Решения задач 8 класса

1. Можно ли заполнить таблицу 2x2 четырьмя различными натуральными числами так, чтобы сумма чисел в каждой строке равнялась произведению чисел в другой строке?

Ответ: да, можно.

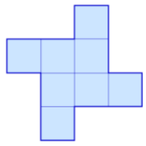
Решение.

1	5
2	3

Критерии.

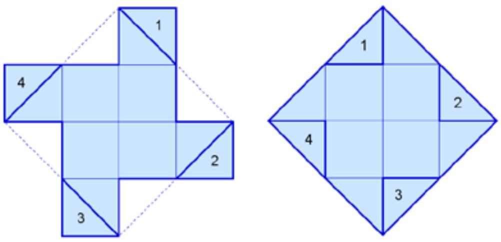
Приведён правильный вариант заполнения таблицы (с точностью до перестановки строк и чисел в строке) – **7 баллов.**

2. Из клетчатого листа вырезали фигуру, изображённую на рисунке. Можно ли разрезать эту фигуру на 5 частей, из которых 4 одинаковые, так, чтобы из этих частей можно было бы сложить сплошной квадрат без зазоров и наложений? Разрезы можно делать не только по сторонам клеток.



Ответ: можно.

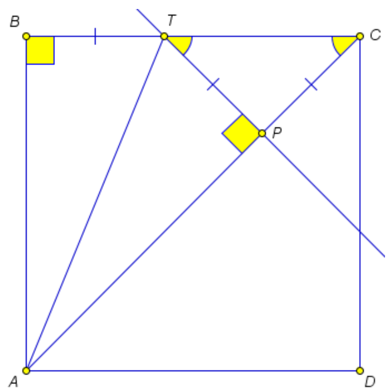
Решение.



Критерии. Верное решение – **7 баллов.**

3. Дан квадрат *ABCD*. На его диагонали *AC* взяли точку *P* такую, что *AP* = *AB*. Через точку *P* провели перпендикулярную *AC* прямую, которая пересекла прямую *BC* в точке *T*. Докажите, что $AB + BT = AC$.

Решение.



Так как $AC = AP + PC = AB + PC$, нам достаточно доказать равенство $PC = BT$. Рассмотрим прямоугольные треугольники APT и ABT. Они равны по двум катетам ($AP = AB$) и гипотенузе (AT – общая), следовательно, $PT = BT$. В треугольнике CPT имеем $\angle CPT = 90°$, $\angle PCT = 45°$ (поскольку треугольник ABC прямоугольный и равнобедренный), следовательно, $\angle CTP = 45° = \angle PCT$, т.е. треугольник СРТ равнобедренный и $PC = PT$, а так как $PT = BT$, то $PC = BT$.

Критерии.

Приведено полное доказательство требуемого равенства – **7 баллов.**

4. В семье Ивановых каждый съедает на завтрак по одному бутерброду с колбасой, причём все бутерброды одного веса, а соотношение хлеба и колбасы в бутербродах может различаться. Однажды во время завтрака Вася Иванов заметил, что сегодня он съел пятую часть всей съеденной на завтрак колбасы и седьмую часть всего съеденного хлеба. Сколько человек в семье Ивановых? Ответ обоснуйте.

Ответ: 6.

Решение.

1-й способ. Пусть вес одного бутерброда равен 1 (условной единице). Пусть n – количество человек в семье, x условных единиц – вес съеденной колбасы. Тогда $(n-x)$ условных единиц – вес съеденного хлеба. Тогда вес васиного бутерброда равен $\frac{x}{5}+\frac{n-x}{7}$, что по условию равно 1. Получаем уравнение $\frac{x}{5}+\frac{n-x}{7}=1$. Умножим обе его части на 35, получим $7x+5n-5x=35$, т.е.

$$5n+2x=35. \quad (*)$$

Если $n \geq 7$, то левая часть последнего равенства больше 35, поэтому $n \leq 6$. Если $n \leq 5$, то $2x \geq 10$, т.е. $x \geq 5 \geq n$, что невозможно. Поэтому единственный вариант – это $n=6$. Тогда $x=2{,}5$ – вес всей съеденной колбасы (в у.е.), $n-x=3{,}5$ – вес всего съеденного хлеба, а в васином бутерброде хлеба и колбасы поровну – по 0,5 условных единиц.

