МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ №4 (764)

ИЗДАЕТСЯ С 1992 г.

mat.1september.ru

электронная версия журнала
дополнительные материалы
в Личном кабинете
на сайте
www.1september.ru

издательский дом
1september.ru
Первое сентября
апрель 2015

МАТЕМАТИКА Подписка на сайте www.1september.ru или по каталогу «Почта России»: 79073 (бумажная версия); 12717 (CD-версия)

ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ДОМ «ПЕРВОЕ СЕНТЯБРЯ»
Главный редактор: Артем Соловейчик (генеральный директор)
Коммерческая деятельность: Константин Шмарковский (финансовый директор)
Развитие, IT и координация проектов: Сергей Островский (исполнительный директор)
Реклама, конференции и техническое обеспечение Издательского дома: Павел Кузнецов
Производство: Станислав Савельев
Административно-хозяйственное обеспечение: Андрей Ушков
Педагогический университет: Валерия Арсланьян (ректор)

ЖУРНАЛЫ ИЗДАТЕЛЬСКОГО ДОМА:
Английский язык – Е. Богданова, **Библиотека в школе** – О. Громова, **Биология** – Н. Иванова, **География** – А. Митрофанов, и.о. **Дошкольное образование** – Д. Тюттерин, **Здоровье детей** – Н. Сёмина, **Информатика** – С. Островский, **Искусство** – О. Волкова, **История** – А. Савельев, **Классное руководство и воспитание школьников** –М. Битянова, **Литература** – С. Волков, **Математика** – Л. Рослова, **Начальная школа** – М. Соловейчик, **Немецкий язык** – М. Бузоева, **ОБЖ** – А. Митрофанов, **Русский язык** – Л. Гончар, **Спорт в школе** – О. Леонтьева, **Технология** – А. Митрофанов, **Управление школой** – Е. Рачевский, **Физика** – Н. Козлова, **Французский язык** – Г. Чесновицкая, **Химия** – О. Блохина, **Школа для родителей** – Л. Печатникова, **Школьный психолог** – М. Чибисова.

Иллюстрации: фотобанк Shutterstock

На с. 1 и с. 64 — коллажи из иллюстраций, взятых с сайтов: http://sovsekretno.ru, www.youtube.com, baltzer.com, http://ru-travel.livejournal.com/24810341.html, http://andrewboykov 2013.andrewboykov.livejournal.com

УЧРЕДИТЕЛЬ: ООО «ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ДОМ «ПЕРВОЕ СЕНТЯБРЯ»
Зарегистрировано ПИ №ФС77-58424 от 25.06.14 в Роскомнадзоре
Подписано в печать: по графику 16.02.15, фактически 16.02.15 Заказ №
Отпечатано в ОАО «Первая Образцовая типография» филиал «Чеховский печатный двор» ул. Полиграфистов, д. 1, Московская область, г. Чехов, 142300; Сайт: www.chpd.ru; E-mail: sales@chpk.ru; факс: 8(496)726-54-10, 8(495)988-63-76

АДРЕС РЕДАКЦИИ И ИЗДАТЕЛЯ:
ул. Киевская, д. 24, Москва, 121165
Телефон/ факс: **(499) 249-3138**
Отдел рекламы: **(499) 249-9870**
Сайт: **1september.ru**

ИЗДАТЕЛЬСКАЯ ПОДПИСКА:
Телефон: **(499) 249-4758**

ПОДПИСНЫЕ ИНДЕКСЫ:
Почта России: бумажная версия – **79073**; CD версия – **12717**

В НОМЕРЕ

К материалам, обозначенным этим символом, есть дополнительные материалы в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru

ОБЛАЧНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ ОТ ИЗДАТЕЛЬСКОГО ДОМА «ПЕРВОЕ СЕНТЯБРЯ»

УВАЖАЕМЫЕ ПОДПИСЧИКИ БУМАЖНОЙ ВЕРСИИ ЖУРНАЛА!

Дополнительные материалы к номеру и электронная версия журнала находятся в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru
Для доступа к материалам воспользуйтесь, пожалуйста, кодом доступа, вложенным в № 1.
Срок действия кода с 1 января по 30 июня 2015 года.

Для активации кода:
· Зайдите на сайт www.1september.ru
· Откройте Личный кабинет (зарегистрируйтесь)
· Введите код доступа и выберите свое издание

Справки: podpiska@1september.ru или через службу поддержки на портале «Первого сентября»

МАТЕМАТИКА. ПЕРВОЕ СЕНТЯБРЯ
Методический журнал для учителей математики
Издается с 1992 г. Выходит один раз в месяц

РЕДАКЦИЯ:
Главный редактор: Л. Рослова
Отв. секретарь: Т. Черкавская
Редакторы: П. Камаев, О. Макарова, И. Коган
Дизайн макета: И. Лукьянов. Дизайн обложки: Э. Лурье
Корректор: Л. Громова. Верстка: Л. Кукушкина

Распространяется по подписке
Цена свободная
Тираж 25 000 экз.

Тел. редакции: **(499) 249-3460**
E-mail: **mat@1september.ru**
Сайт: **mat.1september.ru**

ДАЕШЬ БАНК УУД!

Л. РОСЛОВА

Где учитель может получить поддержку, помощь, совет? Где может поделиться своими сомнениями, идеями, находками? Конечно, в школьном методобъединении учителей по предмету? Методобъединение — это коллеги, которые всегда рядом. Это опыт старшего товарища, переданный вчерашнему выпускнику педвуза, это плечо друга; это задор и современные технологии от молодого поколения педагогов. Это коллективный мозг, которому не страшны никакие модернизации, стандартизации и аттестации.

В нашей редакционной почте нечасто, но попадаются рассказы о работе школьных методобъединений. А хотелось бы, чтобы это случалось чаще. Вот мы и задумали новый проект. Названия, правда, у него еще нет. Придумаем.

В чем его суть? Мы хотим предложить читателям журнала, объединенным в школьные методические объединения, взять в разработку тему формирования универсальных учебных действий. Разобраться, почитать литературу, обсудить, выбрать один из видов УУД, на котором и сконцентрировать дальнейшую работу. Далее надо сформулировать результаты, которых вы хотите достичь, и подобрать, придумать задания, которые и будут работать на достижение запланированных результатов. И, наконец, надо придумать и провести урок, включающий такие задания. А нам в редакцию прислать его описание, фото, а может быть, и видеозапись с урока. Работу можно распределить: кто-то изучает теорию и рассказывает коллегам, кто-то проводит урок, кто-то описывает его. Чем подробнее описание, тем интереснее; причем ждем от вас описание не только самого урока, но и его подготовки, включая вклад каждого члена группы в выбор темы, разработку заданий. Интересен и анализ урока. Это — минимальное задание. А можно разработать серию таких уроков по какой-нибудь теме курса математики. Мы готовы оказывать помощь, участвуя в обсуждении, привлекая психологов, также работающих по тематике УУД.

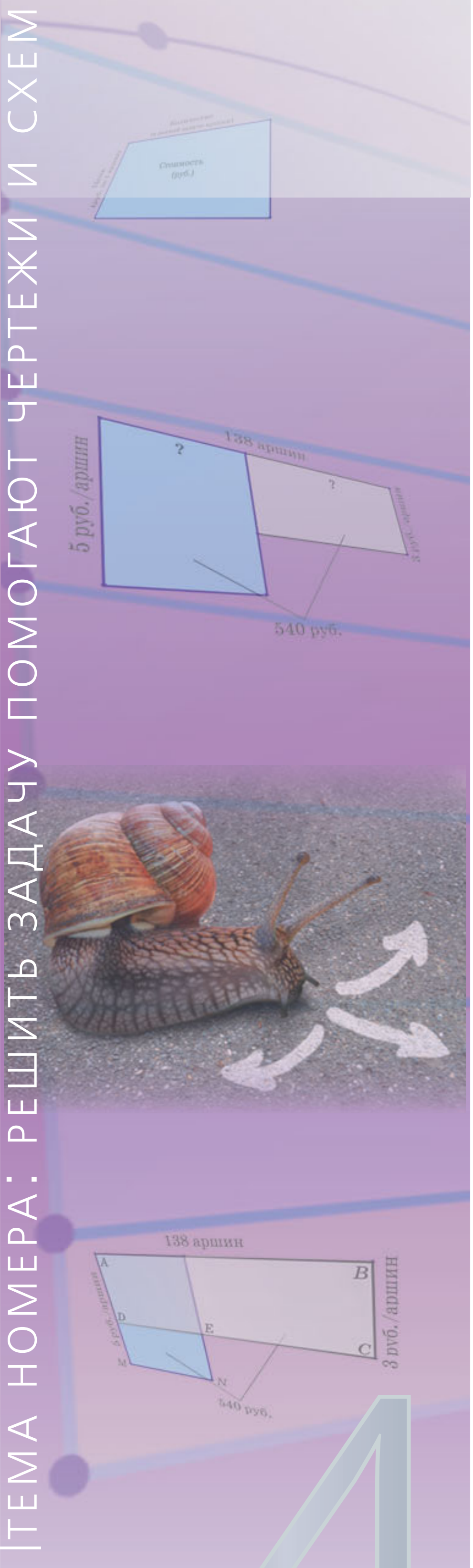
В чем сверхзадача? Таким образом, прилагая коллективные усилия, можно подготовить обширный материал по всему курсу математики, это будет своеобразным банком уроков, формирующих универсальные учебные действия. Уроки, вошедшие в банк, могут доходить до читателей в электронном виде через личные кабинеты. Давайте начнем формирование банка УУД. А отметить вклад участников проекта мы можем дипломами от издательского дома «Первое сентября». Давайте работать вместе!

фото с сайта http://sait-nikylina.umi.ru

Методическое объединение учителей математики и информатики средней школы № 2 пос. Пангоды, Надымский район, ЯНАО

М. ЛАТЫШЕВА,
г. Москва

КАК ПЛОСКОСТНОЙ ЧЕРТЕЖ ПОМОГАЕТ В РЕШЕНИИ ТЕКСТОВЫХ ЗАДАЧ



Текстовые задачи — это та тема, которая некоторым детям дается с большим трудом, а у части учащихся вызывает большой интерес. Если говорить про задачи на равномерные процессы (на движение, совместную работу и т.д.), то есть метод альтернативный алгебраическому, который помогает их решать как одним, так и другим. В 5-х и 6-х классах его преимущество перед алгебраическим методом заключается в том, что нет необходимости дополнительно и, может быть, преждевременно учить ребенка решать сложные для него уравнения и их системы. Нужно лишь сосредоточиться на величинах, участвующих в задаче, и увидеть все отношения, которые их связывают. Речь идет о решении задач с помощью модели. Скажу, что́ именно я понимаю под моделью.

Во-первых, модель должна отражать все отношения между величинами, содержащимися в задаче.

Во-вторых, модель должна «подсказывать» путь решения; указывать, какие действия нужно совершить с теми или иными величинами, чтобы получить ответ на поставленный вопрос.

Для решения задач на равномерное движение можно использовать очень простую и понятную детям модель — прямоугольник (я такую модель буду называть плоскостным чертежом). Ведь длины его сторон и площадь находятся в тех же отношениях, что и скорость, время и расстояние:

$$S = a \cdot b \text{ и } S = t \cdot v.$$

Также эта модель подойдет и для других задач, где величины связаны прямой и обратной пропорциональностью.

В качестве первого примера рассмотрим одну несложную задачу из курса 4–5-х классов.

Задача 1. Улитка ползет по дорожке со скоростью 35 см/мин, а вслед за ней ползет гусеница со скоростью 50 см/мин. Через какое время гусеница догонит улитку, если сначала между ними было 300 см?

Решение. Чтобы изобразить модель этой задачи, нам понадобится два прямоугольника, на одном из которых будут отражены величины, характеризующие процесс движения улитки, а на втором — процесс движения гусеницы.

Обратим внимание, что время движения в первом и втором случае будет одинаковым, а это означает, что одна из сторон первого прямоугольника равна одной из сторон другого прямоугольника. Также отметим, что то расстояние, которое указано в задаче (300 см), обозначает не что иное, как разность расстояний, пройденных гусеницей и улиткой. Это будет означать, что нам нужно сравнить площади прямоугольников, поэтому удобнее всего изобразить их с

К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru (Презентация + все задачи) одной общей стороной (AD) и наложенными друг на друга так, как на рисунке 1.

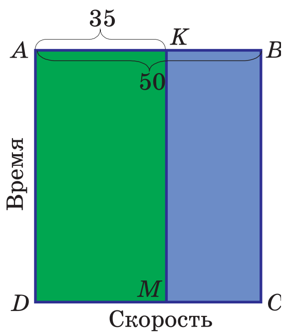


Рис. 1

Разность площадей будет равна площади прямоугольника $KBCM$. Из чертежа мы видим, что единственное первое действие, которое здесь логично сделать, это найти длину отрезка KB как разность отрезков AB и AK:

1) 50 – 35 = 15 см/мин.

Теперь мы знаем одну из сторон прямоугольника $KBCM$ и его площадь, а значит, сумеем найти и вторую сторону, длина которой и будет обозначать количество минут до встречи:

2) 300 : 15 = 20 мин.

Ответ: через 20 мин.

Замечу, что использование плоскостного чертежа в самом начале изучения задач на движение (то есть в начальной школе) помогает учащимся, которым трудно «представить» задачу, но в этой статье я хочу показать, как работает плоскостной чертеж в решении более сложных задач.

Задача 2. Отец и сын катаются на коньках по кругу. Время от времени отец обгоняет сына. После того, как сын поменял направление своего движения на противоположное, они стали встречаться в 5 раз чаще. Во сколько раз отец бегает быстрее сына?

Задачи такого плана ставят детей в тупик. Слишком мало чисел, за которые можно было бы «зацепиться». Выявление одинаковых величин тоже не дает плана решения, а плоскостной чертеж позволяет связать все воедино. Внимательный ученик решение задачи увидит на чертеже.

Приведу пошаговый разбор решения задачи и построения чертежа. Устное обсуждение.

Шаг 1

1. Сколько ситуаций описано в задаче?

– Две: отец и сын двигались в одном направлении и в противоположных направлениях.

Как это отобразить на чертеже?

– Понадобится два чертежа.

2. Сколько действующих лиц в каждой ситуации?

– Два: отец и сын.

Как это отобразить на чертеже?

– На каждом чертеже рисуем два прямоугольника. На одном отображаем характеристики движения отца, на другом — сына.

3. Что мы знаем про время, скорость и расстояние, когда отец и сын двигались в одном направлении?

– Время движения от встречи до встречи одинаковое.

– Скорость движения отца больше.

Как это отобразить на чертеже?

– Стороны прямоугольников, изображающие время, одной длины, а сторона, изображающая скорость, в одном прямоугольнике больше, чем в другом (пока не известно, на сколько, просто больше).

В результате этого обсуждения мы можем нарисовать вот такой рисунок (рис. 2).

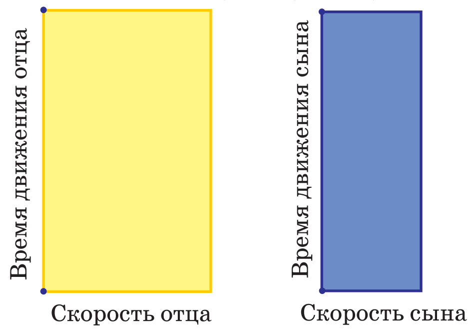


Рис. 2

Шаг 2

1. Мы обсудили скорость, время движения между встречами, а что можно сказать о расстояниях, которые проезжают отец и сын между двумя встречами?

– Отец проезжает больше сына на 1 круг (*это не очевидный факт для учащихся, возможно, придется нарисовать рисунок, чтобы дети увидели эту разницу в один круг*).

Как это отобразить на чертеже?

– Разница расстояний будет изображаться разницей площадей. Чтобы ее было лучше видно, изобразим один прямоугольник на другом, совместив их по стороне, изображающей время, и получим такой рисунок (рис. 3).

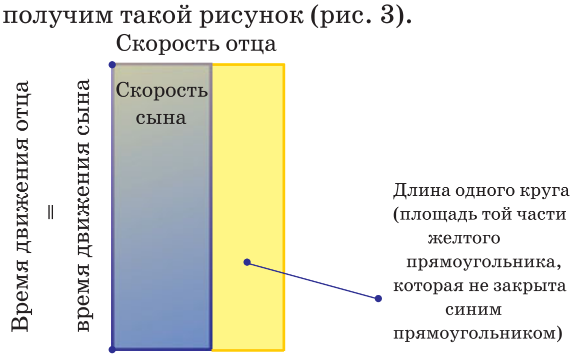


Рис. 3

Шаг 3

1. Что произошло с теми же величинами, когда сын изменил направление движения?

– Время движения от встречи до встречи по-прежнему одинаково у отца и сына, но уже в пять раз меньшее по сравнению с предыдущей ситуацией («они стали встречаться в 5 раз чаще»).

– Скорости и отца, и сына те же, что и в первой ситуации.

Как это отобразить на чертеже?

– Отрезки, изображающие время, в пять раз короче по сравнению с предыдущей ситуацией.

– Стороны, изображающие скорости, остались той же длины (рис. 4).

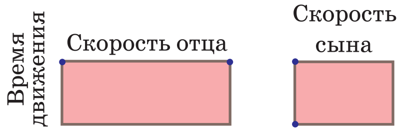


Рис. 4

После этого обсуждения можно нарисовать рисунок для второй ситуации.

Шаг 4

1. Опять мы ничего не сказали о расстояниях, которые отец и сын проходят от встречи до встречи.

– Теперь это расстояние составляет один круг, но пройденный отцом и сыном вместе.

Как это отобразить на чертеже?

– Так как расстояние изображается прямоугольником (величина расстояния равна площади этого прямоугольника), нужно увидеть общую площадь прямоугольников. Для этого расположим прямоугольники рядом друг с другом, «склеив» их по стороне, изображающей время, и получим такой рисунок (рис. 5).

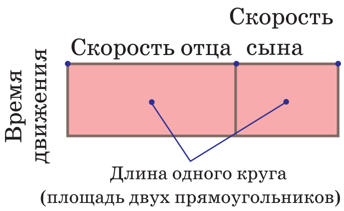


Рис. 5

Шаг 5

1. Как связаны между собой первая и вторая ситуации в задаче?

– В обоих случаях встречается одинаковое расстояние, равное одному кругу.

Как это отображается на чертеже?

– Площади прямоугольников, которые обозначают длину круга, должны быть равны. Чтобы увидеть это на чертеже, наложим рисунок, соответствующий второй ситуации, на рисунок, соответствующий первой ситуации (рис. 6).

На рисунке 6 розовый прямоугольник разбит на три прямоугольника, из которых два крайних равны.

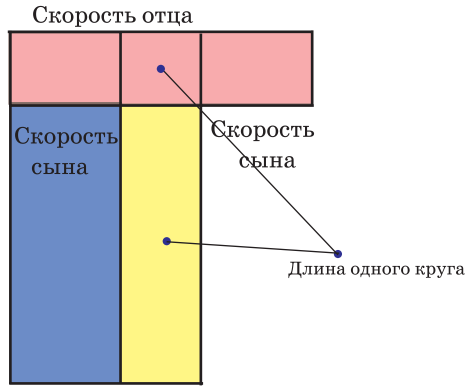


Рис. 6

Шаг 6

1. Какое условие не отображено на чертеже?

– «Они стали встречаться в 5 раз чаще».

Как это отразить на чертеже?

– Разделим $ABCD$ на 5 равных частей (рис. 7).

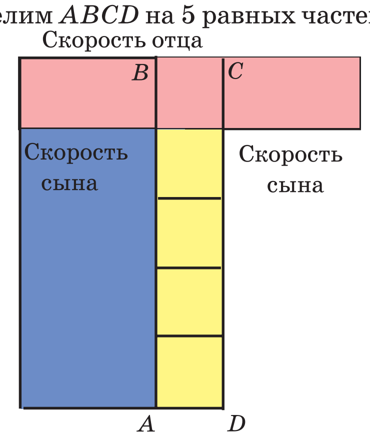


Рис. 7

Шаг 7

Какие выводы можно сделать, глядя на чертеж?

– Площадь желтого прямоугольника, который мы получили для первой ситуации (см. рис. 3), и площадь прямоугольника, который мы получили для второй ситуации (см. рис. 5), соответствуют длине одного круга, поэтому площадь каждой из равных частей розового прямоугольника должна быть равна площади двух из пяти частей прямоугольника $ABCD$ (рис. 8). Значит, скорость отца относится к скорости сына как 3 к 2.

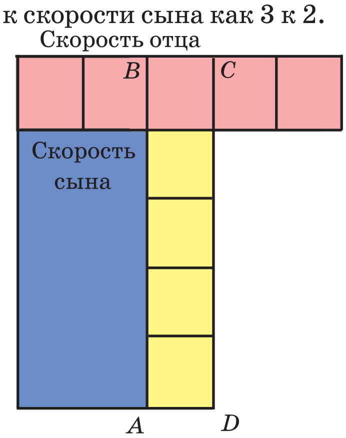


Рис. 8

Ответ: в 1,5 раза

Задача 3. Пароход от Нижнего Новгорода до Астрахани идет 5 суток, а от Астрахани до Нижнего Новгорода 7 суток. Сколько дней будут плыть по течению плоты от Нижнего Новгорода до Астрахани?

Шаг 1

1. Сколько ситуаций описано в задаче?

– Три: движение парохода от Нижнего Новгорода до Астрахани; движение парохода от Астрахани до Нижнего Новгорода; движение плота от Нижнего Новгорода до Астрахани.

Как это движение отразить на чертеже?

– Понадобится три чертежа.

2. Сколько действующих лиц в каждой ситуации?

– По одному.

Как это отобразить на чертеже?

– На каждом чертеже надо начертить по одному прямоугольнику.

3. Что известно про скорость, время и расстояние в первой ситуации (движение парохода от Нижнего Новгорода до Астрахани)?

– Время движения по течению реки 5 суток.

– Скорость парохода по течению реки равна сумме его собственной скорости и скорости течения реки.

– А расстояние нам неизвестно.

Как это отобразить на чертеже?

– Отрезок, изображающий время, лучше нарисовать состоящим из пяти одинаковых отрезков.

– Отрезок, изображающий скорость, равен сумме двух отрезков: собственной скорости парохода и скорости течения реки.

– Площадь получившегося прямоугольника будет соответствовать расстоянию (рис. 9).

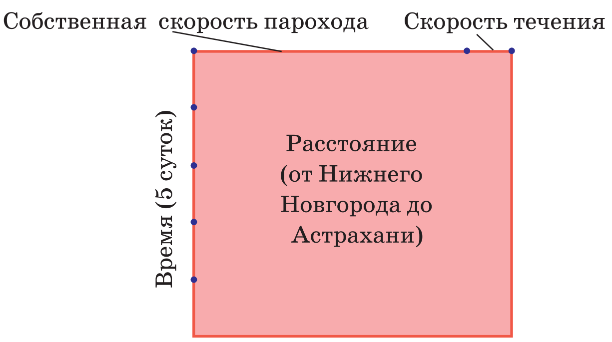


Рис. 9

Шаг 2

Что известно про скорость, время и расстояние во второй ситуации (при движении парохода от Астрахани до Нижнего Новгорода).

– Время движения против течения реки равно 7 суткам.

– Скорость движения парохода против течения реки равна разности его собственной скорости и скорости течения реки.

– А расстояние нам неизвестно.

Как это отобразить на чертеже?

– Отрезок, изображающий время, лучше нарисовать состоящим из семи одинаковых отрезков.

– Длина отрезка, изображающего скорость, равна разности длин отрезков, изображающих собственную скорость и скорость течения.

– Площадь получившегося прямоугольника будет соответствовать расстоянию (рис. 10).

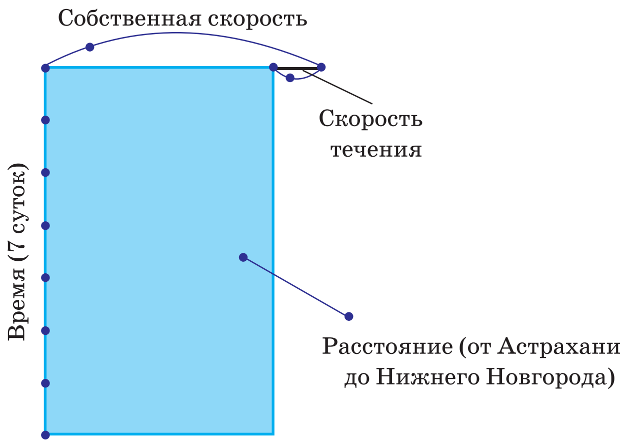


Рис. 10

Шаг 3

1. Как связаны первая и вторая ситуации?

– Расстояния, пройденные пароходом, одинаковы.

Как это отобразить на чертеже?

– Площади прямоугольников равны. Чтобы удобнее было их сравнивать, наложим один прямоугольник на другой (рис. 11).

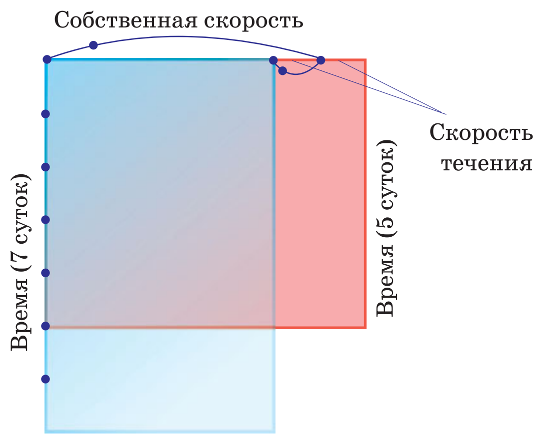


Рис. 11

Шаг 4

1. Какие выводы можно сделать, глядя на рисунок?

– Так как площади равны, то части синего и красного прямоугольников, не совпавшие при наложении, равны.

Как это отобразить на чертеже?

– Обратим внимание, что каждый из этих прямоугольников можно разделить на две одинаковые части. Значит, и эти части между собой равны, выделим их желтым цветом (рис. 12).

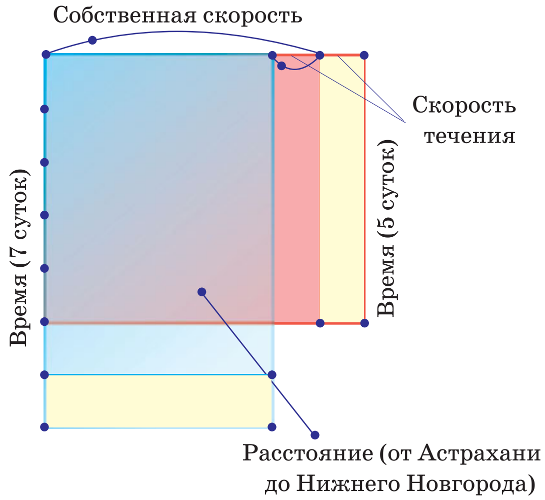


Рис. 12

(*Это как раз не видно на чертеже, но ведь мы не знали, как относятся собственная скорость и скорость течения, и выбирали эти отрезки наугад. При желании, можно перестроить чертеж, опираясь на новую информацию.*)

Шаг 5

1. Что известно про скорость, время и расстояние в третьей ситуации (движение плота от Нижнего Новгорода до Астрахани).

– Время движения плота неизвестно.

– Скорость движения плота равна скорости течения.

– Расстояние, пройденное плотом, то же, что и в первых двух ситуациях.

Как это отобразить на чертеже?

– Нужно построить прямоугольник с площадью, равной площади первого (или второго) прямоугольника. Со стороной, длина которой равна отрезку, изображающему скорость течения.

Теперь самая важная часть решения. Если бы мы знали, сколько раз поместится желтый прямоугольник в красном, то ответ к задаче найти было бы несложно. Но нам известно, что такой же по площади желтый прямоугольник в синем поместится 7 раз. Это видно из чертежа (рис. 13).

Следовательно, и в красном прямоугольнике желтый тоже поместится 7 раз. А значит, чтобы построить правильный чертеж к последней ситуации, нужно прямоугольник, одна сторона

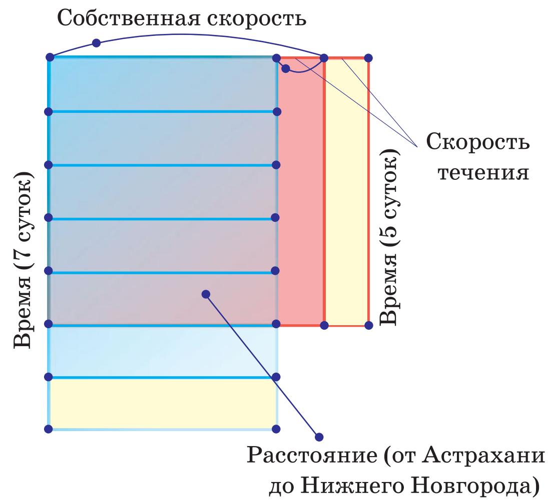


Рис. 13

которого равна отрезку, изображающему скорость течения, а другая равна отрезку, изображающему время, равное 5 суткам, повторить 7 раз (рис. 14).

Тогда ответ становится очевидным: $5 \cdot 7 = 35$ (суток).

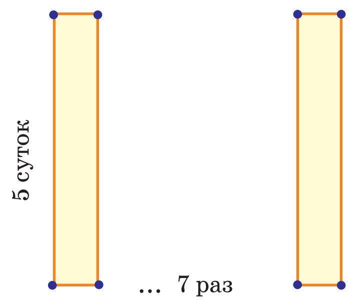


Рис. 14

Ответ: 35 суток.

Задачи «на работу» воспринимаются детьми хуже, чем задачи на движение, так как понять, что такое производительность труда, им сложнее, чем понять суть скорости движения.

В этом случае модель если и не поможет представить себе весь процесс работы, то хотя бы покажет зависимость между всеми величинами процесса.

Задача 4. Ваня, Коля и Антон могут одинаково быстро вскопать землю лопатой. Если любые два из мальчиков будут работать вместе, то справятся с земельным участком за полтора часа. За какое время ребята вскопают тот же участок, если будут работать все трое вместе?

Обсуждаем решение.

Шаг 1

1. Сколько ситуаций описано в задаче?

– Две: работают два мальчика и три мальчика.

Как это может быть отражено на чертеже?

– Понадобится два чертежа.

2. Сколько действующих лиц в первой ситуации?

– Два: работают два мальчика вместе.

Как это отобразить на чертеже?

– На первом чертеже будет два прямоугольника. Изобразить их нужно будет один рядом с другим так, чтобы увидеть общий объем выполненной работы.

3. Что известно про величины в первой ситуации?

– Время и производительность труда одинаковы для каждого мальчика. Время работы каждого равно 1,5 ч.

Как это отобразить на чертеже?

– Смотри рисунок 15.

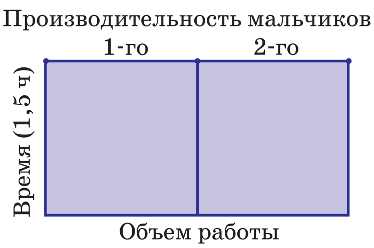


Рис. 15

Шаг 2

1. Сколько действующих лиц во второй ситуации?

– Три: «будут работать все трое вместе».

Как это отобразить на чертеже?

– На чертеже появится еще один прямоугольник, который будет расположен рядом с двумя предыдущими.

2. Что известно про величины во второй ситуации?

– Производительность труда каждого мальчика осталась прежней.

– Объем работы сохранился.

– Время работы каждого мальчика одинаковое.

Как это отобразить на чертеже?

– У трех прямоугольников стороны, изображающие производительность труда, равны.

– Площадь всех трех прямоугольников должна быть равна площади двух прямоугольников из первой ситуации. А это обозначает, что отрезок, изображающий время работы, должен уменьшиться. Главный вопрос: во сколько раз (рис. 16).

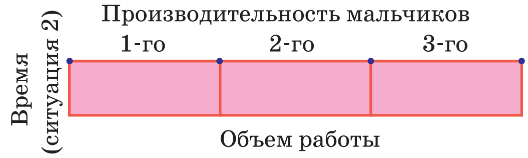


Рис. 16

Чтобы увидеть на чертеже равенство площадей, наложим один чертеж на другой (рис. 17).

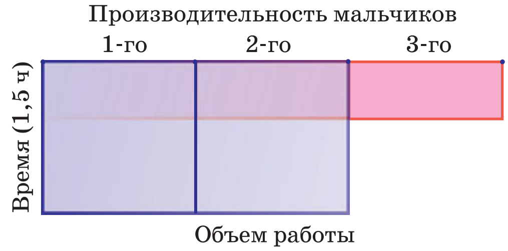


Рис. 17

Обратим внимание, что площади двух синих и красного прямоугольников, которые не совпали при наложении, равны. Но ведь горизонтальные стороны у этих прямоугольников равны. Значит, вертикальная сторона красного прямоугольника (та, что обозначает время) в два раза больше стороны синего прямоугольника. «Доработаем» чертеж, и ответ становится очевидным (рис. 18).

