

11 класс

1. Петя написал на доске многочлен $x^2 + px + q$, а Вася – многочлен $x^2 + rx + s$, где p, q, r, s – действительные числа, $p \neq q, r \neq s$. Оказалось, что корни первого многочлена равны r и s , а корни второго равны p и q . Какие многочлены были написаны на доске?
2. Найдите все натуральные числа N , удовлетворяющие условию $3 + N + N! = 3^N$ ($N!$ обозначает произведение всех последовательных натуральных чисел, начиная с 1 и заканчивая N).
3. Можно ли отметить на плоскости семь точек так, чтобы всякая прямая, проведённая через две из этих точек, содержала 3 отмеченные точки и не содержала остальные 4?
4. Докажите неравенство $(x^2 + y^2)(y^2 + z^2)(z^2 + x^2) \geq (x^2 + yz)(y^2 + zx)(z^2 + xy)$, где $x, y, z \geq 0$.
5. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты, пересекающиеся в точке H . Около треугольников BCH , CAH , ABH описаны окружности с центрами в точках A_1 , B_1 , C_1 соответственно. Докажите, что отрезки AA_1 , BB_1 , CC_1 проходят через одну точку и точкой пересечения делятся пополам.