. Основной призыв авторов, наверное, таков: «Решайте больше, может, пригодится!»

Мы надеемся, что эти пособия принесут пользу и вам и вашим учащимся, но призываем вас: соблюдайте меру!

6–9 классы

И ГРЯНУЛ БОЙ!

Шаповалов А.В. и Медников Л.Э. **Как готовиться к математическим боям. 400 задач турниров им. А.П. Савина.** — М.: МЦНМО, 2014.

Вот уже более 20 лет «гремят» по России математические бои. Наверное, это единственное командное математическое соревнование, которое, кроме математических знаний и умений, дает участникам мощный заряд эмоций и обладает огромной зрелищностью. Обсуждение задач в кругу учащихся — как во время подготовки к бою, так и во время «сражения» — служит заметным дополнительным источником знаний и дает стимул к дальнейшему освоению математики. Работа в команде привлекает даже тех ребят, которые лично для себя не стали бы заниматься математикой.

Многие учителя оценивают математический бой как очень полезное соревнование для школьников и хотели бы провести его, но испытывают трудности в подготовке и подборке задач для боя. Действительно, на уроках, математических регатах и олимпиадах ценятся задачи с достаточно кратким и легко проверяемым решением, а в математическом бое, наоборот, нужны задачи с подвохами, с разбором различных случаев, которые не всегда очевидны, задачи, решающиеся в два или несколько ходов. Найти или составить такую задачу непросто, и тут на помощь учителям приходит книга, о которой хочется рассказать.

Авторы много лет проработали в руководстве и жюри Турнира им. Савина и других турниров математических боев. Они узнали много секретов игры и делятся ими с читателями.

Как известно, математический бой начинается с конкурса капитанов, которым дается устная задача «на ответ». Задача несложная, но часто с подвохом. Побеждает тот, кто первым даст верный ответ, но может выиграть и тот, кто не спешит: противник дал неверный ответ и проиграл! Около двух десятков таких задач собрано в главе «Конкурс капитанов».

Учиться надо на чужих ошибках. Как избежать ошибок в своих решениях и найти их в решениях соперника? Потренируйтесь на специально подобранных решениях с ошибками, «прогуляйтесь» по задачам главы «Липовая аллея».

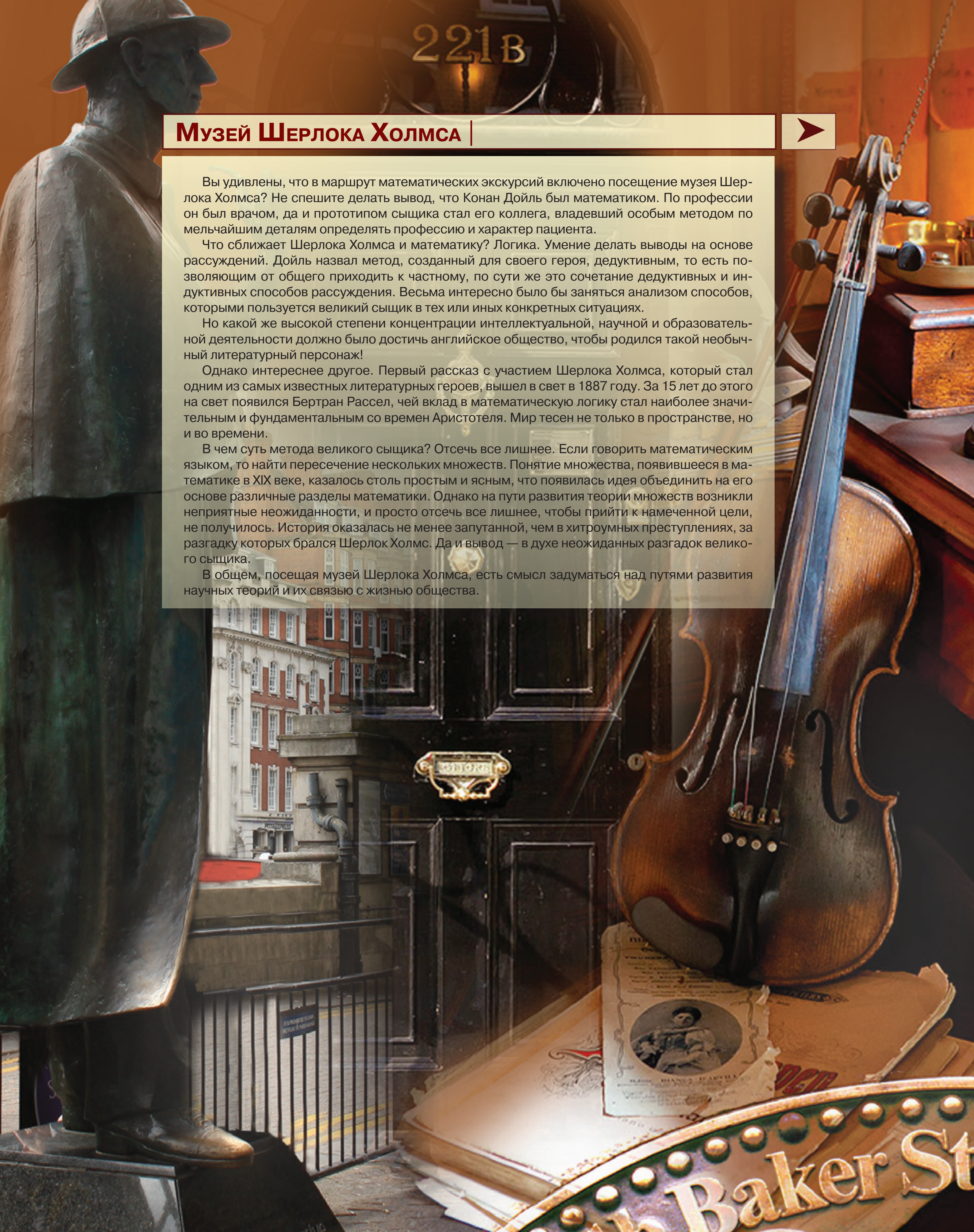
В книге собрано почти 400 задач для учащихся 6–9-х классов (все задачи математических боев 2012 года и избранные задачи других лет). Ко всем задачам даны решения. Задачи в книге сгруппированы по темам. Это удобно как для проведения тематического занятия кружка, так и для тренировки членов команды на решение задач по какой-то теме.