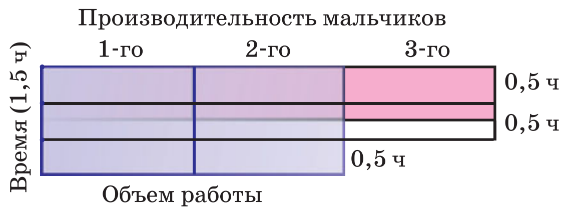


Рис. 18

Ответ: 1 час

Рассмотрим решение задачи, которая, безусловно, известна многим, так как она взята из рассказа А.П. Чехова «Репетитор».

Задача 5. Купец купил 138 аршин черного и синего сукна за 540 руб. Спрашивается, сколько аршин купил он того и другого, если синее стоило 5 руб. за аршин, а черное 3 руб.?

Для работы с плоскостным чертежом введем следующие обозначения (рис. 19):

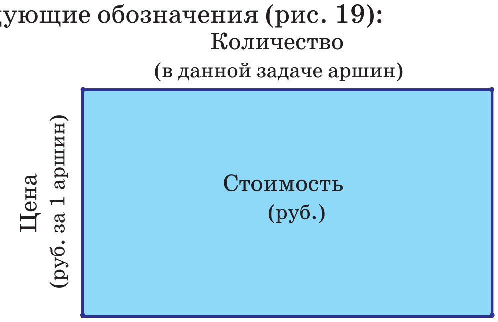


Рис. 19

Так как по условию задачи нам известна общая стоимость, то прямоугольники нам следует расположить рядом друг с другом; также нам известно общее количество (138 аршин), а это значит, что прямоугольники нам следует изобразить таким образом, чтобы эту величину тоже было видно на чертеже (рис. 20):

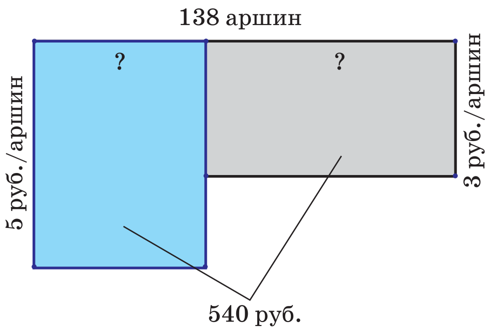


Рис. 20

Теперь начинаем работать уже с моделью. Как, зная длины отрезков, изображенных на чертеже, а также общую площадь, найти неизвестное.

Один из первых шагов может быть следующим: найдем площадь прямоугольника со сторонами 138 и 3 (рис. 21):

$$138 \cdot 3 = 414 \text{ руб.}$$

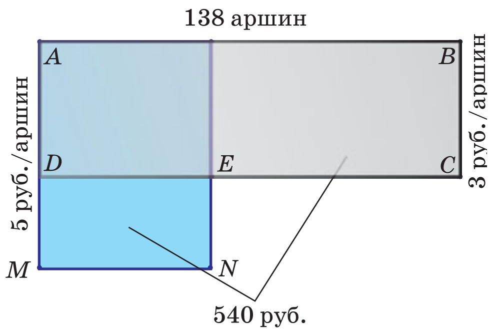


Рис. 21

Теперь найдем площадь оставшейся части фигуры, то есть площадь прямоугольника $DENM$:

$$540 - 414 = 126 \text{ руб.}$$

Но в этом прямоугольнике, кроме площади, известна одна из сторон (5 – 3 = 2 руб./аршин), а это значит, что мы можем найти и другую сторону: 126 : 2 = 63 аршин.

Вернувшись к условию задачи, понимаем, что мы нашли количество аршин синего сукна. Осталось последнее действие:

$$138 - 63 = 75 \text{ аршин.}$$

Ответ: 63 аршина синего и 75 аршинов черного сукна.

Данный метод, безусловно, нельзя назвать легким. Но и задачи, которые мы здесь разобрали, тоже непростые. Все они взяты из материалов различных олимпиад для 5–7-х классов. Главное, на мой взгляд, то, что решение задач с помощью плоскостного чертежа учит детей рассуждать; вникать в отношения между величинами; работать непосредственно с чертежом, перекраивать его; учит его «видеть», дает понимание сути равновеликих фигур. А ведь все это очень скоро пригодится при изучении геометрии. Да и умение решать задачу разными способами, желание найти рациональное решение тоже является важным.

Далее приведу несколько олимпиадных задач, которые «красиво» решаются с помощью плоскостного чертежа.

Задачи

1. Два пешехода стартовали одновременно по круговой дороге с одного места в одном направлении. Пешеход, идущий быстрее, нагнал другого через 36 минут. Если бы они стартовали в противоположных направлениях, то встретились бы через 4 минуты. За сколько минут каждый из пешеходов может обойти круговую дорогу?

2. Кенгуру-мама прыгает за 1 секунду на 3 метра, а ее маленький сынишка прыгает на 1 метр за 0,5 секунды. Они одновременно стартовали от бассейна к эвкалипту по прямой. Сколько секунд мама будет ждать сына под деревом, если расстояние от бассейна до дерева 240 метров?

3. По дороге идут два туриста. Один из них делает шаги на 10% короче и в то же время на 10% чаще, чем другой. Кто их туристов идет быстрее и почему?

4. Железнодорожный состав проходит мимо наблюдателя в течение t_1 секунд, при той же скорости он проходит через мост длиной в a метров в течение t_2 секунд. Найдите длину и скорость поезда.

5. Царь выделял на содержание писарского приказа 1000 рублей в год (все писари получали поровну). Царю посоветовали сократить численность писарей на 50%, а оставшимся писарям повысить жалованье на 50%. На сколько изменятся при этом затраты царя на писарский приказ?

5–6 классы

Н. КОРДИНА,
shool1dem@rambler.ru,
г. Демидов, Смоленская обл.

РЕШИТЬ УРАВНЕНИЕ ПОМОЖЕТ СХЕМА

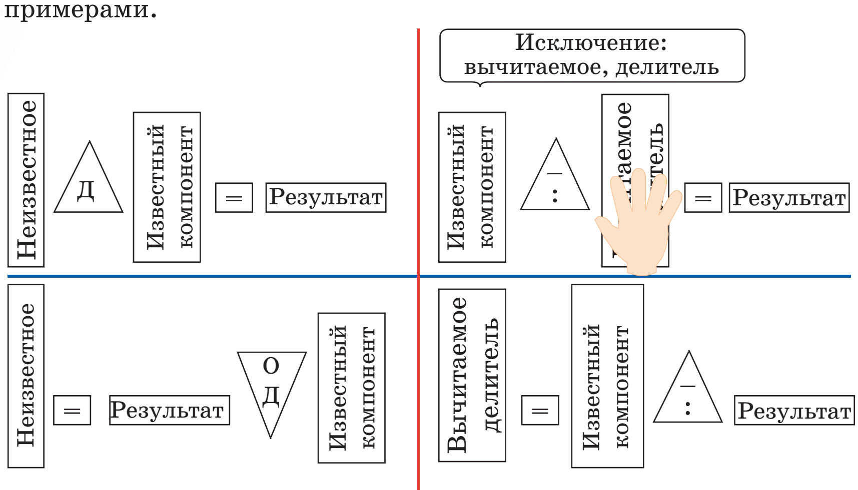
Решение уравнений нередко вызывает затруднения у учащихся. В данной статье мне хотелось бы рассказать о построенной системе упражнений, об использовании ИКТ. Предлагаемый подход способствует успешному усвоению материала, формированию универсальных учебных действий. Надеюсь, что мой опыт изучения данной темы будет интересен и полезен моим коллегам.

Традиционно правила нахождения неизвестных компонентов изучаются раздельно. Решаются уравнения на основе одного-двух правил. Создается иллюзия успеха, но как только пройдены все правила нахождения неизвестных компонентов, выясняется, что ученики путают правила, возникают массовые ошибки подмены одного действия другим.

Как показывает мой опыт, данной проблемы можно избежать, изучая все виды уравнений одновременно и внося коррективы в систему упражнений. При таком подходе ученики будут рассматривать различие и сходство уравнений разного вида, осуществлять выбор действий, что способствует не только успешному усвоению правил нахождения неизвестных компонентов, но и помогает в формировании у учащихся универсальных логических действий.

Запоминание всех правил нахождения неизвестных компонентов уравнения требует восприятия и осмысления около 60 слов; правила воспринимаются учениками как нечто разрозненное, не связанное между собой — отсюда и путаница в их воспроизведении. Вместо привычной записи правил предлагаем схему, устанавливающую связь между ними. Экономия букв, использование ладони, треугольников, линий позволяет значительно облегчить процесс запоминания.

Конечно, к схеме учеников подводим в ходе анализа решения уравнений — ищем общее и различие в нахождении неизвестного компонента. Схема записывается учениками в тетрадь, и на первых уроках она неоднократно ими прочитывается, иллюстрируется примерами.



Д — действие, ОД — обратное действие

Вычитаемое = уменьшаемое – разность

Делитель = делимое : частное

К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru

При решении уравнений от ученика требуется проговорить соответствующую часть схемы, записать названия компонентов и правила нахождения неизвестного компонента.

Решение уравнения	Действия ученика
$16 - x = 4$	
ум выч разн	Записывает компоненты
	Проговаривает: «Нужно найти неизвестное вычитаемое, это исключение, применяем правило ладошки». Прикрывает вычитаемое и знак «равно» ладонью
$x = 16 - 4$ *ум – разн*	Проговаривает и записывает правило

Ученик осознанно строит речевое высказывание в устной и письменной форме — так осуществляется работа над формированием общеучебных действий.

В систему упражнений включаем задания на отработку названий компонентов, правил нахождения неизвестного компонента, способствующих формированию познавательных универсальных действий.

- Впишите компоненты действия:

… + … = …; … · … = …;
… : … = …; … – … = …

- Найдите ошибки

а) уменьшаемое – слагаемое = разность;
б) слагаемое + слагаемое = сумма;
в) делимое – делитель = частное.

- Установите соответствие:

Разность	Делитель
Частное	Слагаемое
Произведение	Вычитаемое
Сумма	Множитель

- Разбейте на группы и исключите лишнее слово:

а) уменьшаемое, слагаемое, разность, множитель, вычитаемое, сумма;

б) ГЬШЙУБЁНПЁ, НОПЗЙУЕМЭ, РСПЙИГЁЕЁОЙЁ, СБИОПТУЭ, ТМБДБЁНПЁ, ФНЁОЭЩБЁНПЁ. (*Буквы в названии компонентов сдвинуты по алфавиту на* 1, *поэтому уменьшаемое кодируется как ФНЁОЭЩБЁНПЁ. Решение потребует много времени, поэтому предлагается выполнить его дома.*)

Продолжаем работать над правилами нахождения неизвестного компонента.

- Установите соответствие:

уменьшаемое	уменьшаемое – разность
слагаемое	разность – уменьшаемое
вычитаемое	сумма – слагаемое
делимое	сумма + слагаемое
	частное · делитель
	разность + вычитаемое

- Заполните пропуски:

☐ = уменьшаемое – ☐
☐ = ☐ + разность

- Расшифруйте фразу, если необходимо — исправьте ошибки;

ЩФРГЭ ПВЛФК ПЖКЙДЖУФПРЖ ДЭЩКФВЖОРЖ ПХИПР РФ ТВЙПРУФК РФПБФЮ ХОЖПЮЪВЖОРЖ (*В зашифрованной фразе «Чтобы найти неизвестное вычитаемое, нужно от разности отнять уменьшаемое» был осуществлен сдвиг на 2 буквы.*)

Повторение правил с некоторой их реконструкцией более эффективно, чем повторение в неизменном виде.

К сожалению, знание правил не освобождает учеников от ошибок в нахождении неизвестного компонента. Предложите ученикам решить уравнения вида $2x = 1$, $2 - x = 3$. Наверняка в классе найдутся учащиеся, которые запишут $x = 2 : 1$, $x = 3 - 2$ соответственно. Причина данной ошибки в навязанной ученикам еще в начальной школе ошибочной ассоциации «большее число делим на…», «от большего числа отнимаем…». Поэтому с первых уроков в систему упражнений включаются ловушки. Учащиеся еще не знакомы с обыкновенными дробями и отрицательными числами, поэтому решение записывается следующим образом:

$8 \cdot x = 4$ $x = 4 : 8$ $x = ?$
мн мн произ *произ : мн*

(*Знак вопроса означает, что ученик вычислять пока не умеет.*)

Примеры уравнений, предлагаемых на первом уроке:

а) $y : 8 = 56$; б) $x : 9 = 72$; в) $200 : t = 5$;
г) $9x = 3$; д) $39 : y = 3$; е) $x - 17 = 31$;
ж) $17 : x = 34$; з) $y - 28 = 5$; и) $18 + x = 29$;
к) $12 - y = 32$; л) $18x = 6$; м) $28 - y = 13$;
н) $18 + x = 15$.

На протяжении всего этапа закрепления ученик выбирает одно из двух правил согласно схеме, более того, от него требуется абсолютно точное его воспроизведение. В уравнениях «г», «ж», «к», «л», «н» ученик не сможет вычислить корень уравнения. Они предназначены для разрушения ошибочной ассоциации. В итоге ученик думает, анализирует, значит, запоминает правила.

В следующем задании решаем обратную задачу: по решению восстанавливаем уравнение:

а) $\square - \square = 3$; $x = 20 + 3$
б) $\square - \square = 3$; $x = 14 - 3$
в) $\square \cdot \square = \square$; $x = 3 \cdot 4$
г) $\square : \square = 3$; $x = 15 : 5$
д) $\square : \square = 3$. $x = 15 \cdot 3$

В задания на восстановление пропущенных элементов также добавлена ловушка, не попасть в которую сможет тот, кто четко знает правила.

На следующем этапе, решив уравнение, предлагаем ученикам проанализировать его и составить аналогичное уравнение, имеющее, например, корень 3. Казалось бы, это простенькое синтетическое упражнение, но оно позволяет осуществить переход от числового равенства к уравнению.

Ученики достаточно легко составляют уравнения с данным корнем, но на этом этапе важно понять, как получено уравнение. «Как догадались?» — задаю вопрос ученикам, и совместными усилиями составляем алгоритм действий. Создается игровая ситуация: требуется научить ребят составлять уравнение с заданным корнем (*провоцируем ученика на анализ своей умственной деятельности*).

Пример алгоритма действия, составленного вместе с учениками:

✓ $x = 3$.

✓ Выбираем вид уравнения, например:

$$\square - \square = \square$$

✓ Выясняем, что будем искать: неизвестное уменьшаемое или вычитаемое. Например, решили искать неизвестное уменьшаемое. Записали:

$$3 - \square = \square$$

✓ Составляем верное числовое равенство:

$$3 - 1 = 2$$

✓ Заменяем 3 на x и получаем уравнение:

$$x - 1 = 2$$

На следующих уроках алгоритм совершенствуем и учим ребят составлять более сложные уравнения:

$$\square - \square = \square;$$
$$3 \cdot 2 - \square = \square;$$
$$3 \cdot 2 - 1 = 5;$$
$$2x - 1 = 5.$$

Составление уравнений вызывает не только интерес у учеников, но и способствует обогащению логических приемов мышления.

Составить уравнение с данным корнем и проверить, является ли данное число корнем уравнения, — это две взаимосвязанные задачи. Поэтому на уроках по данной теме решаем эти задания одновременно.

В систему упражнений включаем и следующие упражнения на отработку понятия «корень уравнения».

• Восстановите предложение (*в словах переставлены буквы*):

ЗЧНАЕНЕИ УЫКБВ, ПИР КМОРООТ ИЗ НУАЕВРНЯИ ЛУЕТЧПОАСЯ НРОВЕЕ ЧСВИОЕЛО ВРАВНСТЕО ЗЫНАВАТЮ НЕКОРМ УИЯВНРАЕН.

• Вместо знака вопроса вставьте соответствующую букву:

$3x = 15$	$7 - x = 3$	$13x = 26$
Д	Г	?

Знакомим учеников с историей математики.

• Крепкого телосложения юношу судьи одной из первых в истории олимпиад не хотели допускать к спортивным соревнованиям, так как он не вышел ростом. Но он не только стал участником олимпиады, но и победил всех противников. Это был один из величайших математиков Древней Греции. Кто он: Пифагор или Евклид? Число букв в имени ученого совпадает с корнем уравнения $12(2x + x - 1) - 2 = 34x$.

(*В 5-м классе данное уравнение ученики решить не смогут, поэтому должны воспользоваться определением корня.)*

Немаловажным является и понятие «уравнение». Недостаточное внимание этому понятию в 5-м классе приводит к тому, что учащиеся не различают уравнение и неравенство, уравнение и числовое равенство.

Помимо воспроизведения определения уравнения, с учениками выполняем приведенные ниже задания.

• Укажите уравнения среди данных записей:

а) $2x - 3 = 5$; б) $3 - x < 4$;
в) $14 - 5 + 2 = 11$; г) $x + 3 = 3x$;
д) $(5 - x)(3 + x) = 12$.

• Из пяти терминов выберите два, наиболее точно определяющих математическое понятие «уравнение»:

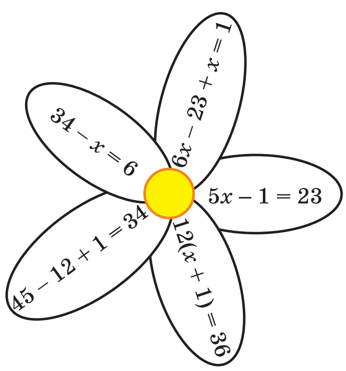
корень, равенство, сумма,
неизвестное, делимое.

• Восстановите предложение и исправьте в нем ошибки:

ХТВДПЖКПКЖО ПВЙЭДВАФ ТВДЖПУФДР.

(*В зашифрованной фразе «Уравнением называют равенство» осуществлен сдвиг на две буквы.*)

• Удалите лишний лепесток:



Отработав основные понятия и правила по теме «Уравнения», переходим с учениками к решению более сложных уравнений. Проанализировав, что знаем и умеем по данной теме, вместе с ними составляем алгоритм решения уравнений вида $2x - 5 = 13$.

Решение уравнения	Действия ученика
$\overset{\text{I}}{2x} \overset{\text{II}}{-} 5 = 13$	Расставляет порядок действий
$2x \ominus 5 = 13$	Обводит знак последнего действия
$\underline{2x} \ominus \underline{5} = 13$	Подчеркивает выражение до обведенного знака действия и после него до знака «равно»
$\underline{2x} \ominus \underline{5} = 13$ ум выч разн	Записывает названия компонентов, смотря на обведенный знак действия
$2x =$	Записывает неизвестный компонент, знак равенства
$2x = 13 + 5$ ум= разн+выч	Проговаривает и записывает правило нахождения неизвестного компонента
$2x = 18$	Выполняет необходимые вычисления
	Решает получившееся уравнение (в случае необходимости возвращается к шагу 1)

Проговаривание алгоритма решения, подчеркивание, запись правил и т.д. способствует углублению понимания и активизации мыслительных процессов.

В систему упражнений продолжаем включать ловушки — уравнения, корень которых ученики вычислить не смогут. Например: $16 - 4x = 14$.

Продолжаем знакомить с историей математики.

- Норберт Винер — американский математик, «отец кибернетики». В 3 года он научился читать, в 11 — поступил в колледж, а в x лет получил степень доктора в Гарвадском университете, защитив диссертацию на стыке математики и философии. Сколько лет было Винеру, когда он защитил диссертацию? Чтобы ответить на вопрос, решите уравнение $7x - 2x + 1 = 91$.

Как правило, рассказ о Норберте Винере вызывает вопрос у учеников: «Есть ли такие же вундеркинды у нас в России?»

Предлагаю задание.

- Используя Интернет или другие источники, найдите информацию о российских ученых, которые проявляли яркие способности с детства. Составьте задание по теме «Уравнение».

Знакомство с историей математики, со значением уравнений в науке, работу по формированию познавательных универсальных действий, в том числе логических, продолжаем во время интерактивной игры «В погоне за маской из Аль-джебры» (см. CD). Презентация содержит макросы, их не отключаем, после просмотра презентации изменения не сохраняем. При работе с ней обращаем внимание учащихся на знак, щелкнув по которому, ученик получит инструкцию к выполнению задания.

В 6-м классе решаем уравнения, используя правило переноса.

Вместе с учениками осуществляем анализ решения уравнений через правила нахождения компонентов. Подводим к мнемоническому правилу «переехал — сменил знак», рассказываем:

- «Два государства разделены знаком равенства. В левой части хозяин — слагаемое с переменной, в правой — слагаемое без переменной (если оно отсутствует, то добавляем нуль), остальные — гости. Переехал гость границу — сменил паспорт, то есть знак.

Для большей наглядности при объяснении используется презентация (см. CD).

Отрабатываем по шагам алгоритм действий.

Решение уравнения	Действия ученика
$x - 7 = -5 + 2x$	Обводим хозяев
$x - 7 = -5 + 2x$	От гостей расставляем стрелки, ведущие в другую часть, меняем знаки гостей
$x - 2x = -5 + 7$	Записываем вторую строчку: сначала хозяина, затем гостя с его новым знаком

Организация усвоения осуществляется в соответствии с теорией поэтапного формирования умственных действий:

1) ориентировка;

2) организация самостоятельной работы, позволяющей контролировать ход работы (подконтрольная работа);

3) постепенный переход от пошагового контроля к самоконтролю.

Основное внимание на первом уроке уделяется записи второй строчки согласно алгоритму. Решаем и обратную задачу: по второй строчке восстанови уравнение

$$\ldots = \ldots$$
$$-x - 5x = -7 + 10.$$

Для диагностики и формирования регулятивных универсальных учебных действий предлагаем задания на поиск ошибок.

- Найдите ошибки в решениях уравнений. Объясните причину их возникновения.

а) $2x - 6 = -3x + 4,$
$2x + 3x = 4 - 6,$
$5x = 2,$
$x = 5 : 2,$
$x = 2{,}5;$

б) $-4x + 9 = 7x - 5,$
$4x + 7x = 5 + 9,$
$11x = 14,$
$x = 14 - 11,$
$x = 3.$

Продолжаем работу по составлению уравнений по заданному корню.

• Составьте уравнение, корень которого равен -4.

Прежде чем приступить к выполнению данного задания, предлагаем решить уравнение, корень которого равен -4. Анализируем решение этого уравнения с конца и пытаемся составить план по восстановлению уравнения. (*План записан ниже в правой колонке рядом с решением.*)

$6x-5=8x+3$		
$6x-8x=3+5$	↑	по второй строчке восстановить уравнение
$-2x=8$	↑	представить левую и правую части в виде суммы
$x=8:(-2)$ $x=-4$	↑	умножить обе части уравнения на -2

После анализа пытаемся составить свое уравнение с корнем -4:

	$x=-4$
Умножаем обе части уравнения на 5	$5x=-20$
Представляем обе части в виде суммы	$6x-x=19+1$
Записываем ответ	$6x-19=1+x$

• Составьте уравнение, которое не имеет корней.

Вместе с учениками составляем алгоритм, приводящий к результату за три шага:

Записываем уравнение, не имеющее корней	$0\cdot x=6$
Представляем обе части в виде суммы	$-7x+7x=4+2$
Записываем ответ	$-7x-2=4-7x$

Обязательно в классе находится ученик, который, анализируя уравнение, не имеющее корней, замечает: слагаемые с переменными в обеих частях совпадают, а слагаемые без переменных различны. Это дает возможность составить уравнение за один шаг: $8x-9=8x-5$.

Предлагаем ученикам упражнения на поиск закономерностей, направленные на формирование у учащихся таких приемов умственной деятельности, как анализ, синтез, аналогия, обобщение, конкретизация, классификация, позволяющих расширить кругозор учеников, поисковые задания.

Вот несколько примеров.

• Решите уравнения и разбейте их на группы. Объясните основание для классификации:

а) $12x-9=4x-5$;
б) $1{,}5(4x-3)=6x-4{,}5$;
в) $-4-(x-5)=-10-2x+x$;
г) $\frac{1}{2}x+8=-2x-3\frac{1}{6}$;
д) $-(-2{,}4x-8)-0{,}7(3x-5)=-3{,}5x$.

(*Основанием классификации может стать число корней уравнения.*)

• Вставьте недостающую букву и вспомните математические термины, начинающиеся с нее:

$4x-5=3x-2$; $0{,}5x+31{,}5=$	Я
$12-x=3x+8$; $2{,}7x-0{,}7=$	Б
$2{,}5(x-3)-(0{,}5x-1{,}5)+1=-8x$; $3x+3{,}5=$	?

(*Полученный корень уравнения подставляем в буквенное выражение, значение которого совпадает с номером буквы согласно алфавиту.*)

Ответ: Д.

• Испанский математик осмелился утверждать, что он решил уравнение четвертой степени, чем вызвал гнев инквизиции. Инквизитор Торквемада объявил: «Это по воле Бога недоступно человеческому разуму» — и отправил смельчака на костер. Кто этот математик?

1	а	2	ь	3	е	4

В отмеченные квадраты вставьте буквы, соответствующие полученным корням уравнений, согласно алфавиту:

а) $-20(-3x+2)=137+x$;

б) $\frac{x-3}{7}=\frac{x+7}{14}$; в) $\frac{1}{7}x+5=\frac{1}{2}x$;

г) $20-x=4(3x+5)-(11x+38)$.

Ответ: Вальмес.

• Между чем и чем пришлось делить свое время одному известному физику? Ответ найдите в Интернете или других источниках.

Подсказка 1. Годы жизни физика узнаете, найдя недостающие числа:

а) $3x-1=x+3$; $7x-1=3x+15$	24
б) $7x-3=25$; $130-x=4x$	426
в) $0{,}9x-8=-\frac{1}{3}x$; $0{,}1x-7=0{,}01x+0{,}11$	?
г) $0{,}3x+12{,}3=x-1$; $\frac{2}{11}x=\frac{1}{5}x-1$	?

Подсказка 2. Решите уравнения и узнайте имя физика:

а) $-1{,}8x+6=0{,}2x$	Луи
б) $-(2-x)+(-3x-1)=-6x+3$	Джеймс
в) $-4(5-x)=2(x-3)$	?

(*Ответ нужно выбрать согласно найденной закономерности из имен ЭРНЕСТ, НИЛЬС, ФРЕДЕРИК, АЛЬБЕРТ.*)

Ответ: Альберт Эйнштейн: «Мне приходится делить свое время между политикой и уравнениями. Однако уравнения, по-моему, гораздо важнее, потому что политика существует только для данного момента, а уравнения будут существовать вечно».

Е. ПОТОСКУЕВ,
potoskuev39@gmail.com,
г. Тольятти

БЕЗ РИСУНКА НЕ НАЙТИ РЕШЕНИЯ

Решая геометрическую задачу — планиметрическую или стереометрическую, мы пользуемся рисунками, чертежами: они помогают проиллюстрировать, представить геометрическую ситуацию, которая предложена в условии задачи. При этом если построение фигур по условию задачи выполняется с корректной аргументацией, основанной на логической строгости и аксиомах конструктивной геометрии, то верно, наглядно и аккуратно выполненный рисунок к задаче является надежным помощником при ее решении. Иначе говоря, *воплощенное в рисунок интуитивное, живое пространственное воображение в сочетании со строгой логикой мышления — это ключ к отысканию верного решения геометрической задачи*. Прежде чем приступить к ее решению, необходимо наглядно представить, вообразить и верно изобразить фигуры, о которых идет речь. *Необходимо выработать понимание, что аргументация шагов построения изображения фигур составляет полезный и необходимый анализ решения геометрической задачи,* «открывающий путь» к ее решению.

Очень важным для «задачного рисунка» является его *простота, лаконичность*. На рисунке следует изображать только те фигуры (точки, отрезки, окружности и др.), которые необходимы для решения данной задачи. Привычку начинать решение геометрической задачи с построения изображения фигур по условию этой задачи необходимо вырабатывать с первых уроков изучения геометрии.

Рассмотрим, например, решение одной из задач начального курса планиметрии.

Задача 1. Градусные меры трех внешних углов треугольника, взятых по одному у каждой вершины, являются тремя последовательными четными числами. Найти градусную меру меньшего внутреннего угла этого треугольника.

Материал, которому посвящена эта задача, соответствует программе курса геометрии 7-го класса, и решающий ее на данном этапе располагает довольно скромными как умениями мотивированной аргументации утверждений, так и навыками графической иллюстрации условия задачи. Тем не менее уже на этом этапе изучения геометрии вполне возможны следующие два принципиально различных метода ее решения.

Решение. Способ I. Эту задачу можно решить, соблюдая принцип наглядности — демонстрируя графически рисунок по условию задачи.

Пусть дан треугольник ABC (рис. 1), в котором

$\alpha = \angle BAC$,

α_1 — смежный с ним внешний угол треугольника ABC;

$\beta = \angle ABC$, β_1 — смежный с ним внешний угол треугольника ABC;

$\delta = \angle ACB$, δ_1 — смежный с ним внешний угол треугольника ABC,

причем $\alpha_1 > \beta_1 > \delta_1$.

К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru (Литература.)

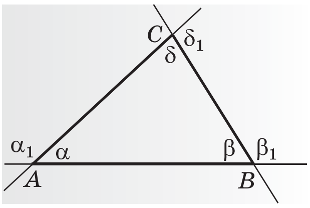


Рис. 1

Так как сумма смежных углов равна 180°, то
$$\alpha + \alpha_1 = \beta + \beta_1 = \delta + \delta_1 = 180°,$$
откуда
$$(\alpha + \alpha_1) + (\beta + \beta_1) + (\delta + \delta_1) =$$
$$= (\alpha + \beta + \delta) + (\alpha_1 + \beta_1 + \delta_1) = 3 \cdot 180° = 540°.$$
Учитывая, что сумма внутренних углов любого треугольника равна 180°, находим:
$$\alpha_1 + \beta_1 + \delta_1 = 540° - (\alpha + \beta + \delta) =$$
$$= 540° - 180° = 360°.$$
Так как δ_1, β_1, α_1 — три последовательных четных числа и $\alpha_1 > \beta_1 > \delta_1$, то
$$\beta_1 = \delta_1 + 2°,\ \alpha_1 = \beta_1 + 2° = \delta_1 + 4°.$$
Поэтому
$$\alpha_1 + \beta_1 + \delta_1 = \delta_1 + (\delta_1 + 2°) + (\delta_1 + 4°) = 360° \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3\delta_1 + 6° = 360° \Rightarrow \delta_1 = 118°.$$
Значит,
$$\alpha_1 = 118° + 4° = 122°$$
— величина большего внешнего угла треугольника ABC. Тогда
$$\alpha = 180° - \alpha_1 = 180° - 122° = 58°$$
— величина меньшего внутреннего угла этого треугольника.

Ответ: 58°.

Метод решения задачи *с наглядным изображением геометрической ситуации, заданной ее условием*, и мотивированными обоснованиями необходимых утверждений и вычислений является доступным решающим даже с минимальным уровнем геометрической культуры.

Вместе с тем эту задачу можно решить иначе, не прибегая к наглядности.

Способ II. Пусть x — градусная мера меньшего из трех внешних углов данного треугольника. Тогда $(x + 2°)$, $(x + 4°)$ — градусные меры двух других внешних его углов.

Каждая вершина треугольника является общей вершиной двух пар смежных углов: внутреннего угла треугольника и его внешнего угла при той же вершине. Мы знаем, что сумма двух смежных углов равна 180° и сумма всех внутренних углов треугольника равна 180°.

Сумма трех пар смежных углов, взятых по одной при каждой вершине данного треугольника и образованных внутренним углом треугольника и смежным с ним его внутренним углом, равна 540°. Получаем: число 540° является суммой всех внутренних углов треугольника и суммой всех его внешних углов, взятых по одному у каждой вершины. Но сумма всех внутренних углов треугольника равна 180°, значит, сумма всех его внешних углов, взятых по одному у каждой вершины, равна 540° – 180° = 360°. Поэтому получаем: $x + (x + 2°) + (x + 4°) = 360°$, отсюда $x = 118°$ — градусная мера меньшего внешнего угла треугольника. Тогда 118° + 4° = 122° — градусная мера большего внешнего угла данного треугольника, значит, градусная мера его меньшего внутреннего угла равна 180° – 122° = 58°.

Ответ: 58°.

Комментарий. Первый метод решения задачи предполагает использование «принципа наглядности», который помогает визуально «увидеть» то, что предлагается условием данной задачи. Интегрируя наглядное и верное изображение фигуры, заданной условием задачи, и обоснованную аргументацию утверждений логического, конструктивного и вычислительного характера, решающий последовательно приходит к необходимому результату или самостоятельно, или групповым методом, или с помощью учителя.