2-й способ. Пять васиных бутербродов содержат всю съеденную семьёй колбасу и 5/7 всего съеденного хлеба, т.е. пять васиных бутербродов весят меньше, чем вся съеденная колбаса вместе со всем съеденным хлебом, следовательно, семья съела больше пяти бутербродов. Семь васиных бутербродов содержат весь съеденный семьёй хлеб и 7/5 всей съеденной колбасы, т.е. семь васиных бутербродов весят больше, чем вся съеденная колбаса вместе со всем съеденным хлебом, следовательно, семья съела меньше семи бутербродов. Отсюда следует, что в семье 6 человек.

Критерии.

Обоснованно получен верный ответ – **7 баллов.**
В решении использовано уравнение (*) или аналогичное ему, которое решено перебором, **– 7 баллов.**
В решении использовано уравнение $7n-2y=35$, где y – вес съеденного хлеба, или аналогичное ему, и показано, что $n>5$, но не обосновано, что $n<7$, **– 4 балла.**
Правильный ответ без обоснования – **0 баллов.**

5. Имеется 8 внешне одинаковых монет, 7 из которых весят по одному грамму (настоящие), а восьмая весит 2 грамма (фальшивая). Держа монету в руках, мы не можем определить, легче она или тяжелее другой монеты. Также имеются чашечные весы с дефектом: если массы предметов, лежащих на левой и правой чашах этих весов, различаются на 1 грамм или меньше, то весы остаются в равновесии, а если отличие больше, чем на грамм, то перевешивает более тяжёлая чаша. Например, если на одной чаше лежит настоящая монета, а другая чаша пустая, то весы будут в равновесии, а если на одной чаше лежит фальшивая монета, а другая чаша пустая, то перевесит фальшивая монета. Как за 3 взвешивания на этих весах гарантированно найти фальшивую монету?

Решение.

Разобьём монеты на 3 группы: в одной 4 монеты, в другой 3, в третьей одна.

1 взвешивание. Кладём на одну чашу весов первую группу, на другую – вторую. Если перевесила первая чаша, то в ней фальшивая монета, и у нас есть четыре монеты, среди которых присутствует фальшивая. Если весы оказались в равновесии, то фальшивой монеты нет на первой чаше, значит, она либо на второй, либо её не клали на весы. Объединяем вторую и третью группы и тоже получаем 4 монеты, среди которых присутствует фальшивая.

Разобьём 4 монеты, среди которых есть фальшивая, на 3 группы: 2 монеты, 1 монета и 1 монета.

2 взвешивание. Кладём на одну чашу весов первую группу, на другую – вторую. Если перевесила первая чаша, то в ней фальшивая монета, и у нас есть две монеты, среди которых присутствует фальшивая. Если весы оказались в равновесии, то фальшивой монеты нет на первой чаше, значит, она либо на второй, либо её не клали на весы. Объединяем вторую и третью группы и тоже получаем 2 монеты, среди которых присутствует фальшивая.

Обозначим 2 монеты, среди которых есть фальшивая, как А и В.

3 взвешивание. Кладём на одну чашу весов монету А, другую оставляем пустой. Если перевесила монета А, то она фальшивая. Если весы в равновесии, то В – фальшивая.

Критерии.

Полное правильное решение **– 7 баллов.**
Начало решения правильное (разбиение на группы 4+3+1), но рассмотрены не все варианты результатов взвешивания или сделаны неверные выводы **– 1-2 балла.**