Ну а если вам нужен вариант для проведения математического боя? И тут не надо отчаиваться, в книге есть рубрикатор, пользуясь которым можно восстановить и использовать вариант для личной или командной олимпиады или для математического боя.

Вы не знаете всех правил проведения математического боя? Не беда, и тут вам поможет книга. В ней есть правила проведения математических боев.

По нашему мнению, книга окажет большую помощь всем учителям, которые хотят, чтобы их ученики полюбили математику.

Музей Шерлока Холмса



Вы удивлены, что в маршрут математических экскурсий включено посещение музея Шерлока Холмса? Не спешите делать вывод, что Конан Дойль был математиком. По профессии он был врачом, да и прототипом сыщика стал его коллега, владевший особым методом по мельчайшим деталям определять профессию и характер пациента.

Что сближает Шерлока Холмса и математику? Логика. Умение делать выводы на основе рассуждений. Дойль назвал метод, созданный для своего героя, дедуктивным, то есть позволяющим от общего приходить к частному, по сути же это сочетание дедуктивных и индуктивных способов рассуждения. Весьма интересно было бы заняться анализом способов, которыми пользуется великий сыщик в тех или иных конкретных ситуациях.

Но какой же высокой степени концентрации интеллектуальной, научной и образовательной деятельности должно было достичь английское общество, чтобы родился такой необычный литературный персонаж!

Однако интереснее другое. Первый рассказ с участием Шерлока Холмса, который стал одним из самых известных литературных героев, вышел в свет в 1887 году. За 15 лет до этого на свет появился Бертран Рассел, чей вклад в математическую логику стал наиболее значительным и фундаментальным со времен Аристотеля. Мир тесен не только в пространстве, но и во времени.

В чем суть метода великого сыщика? Отсечь все лишнее. Если говорить математическим языком, то найти пересечение нескольких множеств. Понятие множества, появившееся в математике в XIX веке, казалось столь простым и ясным, что появилась идея объединить на его основе различные разделы математики. Однако на пути развития теории множеств возникли неприятные неожиданности, и просто отсечь все лишнее, чтобы прийти к намеченной цели, не получилось. История оказалась не менее запутанной, чем в хитроумных преступлениях, за разгадку которых брался Шерлок Холмс. Да и вывод — в духе неожиданных разгадок великого сыщика.

В общем, посещая музей Шерлока Холмса, есть смысл задуматься над путями развития научных теорий и их связью с жизнью общества.