Вторым методом решать данную геометрическую задачу могут учащиеся с достаточно высоким уровнем математической культуры. *Такой метод решения геометрической задачи предполагает обладание учащимся высоким уровнем сочетания, логической, графической и вычислительной культуры, причем согласованно и успешно эти взаимосвязи должны «работать» в устной форме.* Этот метод решения геометрической задачи без графического изображения фигур аналогичен сеансу одновременной игры, который проводит шахматный гроссмейстер «вслепую» на нескольких шахматных досках. И чтобы выиграть в этом сеансе, шахматный гроссмейстер должен обладать очень и очень высоким уровнем развития логической культуры, пространственного воображения и, наконец, безошибочными методами вычисления. Именно таким уровнем математической подготовки должен обладать учащийся, чтобы верно, со всеми аргументированными обоснованиями решать геометрические задачи различного уровня сложности. Выработка подобного навыка решения геометрических задач достигается посредством решения достаточно большого числа геометрических задач — от базового уровня до повышенного и олимпиадного.

Довольно часто встречаются такие ситуации, когда верного и наглядного рисунка, выполненного по условию задачи, недостаточно — «чего-то не достает, не хватает» для отыскания пути ее решения. Например, требуется решить следующую несложную, но содержательную планиметрическую задачу.

Задача 2. В параллелограмме $ABCD$ точки M и K — середины сторон соответственно AD и CD. Диагональ AC пересекает отрезок BM в точке H, а отрезок BK — в точке P (рис. 2). Найти площадь пятиугольника $MHPKD$, если площадь параллелограмма $ABCD$ равна 120 см².

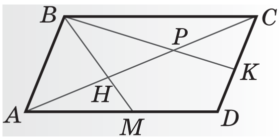


Рис. 2

Решение. На рисунке 2 — изображение данного параллелограмма $ABCD$ и расположенных по условию задачи точек M, H, P, K. Обнаруживаем, что этого изображения недостаточно для решения задачи, требуются некоторые дополнительные построения, логические рассуждения.

Известно, что диагональ параллелограмма разбивает его на два равных треугольника, поэтому, проведя диагональ BD (рис. 3), замечаем: отрезок BK — медиана треугольника BCD.

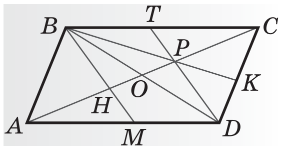


Рис. 3

Медианой этого треугольника является и отрезок CO (*Почему*?). Это означает, что точка P — точка пересечения прямых AC и BK — является центроидом треугольника BCD, откуда DT — третья медиана этого треугольника, где T — точка пересечения прямых DP и BC. Теперь замечаем, что

$$S_{MHPKD} = S_{MHOD} + S_{DOPK},$$

при этом

$$S_{DOPK} = S_{DOP} + S_{DKP}.$$

Найдем площади треугольников DOP и DPK, для чего воспользуемся свойством медиан треугольника. В треугольнике BCD имеем: $BP : PK = 2 : 1$ (*Почему*?), следовательно,

$$S_{CBP} = 2S_{CPK} \Rightarrow S_{CPK} = \frac{1}{2} S_{CBP}.$$

Учитывая, что точка T — середина стороны BC, заключаем:

$$S_{PBT} = S_{PCT}, \text{ значит, } S_{PCT} = \frac{1}{2} S_{CBP}$$

(*Почему*?). Получили:

$$S_{CPK} = \frac{1}{2} S_{CBP}, \quad S_{PCT} = \frac{1}{2} S_{CBP} \Rightarrow S_{CPK} = S_{PCT}.$$

А так как

$$S_{PBT} = S_{PCT}, \ S_{CPK} = S_{DPK},$$

то

$$S_{PBT} = S_{PCT} = S_{CPK} = S_{DPK}.$$

Аналогично рассуждая, можно доказать, что

$$S_{PBT} = S_{PCT} = S_{CPK} = S_{DPK} = S_{POB} = S_{POD},$$

то есть три медианы треугольника разбивают его на шесть непересекающихся равновеликих треугольников. Это означает, что

$$S_{DPK} = S_{POD} = \frac{1}{6} S_{BCD}.$$

Так как треугольники BCD и ABD равны, то

$$S_{BCD} = \frac{1}{2} S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 120 = 60,$$

значит, $S_{DPK} = S_{POD} = 10$. Тогда $S_{DOPK} = 2 \cdot 10 = 20$.

Аналогично можно доказать, что $S_{MHOD} = \frac{1}{3} S_{ABD}$. А так как треугольники ABD и BCD равны, то $S_{ABD} = S_{BCD} = 60$, значит, $S_{MHOD} = \frac{1}{3} \cdot 60 = 20$. Тогда получаем:

$$S_{MHPKD} = S_{MHOD} + S_{DOPK} = 20 + 20 = 40 \text{ см}^2.$$

Ответ: 40 см².

Комментарий. На рассмотренном примере решения задачи мы еще раз убеждаемся, что верно выполненный рисунок по условию задачи во многих случаях нуждается в мотивированных дополнительных построениях, после выполнения которых становится прозрачной геометрическая ситуация и открывается путь к решению этой задачи. Кроме того, получен важный «рабочий» факт, который следует знать и помнить: *три медианы любого треугольника разбивают его на шесть непересекающихся равновеликих треугольников.*

Сказанное выше также подтверждается при решении следующей планиметрической задачи.

Задача 3. В выпуклом пятиугольнике $ABCDK$ стороны AB, AK, CD и KD равны между собой, а сторона BC равна диагоналям BK и CK. Найти площадь этого пятиугольника, если $AB = 8$ см и $\angle AKD = 150°$.

Решение. Проведем анализ «устройства» данного пятиугольника. Пусть на рисунке 4 изображен искомый пятиугольник $ABCDK$.

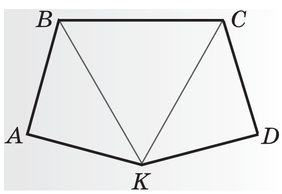


Рис. 4

Так как по условию сторона BC этого пятиугольника равна его диагоналям BK и CK, то треугольник BCK правильный, откуда $\angle BKC = 60°$. Далее, из равенства сторон AB, AK, CD и KD пятиугольника следует: треугольники ABK и DCK равнобедренные. А так как $BK = CK$, то треугольники ABK и DCK равны (*Почему*?), следовательно, $\angle AKB = \angle DKC$.

Учитывая, что

$$\angle AKD = 150°,$$
$$\angle AKD = \angle AKB + \angle BKC + \angle DKC,$$

получаем, что $\angle AKB = 45°$. А так как треугольник ABK равнобедренный, то $\angle AKB = \angle ABK = 45°$, значит, $\angle BAK = 90°$. Получаем: треугольник ABK равнобедренный прямоугольный. Это означает, что вершина A этого треугольника принадлежит серединному перпендикуляру отрезка BK и окружности диаметра BK (*Почему*?).

Аналогично, треугольник CDK также равнобедренный прямоугольный ($\angle CDK = 90°$), его вершина D принадлежит серединному перпендикуляру отрезка CK и окружности диаметра CK.

После проведенного анализа необходимо изобразить пятиугольник, соответствующий условию задачи. Для этого сначала строим правильный треугольник BCK. Затем проводим серединный перпендикуляр отрезка BK и окружность диаметра BK (рис. 5).

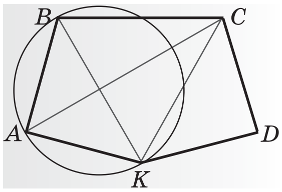


Рис. 5

Их пересечение — точка A — искомая вершина данного пятиугольника (*Почему*?). Аналогично строим точку D — пересечение серединного перпендикуляра отрезка CK и окружности диаметра CK (*Почему*?). Получаем изображение искомого пятиугольника $ABCDK$ (см. рис. 5). Теперь найдем его площадь.

В правильном треугольнике BCK имеем: $BC = 8$, значит, $S_{BCK} = \frac{BC^2\sqrt{3}}{4} = \frac{64\sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3}$.

Находим: $AB = AK = 4\sqrt{2}$ (как катеты равнобедренного прямоугольного треугольника ABK с гипотенузой $BK = 8$), значит,

$$S_{ABK} = 0,5 \cdot AB \cdot AK = 0,5 \cdot 4\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2} = 16 \text{ см}^2.$$

Так как треугольники ABK и DCK равны, то $S_{DCK} = 16$ см². Получаем:

$$S_{ABCDK} = S_{BCK} + 2S_{ABK} = 16\sqrt{3} + 2 \cdot 16 = 16\left(2+\sqrt{3}\right) \text{ см}^2.$$

Ответ: $16\left(2+\sqrt{3}\right)$ см².

Комментарий. При решении планиметрической задачи верный чертеж, как правило, с точностью до подобия соответствует данным задачи: если прямые параллельны по условию — их рисуют параллельными; если прямые перпендикулярны по условию — их рисуют перпендикулярными; если отрезки равны по условию задачи, то они равны и на чертеже; если в условии задан квадрат, то и на рисунке должен быть изображен квадрат. Тем не менее повторим: довольно часто приходится на построенном изображении данной по условию задачи фигуры проделывать дополнительные построения, чтобы «увидеть» геометрическую ситуацию, найти взаимосвязи между данными и искомыми фигурами. В подтверждение сказанного рассмотрим решение следующей планиметрической задачи.

Задача 4. Прямая m имеет с квадратом $ABCD$ одну общую точку D. Расстояния от точек A и C до прямой m равны соответственно 18 и 8. Найти расстояние от точки B до прямой m.

Решение. На рисунке 6 изображен квадрат $ABCD$, проведена прямая m и отрезки AP, BM, CH, ей перпендикулярные, при этом $AP = 18$, $CH = 8$.

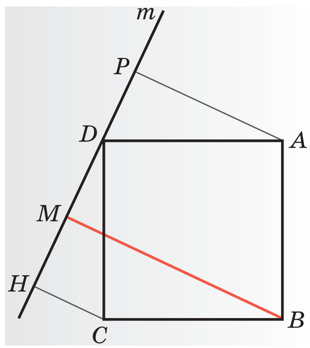


Рис. 6

Без дополнительного построения проблематично найти длину отрезка $BM = \rho(B; m)$. Но стоит провести диагонали AC и BD данного квадрата, а из точки O их пересечения — отрезок OK, параллельный отрезку AP ($K \in m$) (рис. 7), как становится очевидным, что $BM = 2OK$ (*Почему*?). Поэтому для решения задачи достаточно найти длину отрезка OK.

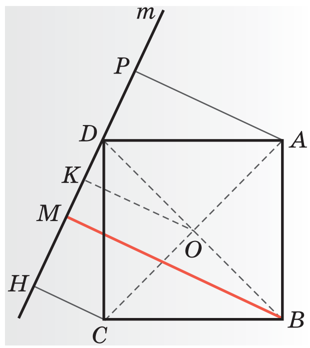


Рис. 7

Замечаем, что отрезок OK — средняя линия прямоугольной трапеции $APCH$ (*Почему*?), значит,

$$OK = \frac{CH + AP}{2} = \frac{8+18}{2} = 13.$$

Тогда $BM = 2 \cdot 13 = 26$.

Ответ: 26.

При решении стереометрических задач рисунок тем более необходим.

Для выработки навыков верно и быстро выполнять рисунки, на которых изображаются многогранники, фигуры вращения, различные комбинации этих фигур, полезно выполнить базовые графические работы по решению опорных задач позиционного и метрического характера на изображение различных вариантов взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве. Ниже приводятся некоторые из опорных задач.

Задание. Сделайте чертежи по условиям задач, используя данные в них обозначения.

Задачи позиционного характера

1. Прямые a и b, изображенные на рисунке параллельными, на самом деле не параллельны.

2. Прямые a и b, изображенные на рисунке пересекающимися, на самом деле не имеют общих точек.

3. Плоскости α и β имеют общую прямую p, при этом пересекают прямую m в точках соответственно A и B.

4. Прямые AB и CK таковы, что точка A не принадлежит плоскости BCK, а точка B не принадлежит прямой CK.

5. На прямой a, пересекающей плоскость α в точке B, выбраны точки C и K по разные стороны от точки B. Прямые CC_1 и KK_1 параллельны между собой и пересекают плоскость α соответственно в точках C_1 и K_1.

6. Две вершины треугольника ABC лежат в плоскости α, а вершина C не лежит в этой плоскости. Прямая m пересекает стороны CB и CA соответственно в точках K и T, а плоскость α — в точке H.

Задачи на параллельность в пространстве

1. Плоскость α проходит через середины сторон AB и AC треугольника ABC и не содержит вершины A.

2. Прямая MP параллельна плоскости α, а плоскость PMT пересекает плоскость α по прямой KT.

3. Прямая a параллельна каждой из пересекающихся плоскостей α и β.

4. Плоскости α и β имеют общую прямую a, плоскости α и γ — общую прямую b, плоскости γ и β — общую прямую c. Прямые a и b параллельны.

5. Плоскости α и β имеют общую прямую a, плоскости α и γ — общую прямую b, при этом плоскости γ и β параллельны.

6. Сторона BC треугольника ABC лежит в плоскости α. Через вершину A и точку M — середину стороны AC — проведены соответственно плоскости β и γ, пересекающие треугольник ABC по прямым AK и MT.

Задачи на перпендикулярность в пространстве

1. Прямая OK проходит через точку O пересечения диагоналей квадрата $ABCD$ перпендикулярно его плоскости.

2. Плоскости равносторонних треугольников ABC и ABK перпендикулярны.

3. Прямые AM, AK и AT попарно взаимно перпендикулярны.

4. Плоскость ABC перпендикулярна плоскостям AMC и ABH.

5. Прямая AB лежит в плоскости ABC, прямая CK перпендикулярна этой плоскости. Прямая KA перпендикулярна прямой AB. Прямая AT лежит в плоскости ABC и перпендикулярна прямой AB.

6. Прямая KH перпендикулярна плоскости равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) и пересекает ее в точке T — середине отрезка KH. Из точек K и H опущены перпендикуляры на прямую AC.

Наглядность и верность изображения пространственных фигур достигается благодаря логическим рассуждениям, основанным на известных свойствах плоских фигур — компонентах пространственных фигур, рассматриваемых в данной задаче. Метрические и аффинные свойства треугольника, параллелограмма, ромба, трапеции, окружности являются определяющими для построения верного изображения пространственных фигур в соответствии с условием задачи.

В качестве примера построения *верного изображения* заданного условием задачи многогранника рассмотрим решение следующей задачи.

Задача 5. Основанием наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит правильный треугольник ABC, сторона которого равна 8. Вершина A_1 проектируется в центр нижнего основания призмы, при этом ребро A_1A составляет со стороной AB основания угол в 45°. Найти площадь боковой поверхности и объем этой призмы.

Решение. На практике изображение призмы (параллелепипеда, куба) начинают с изображения верхнего основания этого многогранника. Но если в условии задачи определено положение ортогональной проекции одной из вершин верхнего основания, то изображение этой призмы целесообразно начинать с изображения нижнего основания. В противном случае возникают сложности в построении самой призмы по условию задачи.

Итак, пусть точка O — центр правильного треугольника ABC (рис. 8), значит, отрезки AM, BK и CH являются его высотами.

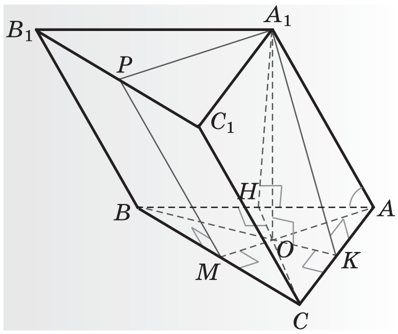


Рис. 8

Тогда по теореме о трех перпендикулярах отрезки A_1H и A_1K перпендикулярны соответственно AB и AC, поэтому они являются высотами граней AA_1B_1B и AA_1C_1C соответственно. Причем $A_1H = A_1K$ (как наклонные, имеющие равные проекции OH и OK). Это означает, что прямоугольные треугольники A_1AH и A_1AK равны, откуда $\angle A_1AK = \angle A_1AH = 45°$. Следовательно, эти треугольники равнобедренные и прямоугольные, поэтому

$$A_1H = A_1K = AH = 0{,}5AB = 0{,}5\cdot 8 = 4.$$

Тогда

$$S_{AA_1C_1C} = AC\cdot A_1K = 8\cdot 4 = 32.$$

Аналогично,

$$S_{AA_1B_1B} = AB\cdot A_1H = 32.$$

Далее докажем, что грань BB_1C_1C — прямоугольник, и найдем его площадь.

В самом деле, имеем: прямая A_1O перпендикулярна плоскости ABC, следовательно, $A_1O \perp BC$ (по определению прямой, перпендикулярной плоскости); $AM \perp BC$. Значит, прямая BC перпендикулярна плоскости A_1AM по признаку перпендикулярности прямой и плоскости, следовательно, $BC \perp A_1A$ (по определению прямой, перпендикулярной плоскости). Далее, так как A_1A параллельна плоскости B_1C_1C, то прямая PM есть линия пересечения плоскостей B_1C_1C и A_1AM и параллельна прямой A_1A (по теореме о линии пересечения двух плоскостей, одна из которых проходит через прямую, параллельную другой). Получаем:

$$BC \perp A_1A,\ A_1A \parallel C_1C \Rightarrow BC \perp C_1C,$$

значит, BB_1C_1C — прямоугольник, поэтому

$$S_{BB_1C_1C} = BC\cdot C_1C.$$

Найдем длину ребра C_1C.

В равнобедренном прямоугольном треугольнике A_1AH с катетом $AH = 4$ получаем: $A_1A = 4\sqrt{2}$. Так как $C_1C = A_1A = 4\sqrt{2}$, то

$$S_{BB_1C_1C} = 8\cdot 4\sqrt{2} = 32\sqrt{2}.$$

Таким образом,

$$S_{бок} = 2S_{AA_1C_1C} + S_{BB_1C_1C} = 2\cdot 32 + 32\sqrt{2} = 32\left(2+\sqrt{2}\right) \text{ кв.ед.}$$

Найдем объем данной призмы.

В прямоугольном треугольнике A_1AO:

$$A_1O = \sqrt{A_1A^2 - OA^2} = \sqrt{\left(4\sqrt{2}\right)^2 - \left(\frac{8\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{4\sqrt{6}}{3}.$$

Тогда для объема V призмы получаем:

$$V = S_{ABC}\cdot A_1O = \frac{8^2\cdot\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{4\sqrt{6}}{3} = 64\sqrt{2} \text{ куб.ед.}$$

Ответ: $32\left(2+\sqrt{2}\right)$ кв.ед.; $64\sqrt{2}$ куб.ед.

Не менее важен рисунок и при решении геометрических задач координатным методом. Разумеется, решение задач координатным методом предполагает наличие умений рационального использования различных уравнений прямых и плоскостей, связывающих координаты точек, векторов, при этом безошибочное выполнение алгебраических (вычислительных) операций. И все-таки вопрос об изображении геометрической фигуры и специальном выделении ее элементов, о которых идет речь в задаче, не может оставаться второстепенным. Наоборот, построение изображения пространственной системы координат и «внедрение» в нее данного многогранника по заданным координатам нескольких его вершин, а также «выделение нужных» прямых, плоскостей и соответствующих им векторов (направляющего и нормали), является важным этапом установления взаимного «сотрудничества» между графическими и логическими шагами решения.

Рассмотрим, к примеру, решение следующей задачи координатным методом.

Задача 6. Дана правильная шестиугольная призма $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ (рис. 9).

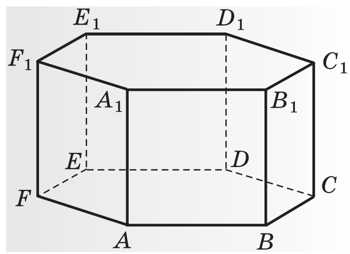


Рис. 9

Все ребра призмы равны 1, и она расположена в системе координат $Oxyz$ так, что центр ее основания совпадает с началом координат, а вершины A_1, B, C, D имеют следующие координаты:

$$A_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}; 1\right),\quad B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; 0\right),$$

$$C(0;\ 1;\ 0),\quad D\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; 0\right).$$

Построить эту призму и координатным методом найти синус угла между плоскостями A_1BC и AB_1F.

Решение. Изображаем систему координат $Oxyz$ (рис. 10) и отмечаем положение в ней заданных своими координатами точек A_1, B, C, D.

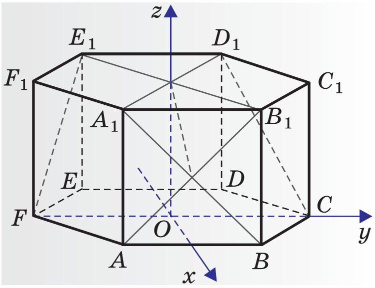


Рис. 10

Далее, используя изображение (см. рис. 10) правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, определяем: вершина A имеет такие же абсциссу и ординату, как и вершина A_1. Вершина A расположена в координатной плоскости Oxy, поэтому ее аппликата равна нулю. Значит, $A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}; 0\right)$. Аналогично определяем координаты остальных вершин данной призмы и получаем: $B_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; 1\right)$, $C_1(0;\ 1;\ 1)$, $D_1\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}; 1\right)$, $F(0;\ -1;\ 0)$, $F_1(0;\ -1;\ 1)$, $E\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}; 0\right)$, $E_1\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}; 1\right)$.

Изобразив призму (см. рис. 10), приступаем к вычислительной части решения задачи.

Угол между двумя плоскостями α и β, заданными уравнениями

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$

и

$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0,$$

удобно связать с углом между их нормальными векторами соответственно $\vec{n}_1(a_1;\ b_1;\ c_1)$ и $\vec{n}_2(a_2;\ b_2;\ c_2)$ (рис. 11) и найти, пользуясь формулой,

$$\cos\angle(\alpha;\beta) = \left|\cos\angle(\vec{n}_1;\vec{n}_2)\right| = \frac{\left|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2\right|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}.$$

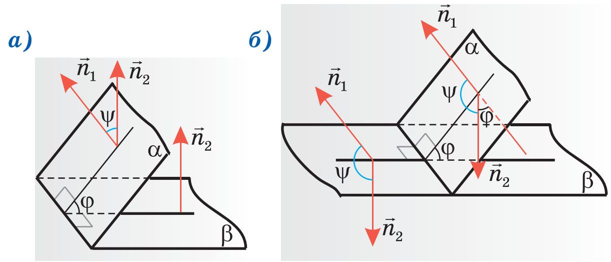


Рис. 11

Обозначим: $\alpha = (A_1BC)$ и $\beta = (AB_1F)$; $\angle(\alpha;\beta) = \varphi$. Изображаем плоскости α и β на рисунке 10 и находим координаты векторов нормалей этих плоскостей.

Вектор $\vec{n}(a;\ b;\ c)$ нормали плоскости α перпендикулярен векторам $\overrightarrow{A_1B}(0;\ 1;\ -1)$ и $\overrightarrow{BC}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$. Координаты вектора $\vec{n}(a;\ b;\ c)$ найдем из условия его перпендикулярности векторам $\overrightarrow{A_1B}$ и $\overrightarrow{BC}$. Имеем:

$$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1B} = 0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BC} = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b - c = 0,\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{1}{2}b = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = c,\\ b = \sqrt{3}a.\end{cases}$$

Полагая $a = \sqrt{3}$, получим: $b = c = 3$. Таким образом, $\vec{n}(\sqrt{3};\ 3;\ 3)$. Аналогично, вектор $\vec{n}_1(a_1;\ b_1;\ c_1)$ нормали плоскости β перпендикулярен векторам $\overrightarrow{AB_1}(0;\ 1;\ 1)$ и $\overrightarrow{FA}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$. Поэтому координаты a_1, b_1 и c_1 найдем, решая систему уравнений:

$$\begin{cases} b_1 + c_1 = 0,\\ \frac{\sqrt{3}}{2}a_1 + \frac{1}{2}b_1 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = -c_1,\\ b_1 = -\sqrt{3}a_1.\end{cases}$$

Полагая $a_1 = \sqrt{3}$, получим: $b_1 = -3$, $c_1 = 3$.

Таким образом, $\vec{n}_1(\sqrt{3};\ -3;\ 3)$. Тогда

$$\cos\varphi = \left|\cos\angle(\vec{n};\vec{n}_1)\right| = \frac{\left|\sqrt{3}\cdot\sqrt{3} + 3\cdot(-3) + 3\cdot 3\right|}{\sqrt{3+9+9}\cdot\sqrt{3+9+9}} = \frac{1}{7} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin\varphi = \frac{4\sqrt{3}}{7}.$$

Ответ: $\frac{4\sqrt{3}}{7}$.

Решение задачи на комбинацию сферы (шара) и усеченного конуса упрощается, если использовать сечения комбинации сферы (шара) и усеченного конуса диаметральной плоскостью сферы (шара), содержащей ось конуса. В таком случае решение данной стереометрической задачи сводится к решению задачи планиметрической на комбинацию окружности (круга) и равнобедренной трапеции.

Примером может служить решение следующей задачи.

Задача 7. Радиус сферы, вписанной в усеченный конус, равен 8, а радиус сферы, описанной около этого усеченного конуса, равен $8\sqrt{30}$. Найти угол между образующей усеченного конуса и его основанием.

Решение. Окружности оснований данного усеченного конуса — сечения параллельными плоскостями сферы с центром B и радиусом $R = 8\sqrt{30}$. Так как центр любой окружности, расположенной на сфере, принадлежит прямой, проходящей через центр сферы перпендикулярно плоскости этой окружности, то центры O и T оснований усеченного конуса и центр B сферы лежат на одной прямой, перпендикулярной плоскостям оснований этого конуса. На этой же прямой расположен и центр A сферы, вписанной в усеченный конус, так как вписанная в усеченный конус сфера касается его оснований в их центрах O и T.

На рисунке 12 изображено сечение комбинации усеченного конуса и двух данных сфер плоскостью, проходящей через центр B сферы перпендикулярно плоскостям оснований усеченного конуса: в сечении конуса этой плоскостью получается равнобедренная трапеция $MHPK$, а сечениями сфер являются окружности ω и ω_1 радиусов 8 и $R = 8\sqrt{30}$ с центрами соответственно A и B, первая из которых вписана в трапецию $MHPK$, а вторая — описана около нее.

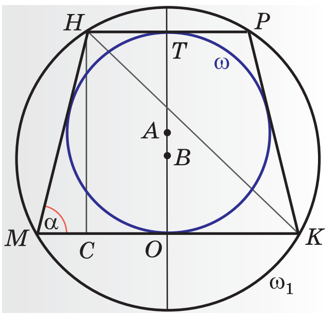


Рис. 12

Пусть HC и α — высота усеченного конуса (высота трапеции) и угол наклона его образующей MH к плоскости нижнего основания (угол при вершине нижнего основания трапеции). Найдем дважды длину диагонали HK трапеции $MHPK$.

С одной стороны, в треугольнике MKH:

$$\frac{HK}{\sin\alpha} = 2\cdot 8\sqrt{30} \Rightarrow HK = 16\cdot\sqrt{30}\sin\alpha.$$

С другой стороны, в треугольнике HCK ($\angle HCK = 90°$) по теореме Пифагора находим:

$$HK^2 = CK^2 + CH^2. \qquad (*)$$

Трапеция $MHPK$ описана около окружности с центром A и радиусом 8, поэтому $HC = 2\cdot 8 = 16$ и $HP + MK = 2MH$ (*суммы противоположных сторон четырехугольника, описанного около окружности, равны*), откуда $MH = \dfrac{HP+MK}{2}$. Кроме того, трапеция $MHPK$ равнобедренная, значит,

$$CK = \frac{HP+MK}{2} = MH.$$

В прямоугольном треугольнике MCH находим:

$$MH = \frac{CH}{\sin\alpha} = \frac{16}{\sin\alpha} = CK.$$

Подставив в (*) вместо HK, CK и CH соответственно $16\cdot\sqrt{30}\sin\alpha$, $\dfrac{16}{\sin\alpha}$ и 16, получаем:

$$\left(16\sqrt{30}\sin\alpha\right)^2 = \left(\frac{16}{\sin\alpha}\right)^2 + 16^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 30\sin^4\alpha - \sin^2\alpha - 1 = 0$$

($\sin\alpha \neq 0$, так как $\alpha \neq 0$).

Сделав подстановку $\sin^2\alpha = t$ $(0 < t < 1)$, получаем:

$$30t^2 - t - 1 = 0,$$

где $t > 0$. Находим

$$t = \frac{1\pm\sqrt{1+120}}{60} = \frac{1\pm 11}{60},\ t = 0{,}2.$$

Тогда

$$\sin^2\alpha = 0{,}2 \Rightarrow \cos^2\alpha = 0{,}8 \Rightarrow \frac{1+\cos 2\alpha}{2} = 0{,}8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos 2\alpha = 0{,}6 \Rightarrow \alpha = 0{,}5\arccos 0{,}6.$$

Таким образом,

$$\angle HMK = \angle PKM = 0{,}5\arccos 0{,}6.$$

Ответ: $0{,}5\arccos 0{,}6$.

Следует уделить внимание вопросам изображений при решении задач на комбинации фигур вращения и многогранников. При решении задач на сферу во многих случаях нет необходимости изображать саму сферу, удобно пользоваться сечением сферы диаметральной плоскостью. Иногда достаточно изобразить лишь центр сферы, вписанной в данный многогранник или описанной около него. Решим одну из таких задач.

Задача 8. Основанием треугольной пирамиды $PABC$ является равносторонний треугольник ABC, сторона которого равна 12. Боковые грани PAC и PBC — равнобедренные треугольники, плоскости которых перпендикулярны плоскости основания пирамиды. Найти площадь поверхности и объем шара, описанного около этой пирамиды.

Решение. Так как боковые грани PAC и PBC пирамиды $PABC$ перпендикулярны плоскости ее основания ABC, то боковое ребро PC этой пирамиды также перпендикулярно плоскости ABC (рис. 13) (это ребро расположено на прямой пересечения двух плоскостей, каждая из которых перпендикулярна плоскости ABC).

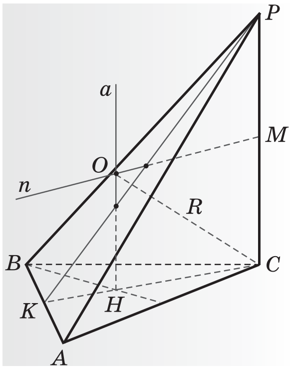


Рис. 13

Пусть точка K — середина ребра AB, точка M — середина ребра PC, точка H — центроид правильного треугольника ABC.

Центр O шара, описанного около пирамиды $PABC$, равноудален от всех ее вершин. Это означает, что точка O принадлежит:

а) множеству всех точек пространства, равноудаленных от вершин правильного треугольника ABC. Этим множеством точек является прямая a, проходящая через центроид H треугольника ABC перпендикулярно его плоскости, при этом $a \parallel PC$ (*Почему*?);

б) множеству всех точек пространства, равноудаленных от вершин P и C. Этим множеством точек является плоскость β серединных перпендикуляров отрезка CP, причем $\beta \parallel (ABC)$ (*Почему*?).

Таким образом, $O = a \cap \beta$. Учитывая, кроме того, что $a \subset (CPK)$ (*Почему*?), получаем: центр O принадлежит прямой n пересечения плоскостей CPK и β, которая проходит через точку M параллельно прямой CK, поэтому $n \perp PC$. Тогда $O = a \cap n$, значит, $OC = R$ — радиус шара, описанного около пирамиды $PABC$. Найдем длину этого радиуса.

Имеем: H — центроид правильного треугольника ABC со стороной 12, следовательно,

$$CH = \frac{2}{3}CK = \frac{2}{3}\cdot\frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{3}\cdot\frac{12\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3};$$

M — середина ребра PC,

$$PC = 12,\ n \parallel CK,\ a \parallel PC \Rightarrow OH = MC = \frac{1}{2}PC = 6.$$

Тогда в прямоугольном треугольнике COH по теореме Пифагора находим:

$$OC = R = \sqrt{OH^2 + CH^2} = \sqrt{6^2 + \left(4\sqrt{3}\right)^2} = 2\sqrt{21}.$$

Значит, искомые площадь поверхности и объем шара равны соответственно:

$$S = 4\pi R^2 = 4\pi\left(2\sqrt{21}\right)^2 = 336\pi \text{ кв. ед.};$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\cdot\left(2\sqrt{21}\right)^3 = 224\sqrt{21}\cdot\pi \text{ куб.ед.}$$

Ответ: 336π кв. ед.; $224\sqrt{21}\cdot\pi$ куб. ед.

