Решения задач 7 класса

1. Решите числовой ребус: $\overline{abcd} + \overline{bcd} + \overline{cd} + d = 2014$ (запись вида $\overline{abcd}$ означает число, в десятичной записи которого слева направо следуют цифры a, b, c и d). Разным буквам могут соответствовать одинаковые цифры. Укажите все возможные решения, объясните, как вы нашли неизвестные и почему нет других решений.

Ответ: $a = 1, b = 4, c = 7, d = 1$.

Решение. Так как первой цифрой числа не может быть ноль, то каждая буква соответствует числу не меньше единицы. Исходное равенство можно переписать в виде

$$(1000a + 100b + 10c + d) + (100b + 10c + d) + (10c + d) + d = 2014,$$

т.е. $1000a + 200b + 30c + 4d = 2014$ и a не может быть больше 2. Если $a = 2$, то

$$1000a + 200b + 30c + 4d \geq 1000 \cdot 2 + 200 \cdot 1 + 30 \cdot 1 + 4 = 2234,$$

следовательно, $a = 1$. Тогда $200b + 30c + 4d = 2014 - 1000 = 1014$. Если $b \leq 3$, то

$$200b + 30c + 4d \leq 200 \cdot 3 + 30 \cdot 9 + 4 \cdot 9 = 906.$$

Если $b \geq 5$, то $200b + 30c + 4d \geq 200 \cdot 5 + 30 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 1034$. Следовательно, $b = 4$. Тогда $30c + 4d = 1014 - 800 = 214$, т.е. $15c + 2d = 107$. Значит, c нечётно. Если $c \leq 5$, то

$$15c + 2d \leq 15 \cdot 5 + 2 \cdot 9 = 93.$$

Если $c \geq 9$, то $15c + 2d \geq 15 \cdot 9 + 2 \cdot 1 = 137$. Значит, $c = 7$. Тогда $2d = 107 - 15 \cdot 7 = 2$, следовательно, $d = 1$.

Критерии.

Найдено правильное решение путём верных рассуждений – **7 баллов.**

Ход решения верный, но имеются пробелы в доказательстве того, что нет других решений – **3-5 баллов.**

Приведён только правильный ответ – **2 балла.**

Приведены несколько ответов без обоснования, и один из них правильный – **1 балл.**

2. Петя и Вася играют в крестики-нолики. За каждую игру победитель получает 3 очка, сыгравший вничью – 2 очка, проигравший ничего не получает. Сыграв 17 игр, Петя и Вася просуммировали набранные очки и оказалось, что вместе они набрали 59 очков. Сколько игр было сыграно вничью? Ответ обоснуйте.

Ответ: 8.

Решение. Пусть x – количество игр, сыгранных вничью. Тогда количество игр, закончившихся победой одного из игроков, равно $(17 - x)$. За каждую из игр, сыгранных вничью, игроки в сумме набирают 4 балла (2 + 2 = 4), а за каждую из остальных игр игроки в сумме набирают 3 балла (3 + 0 = 3). Тогда суммарное количество набранных баллов за все игры равно $4x + 3(17 - x) = 59$. Решая это уравнение, получаем $x = 8$.

Критерии.

Верное решение с использованием уравнения или системы уравнений – **7 баллов.**

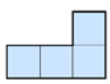
Решение полным перебором (проверка $x = 1, x = 2$ и т.д.) – **7 баллов.**

Проверено, что количество игр, сыгранных вничью, не может быть отличным от 8, но в явном виде не показано, что оно может равняться 8, – **7 баллов.**

Правильный ответ с неполным перебором – **2-3 балла.**

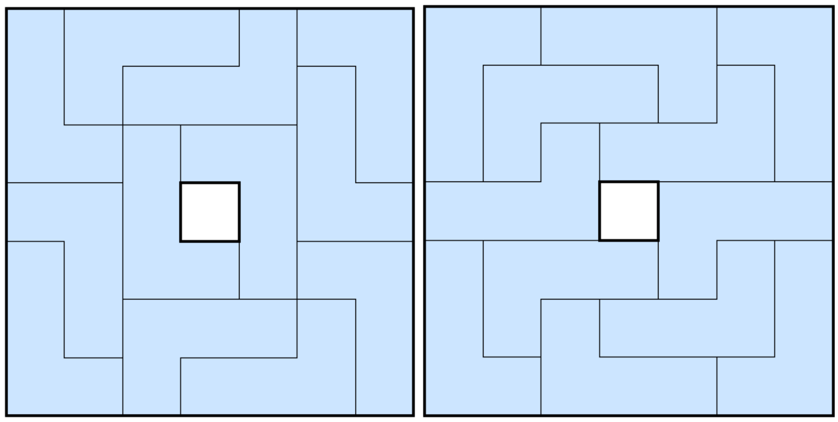
Правильный ответ без обоснования – **1 балл.**

3. Из клетчатого листа размера 7x7 вырезали центральную клетку. Можно ли получившуюся фигуру разрезать на 12 фигур, изображённых на рисунке? При разрезании допускаются также фигурки, симметричные изображённой на рисунке.



Ответ: да, можно.

Решение. Приведены два варианта разрезания. Существуют и другие варианты.



Критерии.