ЛЕТНЯЯ ШКОЛА ИНТЕНСИВНОГО ОБУЧЕНИЯ «ИНТЕЛЛЕКТУАЛ»

А. СГИБНЕВ,
г. Москва

Вот уже 10 лет в июне в Москву съезжаются школьники из разных регионов России. 70–80 школьников, окончивших 7-е и 8-е классы, в течение 16 дней занимаются математикой, физикой и другими естественными науками, выполняют исследовательские проекты, посещают разнообразные кружки, ходят на экскурсии в музеи Москвы, общаются, участвуют в спортивных играх, в общем, живут полной жизнью.

Цели школы: увлечь детей наукой, познакомить с яркими учеными и педагогами, интересными сверстниками. На школу приезжают дети разного уровня, от призеров всероссийских олимпиад до школьных «середнячков». Главное требование — интерес к происходящему и готовность учиться летом.

Много лет подряд к нам приезжали школьники из Петропавловска-Камчатского, Махачкалы, Луги Ленинградской области. Последние годы школа стала международной: у нас учились делегации из National Junior College и NUS High School (Сингапур) и школы для одаренных детей Дарын (Казахстан). Каждый школьник выполняет учебно-исследовательский проект и докладывает его результаты на итоговой конференции. Многие выпускники летней школы возвращаются в нее стажерами и вожатыми.

Летнюю школу организует команда педагогов школы-интерната для одаренных детей «Интеллектуал». У школы большая закрытая зеленая территория со спортивными площадками, удобные спальные корпуса и вкусная еда в столовой. Примерная стоимость путевки 20 000 руб. Школьники из многодетных семей и дети матерей-одиночек будут приняты по льготной стоимости.

Очередная летняя школа планируется с 4 по 18 июня 2015 года. Чтобы попасть на летнюю школу-2015, нужно выполнить заочное задание (см. в электронном приложении) либо быть победителем или призером региональной олимпиады по математике, физике или биологии. Заявки надо подать в электронном виде с 1 марта по 25 апреля 2015 года на сайте http://sch-int.ru/summer/, там же разместить свои работы.

К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru

1 апреля открывается прием заявок на 2015/16 учебный год

Фестиваль педагогических идей «Открытый урок» festival.1september.ru

Свидетельство о регистрации СМИ Эл. № ФС77-53231

В течение 12 лет – самый массовый, представительный и посещаемый педагогический форум Рунета. Самая большая коллекция авторских разработок учителей.

Разместить публикацию может каждый педагог. Всем авторам предоставляются документы о публикации. По итогам каждого учебного года выпускаются электронные и бумажные сборники.

В рамках фестиваля для желающих проводится конкурс презентаций. Всем участникам конкурса высылаются специальные дипломы.

Удобный Личный кабинет участника фестиваля, возможность автоматического создания личного профессионального портфолио. В помощь участникам – квалифицированные сотрудники оргкомитета. Единственный в России образовательный сайт, имеющий службу поддержки в режиме on-line 7 дней в неделю.

Участвуйте в фестивале, размещайте свои работы, получайте документы о публикации!

Фестиваль творческих и исследовательских работ учащихся «Портфолио ученика» project.1september.ru

Свидетельство о регистрации СМИ Эл. № ФС77-53211

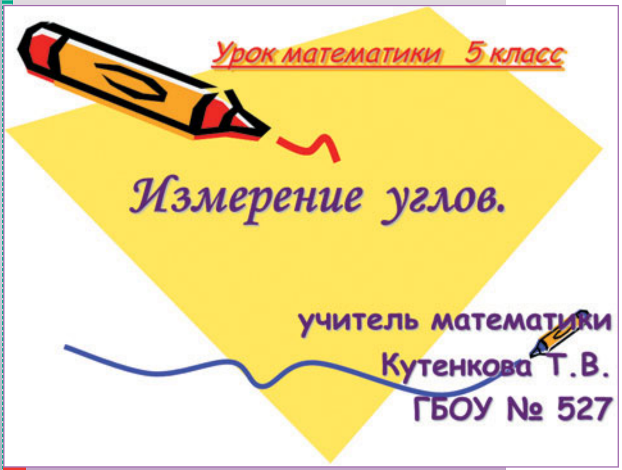
Площадка для публикации работ учащихся, выполненных под руководством педагогов.

Всем ученикам и педагогам предоставляются документы о публикации. По итогам каждого учебного года выпускаются электронные и бумажные сборники.

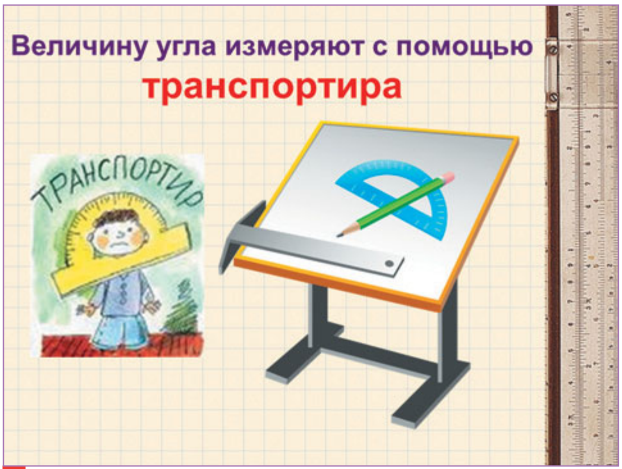
В рамках фестиваля для желающих проводится **конкурс проектных работ**.

Все участники конкурса награждаются специальными дипломами.

Участвуйте вместе с учениками!



1



3

4

Фрагмент презентации публикуется в авторской редакции

Сегодня в рубрике «Разбор урока» мы обсуждаем урок в 5-м классе. Урок проводит учитель математики и информатики Татьяна Васильевна КУТЕНКОВА, г. Санкт-Петербург

Урок обсуждают: главный редактор журнала «Математика» Лариса Олеговна РОСЛОВА, редакторы – Петр Михайлович КАМАЕВ и Ольга Васильевна МАКАРОВА

5 класс

ТЕМА УРОКА: «ИЗМЕРЕНИЕ УГЛОВ»

Цели урока:

образовательные:

закрепить навык построения и измерения углов с помощью транспортира, развивать глазомер;

воспитательные:

формирование способности анализировать свои действия, умения внимательно слушать учителя, стремления к активному участию в работе на уроке; развивать внимание и воображение учащихся;

развивающие:

развитие логического мышления, кругозора, внимания, памяти и социальной компетентности.

Оборудование: интерактивная доска, презентация по данной теме, транспортиры, раздаточный материал.

Тип урока: обобщающий урок по данной теме.

Проблемный вопрос. Как измерить углы с помощью транспортира? (Какие нужно выполнять условия, чтобы точно измерить величину угла транспортиром?)

Организационный момент

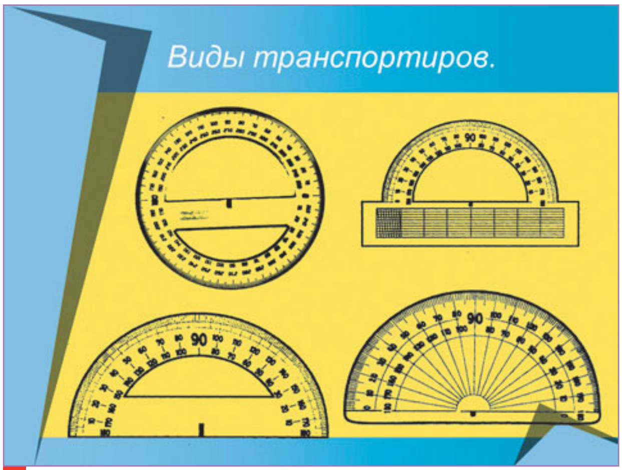
Учитель. Французский писатель XIX столетия Анатоль Франц однажды заметил: «Учиться можно только весело. Чтобы переваривать эти знания с аппетитом». Давайте и мы сегодня на уроке будем следовать этому совету. Будем активны, будем поглощать знания с желанием, потому что они пригодятся нам в дальнейшем. Желаю вам доброго дня и хорошего настроения.

Устный счет

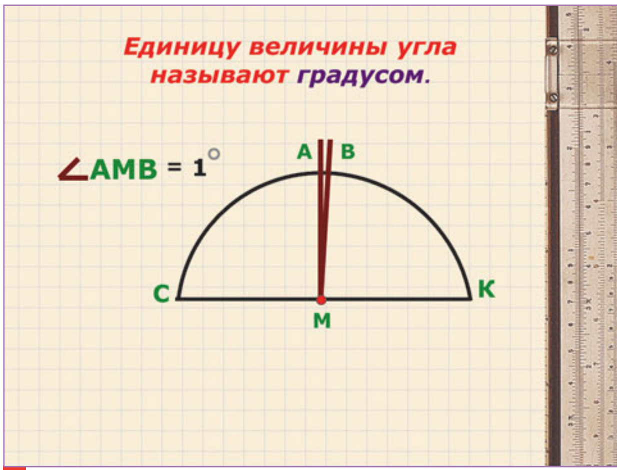
1. Решите устно примеры (*записаны на интерактивной доске*):

$7\cdot4+2$;	$9\cdot3-7$;	$9\cdot9+9$;	$5\cdot6-10$;	$3\cdot8+6$;
$5\cdot5-5$;	$4\cdot4+4$;	$9\cdot6-4$;	$7\cdot8+4$;	$5\cdot9-5$.

К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru (Презентация в авторской редакции)



5



6

2. Сосчитайте парами от 20 до 40 и обратно.

3. Сосчитайте тройками от 21 до 42 и обратно

4. Сосчитайте пятерками от 30 до 50 и обратно.

Основная часть урока

Вопрос. Что такое угол? Дайте определение.

[Это геометрическая фигура, образованная двумя лучами, выходящими из одной вершины.]

История возникновения транспортира

Транспортир — это прибор, который позволяет измерить любой угол. Измеряют углы в градусах. Когда же появились транспортир и мера измерения углов «градус»? Предполагают, что это было связано с созданием календаря много тысяч лет тому назад. Древние математики нарисовали круг и разделили его на столько частей, сколько дней в году. Но они думали, что в году не 365 или 366 дней, а 360. Поэтому круг, обозначающий год, они разделили на 360 равных частей. Такое изображение было очень наглядным, на нем можно было отмечать каждый прошедший день и видеть, сколько дней осталось до конца года. Каждой части дали название «градус». Градусная мера сохранилась и до наших дней. Картинку с древним календарем легко нарисовать, имея под рукой транспортир. (*Слайд 4*)

Обратите внимание, сколько существует различных видов транспортиров! (*Выставка транспортиров* (*слайд 5*). Но в чем они все схожи? Какими бы они ни были разными, у каждого есть ***шкала*** и ***центр***.

А теперь давайте подробно рассмотрим ваши транспортиры. Полукруглая шкала транспортира разделена на 180 частей или градусов; также есть центр транспортира, который является вершиной развернутого угла. У некоторых транспортиров есть двойная шкала, которая позволяет более удобно и точно измерять и строить углы.

Единицу величина угла называют градусом. (*Слайд 6*)

Как измерить угол с помощью транспортира?

Рассмотрим алгоритм измерения углов.

1. Совместим вершину угла с центром транспортира. (*Слайд 8*)
2. Расположим транспортир так, чтобы одна из сторон угла проходила через начало отсчета на шкале транспортира (то есть совместим с нулем). (*Слайд 9*)
3. Найдем штрих на шкале, через который проходит вторая сторона. (*Слайд 10*)
4. Проверим, соответствует ли полученная мера угла его виду. (*Слайд 11*)

Применением алгоритм измерения углов *(Слайд 12)*

Первичное закрепление

Найдите ошибки при измерении углов (*Слайд 13*). Что нужно для того, чтобы измерить градусную меру угла? (*Слайд 14*)

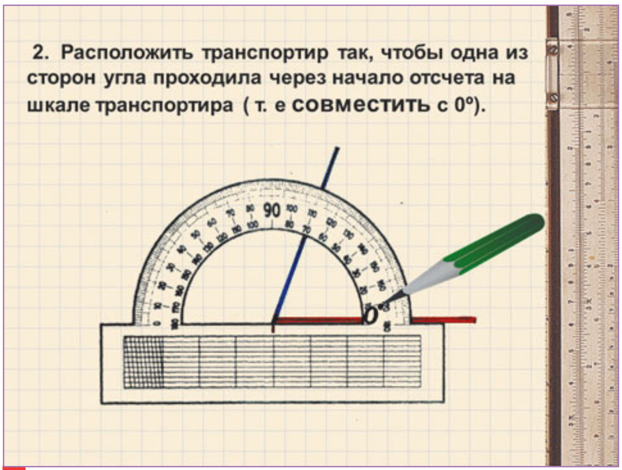
1. Знать, как пользоваться транспортиром.
2. Действовать согласно алгоритму измерения углов.
3. Уметь точно определять градусную меру угла.
4. Уметь определять вид угла.

Практическая часть урока

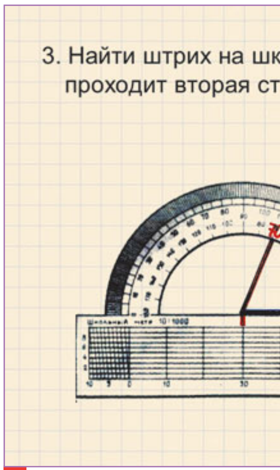
Задание 1. Измерьте градусную меру тупого угла с помощью транспортира. (*Слайд 15*)

(*Учащиеся работают с раздаточным материалом. Результат измерения проверяется на интерактивной доске учителем. Далее при выполнении заданий 2—7 к доске вызывается ученик по желанию.*)

8



9



10

Задание 2. Постройте острый угол вершиной вверх и измерьте его величину.

Задание 3. Какие углы называют смежными? Дайте определение.

[Это углы, у которых одна сторона общая, а две другие образуют прямую.]

Постройте смежные углы, измерьте их величины и запишите, чему равна сумма градусных мер смежных углов.

Задание 4. Какие углы называются вертикальными? Дайте определение.

[Это пары углов, которые имеют общую вершину, а стороны являются продолжением одна другой.]

Постройте и измерьте вертикальные углы.

Физкультминутка

1. Точка (наклоны головы в стороны).
2. Показать руками:
а) прямой угол; б) острый угол;
в) тупой угол; г) развернутый угол.
3. Верны ли высказывания («да» — хлопок в ладоши, «нет» — руки в стороны):
а) угол 90° — острый;
б) угол 100° — тупой;
в) угол 30° — прямой;
г) ученики 5 «А» класса умеют измерять углы транспортиром.

Практическая часть урока (продолжение)

(*Учащиеся строят в тетрадях, а один ученик вызывается к интерактивной доске.*)

Задание 5. Постройте угол величиной в 74°.

Задание 6. Что такое биссектриса угла? Дайте определение.

[Это луч, исходящий из вершины угла и делящий его пополам.]

Постройте биссектрису угла, равного 126°, и измерьте величины получившихся углов.

Задание 7. Постройте прямой угол с помощью транспортира и линейки.

(После этого учитель демонстрирует на интерактивной доске, как построить на клетчатой бумаге углы 45° 60°.)

Задание 8. Изобразите цифры от 1 до 5 так, чьобы в их начертании содержалось соответствующее им количество углов.

Работа в группах

Учащиеся работают с раздаточным материалом, результат проверяется на интерактивной доске. (*Слайды 16—19*)

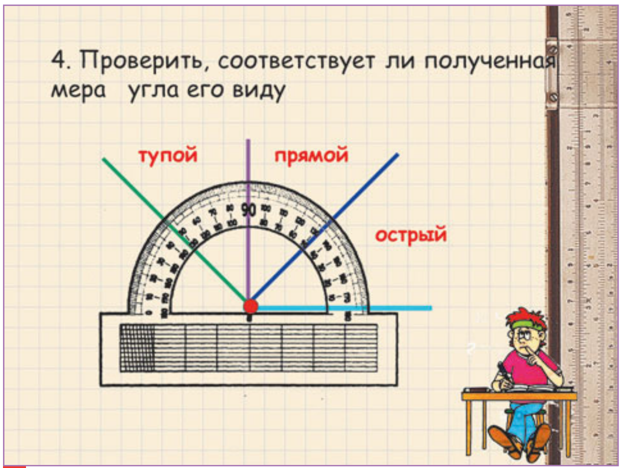
Домашнее задание.

Индивидуальный раздаточный материал. (*Слайд 20*)

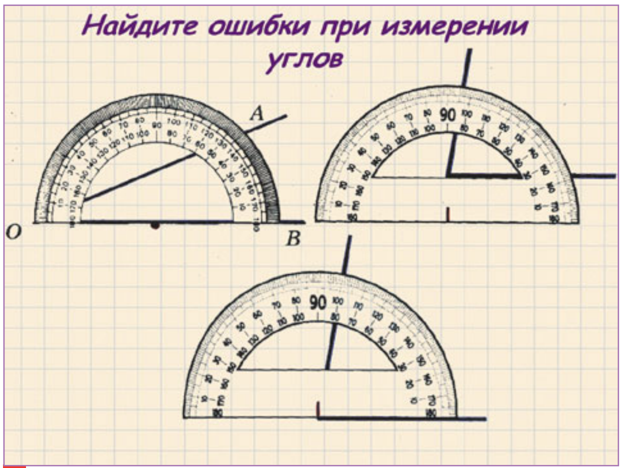
Обсуждение урока

Л.Р. Мы сегодня обсуждаем урок математики в 5-м классе по теме важной, имеющей традиционные сложности. Тему измерения углов нельзя отнести к простым темам курса. Здесь сразу несколько проблем. И новый инструмент, а следовательно, и новый алгоритм измерения. Очень мешает навык измерения с помощью линейки. Не очень понятна единица измерения. Да и сама измеряемая фигура не так проста, как кажется, — бесконечность сторон угла декларируется многими пятиклассниками, но реально понимается немногими из них. Поэтому урок нам показался интересным тем, как учитель преодолевает эти трудности, какие решения предлагает.

Я отмечу, что урок насыщен различными видами деятельности, содержательный, в нем есть и умственная работа, и работа руками, которые неплохо чередуются. Думаю, что ученики не скучали, а благодаря переключениям с одного вида деятельности на другой не успели устать.



11



13

П.К. В уроке, наверное, есть достоинства, но возникает и много вопросов, на которые я не могу ответить однозначно. Давайте по порядку. Первое, тип урока; учитель пишет, что это обобщающий урок по данной теме, а в чем собственно автор видит обобщение? Второе, почему на обобщающем уроке возникает проблемный вопрос об измерении углов?

Л.Р. Я поняла вас, а о каком обобщении должна идти речь? О научно-теоретическом обобщении понятий? Если исходить из того, что обобщение — это «форма приращения знания путём мысленного перехода от частного к общему, что обычно соответствует и переходу на более высокую ступень абстракции», то результатом обобщения является определение. Мысленных переходов от частного к общему мы не видим на этом уроке, но видим конечный результат — определение. Даже несколько определений. С другой стороны, на уроке рассматривается некий свод знаний об угле: проблема измерения угла, виды углов, свойство аддитивности (правда, неявным образом), понятия биссектрисы угла, смежных и вертикальных углов, а также их свойства, что также можно считать обобщением. Только все это происходит как-то без переходов и связей. И идет от учителя, а не от учеников. Не они вспоминают и рассказывают все, что знают об угле, а учитель, а они сами вряд ли понимают, откуда берется следующий вопрос или задание. Они не рождают какую-то мысль, а вспоминают выученные фразы. Так что, я считаю, что назвать урок обобщающим, конечно, можно. Другое дело, что мне не хватает именно этой внутренней мысленной работы ученика.

При этом соглашусь с вами, что следует аккуратнее определять тип урока. Не каждый заключительный урок по теме является обобщающим. Чаще это подведение итогов, уточнение полученной по теме информации, применение изученных понятий. И если говорить об обобщающем уроке, то нужно точно понимать (да и писать), обобщение каких понятий происходит на уроке.

П.К. А на каких заданиях развивается глазомер, как заявлено в целях урока?

Л.Р. Я бы говорила о развитии глазомера в том случае, если ученик оценивает величину угла приближенно. Например, учащиеся сначала пытаются прикинуть величину изображенного угла, а затем проверяют себя, выполняя измерения с помощью транспортира. Это может быть своего рода игрой: выигрывает тот, кто дал более точный результат.

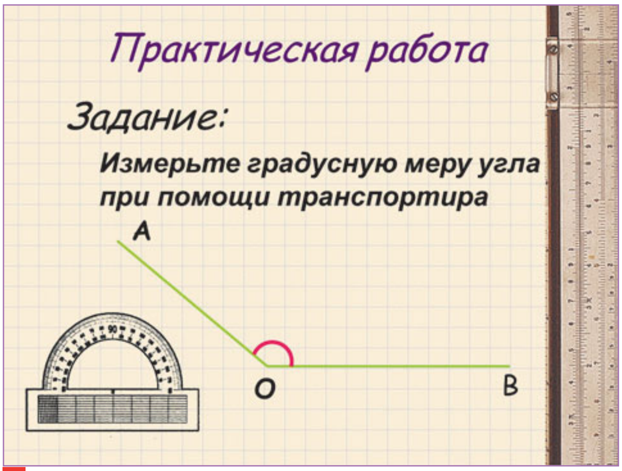
П.К. Я тоже приверженец устного счета. Хорошо, если дети считают много и разными способами. Но какую цель преследует автор урока, давая 10 однотипных примеров на вычисление.

Л.Р. У каждого учителя своя система устного счета. Думаю, что мы увидели на этом уроке один лишь фрагмент этой системы. Да, здесь дети работают с выражениями одного типа, а на следующем уроке будет другая конструкция. Это нормально.

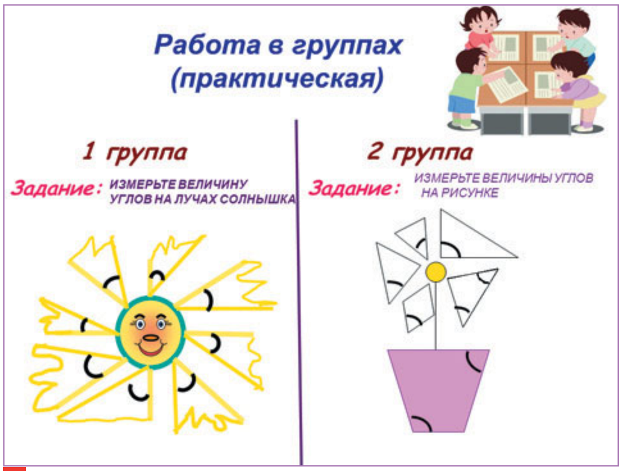
Единственное, мне бы хотелось чуть больше поговорить с ребятами о данных выражениях, поскольку среди них есть интересные. Я бы обязательно попросила заменить выражение $4 \cdot 4 + 4$ выражением, содержащим одно действие; найти еще такие же выражения среди десяти данных (не только с суммой, но и с разностью). Это и возвращает к определению операции умножения, и учит искать общее, и развивает наблюдательность.

П.К. А что значит «Сосчитать парами от 20 до 40 и обратно»?

Л.Р. Ну, это явно пропедевтика делимости. Это хорошо. Другое дело, что любое задание должно быть таким, чтобы ученик захотел его выполнить. Я бы постаралась «завернуть» наш традиционный устный счет в более привлекательный для детей «фантик». Что может быть таким фантиком? В нашем случае дело бы пошло



15



16

веселее, если бы ребята сами придумывали такие задания друг для друга. Это несложно. Можно задать схему, например, придумать задание со словами: «считай… от… до…». Это и привлекательно, и полезно.

П.К. Перейдем к основной части урока. Учитель неоднократно просит учащихся сформулировать различные определения. Это нужно, но это формальное требование. А ведь у учителя есть и презентация к уроку, и интерактивная доска, так не дать ли несколько чертежей и попросить детей указать, на каком из них изображен угол, и попросить пояснить, почему на других чертежах изображенная фигура не является углом. А уже после этого требовать дать определение угла.

Л.Р. Уровень развития логического мышления детей 10–11 лет еще не достаточен для того, чтобы полностью понимать такую логическую конструкцию, как «определение», зачем оно существует, для чего служит. Идет его формирование. Поэтому я согласна с вами, мне ваш подход нравится, он не формальный, а содержательный. И еще, формулировки типа «дайте определение» больше относятся к контролю и не располагают к иной деятельности. Знаешь ответ — отвечаешь. А если не знаешь? Что делать в этом случае? Значит, это проверка, причем проверка памяти. Мне кажется, что надо стремиться и стараться в любых ситуациях стимулировать мыслительные действия.

Кроме того, определение не единственный способ введения понятия, его формулирование должно являться завершающим этапом при работе с понятием. Именно это вы и предлагаете: содержательную работу с понятием, которая завершается выделением существенных свойств и формулированием определения. Представим, что ученик забыл определение. Имея опыт содержательной работы с понятием, он восстановит в памяти все существенное, а затем сможет воспроизвести определение или же дать верный ответ на вопрос. А именно к этому мы и стремимся — правильно применять понятия, решать задачи, а не к тому, чтобы воспроизводить тексты по памяти. Хотя, конечно же, и память надо заставлять работать и развивать.

П.К. Кстати, хорошо, что учитель говорит об истории возникновения транспортира.

О.М. А мне очень понравилось, что учитель продемонстрировал различные виды транспортиров и выяснил с учениками, чем они различаются и чем схожи.

Л.Р. Да, это хорошее решение известной проблемы многообразия транспортиров, это тот случай, когда разнообразие только мешает. Лучше, если на первых уроках, где алгоритм только вводится, все работают с транспортиром одного и того же вида. И так учителю приходится каждому пятикласснику показывать, как расположить транспортир, а если они еще и разные — совсем беда. А вот на обобщающем уроке рассмотреть транспортиры во всем их многообразии очень даже полезно. Это точно обобщение — выделение общего из множества частных.

П.К. Я бы отметил еще одну шероховатость: если мы пытаемся выделить какое-то свойство углов, то почему не заостряем на нем внимание учащихся? Почему не говорим, что так будет всегда, и не пытаемся это обосновать (хотя бы чуть-чуть)? Остались за кадром аддитивность меры угла и ее ограниченность, а жаль.

Л.Р. Да, и мне жаль. Но здесь проблема выбора: все успеть невозможно, поговорить обо всем не получится! Я бы следовала принципу «Лучше меньше, да лучше». Однако выбор за учителем.

Кстати, я бы хотела особо отметить, что автор учит делать качественную проверку выполненного измерения: оценивая, тупой угол или острый измеряется. Он вписывает эту проверку в алгоритм. Это очень правильно!

П.К. Ну если хвалить, то я бы отметил физкультминутку — выше всяких похвал!

О.М. Мы совсем забыли о презентации. Большой плюс данной презентации состоит в том, что она не является полным повторением конспекта урока. На слайдах указана только необходимая информация. Причем она подается четко, конкретно и наглядно, что поможет ученику легко ее запомнить и в дальнейшем воспроизвести. В первую очередь это касается алгоритма измерения углов. Каждый пункт указан на отдельном слайде, указанное действие в пункте сопровождается наглядным представлением. И я думаю, что каждый ученик параллельно в тетради проделывает те же действия, хотя об этом не указано в конспекте урока. Такая презентация является именно дидактическим сопровождением урока.

Л.Р. Будем ли говорить об оформлении?

О.М. О соблюдении единого стиля оформления презентации, о едином переходе слайдов, об использовании «правильных» шрифтов и об их количестве мы говорили много и очень подробно (см. № 9–12, 2014). Еще раз напомню мои советы: не злоупотребляйте анимационными эффектами, они не должны быть слишком активными: вылет, вращение, волна, побуквенное появление текста — это только отвлекает внимание учеников. Фон должен выделять, оттенять, подчеркивать информацию, находящуюся на слайде, но не заслонять ее.

Еще один совет: избегайте ненужных картинок. Например, на слайде 4 картинки должны символизировать времена года. Тогда возникает вопрос: бабочка и слон указывают на какие времена года? Я призываю наших читателей не использовать лишних «картинок-анимашек» (слайды 11, 13, 14), которые отвлекают детей и мешают сконцентрироваться им на важных моментах темы.

Сегодня я бы хотела обратить ваше внимание именно на использование картинок и фотографий. В данной презентации фотографии и картинки, мягко говоря, не самого хорошего качества. Так, на отсканированных изображениях транспортира шкала, по которой измеряют градусную меру угла, совсем не читается. Как можно в таком случае способствовать формированию наглядных представлений учеников о данном инструменте, об его использовании при измерении углов?! А уж что говорить об эстетике... Представим, уважаемые читатели, что ученик сдал нам презентацию с такими изображениями. Что мы ему говорим? Правильно, что на просторах Интернета можно найти картинки высокого качества, поэтому, дружок, посиди, поищи и принеси переделанный вариант. Этим мы, учителя, воспитываем аккуратность, чувство ответственности за качество выполняемой работы. Что же здесь можно посоветовать?

Уважаемые читатели, при сканировании изображений необходимо настроить параметры сканирования. Для установки параметров используется диалоговое окно сканера, которое открывается автоматически при нажатии на *Сканировать*. Черно-белый тип изображения обеспечивает более высокую скорость сканирования, но при этом может потеряться часть информации, что может привести к ухудшению качества, поэтому сканирование в сером является оптимальным режимом. Если вы хотите, чтобы содержащиеся в документе цветные элементы (картинки, цветные буквы и цветной фон) были переданы в электронный документ с сохранением цвета, необходимо выбрать цветной тип изображения. Разрешение лучше использовать 300 точек на дюйм (dpi).

Если вы берете изображения из Интернета, то позаботьтесь о том, чтобы они были высокого качества, но при этом презентация становится очень «тяжелой». Тогда нужно сжать изображения. Для этого щелчком мыши выделяем любую картинку, появится панель настройки изображения. Нажимаем кнопку «Сжатие рисунков». В контекстном меню можно выбрать: «Применить к выделенным рисункам» (если хотите поработать отдельно с каждым рисунком) или «Применить ко всем рисункам документа». Разрешение устанавливаем «для Интернета и экрана». Далее ОК. Если выбрать разрешение «для печати», то качество изображений получится значительно лучше, но объем уменьшится незначительно.

Сохраните презентацию и убедитесь в том, что она стала меньше по объему. Проверьте качество всех изображений. Если обнаружите изображения, качество которых вас не удовлетворяет, можно воспользоваться оригиналом презентации и отдельно поработать над сжатием этих изображений.

Ну и напоминаю о правилах использования изображений: взяв изображение из Интернета, не забывайте указать его автора или сайт, с которого вы его скачали.

Л.Р. Что же, подводя итоги нашему обсуждению, хочу поблагодарить автора за то, что подготовленный им урок не оставил нас равнодушными, за возможность задуматься и поразмышлять над важными методическими проблемами. Надеюсь, что наши рассуждения были полезны читателям.

журнал

Математика – Первое сентября

2-е полугодие 2015 года

ПОДПИСКА

на сайте www.1september.ru и в почтовых отделениях РФ

Индекс	Название издания	Периодичн. в полугодие	1 месяц		6 месяцев	
			Каталожная цена (руб.)	Подписная цена (руб.)	Каталожная цена (руб.)	Подписная цена (руб.)
Название блока в разделе «Журналы»	**ПЕРВОЕ СЕНТЯБРЯ. ЖУРНАЛЫ ИЗДАТЕЛЬСКОГО ДОМА** (499)249-31-38					
79073	**Математика – Первое сентября. Бумажная версия** С дополнительными материалами и презентациями на сайте www.1september.ru *В июле не выходит. Подписка на июль не принимается* *(-) 160 г 64 стр.*	5	440.00		2200.00	
12717	**Математика – Первое сентября. Электронная версия на CD (полная копия бумажной версии)** С дополнительными материалами и презентациями *В июле не выходит. Подписка на июль не принимается* *(-) 75 г*	5	160.00		800.00	
сайт 1september.ru	**Математика – Первое сентября. Электронная версия**	5	–		–	500.00

Подписку принимают во всех отделениях связи Российской Федерации, а также на сайте www.1september.ru

При оформлении подписки на сайте оплата производится по квитанции в отделении банка или электронными платежами on-line

VISA MasterCard QIWI WebMoney

И. ВЫСОЦКИЙ,
i_r_vysotsky@hotmail.ru,
г. Москва

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В ШКОЛЕ

Теория вероятностей дает ту самую связь школьной математики с жизнью, о которой давно мечтают все те, кто отдает себе отчет в причинах падения мотивации к учению. Вероятность нужна, но также очевидны трудности, с которыми она вживляется в школьную математику. Причины обсуждались много раз, и в этом смысле за истекшие десятилетия поменялось немногое, хотя налицо сдвиги: все больше учителей видят образовательный и мотивационный потенциал, заложенный в этом разделе математики.

В декабре 2013 года принята Концепция развития математического образования, в которой явно отражена необходимость развития стохастической линии в школе. В готовящихся примерных образовательных программах по математике вероятность и статистика впервые занимают достойное место: на них отводится достаточное число учебных часов, четко прописаны элементы содержания на базовом и углубленном уровне требований. Кроме того, после разделения ЕГЭ на базовый и профильный уровни следует ждать расширения типологии заданий профильного уровня по теории вероятностей.

Понимая острую нужду в методической поддержке преподавания вероятности и статистики в школе, лаборатория теории вероятностей Московского центра непрерывного математического образования некоторое время назад разработала принципы и тактику методической поддержки через Интернет учителей и школьников, соответственно преподающих и изучающих вероятность в школе.

Еще несколько лет назад создание такого ресурса было невозможным, но опыт последних лет и накапливающиеся материалы создали условия для качественного скачка в области методики преподавания этого нового раздела школьной математики. Сайт называется «Теория вероятностей в школе» и расположен по адресу http://ptlab.mccme.ru.

Идея и назначение ресурса просты — объединить все, что достойно публикации, и все, что необходимо учителю и мотивированному школьнику в области теории вероятностей и статистики:

– статьи, включая публикации участников проекта;
– задачи ОГЭ и ЕГЭ;
– индивидуальные консультации;
– средства компьютерного моделирования;
– учебные базы данных;

– лабораторные работы;
– онлайн-школа;
– повышение квалификации и переподготовка учителей;
– олимпиада для школьников

и многое другое.

Наша лаборатория рада любым конструктивным связям с учебными и популярными изданиями, с отдельными школами, учителями и школьниками. Сейчас мы можем похвастаться плодотворным сотрудничеством с журналом «Математика», с журналом «Квантик», а также с двумя международными образовательными проектами.

Учебные базы и лабораторные работы

Отдельно остановимся на учебных базах и лабораторных работах. Осмысленное и полезное изучение статистики и теории вероятностей невозможно без эксперимента. Слабое место школьного статистического или вероятностного эксперимента состоит в естественной ограниченности объема данных, с которыми школьник может работать в течение урока. Даже простая иллюстрация закона больших чисел, не говоря уже о более сложных экспериментах, требует обработки больших массивов и потому занимает непозволительно много времени. С этим обстоятельством сталкивался любой учитель, продумывавший учебный эксперимент по статистике или теории вероятностей.

На помощь приходит компьютер. Но он не избавляет от необходимости продумать, найти, собрать, обработать большой объем информации, подготовить и представить ее таким образом, чтобы школьники могли провести полезную и понятную работу и сделать из нее разумные выводы. Ситуация усугубляется недостаточным опытом учителей в этой области.

Поэтому в конце 2014 года мы решили создать раздел «Базы», где достаточно обширные учебные коллекции различных числовых данных будут доступны для загрузки любому зарегистрированному пользователю сайта (подписчику). Данные из самых разных областей размещаются уже в подготовленном к использованию виде. Мы выделили несколько направлений и областей, где собираем актуальную информацию: география, антропометрия, социология, демография, экономика. В планах — спортивная и медицинская статистика. Продуманы схемы представления информации в базах и выработаны общие подходы к ее публикации. Несколько таблиц уже опубликовано.

Мы открыты для сотрудничества и будем признательны тем, кто желает поделиться имеющимися у него в распоряжении материалами или идеями.

Таблицы с данными

На этой странице мы размещаем таблицы с различными данными по географии, экономике, демографии, спортивной статистике и т.д. Учитель может использовать эти данные на уроках, для домашних заданий, для ученических проектов. Данные упакованы в архивы в формате rar. Первая таблица в свободном доступе. Загрузка остальных требует регистрации.

Некоторые данные используются в лабораторных работах, опубликованных на странице «Практика».

Информация взята из открытых источников. Мы не несем ответственность за ее достоверность и полноту. Если нашли ошибку, сообщите, пожалуйста. Если вы можете уточнить данные, присылайте их с указанием источника.

География
G001. Крупнейшие реки мира (свободная) 24.12.2014
G002. Крупнейшие озера мира 26.12.2014
G003. Крупнейшие озера России 29.12.2014
G004. Высочайшие горы мира (в планах)

Социология
S001. Индекс счастья (скоро)

Примерно такой же подход к созданию и публикации лабораторных работ. Сейчас на сайте опубликован список из десятка работ, часть из них уже доступна подписчикам.

Все работы снабжены подробным руководством для учителя и описанием для учащихся. При выполнении некоторых работ по статистике предполагается использование числовых баз, представленных на сайте. Для некоторых работ по теории вероятностей удобно пользоваться компьютерными симуляторами бросания костей, монет, доски Гальтона, которые размещены на странице «Комп. модели».

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
1		**Наблюдение за отклонением частоты события от вероятности**																	
2		**Число благ. исходов**					3	Серий			**1**	Сравнивать со стандартным отклонением?						нет	
3		**Бросаний в серии**					100	Общее число n			**100**	Уравнение стандартного отклонения							
4																			
5		Вероятности события (успех) $p=\frac{1}{2}$						Число успехов			**52**	$y=\sqrt{\frac{pq}{n}}=\sqrt{\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{n}}=\frac{0,5}{\sqrt{n}}$							
6																			
7		Вероятность неудачи $q=\frac{1}{2}$																	
8																			
9	Номер серии	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
10	Всего бросаний	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	1100	1200	1300	1400	1500	1600	1700	1800
11	**Успехов в серии**	52																	
12	Всего успехов	52																	
13	Частота успеха	0,520																	

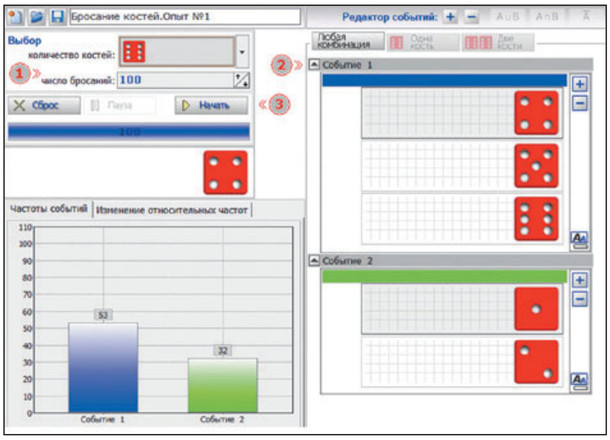
Фрагмент расчетной таблицы для проведения работы «Отклонение частоты»

Лабораторные работы

На странице размещаются лабораторные работы по теории вероятностей и статистике в формате rar. Каждый архив содержит файлы, необходимые для проведения работы. Для загрузки на ваш компьютер требует регистрация.

Работа 1. Диаграммы (загрузка свободная для гостя) 24.12.2014
Работа 2. Средние (в разработке)
Работа 3. Диаграммы рассеивания (в разработке)
Работа 4. Частота и вероятность 29.12.2014
Работа 5. Отклонение частоты 09.01.2015
Работа 6. Геометрическая вероятность и метод Монте-Карло (в разработке)
Работа 7. Природа везения (в планах)

Помимо необходимых инструкций, все работы снабжены удобными расчетными таблицами, защищенными от случайной порчи или удаления данных. Дополнительно мы вкладываем в архивы незащищенные версии тех же таблиц для того, чтобы учитель мог модифицировать работу, привнести что-то свое, уменьшить или увеличить рабочее поле, изменить природу данных или результатов и т.п. — иными словами, изготовить свою работу на имеющейся основе.



Симулятор «Кости»

Используя инструменты, которые дает сайт, учитель может не только пользоваться готовыми работами, но и создавать собственные. При этом всегда можно рассчитывать на «техническую поддержку» — консультацию со специалистами, обсуждение и дальнейшую публикацию удачных учебных разработок.

Почему и как мы просим гостей сайта регистрироваться

Мы рады всем, но хотим видеть «географию и демографию» наших пользователей. Поэтому мы просим регистрироваться. Регистрация открытая, интуитивно понятная и не требует много времени. В случае, если подписчик забыл пароль, он всегда может восстановить его. Правила пользования сайтом (страница «О нас») просты и предполагают лишь взаимное уважение подписчиков.

Конкурс «Задача дня»

Подписчики могут принять участие в конкурсе «Задача дня». Задачи подобраны таким образом, чтобы их можно было решить после некоторых раздумий, пользуясь только теми сведениями из теории вероятностей, которые можно найти в любом школьном учебнике. Задача обновляется автоматически раз в две недели. В конце учебного года мы планируем награждение победителей конкурса. Сейчас планируется открыть для подписчиков архив конкурса с тем, чтобы дать возможность решать не только текущую задачу, но и предыдущие.

Новогодняя задача

Новостная рассылка

Любой современный образовательный интернет-проект обречен, если он не интегрирован с социальными сетями. В настоящее время мы осуществляем новостную рассылку через группу «ВКонтакте». Группа называется «Вероятность в школе»: http://vk.com/odds_in_school.

Помимо новостной рассылки, в группе мы размещаем и другие материалы: обсуждения, голосования, мнения, шутки, карикатуры и все прочее, что по разным причинам трудно или неуместно разместить на самом сайте лаборатории.

Если вы преподаете или изучаете вероятность в школе — приходите к нам!

Таблица G002

Крупнейшие озера мира

	Название	Площадь (кв. км)	Объем (куб. км)	Высота над уровнем моря (м)	Наибольшая глубина (м)	Страны (часть света)	Примечание
1	Каспийское море	376 000	78 200	–28	1025	Россия, Казахстан, Туркмения	
2	Верхнее	82 100	12 100	183	406	Канада, США (Северная Америка)	
3	Виктория	68 100	2750	1134	80	Танзания, Кения, Уганда	
4	Гурон	60 000	3540	177	229	Канада, США (Северная Америка)	
5	Мичиган	57 800	4900	177	281	США (Северная Америка)	
6	Аральское море	51 200		53	55	Казахстан, Узбекистан (Азия)	
7	Танганьика	32 900	18 900	773	1470	Танзания, Замбия, Конго	

Фрагмент таблицы «Крупнейшие озера мира»

Г. ЛЕВИТАС,
gglevitas@gmail.ru,
г. Москва

ЧТО ТАКОЕ «МАТЕМАТИЧЕСКОЕ АССОРТИ»

Я работаю в московской школе № 1199 (Лига Школ). Два года назад в учебный план мы ввели новый «предмет» — математическое ассорти. Его целью является ознакомление всех учащихся с задачами на сообразительность — с их условиями и решениями. Если это приводит к тому, что ученик начинает сам решать такие задачи, то это лучшее, чего можно достигнуть. Но если даже он просто знакомится с ними, то и это хорошо, так как служит его умственному развитию. Замечу, что в некоторых школах с той же целью вводятся уроки шахматной игры. Однако наше предложение более доступно.

Курс строится по полугодиям. Никаких уроков в расписание не включается. В начале семестра учащиеся получают список из 25 задач, а в конце его проводится экзамен. В течение семестра на уроках математики или во внеурочное время организуются консультации для желающих (например, в середине сентября разбираются первые 8 задач списка, в начале октября — следующие 8 задач, а в конце октября — остальные задачи). Тем самым учащийся получает возможность попытаться решить задачу самостоятельно и услышать ее решение на консультации.

Экзамены проводятся в конце ноября и в конце апреля по билетам в устной или письменной форме. В каждом билете содержатся тексты трех задач из вышеупомянутого списка. Учащийся должен вспомнить и изложить их решение. При устном экзамене в аудитории находятся одновременно два ученика. Один рассказывает учителю решение задач из своего билета, второй готовится к ответу. На письменном экзамене учащимся дается 30 минут, чтобы записать решение трех задач из билета. Результаты экзаменов за первое и второе полугодия могут учитываться при выставлении годовых отметок по математике.

Ниже и в электронном приложении приводится 150 задач, которые я планирую использовать в учебном году в 7–9-х классах. Каждая задача снабжена индексом 2, 3 или 5. Это число баллов, которые получает ученик при правильном ее решении. Балл определяется не трудностью решения задачи (решение ведь ученику известно до экзамена!), а трудностью самого изложения этого решения.

В нашей школе от этого предмета освобождены учащиеся 10-х и 11-х классов ввиду их большой загруженности. Классов моложе 7-го у нас нет. Я предлагаю проводить такую работу во всех классах с 1-го по 9-й. Задачи для 7–9-х классов можно брать из моего списка, а можно давать и другие — те, которые нравятся учителю. Задачи для 1–6-х классов можно найти в разнообразных источниках: «Кенгуру», «Квантик» или любых других сборниках нестандартных задач для 1–6-х классов.

К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru (Задачи для учащихся 7–9-х классов.)

Тексты задач

7 класс

(*I полугодие*)

1. Можно ли разложить 1199 монет в 16 ящиков так, чтобы в каждом ящике была либа 1 монета, либо 11 монет, либо 119 монет? (2)

2. На прямой AB имеется 25 точек, не принадлежащих отрезку AB. Может ли сумма расстояний от этих 25 точек до точки A равняться сумме их расстояний до точки B? (3)

3. В некотором месяце три воскресенья пришлось на четные числа. Какого числа была последняя среда этого месяца? (3)

4. Можно ли составить магический квадрат из первых 64 простых чисел? (2)

5. В квадрате 40×40 см отмечено 15 точек. Докажите, что из него можно вырезать квадрат 10×10 см, в котором нет ни одной из этих точек. (2)

6. Квадрат 10×10 м раскрашен в два цвета. Докажите, что внутри этого квадрата найдется отрезок длиной в 2 м с разноцветными концами. (5)

7. Дано 1200 целых чисел. Докажите, что из них можно выбрать два числа, разность которых делится на 1199. (3)

8. Для соревнования по настольному теннису в один круг на приз Лиги Школ каждый класс выделил по одному игроку. Докажите, что в любой момент соревнования найдется двое игроков, проведших одинаковое число встреч. (3)

9. Существует ли из 55 двузначных чисел таких, что сумма двух любых из них не равна 100? (3)

10. Докажите, что среди шести людей обязательно найдется либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых. (5)

11. На плоском поле лежит три шайбы: A, B и C. Хоккеист бьет по одной из шайб так, чтобы она прошла между двумя другими и остановилась в некоторой точке поля. Может ли он вернуть все шайбы на прежние места после 17 таких ударов? (3)

12. На прямой стоят две фишки: слева красная, а справа синяя. Разрешается вставлять две фишки одного цвета либо между имеющимися фишками, либо с края. Также разрешается удалять две рядом стоящие фишки одного цвета. Можно ли с помощью этих операций оставить на прямой ровно две фишки: слева синюю, а справа красную? (5)

13. В таблице $m \times n$ расставлены числа так, что сумма чисел в любой строке и любом столбце равна 1. Докажите, что $m = n$. (2)

14. На доске написано число, равное 8^{20}. У него вычисляется сумма цифр, у полученного числа вновь вычисляется сумма цифр и так далее. Докажите, что в конце концов получится однозначное число, и определите его. (5)

15. На столе рубашкой вниз лежит игральная карта. Можно ли, перекатывая ее по столу через ребра, добиться того, чтобы карта оказалась на прежнем месте, но рубашкой вверх? (2)

16. Известна задача на выявление легкой монеты из трех одним взвешиванием на чашечных весах без гирь. Расскажите решение этой задачи. Обобщите задачу, указав, сколько взвешиваний понадобится для выявления легкой монеты из 3^n монет на таких же весах. (2)

17. Известна задача о том, какими четырьмя гирями можно взвесить любой вес в целое число килограммов от 1 до 40. Расскажите решение этой задачи. Обобщите задачу, указав, для какого n можно взвесить любой вес от 1 до n килограммов m гирями. (3)

18. На прямой линии лежит 10 монет весом в 7 г и 8 г каждая (не менее одной монеты каждого веса). Легкие монеты лежат левее тяжелых. В два взвешивания на чашечных весах без гирь установите суммарный вес всех монет. Обобщите задачу, указав большее число монет того же веса для трех и более взвешиваний. (3)

19. Среди 239 монет — две фальшивые одного веса. Тремя взвешиваниями на чашечных весах без гирь установите, тяжелее они настоящих монет или легче. (5)

20. Среди 12 монет — одна фальшивая. Тремя взвешиваниями на чашечных весах без гирь найдите эту монету и установите, тяжелее она настоящих монет или легче. (5)

21. Сформулируйте и докажите признак делимости на 7 в восьмеричной системе счисления. (2)

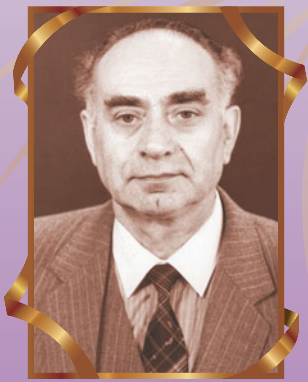
22. Из шахматной доски удалили поля a3 и e7. Можно ли оставшуюся часть доски выложить плиткой 2×1 (клетка плитки равна полю доски)? (2)

23. Сколько замков нужно установить на сейфе и как нужно раздать ключи от них, чтобы среди данных пяти человек любые трое могли открыть этот сейф, но никакие двое не могли этого сделать? (3)

24. Задумано число от 1 до 8. Как отгадать его в 6 вопросов, если задумавший может отвечать только «да» или «нет» и при этом имеет право один раз сказать неправду? (5)

25. В волейбольном турнире не бывает ничьих. Будем считать, что команда A превосходит команду B, если A выиграла у B или если A выиграла у команды C, выигравшей у B. Чемпионом будем считать команду, превосходящую все остальные команды. Докажите, что при таких соглашениях в турнире, где каждая команда играет с каждой по одному разу, обязательно найдется хотя бы один чемпион. (5)

В.Г. БОЛТЯНСКОМУ — 90 ЛЕТ!



Болтянский-математик

В 2015 году исполняется 90 лет Владимиру Григорьевичу Болтянскому.

Со студенческой скамьи В.Г. Болтянский ушел в действующую армию на фронты Великой Отечественной войны. После демобилизации продолжил обучение на мехмате МГУ им. М.В. Ломоносова, который окончил в 1948 году. В дальнейшем был профессором на том же факультете.

В 1951 году Болтянский стал сотрудником института математики имени Стеклова АН СССР, где под руководством академика Л.С. Понтрягина принял участие в разработке теории оптимального управления. Все началось с анализа ряда математических моделей конкретных задач, о которых инженеры рассказывали на семинаре академика Л.С. Понтрягина. Дальнейшие исследования развивались стремительно, и в 1961 году вышла монография: *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. В ней излагалась уже сформировавшаяся теория, а в следующем году весь коллектив авторов был удостоен Ленинской премии.

Центральный результат теории оптимального управления, названный по предложению В.Г. Болтянского «принципом максимума Понтрягина», привел к радикальной перестройке теории систем управления и сыграл исключительную роль в решении разнообразных инженерных задач, в том числе в космонавтике. Сам Владимир Григорьевич внес существенный вклад в развитие этой теории, разработав, в частности, линейную теорию оптимального управления; ему же принадлежит рассмотрение многочисленных обобщений (например, теория оптимального управления дискретными системами). Благодаря своему замечательному дару писать легко и доходчиво, строго и доступно объяснять даже сложные вещи В.Г. Болтянский пропагандировал и популяризировал это выдающееся достижение математики. Его блестящая книга «Математические методы оптимального управления», вышедшая в 1969 году, на долгие годы стала настольным пособием для многих молодых математиков, естествоиспытателей, инженеров.

Другой областью науки, где ярко проявился талант Владимира Григорьевича, стали работы в области топологии, заниматься которой он начал еще студентом под руководством своего учителя академика П.С. Александрова. За цикл работ по теории частично упорядоченных топологических колец и их приложений, изложенных в книге «Топологические алгебры Буля» (М.Я. Антоновский, В.Г. Болтянский, Т.А. Сарымсаков, 1962 г.), авторы были удостоены Государственной премии Узбекской ССР имени Бируни за 1967 год.

Следует отметить выдающийся результат В.Г. Болтянского и в области размерности топологических пространств. Им был построен пример двумерного множества, прямое произведение которого на него же (то есть его «квадрат») имеет размерность 3, что противоречит нашей интуиции. Этот результат вошел в золотой

К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru (Список статей) фонд математических находок и будет интересен через столетия.

Широко известны также работы В.Г. Болтянского, связанные с третьей проблемой Гильберта.

В.Г. Болтянский никогда не жалел времени и сил для работы со школьниками: вел занятия в знаменитой 2-й математической школе в Москве, руководил математическими кружками в МГУ, читал лекции по математике на Всесоюзном телевидении, он автор большого числа учебников, учебных пособий и научно-популярных книг, многочисленных статей в журналах «Советская педагогика», «Математика в школе», «Квант» и др.

Мы с благодарностью вспоминаем то время, когда имели возможность трудиться и общаться с Владимиром Григорьевичем Болтянским и от всей души желаем ему здоровья и благополучия.

М.Я. АНТОНОВСКИЙ, Н.Х. РОЗОВ

Болтянский-педагог

В 1966 г. мы начали работать в лаборатории математики нового Научно-исследовательского института школьного оборудования и технических средств обучения (НИИШОТСО), организованного академиком АПН РСФСР С.Г. Шаповаленко. Руководить лабораторией был приглашен доктор физико-математических наук, лауреат Ленинской премии и премии Бируни профессор Владимир Григорьевич Болтянский. Он объяснил, что мы проведем в этой лаборатории несколько лет нашей жизни и надо сделать это не без пользы, наша задача — создание средств обучения, и прежде всего нужно понять, какие именно средства обучения нужны при преподавании того или иного раздела школьной математики. Нашему аспиранту Луговому была выдана кипа бумаги (до сих пор помню ее — третьесортная, зеленого цвета), и он на каждом листе написал заголовок — один из пунктов школьной программы. И на каждом листе написал, какие именно средства обучения нужны, по его мнению, в преподавании этого пункта. Далее кипа поступила ко второму аспиранту, Березину. Он дополнил записи Лугового (вычеркивать не разрешалось). Затем то же сделали по очереди авторы этих строк, потом наш старший научный сотрудник Ашкинузе и Болтянский. А средства обучения были такие: кинофрагмент, диафильм, диапозитивы, материалы для кодоскопа (графопроектора), настенные таблицы, индивидуальные и демонстрационные чертежные приборы, инструменты и приспособления, четырехзначные таблицы В.М. Брадиса. А кроме этого, Болтянский рассказал нам об увиденных им за рубежом тетрадях с печатной основой, в которых печатались задания для учащихся и тут же оставлялось место для их выполнения.

Нашу практическую работу над зеленой кипой Болтянский осмысливал теоретически. Он сразу определил разницу между диафильмом и серией диапозитивов: диафильм состоит из кадров, связанных между собой в определенной последовательности, поэтому он должен быть носителем теории; а не скрепленные между собой диапозитивы должны содержать отдельные задачи. Важным инструментом в нашей работе стало данное Болтянским определение наглядности: наглядность есть изоморфизм плюс простота.

Болтянский с интересом отнесся к новому тогда для нас направлению — к теории поэтапного формирования умственных действий П.Я. Гальперина. Он взял в лабораторию одного из учеников Гальперина — М.Б. Воловича, это внесло в нашу деятельность новую теоретическую струю.

Наша работа всегда была связана с практическим преподаванием. Как только было сформировано наше понимание роли средств обучения в преподавании математики, Болтянский организовал разработку полного их комплекса для преподавания отдельной темы — объема прямоугольного параллелепипеда. Для этого были созданы (и произведены студиями «Школфильм» и «Диафильм» и издательством «Просвещение») пять кинофрагментов, диафильм, серия диапозитивов, серия настенных таблиц и все остальные пособия и проведен эксперимент в одной из школ Москвы — в школе № 52. После этого дидактического пира мы написали монографию «Комплексы учебного оборудования», которой зачитывался весь НИИШОТСО.

А Болтянский уже поставил перед нами новую задачу: каждый год выпускать книгу с полным описанием учебного оборудования по одному классу. И в течение двух лет мы выпустили такие книги по 4-м и по 5-м классам. И еще Владимир Григорьевич настоял на издании специальных руководств для оформления школьного кабинета математики. Но пришла финансовая проверка и работа Болтянского в НИИШОТСО была объявлена незаконной (тогда были трудности с совместительством, а В.Г. Болтянский имел основную работу в Математическом институте АН СССР).

А мы продолжали работу в направлении, заданном Владимиром Григорьевичем. И должны сказать, что этот кратковременный эпизод в жизни Болтянского не пропал даром. И нынешние многочисленные рабочие тетради, общепринятые математические диктанты являются продолжением начатой им работы.

Мы поздравляем Владимира Григорьевича с его 90-летием и желаем ему долгих лет жизни.

Э.Ю. КРАСС, Г.Г. ЛЕВИТАС

О. ЗЕЛЕНЯК,
zlnk@ukr.net,
г. Александрия, Кировоградская обл.

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ В СИММЕТРИЧЕСКИХ КОНФИГУРАЦИЯХ

Статические и динамические задачи

Геометрические задачи можно разбить на два класса — *статические и динамические*.

Исходные данные в задачах первого класса — числовые величины, определяющие конфигурацию, как правило, однозначно. В ответах к ним также получаются числовые величины. Исходные данные в задачах второго класса — переменные величины, определяющие семейство конфигураций. В ответах получаются выражения с переменными.

Область существования выражения-ответа ранее исследовалась старшеклассниками, а его значение при фиксированном наборе значений переменных вычислялось с помощью логарифмической линейки, а позднее калькулятора.

Среды динамической геометрии (СДГ), помимо моделирования конфигураций, способны дать новое дыхание таким исследованиям и вычислениям. В классах с углубленным и профильным изучением математики они могут быть содержательными и глубокими, будучи дополненными программированием, работой в электронных таблицах и онлайновых приложениях, вычислительными экспериментами и гипотезами.

Выражение-ответ в геометрической задаче нередко можно рассматривать как функцию от нескольких переменных. Если последняя сводится к функции от одной независимой переменной, изучаемой в школе, то ее удастся исследовать на наибольшее и наименьшее значения.

Геометрия — источник функциональных зависимостей. Анализируя и изучая их, интересно создавать новые экстремальные задачи, исследование которых требует интегрированного применения знаний по геометрии, алгебре, математическому анализу и информатике [1–3].

Вообще, в динамических конфигурациях общего вида строгие математические решения технически сложны. Предлагаем читателю убедиться в этом на приведенных ниже примерах.

Пример 1. Треугольник *UVW* (рис. 1). Равнобокая трапеция $ABCD$ описана около круга с центром I и радиусом IK, площадь которого равна S ($AD > BC$, $K \in AB$). O — центр описанной около трапеции окружности, $U = AC \cap IK$, $V = AC \cap OB$, $W = OB \cap IK$. Найдите наибольшее значение площади треугольника UVW и докажите, что $S_{UVW} < 0{,}01S$.

К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru (Полная версия статьи)

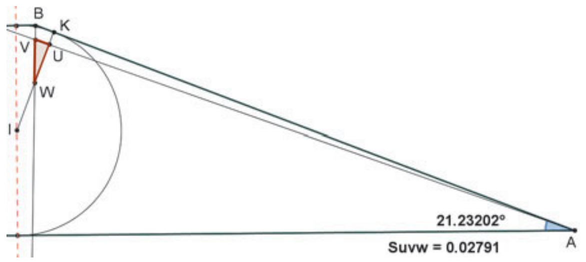


Рис. 1

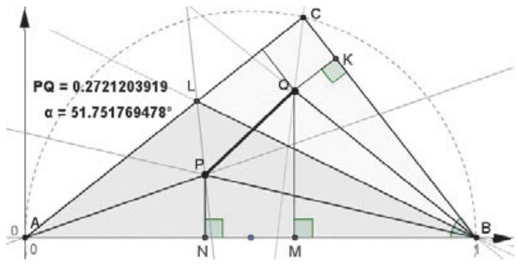


Рис. 2

Пример 2. Отрезок *PQ* (рис. 2). В прямоугольном треугольнике ABC гипотенуза AB равна 1, а острый угол A равен α. Из вершины другого острого угла проведена биссектриса BL. Найдите наибольшее значение расстояния PQ, где P и Q — инцентры треугольников ABL и BCL.

В обеих задачах несложные динамические конфигурации приводят к технически сложным решениям. Строгое математическое решение первой задачи, кроме вынужденного применения метода координат, тригонометрии и теорем математического анализа, использует метод замены полученной функции подходящей вспомогательной, чтобы упростить ее дифференцирование [4].

Цель этой статьи — на примере нескольких серий продемонстрировать создание и исследование взаимосвязанных экстремальных геометрических задач в симметрических динамических конфигурациях. *Симметрия призвана облегчить решения, привнося присущие ей свойства.*

Серия I. Равнобедренные треугольники. В задачах 1–3 рассматриваются равнобедренные треугольники с фиксированной боковой стороной $AB = BC = 1$. Треугольники BCF и ABE симметричны данному относительно его боковых сторон. Точки I, K, T — инцентры треугольников ABC, BCF, ABE соответственно. Для треугольника IKT в задаче 1 нужно найти наибольшее значение длин его сторон: а) KT; б) IK; в задаче 2 — наибольшее значение периметра; а в задаче 3 — наибольшее значение площади.

Решение. Задано бесконечное множество равнобедренных треугольников. Для его исследования и решения сформулированных динамических задач необходимо в выражениях-ответах получить функции от одной независимой переменной. Это и позволяет осуществить фиксацию длины боковой стороны.

Аргументом такой функции может служить длина отрезка, например, основания AC, или величина угла A (рис. 3).

Итак, пусть $AB = BC = 1$, $\angle A = \angle C = 2$.

Основные свойства конфигурации:

CI — биссектриса, $\angle DCI = \angle BCI = \alpha$; $0 < 2\alpha < \frac{\pi}{2}$, базисный треугольник ABC — симметричная фигура, BD —медиана, биссектриса и высота.

Свойства, «добавленные» симметрией:

пары точек K и I, T и I, K и T симметричны относительно BC, BA, BD; $TI = IK$, треугольник IKT равнобедренный.

Имеем: $BC = 1$, $DC = \cos 2\alpha$ из треугольника BDC, $IK = 2DI = 2DC\text{tg}\,\alpha = 2\cos 2\alpha\cdot\text{tg}\,\alpha$.

$\angle MIK = 2\alpha$ ($M = TK \cap BD$), так как он и угол C дополняют угол DIK до развернутого.

Задача 1

а) $KT = 2MK = 2\,IK\sin 2\alpha = 4\cos 2\alpha\,\text{tg}\,\alpha\sin 2\alpha =$
$= 4\cos 2\alpha\cdot 2\sin^2\alpha = 4\cos 2\alpha - 4\cos^2 2\alpha.$

Без производной определяем, что квадратный трехчлен относительно $\cos 2\alpha$ принимает наибольшее значение 1 в точке $\frac{1}{2}$. Следовательно, $2\alpha = 60°$ и треугольники ABC, BCF и ABE правильные. Заметим, что при этом $M \in BI$, $MI = BM$ (рис. 4).

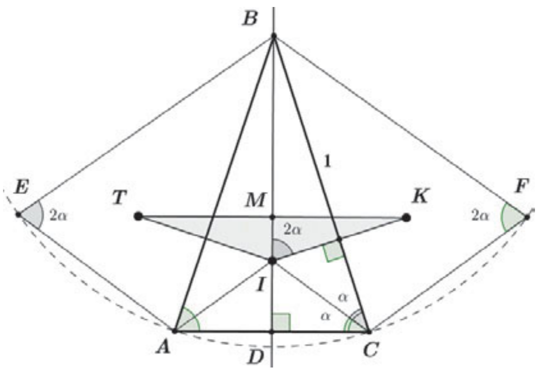


Рис. 3

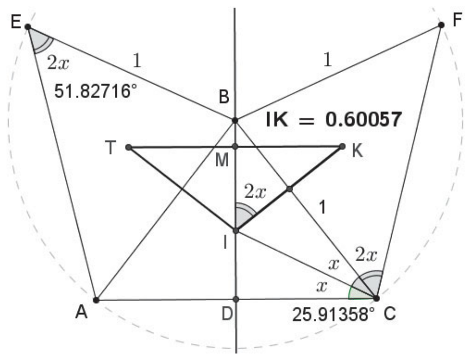


Рис. 4

б) $IK = 2\cos 2\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha$. Рассмотрим функцию $f(\alpha) = \cos 2\alpha \operatorname{tg}\alpha$, где $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.

При $2\alpha \to 0$:

$$\cos 2\alpha \to 1,\ \operatorname{tg}\alpha \to 0,\ f(\alpha) \to 0.$$

При $2\alpha \to \frac{\pi}{2}$:

$$\cos 2\alpha \to 0,\ \operatorname{tg}\alpha \to 1,\ f(\alpha) \to 0.$$

Функция $y = \cos 2\alpha$ — непрерывная функция на всей числовой прямой; на интервале $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ она убывает и принимает положительные значения от 1 до 0. Функция $y = \operatorname{tg}\alpha$ — непрерывная функция на интервале $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$, возрастает на нем и принимает положительные значения от 0 до 1. Значит, искомое значение достигается внутри интервала. Действительно, $f(0) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$, то есть $f(\alpha)$ — непрерывна на концах, и его существование на $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ вытекает из теоремы Вейерштрасса.