Приведён верный вариант разрезания – **7 баллов.**

4. Петя написал на доске шесть последовательных натуральных чисел (т.е. каждое число на 1 больше предыдущего). Затем он стёр одно из чисел и вместо него записал в два раза большее число. Оказалось, что после этого сумма всех чисел на доске стала равна 2014. Какие числа были записаны первоначально и какое число стёр Петя? Ответ обоснуйте.

Ответ: были написаны числа 285, 286, 287, 288, 289, 290, стёрли число 289.

Решение. Пусть меньшее из чисел, написанных первоначально, было x. Тогда остальные числа равны $x + 1$, $x + 2$, $x + 3$, $x + 4$ и $x + 5$. Пусть Петя стёр число $x + a$ (где $0 \leq a \leq 5$) и вместо него написал $2(x + a)$. Тогда сумма всех чисел стала равна

$$x + (x + 1) + (x + 2) + (x + 3) + (x + 4) + (x + 5) + (x + a) = 7x + 15 + a,$$

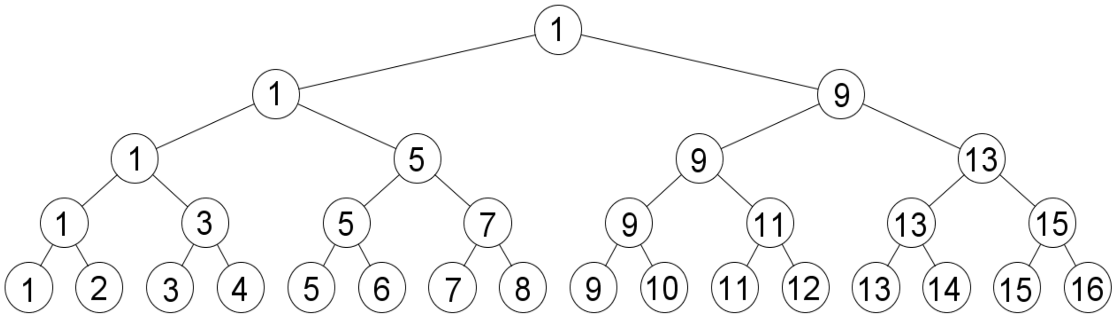
что по условию равно 2014. Получаем уравнение $7x + 15 + a = 2014$, т.е. $7x + a = 1999$. Так как 1999 при делении на 7 даёт остаток 4, то $a = 4$, $x = 285$. Следовательно, были написаны числа 285, 286, 287, 288, 289, 290, а стёрли число 289.

Критерии.
Обоснованно получен верный ответ – **7 баллов.**
Числа найдены подбором – **2 балла.**

5. На Острове Рыцарей и Лжецов проживают рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Король этого острова устроил турнир, в котором приняли участие 16 человек. Каждый участник знал про каждого из остальных, кто он – рыцарь или лжец. Сначала 16 человек разбили на 8 пар, в каждой паре участники сразились друг с другом и победитель из каждой пары вышел в следующий тур. Ничьих на турнире не было. В следующем туре восьмерых участников разбили на 4 пары, в каждой паре снова определился победитель, и эти 4 победителя прошли в полуфинал. Там их разбили на 2 пары, в каждой снова определился победитель, и эти два победителя встретились друг с другом в финале, в котором определился победитель всего турнира. После окончания турнира каждому участнику был задан вопрос: «Скольких рыцарей ты победил?», на что каждый ответил: «Столько же, сколько лжецов». Сколько рыцарей было на турнире? Ответ обоснуйте.

Ответ: 11.

Решение. Пронумеруем всех участников числами от 1 до 16. Можно считать, что в 1/8 финала встретились 1 и 2, 3 и 4, 5 и 6, …, 15 и 16 (см. рисунок). Пусть из первой пары вышел 1, из второй 3, и т.д., из восьмой 15. В ¼ финала встретились 1 и 3 (победил 1), 5 и 7 (победил 5), 9 и 11 (победил 9), 13 и 15 (победил 13). В полуфинале встретились 1 и 5 (победил 1) и 9 и 13 (победил 9). В финале встретились 1 и 9, победил 1. Те участники, которые одержали нечётное количество побед, являются лжецами, так как они не могли победить столько же рыцарей, сколько лжецов. Итак, лжецами являются участники с номерами 3, 7, 11, 15 и 9. Те участники, которые проиграли в первом же бою – рыцари, так как сказали правду (никого не победили). Это все участники с чётными номерами (2, 4, … , 16). Тогда 5-й победил одного лжеца (7) и одного рыцаря (6), значит, он рыцарь. 13-й победил одного лжеца (15) и одного рыцаря (14), значит, он тоже рыцарь. Тогда 1-й – рыцарь, поскольку он победил двух лжецов (3 и 9) и двух рыцарей (2 и 5). Получаем, что рыцарей на турнире было 11.



Критерии.

Правильный и обоснованный ответ **– 7 баллов.**

Верные рассуждения, в которых показывается, что количество рыцарей не может отличаться от 11, но нет примера, в котором это количество равно 11, **– 7 баллов.**

Рассуждения, в которых говорится, что участников с нечётным количеством побед – 5, поэтому лжецов 5, без обоснования того, что все остальные участники – рыцари, **– 3 балла.**