Найдем это значение, используя средства математического анализа:

$$f'(\alpha) = (\operatorname{tg}\alpha \cos 2\alpha)' = \frac{\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha} - 2\operatorname{tg}\alpha \sin 2\alpha =$$
$$= \frac{1}{\cos^2\alpha}\left(\cos 2\alpha - \sin^2 2\alpha\right).$$

Производная $f'(\alpha)$ непрерывна внутри интервала $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ и равна 0, если

$$-\sin^2 2\alpha + \cos 2\alpha = 0,$$
$$\cos^2 2\alpha + \cos 2\alpha - 1 = 0,$$
$$\cos 2\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2},\ \text{так как } \cos 2\alpha > 0.$$
$$2\alpha = \arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2}\ (\approx 0{,}905\ \text{рад.}, \approx 51{,}827^\circ)$$

— внутренняя критическая точка. Можно убедиться, что при переходе через эту точку производная меняет знак с плюса на минус.

Вычислим значение функции в этой точке:

$$f(\alpha) = \cos 2\alpha\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}} =$$
$$= \sqrt{\frac{7-3\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}} = 0{,}5\sqrt{10\sqrt{5}-22}.$$

Имеем (рис. 5):

$$IK = 2f(\alpha) = \sqrt{10\sqrt{5}-22} \approx 0{,}60057.$$

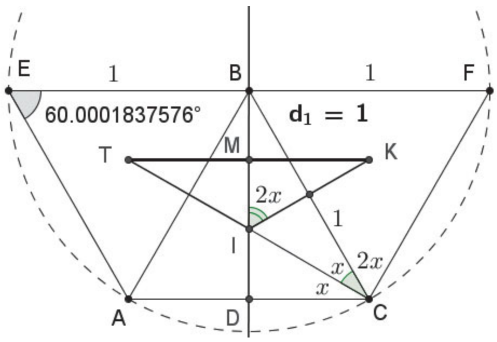


Рис. 5

Заметим, что

$$\cos 2\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{DC}{BC} = \frac{DI}{BI}.$$

Последнее отношение истинно по свойству биссектрисы угла треугольника. Итак, $\frac{DI}{BI} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ и точка I делит отрезок BD в золотом отношении.

Таким образом, мы доказали, что радиус окружности, вписанной в равнобедренный треугольник, достигает наибольшего значения тогда, когда ее центр делит высоту, проведенную к основанию, в золотом отношении.

Ответ: а) 1 при $2\alpha = 60^\circ$; б) $\sqrt{10\sqrt{5}-22}$ при $2\alpha = \arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Задача 2

$$P_{IKT} = 2(MK + KI) = 2(KI \sin 2\alpha + KI) =$$
$$= 2KI(\sin 2\alpha + 1) = 4\cos 2\alpha \operatorname{tg}\alpha(\sin 2\alpha + 1).$$

Так как

$$\cos 2\alpha \operatorname{tg}\alpha = (2\cos^2\alpha - 1)\operatorname{tg}\alpha = \sin 2\alpha - \operatorname{tg}\alpha,$$

то

$$P_{IKT} = 4(\sin 2\alpha - \operatorname{tg}\alpha)(\sin 2\alpha + 1).$$

Пусть

$$4(\sin^2 2\alpha + \sin 2\alpha - 2\sin^2\alpha - \operatorname{tg}\alpha) = f(\alpha),$$
$$\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right).$$

Выражение-ответ является функцией от одной переменной α.

При $\alpha \to 0$:

$$\sin 2\alpha \to 0,\ \operatorname{tg}\alpha \to 0,\ \sin\alpha \to 0,\ f(\alpha) \to 0.$$

При $\alpha \to \frac{\pi}{4}$:

$$\sin 2\alpha \to 1,\ 2\sin^2\alpha \to 1,\ \operatorname{tg}\alpha \to 1,\ f(\alpha) \to 0.$$

Итак,

$$f(0) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0,$$

своего наибольшего значения $f(\alpha)$ достигает внутри интервала $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ (детальное объяснение — в предыдущем пункте).

$$f'(\alpha) = 4\left(2\sin 2\alpha \cdot 2\cos 2\alpha + 2\cos 2\alpha - 2\sin 2\alpha - \frac{1}{\cos^2\alpha}\right).$$

На $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ производная $f'(\alpha)$ непрерывна и $f'(\alpha) = 0$, если

$$2\sin 2\alpha\cos 2\alpha + \cos 2\alpha - \sin 2\alpha - \frac{1}{2\cos^2\alpha} = 0,$$
$$\sin 2\alpha(2\cos 2\alpha - 1) = \frac{1}{1+\cos 2\alpha} - \cos 2\alpha.$$

Пусть $\cos 2\alpha = t$, $\sin 2\alpha = \sqrt{1-t^2}$. Тогда

$$\sqrt{1-t^2}(2t-1) = \frac{1}{1+t} - t,$$
$$\sqrt{1-t^2}\left(2t^2+t-1\right) = 1-t-t^2,$$
$$(1-t^2)(4t^4 + t^2 + 1 + 4t^3 - 4t^2 - 2t) =$$
$$= 1 + t^2 + t^4 - 2t - 2t^2 + 2t^3,$$
$$-4t^6 - 4t^5 + 6t^4 + 4t^3 - 3t^2 = 0,$$
$$4t^4 + 4t^3 - 6t^2 - 4t + 3 = 0,\ t \neq 0.$$

Для нахождения внутренней критической точки получено уравнение:

$$4\cos^4 2\alpha + 4\cos^3 2\alpha - 6\cos^2 2\alpha - 4\cos 2\alpha + 3 = 0. \qquad (*)$$

Класс уравнений, для которых существуют формулы, позволяющие находить точные решения, весьма узок. Корень полученного трансцендентного уравнения (*) на промежутке $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ можно найти лишь с наперед заданной точностью. Но для решения практических задач формулы не столь необходимы. Нередко, даже обладая формулой, мы прибегаем к приближенным вычислениям.

Поэтому акцентируем внимание на том, что специализированные СДГ

а) позволяют решать подобные задачи с высокой точностью путем измерений на созданной модели;

б) делают задачи доступными для тех, кто не владеет соответствующим математическим аппаратом, и вынужденно перейдем к приближенным вычислениям.

Моделирование и вычислительный эксперимент

Для нахождения приближенного значения корня уравнения (*) учащиеся могут использовать среду программирования, электронные таблицы, подходящее веб-приложение. Впечатляет своими «способностями» умный универсальный решатель Wolfram Alpha, вооруженный мощным и слаженным «оркестром» алгоритмов [5].

Мы воспользуемся богатыми возможностями СДГ «GeoGebra». С учетом терминологии школьных и вузовских учебников она локализована почти на 60 языков, свободно распространяется и постоянно совершенствуется. Международный институт GeoGebra (IGI) объединяет институты, созданные по всему миру (http://www.geogebra.org/igi), предоставляет программу и текущую информацию, справочные и учебные материалы, проводит семинары и конференции, вовлекает учителей и учеников в работу с этой многофункциональной средой.

Выполнив замену $x = \cos 2\alpha$ и построив в СДГ график функции

$$f = 4x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 4x + 3,$$

находим, что на $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ $f = 0$ при $x \approx 0{,}55386$. Команда: *Пересечение* [f, ось абсцисс].

Значит,

$$2\alpha \approx \arccos 0{,}55386 \approx 0{,}98380.$$

Убеждаемся на модели, что

$$P_{\text{наиб}} \approx 2{,}17550$$

при

$$2\alpha \approx 56{,}36754° \approx 0{,}98380 \text{ рад. (рис.6).}$$

Построим графики функции $4(\sin 2x - \operatorname{tg} x) \times (\sin 2x + 1)$ и ее производной (рис. 7).

Абсциссы точек A и B (точки максимума функции f и нуля ее производной g) совпадают.

Нахождение координат точки A в СДГ: *Список команд / Алгебра / Max*.

Производной: *Список команд / Функции и исчисление / Производная*.

Гипотеза о золотом отношении

Проводя вычислительные эксперименты с помощью модели (см. рис. 6), замечаем, что отношение MI к BI близко к золотому:

$$BI \cdot BM - MI^2 \approx 0{,}00289.$$

Погрешность значительная, но модель не является абсолютно точной. Приближенные значения площади и углов получены с помощью замедления анимации в СДГ: *Точка A / Свойства / Алгебра / Шаг / Скорость*.

Предположим, что $\frac{MI}{BI} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Из треугольников MIK и BIN выразим MI и BI через IN. Тогда

$$\frac{2IN\cos 2\alpha}{\frac{IN}{\cos 2\alpha}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \quad 2\cos^2 2\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

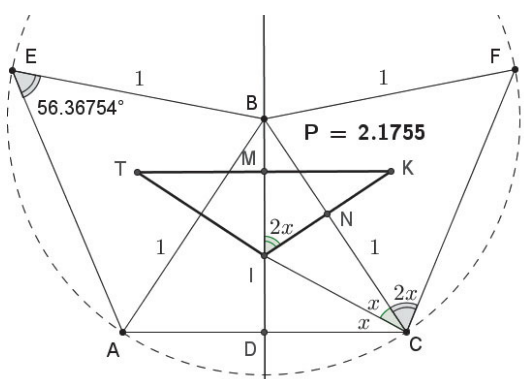


Рис. 6

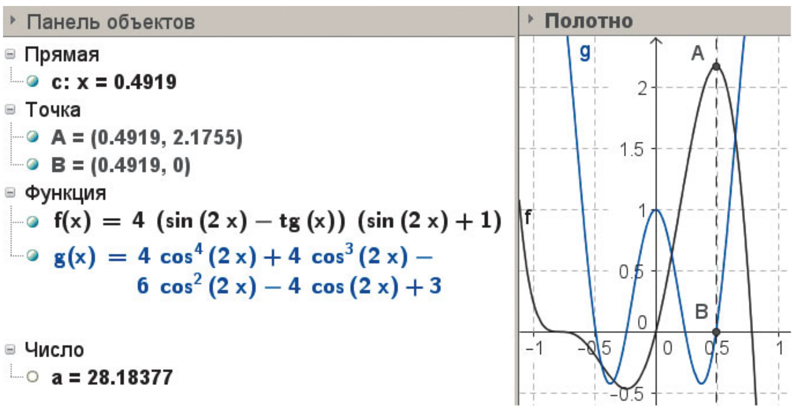


Рис. 7

$$\cos 2\alpha=\frac{\sqrt{\sqrt{5}-1}}{2},\quad 2\alpha\approx 0{,}90456\ \text{рад.}$$

Это значение не совпадает с полученным выше приближенным значением корня уравнения (*). При подстановке числа 0,90456 в указанное уравнение получаем $\approx -0{,}00859$.

Следовательно, имеем отношение, близкое к золотому.

Ответ: $\approx 2{,}17550$ при $2\alpha\approx 0{,}98380$.

Задача 3

$$S_{IKT}=\frac{1}{2}MI\cdot TK=\frac{1}{2}MI\cdot 2MK=MI\cdot MK=$$
$$=IK\sin 2\alpha\cdot IK\cos 2\alpha=$$
$$=4\cos^3 2\alpha\,\mathrm{tg}^2\,\alpha\,\sin 2\alpha=f(\alpha),$$

где $\alpha\in\left(0;\ \frac{\pi}{4}\right)$. Выражение-ответ является функцией от одной переменной.

При $\alpha\to 0$:

$$\cos 2\alpha\to 1,\ \mathrm{tg}\,\alpha\to 0,\ \sin 2\alpha\to 0,\ f(\alpha)\to 0.$$

При $\alpha\to\frac{\pi}{4}$:

$$\cos 2\alpha\to 0,\ \mathrm{tg}\,\alpha\to 1,\ \sin 2\alpha\to 1,\ f(\alpha)\to 0.$$
$$f(0)=f\left(\frac{\pi}{4}\right)=0,$$

наибольшее значение функции достигается внутри интервала. Продифференцируем ее по формуле для нахождения производной произведения трех функций:

$$(uvw)'=u'vw+uv'w+uvw'.$$
$$f'(\alpha)=4\Big(3\cos^2 2\alpha\ (-2\sin 2\alpha)\mathrm{tg}^2\alpha\cdot\sin 2\alpha+$$
$$+\cos^3 2\alpha\cdot 2\mathrm{tg}\ \alpha\frac{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos^2\alpha}+\cos^3 2\alpha\cdot\mathrm{tg}^2\alpha\cdot 2\cos 2\alpha\Big)=$$
$$=4\cos^2 2\alpha\cdot\mathrm{tg}^2\,\alpha\,(-6\sin^2 2\alpha+4\cos 2\alpha+2\cos^2 2\alpha)=$$
$$=8\cos^2 2\alpha\cdot\mathrm{tg}^2\,\alpha\,(-3+4\cos^2 2\alpha+2\cos 2\alpha).$$

На $\left(0;\ \frac{\pi}{4}\right)$ производная $f'(\alpha)$ непрерывна.

$\cos 2\alpha\neq 0$, $\mathrm{tg}\,\alpha\neq 0$, поэтому $f'(\alpha)=0$, если

$$4\cos^2 2\alpha+2\cos 2\alpha-3=0.$$

Отсюда

$$\cos 2\alpha=\frac{\sqrt{13}-1}{4},\quad \cos 2\alpha>0.$$
$$2\alpha=\arccos\frac{\sqrt{13}-1}{4}\approx 0{,}86138\ \text{рад.}\approx 49{,}35368^\circ.$$

$\alpha\approx 0{,}43069$ — внутренняя критическая точка, $\alpha\in\left(0;\ \frac{\pi}{4}\right)$. Можно убедиться, что при переходе через нее производная меняет знак с минуса на плюс.

Вычислим наибольшее значение функции:

$$\cos^3 2\alpha=\left(\frac{\sqrt{13}-1}{4}\right)^3=\frac{2\sqrt{13}-5}{8},$$
$$\mathrm{tg}^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\frac{5-\sqrt{13}}{3+\sqrt{13}},$$
$$\sin 2\alpha=\sqrt{1-\cos^2 2\alpha}=\sqrt{1-\frac{7-\sqrt{13}}{8}}=\sqrt{\frac{1+\sqrt{13}}{8}}.$$
$$S_{\text{наиб}}=4\cdot\frac{2\sqrt{13}-5}{8}\cdot\frac{5-\sqrt{13}}{3+\sqrt{13}}\cdot\sqrt{\frac{1+\sqrt{13}}{8}}=$$
$$=\frac{15\sqrt{13}-51}{3+\sqrt{13}}\cdot\frac{\sqrt{1+\sqrt{13}}}{4\sqrt{2}}=\frac{1+\sqrt{13}}{4\sqrt{2}}\left(87-24\sqrt{13}\right)=$$
$$=\sqrt{\frac{10\,881\sqrt{13}-39\,231}{32}}\approx 0{,}17708.$$

Моделирование и вычислительный эксперимент

На рисунке 8 — модель, созданная в СДГ, где $M\in BI$. На рисунке 9 — графики функций, где $b=\frac{\pi}{4}\approx 0{,}7854$.

$f(x)$ — нечетная функция, $g(x)=f'(x)$ — четная. Графики имеют общие нули.

$$S_{\text{наиб}}\approx 0{,}17708 \text{ при } 2\alpha\approx 49{,}35385^\circ,$$
$$\alpha\approx 24{,}67692^\circ\approx 0{,}43069.$$

Указанные величины α и $S_{\text{наиб}}$ — координаты точки A на графике функции $f(x)$.

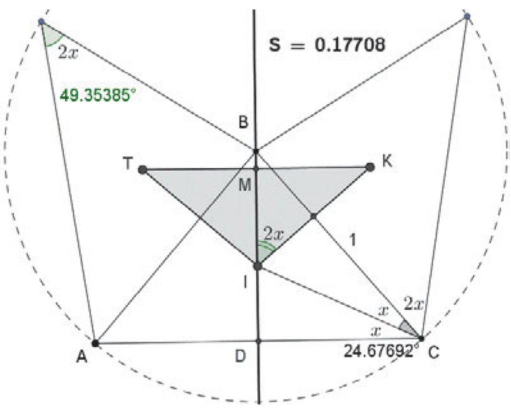


Рис. 8

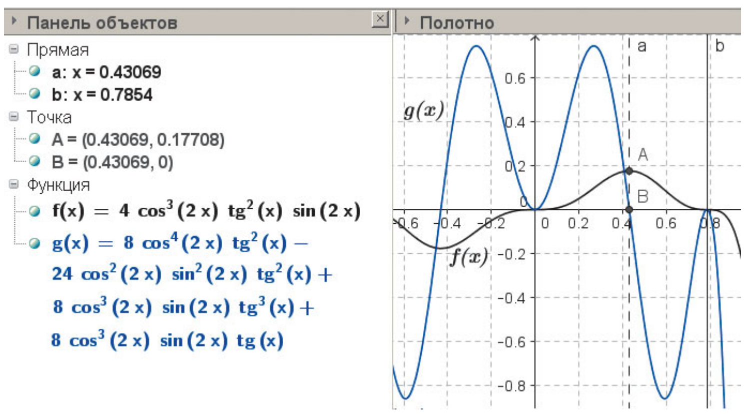


Рис. 9

Гипотеза о золотом отношении

$S_{\text{наиб}}$ достигается при $2\alpha \approx 49°$, а точка I делит DB в золотом отношении при $2\alpha \approx 52°$ (задача 1). Возникает гипотеза о делении точкой I отрезка DM в золотом отношении тогда, когда достигается максимум площади треугольника IKT.

Вычислительный эксперимент на модели дает результат:

$$DI \cdot DM - MI^2 \approx 0{,}05394.$$

Отклонение от нуля больше, чем в предыдущем пункте. Вычислим отношение строго, используя значение $\cos 2\alpha$.

$$\frac{DI}{MI} = \frac{DI}{IK\cos 2\alpha} = \frac{DI}{2DI\cos 2\alpha} = \frac{1}{2\cos 2\alpha} =$$

$$= \frac{1}{\frac{2\left(\sqrt{13}-1\right)}{4}} = \frac{2}{\sqrt{13}-1} \neq \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Ложное равенство свидетельствует о том, что гипотеза неверна.

Ответ: $\sqrt{340{,}03125\sqrt{13}-1225{,}96875}$ при $2\alpha = \arccos\frac{\sqrt{13}-1}{4}$.

В электронном приложении приведены программы, созданные в среде программирования Turbo Pascal, для поиска наибольшего значения непрерывной функции $f(x)$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ и уточнения корня уравнения методом половинного деления.

В теле функций записаны формулы для поиска наибольшей площади (задача 3) и корня уравнения (задача 2). Для вычисления искомых значений в других задачах достаточно заменить эти формулы соответствующим образом. Вызов функции производится в цикле: переменная c — промежуточная величина. Необходимая точность достигается подбором значений величин step и eps.

Обратим внимание на создание динамических геометрических конфигураций в средах программирования [6]. Прекрасные упражнения для творчества! Например, действующую динамическую модель в среде программирования к примеру 1 можно получить, используя как исходные данные всего две величины — координаты центра и радиус окружности. Объединение процессов моделирования и программирования, знакомство учащихся с реализацией отдельных функций СДГ обеспечивает неизолированное изучение одного из главных разделов информатики, связывает аналитические преобразования с геометрическими построениями и, таким образом, не создает отчужденности от процессов, происходящих внутри СДГ.

Серия II. Правильные треугольники. В задачах 1–3 рассматриваются равнобедренные треугольники с фиксированной боковой стороной $AB = BC = 1$. Правильные треугольники BCF и ABE построены на боковых сторонах BC и AB. Точки I, K, T — инцентры треугольников ABC, BCF, ABE соответственно. Для треугольника IKT в задаче 1 найдите наибольшее значение длин его сторон: а) KT; б) IK; в задаче 2 — наибольшее значение периметра; а в задании 3 — наибольшее значение площади.

Серия III. Правильные четырехугольники. В серии II заменить правильные треугольники на правильные четырехугольники.

Серия IV. Правильные *n*-угольники (обобщение). В серии II заменить правильные треугольники на правильные n-угольники.

Материалы настоящей статьи рекомендуем использовать для проектно-исследовательской деятельности учащихся (творческие проекты на уроках математики и информатики мы видим межпредметными), для кружковой работы, интегрированных и бинарных уроков.

В проекте, в зависимости от уровня подготовки класса и каждого ученика, учитель определяет объем работы для «чистых математиков», «прикладников» и «программистов». Менее подготовленные учащиеся могут ограничиться моделированием конфигураций, построением и чтением графиков функций и получением ответов в СДГ.

Практический опыт убеждает, что в школьную классическую статическую геометрию необходимо привнести кинематику и моделирование. Рассмотрение серий взаимосвязанных задач, моделирование реальных функциональных зависимостей способствует неформальной глубокой реализации межпредметных связей, знакомству учащихся с элементами исследовательской деятельности, интеграции их знаний в единую научную картину.

Далеко ли до ЕГЭ?

Автор: Н.В. Шапошникова, учитель математики гимназии № 7, г. Махачкала, Республика Дагестан

А. БЛИНКОВ,
А. ИВАНИЩУК,
Н. НАКОНЕЧНЫЙ,
П. ЧУЛКОВ,
г. Москва

10 класс

ТУРНИР АРХИМЕДА
МОСКОВСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ РЕГАТА

Математическая регата 10-х классов прошла 1 марта 2014 года. Участвовало в ней 66 команд. Помимо команд из Москвы — команды из подмосковных городов Долгопрудного, Королева, Мытищ и Чехова. Математической литературой (традиционно предоставляемой МЦНМО) было награждено 16 команд. Тринадцать лучших получили также дипломы I, II или III степени. Победителями регаты стала одна из команд школы № 25 и одна из команд ФМШ № 2007 (обе — Москва).

Полные итоги регаты опубликованы на сервере МЦНМО (http://olympiads.mccme.ru/regata).

Условия задач

Первый тур

(*10 минут; каждая задача — 6 баллов*)

1.1. Среднее арифметическое десяти различных натуральных чисел равно 15. Найдите наибольшее значение наибольшего из этих чисел.

1.2. Даны две пересекающиеся плоскости, в одной из которых лежит произвольный треугольник площади S. Существует ли его параллельная проекция на вторую плоскость, имеющая ту же площадь S?

1.3. Дана таблица размером 8×8, изображающая шахматную доску. За каждый шаг разрешается поменять местами любые два столбца или любые две строки. Можно ли за несколько шагов сделать так, чтобы верхняя половина таблицы стала белой, а нижняя половина черной?

Второй тур

(*15 минут; каждая задача — 7 баллов*)

2.1. Существует ли такой многочлен $f(x)$ степени 6, что для любого x выполнено равенство $f(\sin x) + f(\cos x) = 1$?

2.2. В квадрате $ABCD$ на стороне BC взята точка M, а на стороне CD — точка N так, что $\angle MAN = 45°$. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника AMN, принадлежит диагонали AC.

2.3. В турнире по игре в «крестики-нолики», проведенном по системе «проиграл – выбыл», участвовало 18 школьников. Каждый день играли одну партию, участников которой выбирали жребием из еще не выбывших школьников. Каждый из шестерых школьников утверждает, что сыграл ровно четыре партии. Не ошибается ли кто-то из них?

Третий тур

(*20 минут; каждая задача — 8 баллов*)

3.1. Число a — корень уравнения $x^{11}+x^7+x^3=1$. При каких натуральных значениях n выполняется равенство $a^4 + a^3 = a^n + 1$?

3.2. В каком отношении делит площадь прямоугольной трапеции, описанной около окружности, биссектриса ее острого угла?

3.3. Произведение четырех последовательных положительных нечетных чисел оканчивается на 9. Найдите две предпоследние цифры этого произведения.

Четвертый тур

(*25 минут; каждая задача — 9 баллов*)

4.1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x^2+y^2-z^2}{xy}=\dfrac{3}{z}, \\ \dfrac{y^2+z^2-x^2}{yz}=\dfrac{3}{x}, \\ \dfrac{y^2-x^2-z^2}{xz}=\dfrac{21}{y}. \end{cases}$$

4.2. Вокруг равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$) описана окружность. Касательная к ней в точке B пересекает луч AC в точке D, E — середина стороны AB, H — основание перпендикуляра, опущенного из точки D на прямую AB. Найдите длину EH, если $AD = a$.

4.3. Какое наибольшее число фишек можно расставить в клетках шахматной доски так, чтобы на любой вертикали, на любой горизонтали и на любой диагонали (не только на главных) было четное число фишек?

Пятый тур

(*15 минут; каждая задача — 7 баллов*)

5.1. Найдите наименьшее значение функции $f(x)=\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{(b-x)^2+c^2}$ $(a > 0,\ b > 0,\ c > 0)$.

5.2. Сколько сторон может иметь выпуклый многоугольник, у которого сумма тупых углов равна 3000°? (Примеры приводить не надо.)

5.3. Петя записал на компьютере число 1. Каждую секунду компьютер прибавляет к числу на экране сумму его цифр. Может ли через какое-то время на экране появиться число 123456789?

Ответы, решения, комментарии

1.1. 105.

Пример: $\dfrac{1+2+\ldots+9+105}{10}=15.$

Оценка: из условия задачи следует, что сумма данных чисел равна 150. Чтобы одно из слагаемых было наибольшим, необходимо, чтобы остальные девять слагаемых были как можно меньше. Так как все слагаемые должны быть различными, то сумма девяти наименьших из них не может быть меньше $1 + 2 + \ldots + 9 = 45$. Следовательно, наибольшее из данных чисел не может быть больше 105.

1.2. Да, существует.

Рассмотрим любой из двугранных углов, образовавшихся при пересечении данных плоскостей, и проведем его биссектор (рис. 1).

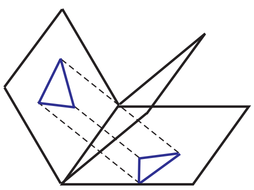


Рис. 1

Если проектировать в направлении, перпендикулярном плоскости биссектора, то проекцией любой фигуры будет равная ей фигура (эти фигуры симметричны относительно плоскости биссектора).

Тем самым условие задачи будет выполнено.

1.3. Нет, нельзя.

Заметим, что обе разрешенные операции не изменяют количества черных и белых клеток в любой строке, следовательно, требуемую раскраску таблицы получить не удастся.

2.1. Да, существует.

Например, $f(x) = -2x^6 + 3x^4$.

Действительно,

$$\begin{aligned} &f(\sin x) + f(\cos x) = \\ &= -2\sin^6 x + 3\sin^4 x - 2\cos^6 x + 3\cos^4 x = \\ &= -2(\sin^6 x + \cos^6 x) + 3(\sin^4 x + \cos^4 x) = \\ &= -2(\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x) + \\ &\quad + 3((\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x) = \\ &= -2(1 - 3\sin^2 x\cos^2 x) + 3(1 - 2\sin^2 x\cos^2 x) = 1. \end{aligned}$$

Комментарий. Подобрать такой пример сложно, а получить его можно, например, так: запишем основное тригонометрическое тождество, возведем обе его части в куб, а затем разобьем левую часть полученного равенства на такие две части, чтобы одну из другой можно было получить заменой $\sin x$ на $\cos x$. Подробнее:

$$\begin{aligned} &(\sin^2 x + \cos^2 x)^3 = 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sin^6 x + 3\sin^4 x\cos^2 x + 3\sin^2 x\cos^4 x + \cos^6 x = 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sin^6 x + 3\sin^4 x(1 - \sin^2 x) + \\ &\quad + 3(1 - \cos^2 x)\cos^4 x + \cos^6 x = 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (-2\sin^6 x + 3\sin^4 x) + (-2\cos^6 x + 3\cos^4 x) = 1. \end{aligned}$$

Можно получить и другой многочлен. Например, записать равенство $\sin^3 3x + \cos^3 3x = 1$, возвести обе его части в квадрат и использовать формулы синуса и косинуса тройного угла.

2.2. ***Способ I.*** Проведем окружность с диаметром MN, описанную около треугольника CMN (рис. 2).

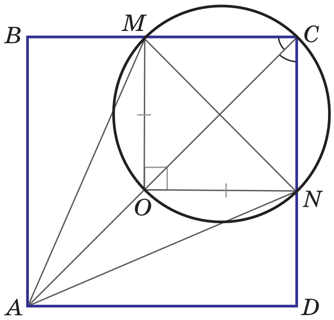


Рис. 2

Пусть она пересекает диагональ AC в точке O, тогда докажем, что O — центр окружности, описанной около треугольника AMN.

Действительно, так как CO — биссектриса угла MCN, то $OM = ON$. Так как $\angle MAN = \frac{1}{2}\angle MON$, то окружность с центром O, которая проходит через точки M и N, содержит также и точку A.

Способ II. Так как точка A лежит на биссектрисе угла C треугольника MCN и $\angle MAN = 90° - \frac{1}{2}\angle MCN$, то A — центр вневписанной окружности треугольника MCN (рис. 3).

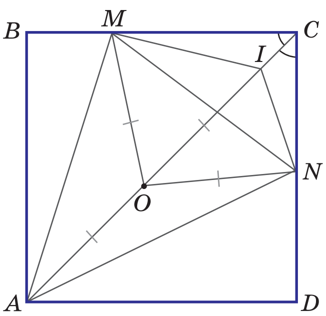


Рис. 3

Пусть I — центр окружности, вписанной в треугольник MCN, тогда $\angle AMI = \angle ANI = 90°$, значит, точки M и N лежат на окружности с диаметром AI. Следовательно, центр O окружности, описанной около треугольника AMN, лежит на стороне AC.

Комментарий. В этом способе решения использованы два факта:

1) угол между биссектрисами двух внешних углов треугольника равен $90° - \frac{1}{2}\alpha$, где α — противолежащий внутренний угол;

2) следствие из теоремы о «трилистнике» («трезубце»): $OI = OM = ON = OA$.

Способ III. Отразим вершины B и D относительно прямых AM и AN соответственно (рис. 4).

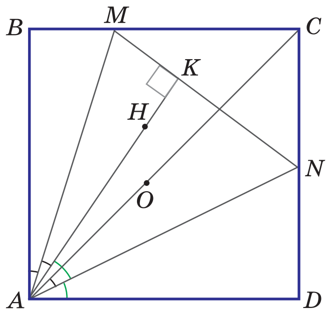


Рис. 4

Так как

$$\angle MAB + \angle NAD = 45° = \angle MAN,$$

то их образы B' и D' лежат на одном луче с началом в точке A. Кроме того,

$$\angle AB'M = \angle ABC = 90°,$$
$$\angle AD'N = \angle ADC = 90°,$$

поэтому точки B' и D' лежат на отрезке MN. Таким образом, B' и D' — это одна и та же точка K, которая является основанием высоты треугольника MAN.

Ортоцентр H этого треугольника лежит на его высоте AK. Воспользуемся известным фактом: *в любом треугольнике ортоцентр H и центр O описанной окружности изогонально сопряжены*, то есть в данном случае $\angle HAM = \angle OAN$. Тогда

$$\angle OAD = \angle OAN + \angle NAD =$$
$$= \angle HAM + \angle NAD = \angle MAB + \angle NAD = 45°,$$

то есть точка O лежит на AC.

2.3. Ошибается.

Заметим, что всего в турнире было сыграно 17 партий, так как каждый проигравший выбывал. Каждый из шести школьников утверждал, что сыграл по 4 партии, значит, не менее трех из них он должен был выиграть. Так как в каждой партии возможен только один победитель, то в таком случае партий было не меньше $6 \cdot 3 = 18$.

Полученное противоречие показывает, что кто-то из школьников ошибся.

3.1. При $n = 15$.

Так как функция $f(x) = x^{11} + x^7 + x^3$ возрастает, то указанное число a — единственный корень уравнения $f(x) = 1$. Кроме того, $f(0) = 0$, а $f(1) = 3$, значит, $0 < a < 1$.

Из условия задачи следует, что $a^{11} + a^7 + a^3 = 1$. Умножив обе части этого равенства на a^4, получим: $a^{15} + a^{11} + a^7 = a^4$. Вычтем из этого равенства равенство $a^{11} + a^7 + a^3 = 1$, тогда

$$a^{15} - a^3 = a^4 - 1 \Leftrightarrow a^4 + a^3 = a^{15} + 1.$$

Сравнив полученное равенство с равенством $a^4 + a^3 = a^n + 1$, получим, что $a^n = a^{15}$. Так как $0 < a < 1$, то $n = 15$.

Комментарий. Мы воспользовались тем, что левая часть данного уравнения представляет собой геометрическую прогрессию. Поэтому в решении использован тот же прием, что и при выводе формулы суммы n первых членов геометрической прогрессии.

3.2. В отношении 1 : 1.

Пусть $ABCD$ — данная трапеция с меньшей боковой стороной AB, тогда биссектриса ее острого угла D проходит через центр O окружности, вписанной в трапецию, и пересекает сторону AB в точке E.

Способ I. Обозначим точки касания вписанной окружности со сторонами AB, BC, CD и DA через K, L, M и N соответственно (рис. 5). Заметим, что $\angle KOE = \angle ADE < 45°$ и $BKOL$ — квадрат, поэтому точка E лежит на отрезке BK.

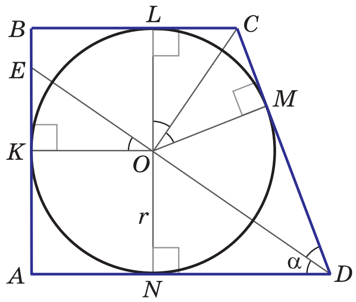


Рис. 5

Так как

$\angle CDE = \angle ADE = \angle KOE = \angle LOC = \angle MOC$

(равенство острых углов с соответственно параллельными или с соответственно перпендикулярными сторонами), то

$\Delta OND = \Delta OMD$ и $\Delta OKE = \Delta OLC = \Delta OMC$

(по катету и острому углу). Кроме того, равны квадраты $AKON$ и $BKOL$.

Таким образом,

$$S_{ADE} = S_{OND} + S_{AKON} + S_{OKE} = S_{OMD} + S_{BKOL} + S_{OMC} = S_{OMD} + S_{BEOL} + S_{OLC} + S_{OMC} = S_{CDEB},$$

то есть биссектриса DE делит площадь данной трапеции пополам.

Способ II. Пусть радиус вписанной окружности равен r, а $\angle CDA = 2\alpha$ (см. рис. 5). Тогда

$$S_{ABCD} = \frac{AD+BC}{2}\cdot NL = \frac{AB+CD}{2}\cdot 2r =$$

$$= \left(2r + \frac{2r}{\sin 2\alpha}\right) r = 2r^2\left(\frac{1}{\sin 2\alpha}+1\right),$$

а

$$S_{ADE} = \frac{1}{2}AD\cdot AE = \frac{1}{2}AD^2 \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}\left(r + r\operatorname{ctg}\alpha\right)^2 \operatorname{tg}\alpha =$$

$$= \frac{r^2}{2}\left(1 + 2\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha\right)\operatorname{tg}\alpha = \frac{r^2}{2}(\operatorname{tg}\alpha + 2 + \operatorname{ctg}\alpha) =$$

$$= \frac{r^2}{2}\left(\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha} + 2\right) = r^2\left(\frac{1}{\sin 2\alpha}+1\right).$$

Таким образом, $\dfrac{S_{ADE}}{S_{ABCD}} = \dfrac{1}{2}$, то есть биссектриса DE делит площадь данной трапеции пополам.

Способ III. Пусть биссектриса угла BCD пересекает прямую AD в точке F (рис. 6). Так как $CF \perp DE$ (биссектрисы смежных углов), то DO — высота треугольника CDF, значит, этот треугольник равнобедренный: $FD = CD$. Так как $AD > CD$, то точка F лежит на стороне AD. Кроме того, треугольники COD и FOD равны, значит, они равновелики.

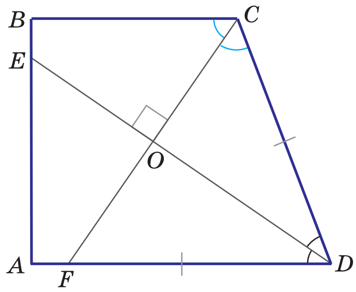


Рис. 6

Рассмотрим поворот с центром O на 90° по часовой стрелке. Так как $AKON$ и $BKOL$ — равные квадраты (см. рис. 5), то образом точки A при таком повороте является точка B. Образом луча OF является луч OE, а образом прямой DA — прямая AB, поэтому точка F при этом повороте переходит в точку E. Кроме того, образом прямой AB является прямая BC, поэтому точка E переходит в точку C. Таким образом, четырехугольник $OEBC$ является образом четырехугольника $OFAE$, следовательно, эти четырехугольники равны (и равновелики).

Из доказанного следует, что биссектриса DE делит площадь данной трапеции пополам.

3.3. Два нуля.

Среди данных четырех чисел не может быть числа, оканчивающегося на 5 (иначе произведение будет оканчиваться на 5), значит, эти числа оканчиваются на цифры 7, 9, 1 и 3 (именно в таком порядке). Тогда число, лежащее на числовой прямой между вторым и третьим числом, делится на 10, то есть имеет вид $10n$ (n — натуральное). Следовательно, произведение данных чисел равно

$$(10n - 3)(10n - 1)(10n + 1)(10n + 3) = (100n^2 - 9)(100n^2 - 1) = 10\,000n^4 - 1000n^2 + 9.$$

Заметим, что первые два слагаемых в полученной сумме кратны 1000, поэтому две предпоследние цифры этого числа — нули.

4.1. (1; 3; 1), (–1; 3; –1); (1; –3; –1), (–1; –3; 1).
Преобразуем:

$$\begin{cases}\dfrac{x^2+y^2-z^2}{xy}=\dfrac{3}{z},\\ \dfrac{y^2+z^2-x^2}{yz}=\dfrac{3}{x},\\ \dfrac{y^2-x^2-z^2}{xz}=\dfrac{21}{y}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{x^2+y^2-z^2}{xyz}=\dfrac{3}{z^2},\\ \dfrac{y^2+z^2-x^2}{xyz}=\dfrac{3}{x^2},\\ \dfrac{y^2-x^2-z^2}{xyz}=\dfrac{21}{y^2}\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}z^2\left(x^2+y^2-z^2\right)=3xyz,\\ x^2\left(y^2+z^2-x^2\right)=3xyz,\\ y^2\left(y^2-x^2-z^2\right)=21xyz,\\ xyz\neq 0.\end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения второе:

$$z^2y^2 - x^2y^2 + x^4 - z^4 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y^2(z^2 - x^2) - (z^2 - x^2)(z^2 + x^2) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (z^2 - x^2)(y^2 - z^2 - x^2) = 0 \Leftrightarrow$$
$$y^2 - z^2 - x^2 = 0 \text{ или } x^2 = z^2.$$

Осталось рассмотреть два случая.

1) $y^2 - z^2 - x^2 = 0$. Подставив значение выражения $y^2 - z^2 - x^2$ в третье уравнение исходной системы, получим неверное равенство: $0=\dfrac{21}{y}$. Следовательно, этот случай невозможен.

2) $x^2 = z^2$. Тогда система, равносильная исходной, после упрощения примет вид:

$$\begin{cases}zy=3x,\\ xy=3z,\\ y\left(y^2-2x^2\right)=21xz,\\ xyz\neq 0.\end{cases}$$

Учитывая, что $z\neq 0$, из первых двух уравнений получим, что $y = \pm 3$.

Тогда

$$\begin{cases}y=3,\\ x=z,\\ y\left(y^2-2x^2\right)=21xz,\\ xyz\neq 0,\end{cases} \text{ или } \begin{cases}y=-3,\\ x=-z,\\ y\left(y^2-2x^2\right)=21xz,\\ xyz\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=1,\\ y=3,\\ z=1,\end{cases} \text{ или } \begin{cases}x=-1,\\ y=3,\\ z=-1,\end{cases} \text{ или } \begin{cases}x=1,\\ y=-3,\\ z=-1,\end{cases} \text{ или } \begin{cases}x=-1,\\ y=-3,\\ z=1.\end{cases}$$

4.2. $0{,}5a$.

Способ I. Отметим середину отрезка AD — точку K (рис. 7). Тогда HK — медиана прямоугольного треугольника AHD, проведенная к гипотенузе, значит,

$$HK=\frac{1}{2}AD=0{,}5a.$$

Кроме того, KE — средняя линия треугольника ADB, то есть $KE \parallel DB$.

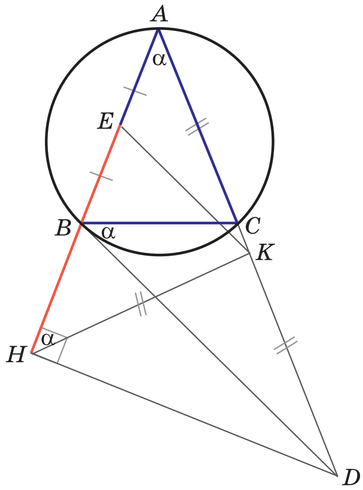


Рис. 7

Пусть $\angle BAC = \alpha$, тогда $\angle KHA = \alpha$ (так как $KH = KA$) и $\angle DBC = \alpha$ (угол между касательной и хордой). Кроме того, $\angle CBA = 90° - 0{,}5\alpha$, поэтому

$$\angle KEH = \angle DBH = 90° - 0{,}5\alpha.$$

Из треугольника KEH:

$$\angle EKH = 180° - (\angle KEH + \angle KHE) =$$
$$= 90° - 0{,}5\alpha = \angle KEH,$$

значит, этот треугольник равнобедренный, то есть $EH = KH = 0{,}5a$.

Способ II. Пусть $\angle BAC = \angle DBC = \alpha$, тогда

$$\angle ABC = 0{,}5\alpha,$$
$$\angle DBH = 90° - 0{,}5\alpha.$$

(см. рис. 7). Из треугольника ADH:

$$AH = AD \cdot \cos\alpha = a\cos\alpha,$$
$$DH = AD \cdot \sin\alpha = a\sin\alpha.$$

Из треугольника BDH:

$$BH = DH \cdot \operatorname{ctg} \angle DBH =$$
$$= a\sin\alpha \cdot \operatorname{ctg}(90° - 0{,}5\alpha) =$$
$$= 2a\sin 0{,}5\alpha \cdot \cos 0{,}5\alpha \cdot \operatorname{tg} 0{,}5\alpha = 2a\sin^2 0{,}5\alpha.$$

Следовательно,

$$BE=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}(AH-BH)=\frac{1}{2}a\left(\cos\alpha-2\sin^2 0{,}5\alpha\right)=$$
$$=\frac{1}{2}a\left(1-4\sin^2 0{,}5\alpha\right);$$
$$EH=BE+BH=\frac{1}{2}a\left(1-4\sin^2 0{,}5\alpha\right)+2a\sin^2 0{,}5\alpha=\frac{1}{2}a.$$

4.3. 48.

Заметим, что на шахматной доске ровно 16 диагоналей, содержащих нечетное количество клеток (8 «белых» и 8 «черных»). Никакие две из таких диагоналей не имеют общих клеток, поэтому в каждой диагонали хотя бы одна клетка должна остаться пустой. Следовательно, на доске можно расставить не более $64 - 16 = 48$ фишек, удовлетворяющих условию.

Один из возможных примеров расстановки 48 фишек на рисунке 8; пустыми остаются две главные диагонали.

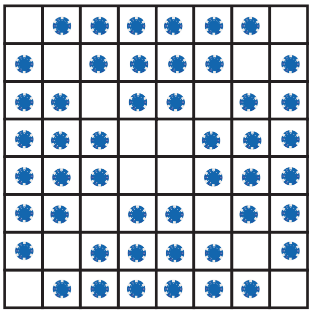


Рис. 8

5.1. $\sqrt{(a+c)^2+b^2}$.

Рассмотрим отрезок DE длины b. Восставим перпендикуляры к этому отрезку в его концах: $DA = a$, $EB = c$ (точки A и B лежат в разных полуплоскостях относительно DE, рис. 9).

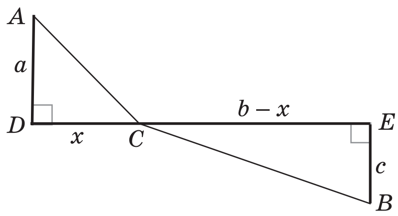


Рис. 9

Пусть точка C лежит на отрезке DE и $DC = x$, тогда $EC = b - x$. Из прямоугольных треугольников ACD и BCE получим:

$$AC=\sqrt{a^2+x^2},$$
$$BC=\sqrt{(b-x)^2+c^2}.$$

Так как $AC + BC \geq AB$, то наименьшее значение данной функции равно

$$AB=\sqrt{(a+c)^2+b^2}$$

(оно достигается, если точка C лежит на отрезке AB).

Комментарий. Это же решение можно оформить иначе, введя на плоскости декартову систему координат, в которой лучи DA и DE — положительные полуоси y и x соответственно. Тогда $A(0; a)$, $B(b; -c)$, $C(x; 0)$.

При желании можно также найти значение аргумента, при котором достигается искомое значение функции. Так как треугольники ACD и BCE подобны, то

$$\frac{b-x}{x}=\frac{c}{a} \Leftrightarrow x=\frac{ab}{a+c}.$$

5.2. 19 или 20.

Заметим, что выпуклый многоугольник не может иметь более трех нетупых углов (если это не прямоугольник). Действительно, если таких углов больше чем три, то внешние углы, смежные с ними, неострые, а это противоречит тому, что сумма внешних углов выпуклого многоугольника (взятых по одному при каждой вершине) равна 360°.

Таким образом, сумма углов данного многоугольника равна $3000 + S$ (град.), где $0 \leq S \leq 270$. Пусть у него n сторон, тогда

$$180(n-2) = 3000 + S,$$

то есть

$$n=2+\frac{3000+S}{180} \Leftrightarrow n=18+\frac{120+S}{180}.$$

Учитывая, что n — натуральное число, получим:

$$S = 60,\ n = 19$$

или

$$S = 240,\ n = 20.$$

Комментарий. Девятнадцатиугольник, у которого один острый угол величиной 60° и восемнадцать тупых углов с заданной суммой, ра́вно как и двадцатиугольник с тремя острыми углами, сумма которых 240°, и семнадцать тупых углов с заданной суммой, наверняка построить можно, но это построение весьма громоздко, поэтому от учащихся оно не требуется.

5.3. Нет, не может.

Способ I. Предположим, что указанное число может получиться, тогда рассмотрим число x, которое было на экране за секунду до этого. Обозначим сумму цифр числа x через $S(x)$, тогда $x + S(x) = 123456789$. Заметим, что число 123456789 делится на 9 (так как сумма его цифр делится на 9), а числа x и $S(x)$ имеют одинаковые остатки от деления на 9. Значит, числа x и $S(x)$ также кратны девяти.

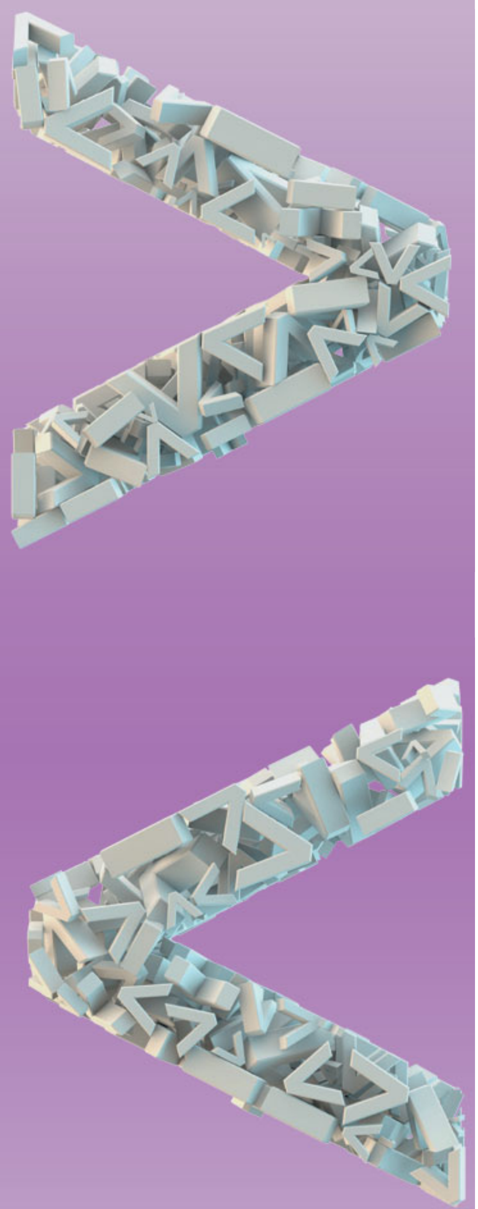
Рассуждая аналогично, получим, что и число, из которого получилось x, также должно делиться на 9 и так далее. В итоге получим, что исходное число 1 делится на 9, а это неверно. Полученное противоречие показывает, что наше предположение неверно и число 123456789 появиться на экране не может.

Способ II. Исходное число имеет остаток 1 при делении на 3. Сумма цифр числа 123456789 равна 45, значит, оно делится на 3. Так как любое число и сумма его цифр дают одинаковые остатки при делении на 3, то при каждой операции остатки от деления на 3 будут удваиваться. Таким образом, последовательность получающихся остатков будет иметь вид: 1; 2; 1; 2; ... Так как каждый следующий член последовательности зависит только от предыдущего, то она периодична (с периодом 2). Числа 0 в этой последовательности нет, поэтому число, кратное трем, получиться не может.

9–11 классы. Начало см. в № 1–3/2015

С. ШЕСТАКОВ,
isser@yandex.ru,
г. Москва

РЕШАЕМ НЕРАВЕНСТВА



1.6. Метод знакотождественных множителей

Метод, о котором пойдет речь, позволяет решать многие из неравенств вида

$$a_1(x)\cdot a_2(x)\cdot \ldots \cdot a_n(x) \vee 0 \qquad (1)$$

или

$$\frac{a_1(x)\cdot a_2(x)\cdot \ldots \cdot a_n(x)}{a_{n+1}(x)\cdot a_{n+2}(x)\cdot \ldots \cdot a_{n+m}(x)} \vee 0 \qquad (2)$$

(здесь знаком «$\vee$» обозначен один из четырех возможных знаков неравенств «>», «<», «≥», «≤»; n и m — натуральные числа). Основная идея метода — замена одного или нескольких множителей (алгебраических выражений) в левой части неравенства более простыми алгебраическими выражениями «того же знака», что, как понятно, дает возможность упростить и решение самого неравенства. Словосочетание «того же знака» заключено в кавычки, поскольку нуждается в более формальном определении.

Определение 1. Два алгебраических выражения $a(x)$ и $b(x)$ называются *знакотождественными*, если они имеют соответственно одни и те же промежутки знакоположительности, знакоотрицательности и нули.

Тот факт, что алгебраические выражения $a(x)$ и $b(x)$ являются знакотождественными, будем обозначать так: $\operatorname{sign} a(x) = \operatorname{sign} b(x)$ (от латинского *signum* — знак).

Если алгебраические выражения $a(x)$ и $b(x)$ знакотождественны, то справедливы следующие равносильные переходы:

$$a(x)\cdot c(x) \ge 0 \Leftrightarrow b(x)\cdot c(x) \ge 0,$$

$$\frac{a(x)}{c(x)} \ge 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{b(x)}{c(x)} \ge 0,$$

$$\frac{c(x)}{a(x)} \ge 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{c(x)}{b(x)} \ge 0,$$

и аналогичные им для неравенств противоположного знака и строгих неравенств. В самом деле, пусть число x_0 является, например, решением неравенства $a(x)\cdot c(x)\ge 0$. Это означает, что $a(x_0)\cdot c(x_0)\ge 0$. Но в силу знакотождественности алгебраических выражений $a(x)$ и $b(x)$ числа $a(x_0)$ и $b(x_0)$ — одного знака либо оба равны нулю. Поэтому и $b(x_0)\cdot c(x_0) \ge 0$, то есть x_0 — решение неравенства $b(x)\cdot c(x) \ge 0$. Столь же просто показать, что справедливо и обратное утверждение, а значит, неравенства $a(x)\cdot c(x) \ge 0$ и $b(x)\cdot c(x) \ge 0$ равносильны. Доказательство равносильности двух других неравенств совершено аналогично и столь же просто.

Итак, любое алгебраическое выражение в левой части неравенства вида (1) или (2) можно заменить любым другим знакотождественным выражением. Заметим, что такая замена возможна только для неравенств указанного вида; если, например, правая часть

К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru (Упражнения к пункту 1.6.)

неравенства отлична от нуля, то делать такую замену уже нельзя, поскольку полученное неравенство не будет равносильно данному. Ясно и то, что при решении неравенств указанного вида менять алгебраическое выражение на знакотождественное целесообразно только в том случае, если знакотождественное выражение имеет более простой вид. Найти пары знакотождественных выражений $a(x)$ и $b(x)$ можно, основываясь на свойствах числовых неравенств. Приведем такие пары в следующей таблице (n и m — натуральные числа, l и c — действительные числа, $u(x)$ и $v(x)$ — произвольные алгебраические выражения).

Обоснование знакотождественности этих пар не представляет труда. В самом деле, докажем, например, знакотождественность разности модулей двух выражений и разности квадратов этих выражений. Если

$$a(x) = |u(x)| - |v(x)|,$$

то $a(x) > 0$ тогда и только тогда, когда

$$|u(x)| - |v(x)| > 0 \Leftrightarrow |u(x)| > |v(x)| \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow u^2(x) > v^2(x) \Leftrightarrow u^2(x) - v^2(x) > 0,$$

то есть $b(x) > 0$. Отсюда следует совпадение промежутков знакоположительности $a(x)$ и $b(x)$. Совпадение промежутков знакоотрицательности и совпадение нулей обосновывается аналогично.

Число строк в таблице можно уменьшить. Действительно, достаточно понимать, что разность корней одной степени можно заменить разностью подкоренных выражений, добавив условие их неотрицательности в случае корней четной степени. Тогда, например,

$$a(x) = \sqrt[2n+1]{u(x)} + \sqrt[2n+1]{v(x)} = \sqrt[2n+1]{u(x)} - \sqrt[2n+1]{-v(x)},$$

откуда и следует, что

$$\operatorname{sign}\left(\sqrt[2n+1]{u(x)} + \sqrt[2n+1]{v(x)}\right) = \operatorname{sign}\left(u(x) - (-v(x))\right) =$$
$$= \operatorname{sign}\,(u(x) + v(x)).$$

Точно так же достаточно понимать, что разность двух логарифмов по основанию, большему 1, можно заменить разностью выражений под знаками логарифмов, добавив условия положительности этих выражений. Тогда 11-я и 13-я строки таблицы будут простыми следствиями такой замены. В самом деле, $\log_c u(x) = \log_c u(x) - \log_c 1$, следовательно, $\operatorname{sign}\,(\log_c u(x)) = \operatorname{sign}\,(u(x) - 1)$ при условиях $c > 1$, $u(x) > 0$. Кроме того, если одним из множителей в неравенствах вида (1) или (2) является логарифм с переменным основанием, то и его можно заменить знакотождественным множителем (последняя строка таблицы). Для такой замены нужно сначала использовать формулу перехода к новому основанию, выбрав в качестве последнего любое действительное число $m > 1$. Выполним тождественные преобразования:

$$\log_{c(x)} u(x) = \frac{\log_m u(x)}{\log_m c(x)} = \frac{\log_m u(x) - \log_m 1}{\log_m c(x) - \log_m 1}.$$

Отсюда и следует, что

$$\operatorname{sign}\left(\log_{c(x)} u(x)\right) = \operatorname{sign}\frac{u(x)-1}{c(x)-1}$$

при условиях $c(x) > 0$, $u(x) > 0$. Заметим, что условие $c(x) \neq 1$ будет учтено как бы «автоматически»: ведь неравенства (1) и (2) после замены множителей знакотождественными решаются обычно методом интервалов и при наличии множителя $\frac{u(x)-1}{c(x)-1}$ значения переменной, при которых $c(x) = 1$, должны быть «выколоты».

1	$a(x) = u^{2n+1}(x) - v^{2n+1}(x)$	$b(x) = u(x) - v(x)$
2	$a(x) = u^{2n}(x) - v^{2n}(x)$	$b(x) = u^2(x) - v^2(x)$
3	$a(x) = \lvert u(x)\rvert - \lvert v(x)\rvert$	$b(x) = u^2(x) - v^2(x)$
4	$a(x) = \sqrt[2n+1]{u(x)} - \sqrt[2n+1]{v(x)}$	$b = u(x) - v(x)$
5	$a(x) = \sqrt[2n]{u(x)} - \sqrt[2n]{v(x)}$	$b(x) = u(x) - v(x)$ (при условиях $u(x) \geq 0$ и $v(x) \geq 0$)
6	$a(x) = \sqrt[2n+1]{u(x)} + \sqrt[2n+1]{v(x)}$	$a(x) = u(x) + v(x)$
7	$a(x) = l^{u(x)} - l^{v(x)}$ при $l > 1$	$b(x) = u(x) - v(x)$
8	$a(x) = l^{u(x)} - l^{v(x)}$ при $0 < l < 1$	$b(x) = v(x) - u(x)$
9	$a(x) = \log_c u(x) - \log_c v(x)$ при $c > 1$	$b(x) = u(x) - v(x)$ (при условиях $u(x) > 0$, $v(x) > 0$)
10	$a(x) = \log_c u(x) - \log_c v(x)$ при $0 < c < 1$	$b(x) = v(x) - u(x)$ (при условиях $u(x) > 0$, $v(x) > 0$)
11	$a(x) = \log_c u(x)$ при $c > 1$	$b(x) = u(x) - 1$ (при условии $u(x) > 0$)
12	$a(x) = \log_c u(x)$ при $0 < c < 1$	$b(x) = 1 - u(x)$ (при условии $u(x) > 0$)
13	$a(x) = \log_{c(x)} u(x)$	$b(x) = \frac{u(x)-1}{c(x)-1}$ (при условиях $u(x) > 0$, $c(x) > 0$)

Для показательных и логарифмических выражений с основанием, меньшим 1 (строки 8, 10, 12), знакотождественные выражения можно, вообще говоря, не запоминать, а, перейдя к основаниям, большим 1, использовать строки 7, 9, 11.

Таким образом, для успешного решения неравенств методом знакотождественных множителей достаточно помнить о четырех основных парах таких множителей:

1) разность двух неотрицательных при допустимых значениях переменной выражений и разность квадратов этих выражений (в частности, разность модулей двух выражений и разность квадратов этих выражений; разность двух одинаковых четных степеней двух выражений и разность квадратов этих выражений и т.п.);

2) разность двух корней одной степени и разность подкоренных выражений (при условии неотрицательности последних в случае корней четной степени);

3) разность двух показательных выражений с одним и тем же числовым основанием, большим 1, и разность показателей;

4) разность двух логарифмов с одним и тем же числовым основанием, большим 1, и разность выражений под знаками логарифмов (при условии положительности этих выражений).

Прежде чем переходить к примерам, сформулируем еще одно утверждение, из которого легко вывести знакотождественность большинства приведенных в таблице пар.

Утверждение 1. Если функция $y = a(t)$ монотонно возрастает на всей области определения, то для любых t_1 и t_2, принадлежащих этой области, $\operatorname{sign}(a(t_1) - a(t_2)) = \operatorname{sign}(t_1 - t_2)$.

Доказательство легко следует из определения монотонно возрастающей функции. Действительно, если, например, $t_1 - t_2 > 0$, то $t_1 > t_2$ и $a(t_1) > a(t_2)$ (в силу возрастания функции $y = a(t)$), а значит, $a(t_1) - a(t_2) > 0$. Обратно, если $a(t_1) - a(t_2) > 0$, то $a(t_1) > a(t_2)$. Но тогда $t_1 > t_2$ и $t_1 - t_2 > 0$ (если допустить, что $t_1 \le t_2$, то в силу возрастания функции $y = a(t)$ получим, что и $a(t_1) \le a(t_2)$, то есть $a(t_1) - a(t_2) \le 0$, что невозможно). Таким образом, промежутки знакоположительности выражений $a(t_1) - a(t_2)$ и $t_1 - t_2$ одни и те же. Для промежутков знакоотрицательности и нулей доказательство аналогично.

В сущности, доказанное утверждение означает, что выражения $a(t_1) - a(t_2)$ и $t_1 - t_2$ знакотождественны в области определения возрастающей функции $y = a(t)$. Например, функция $y = t^n$ возрастает при $t \ge 0$ для любого $n \ge 2$, $n \in N$. Поэтому выражения $t_1^{2n} - t_2^{2n}$ и $t_1^2 - t_2^2$ знакотождественны в силу неотрицательности t_1^2 и t_2^2. Функции $a(t) = t^{2n+1}$, $a(t) = \sqrt[n]{t}$, $a(t) = l^t$ (при $l > 1$), $a(t) = \log_c t$ (при $c > 1$) монотонно возрастают каждая в своей области определения, что позволяет для каждой из них при решении неравенств (1) и (2) менять любое выражение вида $a(t_1) - a(t_2)$ на знакотождественное выражение $t_1 - t_2$, добавляя при необходимости соответствующие ограничения (условия принадлежности t_1 и t_2 области определения функции $y = a(t)$). При этом t_1 и t_2 могут быть любыми алгебраическими выражениями с переменной x.

Ясно, что для монотонно убывающей функции будет справедливо аналогичное утверждение: если функция $y = a(t)$ монотонно убывает на всей области определения, то для любых t_1 и t_2, принадлежащих этой области, $\operatorname{sign}(a(t_1) - a(t_2)) = \operatorname{sign}(t_2 - t_1)$.

Для решения некоторых неравенств оказывается полезным следующее утверждение, доказательство которого вытекает из определения возрастающей и убывающей функций.

Утверждение 2. Если функция $y = f(x)$ монотонно возрастает на всей области определения и $f(x_0) = 0$, то $\operatorname{sign} f(x) = \operatorname{sign}(x - x_0)$; если функция $y = f(x)$ монотонно убывает на всей области определения и $f(x_0) = 0$, то $\operatorname{sign} f(x) = \operatorname{sign}(x_0 - x)$.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Решить неравенство

$$\frac{4^{x^2+3x-2} - (0,5)^{2x^2+2x-1}}{5^x - 1} \le 0.$$

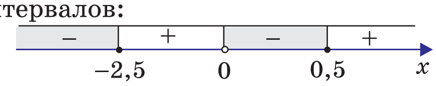
Решение. Перейдем в числителе дроби к основанию 2, а в знаменателе — к основанию 5, после чего применим метод знакотождественных множителей:

$$\frac{2^{2x^2+6x-4} - 2^{-2x^2-2x+1}}{5^x - 5^0} \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2+6x-4-\left(-2x^2-2x+1\right)}{x-0} \le 0 \Leftrightarrow \frac{4x^2+8x-5}{x} \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+2,5)(x-0,5)}{x} \le 0.$$

Последнее неравенство легко решается методом интервалов:



Ответ: $(-\infty; -2,5] \cup (0; 0,5]$.

Пример 2. Решить неравенство

$$\frac{|3x-2| - |2x-3|}{\left|x^2+x-8\right| - \left|x^2-x\right|} \le 0.$$

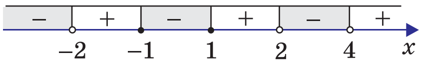
Решение. Заменим разности модулей разностями квадратов. Получим равносильное неравенство:

$$\frac{(3x-2)^2-(2x-3)^2}{\left(x^2+x-8\right)^2-\left(x^2-x\right)^2}\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(3x-2-2x+3)(3x-2+2x-3)}{\left(x^2+x-8-x^2+x\right)\left(x^2+x-8+x^2-x\right)}\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)(5x-5)}{(2x-8)\left(2x^2-8\right)}\le 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)(x-1)}{(x-4)(x-2)(x+2)}\le 0.$$

Последнее неравенство легко решается методом интервалов:



Ответ: (–∞; –2) ∪ [–1; 1] ∪ (2; 4).

Пример 3. Решить неравенство

$$\frac{|2x^2-11x+10|-x^2}{|6x^2-11x+4|-1}\ge 0.$$

Решение. Поскольку $x^2=|x^2|$, $1=|1|$, справедливы равносильные преобразования:

$$\frac{|2x^2-11x+10|-x^2}{|6x^2-11x+4|-1}\ge 0 \Leftrightarrow$$

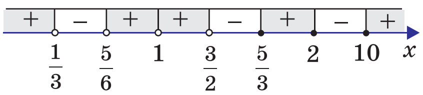
$$\Leftrightarrow \frac{|2x^2-11x+10|-|x^2|}{|6x^2-11x+4|-|1|}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(2x^2-11x+10\right)^2-\left(x^2\right)^2}{\left(6x^2-11x+4\right)^2-1^2}\ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)(x-10)(x-2)\left(x-\frac{5}{3}\right)}{\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)(x-1)\left(x-\frac{5}{6}\right)}\ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x-10)(x-2)\left(x-\frac{5}{3}\right)}{\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{5}{6}\right)}\ge 0, \\ x\ne 1. \end{cases}$$

Последнюю систему решаем методом интервалов:



Ответ:

$$\left(-\infty;\ \frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{5}{6};1\right)\cup\left(1;\ \frac{3}{2}\right)\cup\left[\frac{5}{3};\ 2\right]\cup[10;\ +\infty).$$

Пример 4. Решить неравенство

$$\frac{||x^2-x|-1|-1}{||4x+3|-2|-1}\ge 0.$$

Решение. В силу метода знакотождественных множителей:

$$\frac{|a|-|b|}{|c|-|d|}\ge 0 \Leftrightarrow \frac{a^2-b^2}{c^2-d^2}\ge 0 \Leftrightarrow \frac{(a-b)(a+b)}{(c-d)(c+d)}\ge 0.$$

Поэтому можно сразу перейти к неравенству

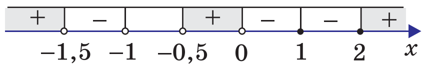
$$\frac{\left(|x^2-x|-2\right)\cdot|x^2-x|}{\left(|4x+3|-3\right)\left(|4x+3|-1\right)}\ge 0.$$

Вновь воспользовавшись тем же преобразованием, получим неравенство:

$$\frac{\left(x^2-x-2\right)\left(x^2-x+2\right)\cdot|x^2-x|}{4x(4x+6)(4x+2)(4x+4)}\ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)(x-2)\cdot|x^2-x|}{x(x+1,5)(x+0,5)(x+1)}\ge 0.$$

Последнее неравенство решим методом интервалов:



Ответ: (–∞; –1,5) ∪ (–0,5; 0) ∪ {1} ∪ [2; +∞).

Пример 5. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{2x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt[3]{3x^2+4x-2}+\sqrt[3]{3x^2+x-4}}\ge 0.$$

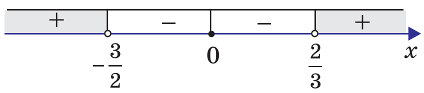
Решение. Заметим, что числитель и знаменатель дроби определены при любых действительных значениях переменной (для числителя это следует из отрицательности дискриминантов каждого из квадратных трехчленов и положительности коэффициента при второй степени переменной). Перепишем неравенство, представив знаменатель дроби в виде разности корней, после чего воспользуемся методом знакотождественных множителей:

$$\frac{\sqrt{2x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt[3]{3x^2+4x-2}-\sqrt[3]{-3x^2-x+4}}\ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2+x+1-x^2-x-1}{3x^2+4x-2-\left(-3x^2-x+4\right)}\ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{6x^2+5x-6}\ge 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)}\ge 0.$$

Решим последнее неравенство методом интервалов:



Ответ: $\left(-\infty;\ -\frac{3}{2}\right)\cup\{0\}\cup\left(\frac{2}{3};\ +\infty\right).$

Пример 6. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{x+\sqrt{3x-2}}-\sqrt{x+\sqrt{2x-3}}}{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}}<0.$$

Решение. Для решения этого неравенства воспользуемся тем, что

$$x-2\sqrt{x-1}=\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2\geqslant 0,$$

$$x+3-4\sqrt{x-1}=\left(\sqrt{x-1}-2\right)^2\ge 0.$$

Применим метод знакотождественных множителей, заменив несколько раз разность корней разностью подкоренных выражений:

$$\frac{x+\sqrt{3x-2}-x-\sqrt{2x-3}}{x-2\sqrt{x-1}-x-3+4\sqrt{x-1}}<0\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{\sqrt{3x-2}-\sqrt{2x-3}}{2\sqrt{x-1}-3}<0\ \Leftrightarrow\ \frac{\sqrt{3x-2}-\sqrt{2x-3}}{\sqrt{4x-4}-\sqrt{9}}<0\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \begin{cases}\dfrac{3x-2-2x+3}{4x-4-9}<0,\\ x\ge\dfrac{3}{2}\end{cases}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}\dfrac{x+1}{4x-13}<0,\\ x\ge\dfrac{3}{2}\end{cases}\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{3}{2}\le x<\frac{13}{4}.$$

Ответ: $\left[\dfrac{3}{2};\dfrac{13}{4}\right)$.

При решении следующего примера применим тождества $|\,a\,|=\sqrt{a^2}$, $a=\sqrt[3]{a^3}$, $|\,a\,|^2=a^2$.

Пример 7. Решить неравенство

$$\frac{|\,x+1\,|-\sqrt{5-2x-2x^2}}{\sqrt[3]{x^3+2x^2-5x+2}-x}\le 0.$$

Решение. Справедлива следующая цепочка равносильных преобразований:

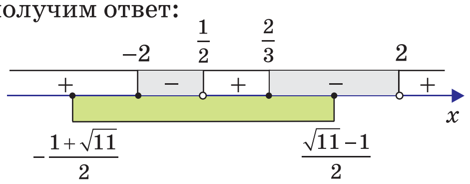
$$\frac{|\,x+1\,|-\sqrt{5-2x-2x^2}}{\sqrt[3]{x^3+2x^2-5x+2}-x}\le 0\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{\sqrt{|\,x+1\,|^2}-\sqrt{5-2x-2x^2}}{\sqrt[3]{x^3+2x^2-5x+2}-\sqrt[3]{x^3}}\le 0\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \begin{cases}\dfrac{x^2+2x+1-5+2x+2x^2}{x^3+2x^2-5x+2-x^3}\le 0,\\ 2x^2+2x-5\le 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \begin{cases}\dfrac{3x^2+4x-4}{2x^2-5x+2}\le 0,\\ 2x^2+2x-5\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\ \begin{cases}\dfrac{(x+2)\left(x-\dfrac{2}{3}\right)}{(x-2)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)}\le 0,\\ -\dfrac{1+\sqrt{11}}{2}\le x\le\dfrac{\sqrt{11}-1}{2}.\end{cases}$$

Решив последнюю систему методом интервалов, получим ответ:



Ответ: $\left[-2;\dfrac{1}{2}\right)\cup\left[\dfrac{2}{3};\dfrac{\sqrt{11}-1}{2}\right]$.

Пример 8. Решить неравенство

$$\frac{\log_2(3x+2)}{\log_3(2x+3)}\le 0.$$

Решение. Традиционный способ решения подобных неравенств состоит в рассмотрении двух случаев. Применим метод знакотождественных множителей, предварительно представив числитель и знаменатель дроби в виде разностей логарифмов:

$$\frac{\log_2(3x+2)-\log_2 1}{\log_3(2x+3)-\log_3 1}\le 0\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}\dfrac{3x+2-1}{2x+3-1}\le 0,\\ x>-\dfrac{2}{3}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \begin{cases}\dfrac{3x+1}{2x+2}\le 0,\\ x>-\dfrac{2}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\ \begin{cases}\dfrac{3x+1}{x+1}\le 0,\\ x>-\dfrac{2}{3}\end{cases}\Leftrightarrow -\frac{2}{3}<x\le-\frac{1}{3}.$$

Ответ: $\left(-\dfrac{2}{3};-\dfrac{1}{3}\right]$.

Пример 9. Решить неравенство

$$\frac{\log_{0,2}\dfrac{1}{2x-1}+\log_5(2-x)}{\log_5(2x-1)+\log_{0,2}\dfrac{1}{3-2x}}\ge 0.$$

Решение. Приведем логарифмы к основанию 5,сложим их и воспользуемся тем же приемом, что и при решении предыдущего примера:

$$\frac{\log_5(2x-1)+\log_5(2-x)}{\log_5(2x-1)+\log_5(3-2x)}\ge 0\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \begin{cases}0,5<x<1,5,\\ \dfrac{\log_5\left(-2x^2+5x-2\right)}{\log_5\left(-4x^2+8x-3\right)}\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \begin{cases}0,5<x<1,5,\\ \dfrac{\log_5\left(-2x^2+5x-2\right)-\log_5 1}{\log_5\left(-4x^2+8x-3\right)-\log_5 1}\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \begin{cases}0,5<x<1,5,\\ \dfrac{-2x^2+5x-2-1}{-4x^2+8x-3-1}\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\ \begin{cases}0,5<x<1,5,\\ \dfrac{-2x^2+5x-3}{-4x^2+8x-4}\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \begin{cases}0,5<x<1,5,\\ \dfrac{2x^2-5x+3}{x^2-2x+1}\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \begin{cases}0,5<x<1,5,\\ \dfrac{(x-1)(x-1,5)}{(x-1)^2}\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \begin{cases}0,5<x<1,5,\\ \dfrac{x-1,5}{x-1}\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow 0,5<x<1.$$

Ответ: (0,5; 1).

Теперь рассмотрим пример, в котором придется «заменить» сразу три разности.

Пример 10. Решить неравенство

$$\frac{\left(\log_2(2x+1)-\log_2(x+2)\right)\left(|\,x\,|-|\,x-2\,|\right)}{\sqrt{3x-2}-\sqrt{2x-1}}\le 0.$$

Решение. Данное неравенство равносильно следующему

$$\begin{cases}\dfrac{\left((2x+1)-(x+2)\right)\left(x^2-(x-2)^2\right)}{(3x-2)-(2x-1)}\le 0,\\ x\ge\dfrac{2}{3}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{(x-1)\cdot 2\cdot 2(x-1)}{x-1}\le 0,\\ x\ge\dfrac{2}{3}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{(x-1)^2}{x-1}\le 0,\\ x\ge\dfrac{2}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\ \frac{2}{3}\le x<1.$$

Ответ: $\left[\dfrac{2}{3};1\right)$.

В ряду стандартных неравенств особое место занимают логарифмические неравенства, содержащие переменную в основании логарифма, поскольку решение таких неравенств вызывает определенные трудности у школьников и абитуриентов. Наиболее распространенный способ решения этих неравенств заключается в рассмотрении двух случаев: 1) основание больше единицы; 2) основание положительно и меньше единицы. Другим методом решения является метод интервалов (см. 1.2), заключающийся в приведении неравенства к виду $f(x)\vee 0$ (где символом «$\vee$» обозначен один из знаков «>», «<», «≥», «≤»), разбиении области определения $D(f)$ нулями $f(x)$ на несколько интервалов и определении знака $f(x)$ на каждом интервале по ее знаку в одной из точек соответствующего интервала. Третий метод — метод знакотождественных множителей.

Рассмотрим вначале неравенство вида $\log_{h(x)}f(x)<b$. Применим формулу перехода к новому основанию, воспользуемся свойствами логарифмов и методом знакотождественных множителей:

$$\log_{h(x)}f(x)<b\Leftrightarrow\frac{\log_2 f(x)}{\log_2 h(x)}-b<0\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\log_2 f(x)-b\log_2 h(x)}{\log_2 h(x)}<0\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\log_2 f(x)-\log_2 h^b(x)}{\log_2 h(x)-\log_2 1}<0\ \Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{f(x)-h^b(x)}{h(x)-1}<0,\\ f(x)>0,\\ h(x)>0.\end{cases}$$

Важнейшими частными случаями являются неравенства вида $\log_{h(x)}f(x)<b$ при $b\in\{0;1;2\}$:

$$1)\ \log_{h(x)}f(x)<0\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{f(x)-1}{h(x)-1}<0,\\ f(x)>0,\\ h(x)>0;\end{cases}$$

$$2)\ \log_{h(x)}f(x)<1\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{f(x)-h(x)}{h(x)-1}<0,\\ f(x)>0,\\ h(x)>0;\end{cases}$$

$$3)\ \log_{h(x)}f(x)<2\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{f(x)-h^2(x)}{h(x)-1}<0,\\ f(x)>0,\\ h(x)>0.\end{cases}$$

Конечно же, запоминать эти системы не надо. Следует помнить лишь об основной идее решения подобных неравенств, заключающейся в переходе к основанию, большему 1, и замене разности логарифмов разностью алгебраических выражений под знаками логарифмов при естественных ограничениях на каждое из них.

Пример 11. Решить неравенство

$$\log_{2x-5}(5x-2)\ge 1.$$

Решение. Перейдем к произвольному основанию, большему 1 (например, к основанию 2), и применим метод знакотождественных множителей:

$$\log_{2x-5}(5x-2)\ge 1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\log_2(5x-2)}{\log_2(2x-5)}-1\ge 0\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\log_2(5x-2)-\log_2(2x-5)}{\log_2(2x-5)}\ge 0\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\log_2(5x-2)-\log_2(2x-5)}{\log_2(2x-5)-\log_2 1}\ge 0\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{(5x-2)-(2x-5)}{(2x-5)-1}\ge 0,\\ 5x-2>0,\\ 2x-5>0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{3x+3}{2x-6}\ge 0,\\ x>2,5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x+1}{x-3}\ge 0,\\ x>2,5\end{cases}\Leftrightarrow x>3.$$

Ответ: $(3;+\infty)$.

Для экономии места при решении всех следующих примеров некоторые очевидные преобразования будут опускаться.

Пример 12. Решить неравенство

$$\log_{|x+2|}(4+7x-2x^2)\le 2.$$

Решение. Применим теперь уже стандартные для решения неравенств такого типа преобразования:

$$\log_{|x+2|}(4+7x-2x^2)\le 2 \Leftrightarrow$$

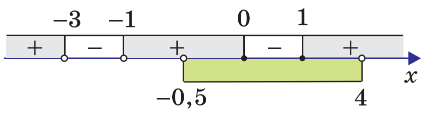
$$\Leftrightarrow \frac{\log_2\left(4+7x-2x^2\right)}{\log_2|x+2|}-2\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_2\left(4+7x-2x^2\right)-\log_2|x+2|^2}{\log_2|x+2|-\log_2 1}\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{\left(4+7x-2x^2\right)-(x+2)^2}{|x+2|-1}\le 0,\\ 4+7x-2x^2>0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{-3x^2+3x}{(x+2)^2-1^2}\le 0,\\ 2x^2-7x-4<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{x(x-1)}{(x+1)(x+3)}\ge 0,\\ -0{,}5<x<4.\end{cases}$$

Последняя система легко решается методом интервалов:



Ответ: $(-0{,}5;\ 0]\cup[1;\ 4)$.

При решении неравенства были использованы тождество $|a|^2=a^2$ и замена алгебраического выражения $|u(x)|-|v(x)|$ знакотождественным выражением $u^2(x)-v^2(x)$. В дальнейшем будем опускать переход от «одиночного» логарифма к разности этого логарифма и логарифма 1 по тому же основанию, сразу меняя соответствующий множитель на знакотождественный (т.е. на разность алгебраического выражения под знаком логарифма и 1 при условии положительности этого алгебраического выражения).

Пример 13. Решить неравенство

$$\log_{2-x}(x+2)\cdot\log_{x+3}(3-x)\le 0.$$

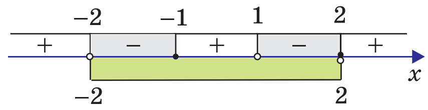
Решение. Применим метод знакотождественных множителей, перейдя к произвольному основанию, большему 1. Для более компактной записи будем здесь и далее использовать переход к основанию 10:

$$\log_{2-x}(x+2)\cdot\log_{x+3}(3-x)\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\lg\,(x+2)}{\lg\,(2-x)}\cdot\frac{\lg\,(3-x)}{\lg\,(x+3)}\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{(x+1)(2-x)}{(1-x)(x+2)}\le 0,\\ -2<x<2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}\le 0,\\ -2<x<2.\end{cases}$$

Последняя система легко решается методом интервалов:



Ответ: $(-2;\ -1]\cup(1;\ 2)$.

Для решения неравенств вида $\log_{h(x)} f(x) < \log_{h(x)} g(x)$ будем использовать обычные преобразования:

$$\log_{h(x)} f(x) < \log_{h(x)} g(x) \Leftrightarrow \frac{\lg f(x)}{\lg h(x)}-\frac{\lg g(x)}{\lg h(x)}<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\lg f(x)-\lg g(x)}{\lg h(x)}<0 \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{f(x)-g(x)}{h(x)-1}<0,\\ f(x)>0,\\ g(x)>0,\\ h(x)>0.\end{cases}$$

Эти преобразования, разумеется, остаются в силе как для неравенств противоположного знака, так и для нестрогих неравенств.

Пример 14. Решить неравенство

$$\log_{\frac{3x-1}{x+2}}\left(2x^2+x-1\right)\ge\log_{\frac{3x-1}{x+2}}\left(11x-6-3x^2\right).$$

Решение.

$$\log_{\frac{3x-1}{x+2}}\left(2x^2+x-1\right)\ge\log_{\frac{3x-1}{x+2}}\left(11x-6-3x^2\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\lg\left(2x^2+x-1\right)}{\lg\dfrac{3x-1}{x+2}}-\frac{\lg\left(11x-6-3x^2\right)}{\lg\dfrac{3x-1}{x+2}}\ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\lg\left(2x^2+x-1\right)-\lg\left(11x-6-3x^2\right)}{\lg\dfrac{3x-1}{x+2}}\ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{\left(2x^2+x-1\right)-\left(11x-6-3x^2\right)}{\dfrac{3x-1}{x+2}-1}\ge 0,\\ 2x^2+x-1>0,\\ 11x-6-3x^2>0,\\ \dfrac{3x-1}{x+2}>0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{(x-1)^2(x+2)}{2x-3}\ge 0,\\ \dfrac{2}{3}<x<3\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ 1{,}5<x<3.\end{array}\right.$$

Ответ: $\{1\}\cup(1{,}5;\ 3)$.

Последняя группа стандартных логарифмических неравенств, содержащих неизвестную в основании логарифма, — неравенства, левая и правая части которых представляют собой логарифмы с разными основаниями от одного и того же алгебраического выражения. Равносильная система и в этом случае получается с помощью преобразований, аналогичных рассмотренным ранее:

$$\log_{f(x)} h(x) < \log_{g(x)} h(x) \Leftrightarrow \frac{\lg h(x)}{\lg f(x)} - \frac{\lg h(x)}{\lg g(x)} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lg h(x)\cdot\left(\frac{1}{\lg f(x)} - \frac{1}{\lg g(x)}\right) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lg h(x)\cdot\frac{\lg g(x) - \lg f(x)}{\lg f(x)\cdot \lg g(x)} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\big(h(x)-1\big)\big(g(x)-f(x)\big)}{\big(f(x)-1\big)\big(g(x)-1\big)} < 0, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ h(x) > 0. \end{cases}$$

Разумеется, эти преобразования применимы и в случае неравенства противоположного знака, и в случае нестрогих неравенств. Последнее особенно важно, поскольку случай равенства $h(x)$ единице будет учтен в соответствующей системе, что позволит избежать потери решения, которая часто происходит при традиционном решении путем перехода к основанию $h(x)$.

Пример 15. Решить неравенство

$$\log_{12x^2-41x+35}(3-x) \geq \log_{2x^2-5x+3}(3-x).$$

Решение.

$$\log_{12x^2-41x+35}(3-x) \geq \log_{2x^2-5x+3}(3-x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\lg(3-x)}{\lg\left(12x^2-41x+35\right)} - \frac{\lg(3-x)}{\lg\left(2x^2-5x+3\right)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\lg(3-x)\cdot\left(\lg\left(2x^2-5x+3\right) - \lg\left(12x^2-41x+35\right)\right)}{\lg\left(12x^2-41x+35\right)\cdot\lg\left(2x^2-5x+3\right)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(2-x)\left(-10x^2+36x-32\right)}{\left(12x^2-41x+34\right)\left(2x^2-5x+2\right)} \geq 0, \\ 3-x > 0, \\ 12x^2-41x+35 > 0, \\ 2x^2-5x+3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x-2)^2\left(x-\frac{8}{5}\right)}{\left(x-\frac{17}{12}\right)(x-2)^2\left(x-\frac{1}{2}\right)} \geq 0, \\ x < 3, \\ \left(x-\frac{5}{3}\right)\left(x-\frac{7}{4}\right) > 0, \\ (x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right) > 0. \end{cases}$$

Решение первого неравенства последней системы — объединение промежутков $\left(\frac{1}{2}; \frac{17}{12}\right) \cup \left[\frac{8}{5}; 2\right) \cup (2; +\infty)$. Пересечением решений трех оставшихся неравенств является множество $(-\infty; 1) \cup \left(\frac{3}{2}; \frac{5}{3}\right) \cup \left(\frac{7}{4}; 3\right)$. Следовательно, решение всей системы: $\left(\frac{1}{2}; 1\right) \cup \left[\frac{8}{5}; \frac{5}{3}\right) \cup \left(\frac{7}{4}; 2\right) \cup (2; 3)$.

Ответ: $\left(\frac{1}{2}; 1\right) \cup \left[\frac{8}{5}; \frac{5}{3}\right) \cup \left(\frac{7}{4}; 2\right) \cup (2; 3)$.

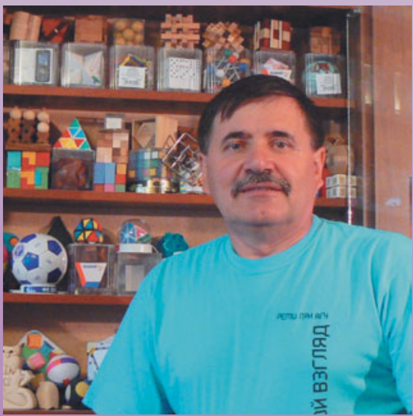
Очевидно, что в ряде случаев метод знакотождественных множителей позволяет решать логарифмические неравенства с переменным основанием быстрее и эффективнее по сравнению с другими методами, предоставляя возможность сэкономить время и силы на экзамене для решения других заданий. Он получил широкое распространение в последние годы. В одной из самых первых статей о методе, написанной автором много лет назад, использовалось название «метод замены функций»; в ряде публикаций его называют «методом замены множителей» или «методом рационализации». На взгляд автора, терминологически наиболее точным является название, приведенное в заголовке этой статьи. Такое название будет использоваться и в дальнейшем.

Девятиклассники, на ОГЭ надо быть внимательными!

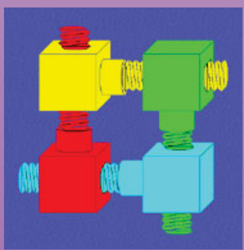
Автор: Т.В. Дейнес, средняя школа № 5, г. Ишим, Тюменская область

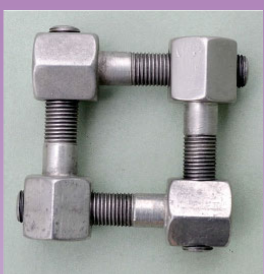
Н. АВИЛОВ,
avilow@rambler.ru,
ст. Егорлыкская, Ростовская обл.

ЧЕТЫРЕ БОЛТА



Ведущий рубрики — Николай Иванович Авилов — на фоне своей коллекции головоломок





Этот объект из четырех болтов я увидел на сайте Леонида Мочалова, известного российского изобретателя головоломок. Внешний вид скрученных невероятным образом болтов удивил, и первое, что пришло в голову, — конструкция из четырех болтов является невозможным объектом, а мой опыт автолюбителя подсказывал, что скрутить четыре, хотя и особых болта так нельзя. Как же сделать такую невероятную скрутку?

Я обратился к инженеру-рационализатору Василию Ивановичу Кравцуну. Он согласился помочь, сказав, что это все просто: «Выточим тебе такие болты и постепенно, работая поочередно со всеми болтами, прокручивая каждый из них на доли градуса, соберем такую конструкцию».

Через несколько дней Василий Иванович привозит мне сверток и говорит: «Вот тебе болты! Собирай сам, я промучился с ними два вечера, но так и не смог реализовать свой план. Ты у нас головоломщик, вот и делай с ними все, что хочешь».

Настала моя очередь ломать голову с болтами. Все попытки мои были безуспешными! У меня тоже не получалось скрутить болты воедино. И тут я вспомнил, что на сайте Л.П. Мочалова головоломка с четырьмя болтами отличалась от других его замечательных головоломок тем, что для нее был приведен только рисунок, а не фотография. Видимо, не случайно, возможно, у автора еще не было реальной головоломки в металле, а только эскиз.

Раз нельзя скрутить болты «по-честному», нужно искать какие-то ухищрения. Я придумал одно из возможных, а именно: один из болтов сделать составным из двух частей, так, чтобы ствол болта на отдельной резьбе вкручивался в головку болта, создавая впечатление его целостности, и тогда конструкция соберется.

Рассказал свою затею другу-инженеру с просьбой реализовать ее на практике, стал ждать. И не напрасно. Вскоре Василий Иванович, сияя улыбкой, вручает мне новые четыре болта, уже скрученные в требуемую конструкцию. Но...

Я пытаюсь разобрать, выкручивая ствол одного болта из его головки. Ан нет! Там все скручено намертво, разъема между головкой и стволом нет ни у одного из болтов! У головоломки оказался новый секрет, отличный от предложенного мной! Догадайтесь, что же придумал мой друг?

Головоломка «Четыре болта» сродни головоломкам японской фирмы «Hanayama», специализирующейся на разработке и выпуске уникальных головоломок из металла. С 1933 года фирма, основанная Наояшу Ханаяма, выпустила целую серию интересных головоломок. Среди них есть оригинальные разработки наших соотечественников. Возможно, и головоломка «Четыре болта» будет замечена инженерами этой фирмы и они станут выпускать ее со своим логотипом.

Если что-то в этой статье вам показалось не очень серьезным, то посчитайте это за нашу первоапрельскую шутку.

К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru

РЕФЕРАТЫ ЭЛЕКТРОННЫХ ПУБЛИКАЦИЙ

Абликсанова И. (с. Преображенка, Иркутская обл.). **Учимся, играя. 5, 6, 9 классы.** Учебники: Виленкин Н.Я., Жохов А.С. и др. Математика, 5 класс, 6 класс; Мордкович А.Г., Мишустина Т.Н. и др. Алгебра, 9 класс.

Автор делится опытом использования игры на своих уроках. Игровые формы выступают как средство побуждения, стимулирования учащихся к учебной деятельности.

Первый урок, предложенный автором, это урок по теме «Положительные и отрицательные числа» (6-й класс). Цель урока: проверить знания, умения, навыки по теме; развивать мышление, воображение; воспитывать самостоятельность и уверенность в себе. Урок использует формат телепрограмм, реальных и придуманных автором.

Второй урок — по теме «Сложение и вычитание смешанных дробей» (6-й класс). Цель урока: продолжить вырабатывать навык сложения и вычитания смешанных дробей; воспитывать самостоятельность учащихся; развивать умение находить оптимальные решения.

Следующий — урок-игра для учащихся 5-го класса по теме «Колесо истории». Цель урока: расширить кругозор; проверить знания учащихся по истории математики; воспитывать коммуникабельность, общительность, коллективизм. Игра построена по принципу телевизионной игры «Своя игра». Вопросы затрагивают такие темы как: единицы измерения длины, запись числа, мера массы, единицы измерения объема, монетный двор, системы счисления и др. В игре принимают участие две команды.

Для 9-го класса автор предложил деловую игру «Математический менеджер». Цель игры: проверить умение учащихся составлять по условию задачи уравнение и их системы; выполнять арифметическое решение задач; воспитывать уверенность в себе, самостоятельность, умение работать в группах; развивать логическое мышление. Игра также построена по принципу телевизионной игры «Своя игра». Вместо вопросов командам предлагаются старинные задачи, задачи на движение и на совместную работу.

Чудновская Т. (г. Москва). **Математические игры. 7 класс.** Автор предлагает две игры: математические гонки и лото.

Математические гонки представляют собой соревнование трех команд; отвечая на поставленные учителем вопросы-задания, команды стремятся дойти до финиша. Автор приводит тридцать вопросов-заданий по теме «Степень с натуральным показателем»; каждое задание предлагается в трех вариантах, *а*, *б*, *в*. Команды отвечают на свой вариант задания, что обеспечивает их одновременную работу. Во время игры каждый член команды сначала решает задание самостоятельно, а затем вырабатывается общее решение. Игра может проводиться как за один урок, так и на нескольких.

К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru

В математическое лото играет четыре команды. Каждая команда получает игровую карту с номерами десяти вопросов. Автор предлагает сорок вопросов по теме «Начальные геометрические понятия». Среди вопросов есть теоретические, в которых нужно сформулировать теорему или свойство и привести доказательство, и практические, то есть ученик должен решить задачу. Игра рассчитана на один урок. Данные игры позволяют каждому ученику повторить указанные темы, увидеть и исправить свои ошибки.

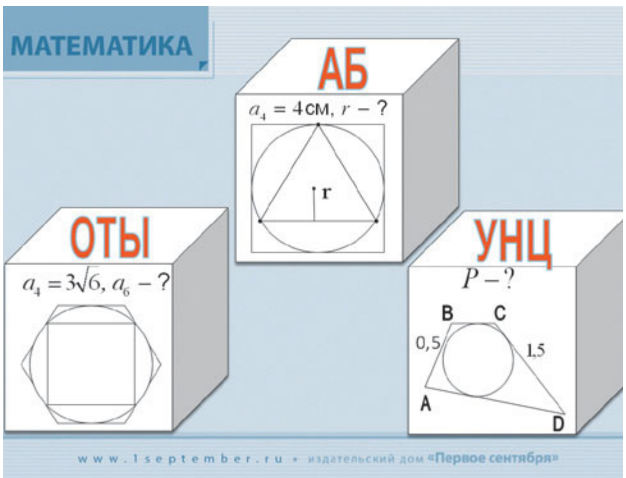
Плыгун Т. (с. Соколовское, Краснодарский край). **Внеклассное мероприятие «Натуральные числа в нашей жизни». 5–6 классы.** По мнению автора, элементы занимательности вызывают у детей чувство удивления, живой интерес к процессу познания, помогают усвоить любой учебный материал. Игра ставит ученика в условия поиска, пробуждает интерес к победе, а отсюда стремление быть быстрым, собранным, находчивым, уметь четко выполнять задания. Автор предлагает внеклассное мероприятие, которое включает в себя несколько конкурсов. Начинается игра с интеллектуальной разминки — ряда шуточных задач. Продолжает игру конкурс капитанов «В мире животных», состоящий из трех заданий. Затем конкурс факиров, модельеров и кулинарный конкурс. Заканчивается игра разгадыванием кроссворда.

Наумова М. (г. Одинцово, Московская обл.). **Играя, учить и учиться играя. 8–9 классы.** По мнению автора, игра и учение являются основными видами деятельности ребенка. В процессе игр дети приобретают самые различные знания о предметах и явлениях окружающего мира. Игры хороши в системе с другими формами обучения, использование которых должно в конечном итоге привести к решению следующих задач: учитель должен дать учащимся знания, соответствующие современному уровню развития науки; он должен научить их самостоятельно приобретать знания.

Игровые формы занятий чаще применяют при проверке результатов обучения, при выработке навыков, формировании умений. Автор предлагает ряд обобщающих уроков в форме интеллектуальной игры брейн-ринг. Первый брейн-ринг — по теме «Многоугольники». Рассчитана игра на один урок и проводится на уроках геометрии в 9-м классе. Цель игры: проверка умения учащихся решать основные типовые задачи и задачи на построение правильных многоугольников.

Второй брейн-ринг, «Чудеса четырехугольников», тоже рассчитан на один урок и проводится на уроках геометрии в 8-м классе. Цель игры: развитие активного мышления, творческих способностей и математической речи учащихся.

Брейн-ринг по теме «Теорема Пифагора и соотношения между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике» рассчитан на два урока и проводится также в 8-м классе. Цель игры: проверка знания теоретических вопросов и умения решать типовые задачи и задачи повышенной трудности.



Гринвичская королевская обсерватория

Нулевой, гринвичский меридиан — начало отсчета поясного времени — проходит через Гринвичскую королевскую обсерваторию, главную астрономическую обсерваторию Великобритании, основанную в предместье Лондона Гринвиче в 1675 году для уточнения географических координат, необходимых для мореплавателей.

Гринвич — это эталоны английских мер. В главные ворота обсерватори вмонтированы эталоны ярда, фута, дюйма, отметка высоты над уровнем моря для настройки барометров и огромные пружинные часы. Чтобы капитаны кораблей по пути в лондонский порт после долгого плавания могли выверить свои корабельные инструменты по эталонным. Гринвич — это решение проблемы определения точного времени; сейчас здесь находится музей астрономических и навигационных инструментов.

А еще обсерватория неразрывно связана с открытием закона всемирного тяготения. Для обоснования закона Исаак Ньютон использовал результаты наблюдений Луны, выполненные первым директором Гринвичской обсерватории, Джоном Флемстидом. Но дело не в этой не очень красивой истории, да и вообще не в отдельно взятом законе природы. И даже не в том, что Ньютон догадался связать движение падающего яблока и вращение Луны вокруг Земли. Важно, что он впервые в истории науки разработал математическую модель: закон тяготения + закон механического движения + математический анализ, как инструмент исследования этих всемирных законов.

В 2013 году на территории обсерватории открыт памятник Юрию Гагарину. Кстати, в Гринвиче мною зафиксирована самая высокая концентрация русскоговорящих туристов – лишнее доказательство высокого уровня российского образования.

Л. Рослова