Задания муниципального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике, 2013 г.

10–11 классы

1. Петя написал на доске многочлен x^2+px+q, а Вася – многочлен x^2+rx+s, где p, q, r, s – действительные числа, $p \neq q,\ r \neq s$. Оказалось, что корни первого многочлена равны r и s, а корни второго равны p и q. Какие многочлены были написаны на доске?

Ответ: x^2+x-2 и x^2+x-2 либо x^2+px и x^2-px, где p – любое ненулевое действительное число.

Решение. По теореме Виета имеем четыре равенства: $q=rs,\ p=-r-s,\ s=pq,\ r=-p-q$. Тогда $p=p+q-pq,\ q=-(p+q)pq$, т.е. $q(p-1)=0$ и $q(1+(p+q)p)=0$. Возможны 2 случая.
1) $q \neq 0$. Тогда $p=1$, следовательно, $q=-2$. Тогда $r=1$, $s=-2$.
2) $q=0$. Тогда $s=0$, $r=-p$.

Критерии. Угаданы многочлены x^2+x-2 и x^2+x-2 или какие-то два многочлена вида x^2+px и x^2-px без обоснования – 1 балл. Обоснованно получены только многочлены x^2+x-2 и x^2+x-2 или только семейство многочленов x^2+px и x^2-px – 3 балла.

2. Найдите все натуральные числа N, удовлетворяющие условию $3+N+N!=3^N$ ($N!$ обозначает произведение всех последовательных натуральных чисел, начиная с 1 и заканчивая N).

Ответ: $N=6$.

Решение. Нетрудно проверить, что из значений $N \le 6$ подходит только $N=6$. При $N>6$ имеем

$$N!=2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots \cdot (N-1)N \ge 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 3^{N-7}=5040\cdot 3^{N-7}>3^7\cdot 3^{N-7}=3^N$$

и, следовательно, равенство $3+N+N!=3^N$ не может выполняться.

Критерии. За правильный ответ без доказательства отсутствия других решений – 1 балл. Если доказано, что N делится на 3, но не делится на 9, – 1 балл.

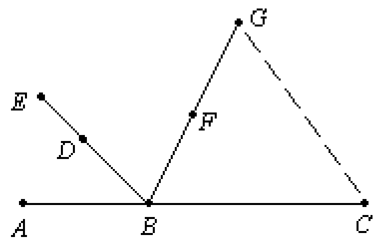
3. Можно ли отметить на плоскости семь точек так, чтобы всякая прямая, проведённая через две из этих точек, содержала 3 отмеченные точки и не содержала остальные 4?

Ответ: нет, нельзя.

Решение. Предположим, что описанное размещение возможно. Покажем сначала, что найдётся прямая, проходящая через две отмеченные точки и такая, что все отмеченные точки лежат либо на этой прямой, либо по одну сторону от неё. Для этого выберем некоторую систему координат и зафиксируем самую нижнюю точку (пусть таковой оказалась точка B). Если «самых нижних» точек более одной, то ясно, что проходящая через них горизонтальная прямая удовлетворяет требуемому условию. Если же нижняя точка лишь одна, то будем поворачивать горизонтальную прямую, проходящую через B, по часовой стрелке до тех пор, пока прямая не пройдёт через какую-либо из остальных 6 точек (пусть это оказалась точка A). Прямая AB удовлетворяет требуемому условию.

В дальнейшем будем считать, что найденная нами прямая горизонтальна, а лежащие вне прямой точки находятся выше прямой. Из условия следует, что на этой прямой лежат ровно 3 точки. Пусть они располагаются слева направо в порядке A, B, C.

Из оставшихся точек какие-то две (скажем, D и E) должны лежать на одной прямой с точкой B; две другие точки (F и G) тоже лежат на одной прямой с точкой B. Мы будем считать, что $\angle CBF$ меньше, чем $\angle CBD$. Из четырёх точек D, E, F, G выберем ту, что лежит не ниже трёх остальных (пусть это оказалась точка G).



Точки A, B, F не могут принадлежать прямой CG; следовательно, на ней лежит одна из точек D и E (можно считать, что это оказалась точка E). Точка E находится не выше, чем точка G, а значит, она принадлежит отрезку CG. Тогда E лежит по ту же сторону от прямой BG, что и точка C. Но, как мы знаем, отрезок BE находится от прямой BG по ту же сторону, что и точка A. Получили противоречие.

4. Докажите неравенство $(x^2+y^2)(y^2+z^2)(z^2+x^2)\geqslant(x^2+yz)(y^2+zx)(z^2+xy)$, *где* $x,y,z\geqslant 0$.

Доказательство. Докажем неравенство

$$(y^2+z^2)(z^2+x^2)\geqslant(z^2+xy)^2. \qquad (*)$$

Раскрыв скобки в обеих частях, получим равносильное неравенство

$$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+z^4\geqslant z^4+2xyz^2+x^2y^2,$$

т.е. $x^2z^2-2xyz^2+y^2z^2\geqslant 0$. Последнее неравенство верно, так как

$$x^2z^2-2xyz^2+y^2z^2=z^2(x-y)^2\geqslant 0.$$

Аналогично получаем неравенства

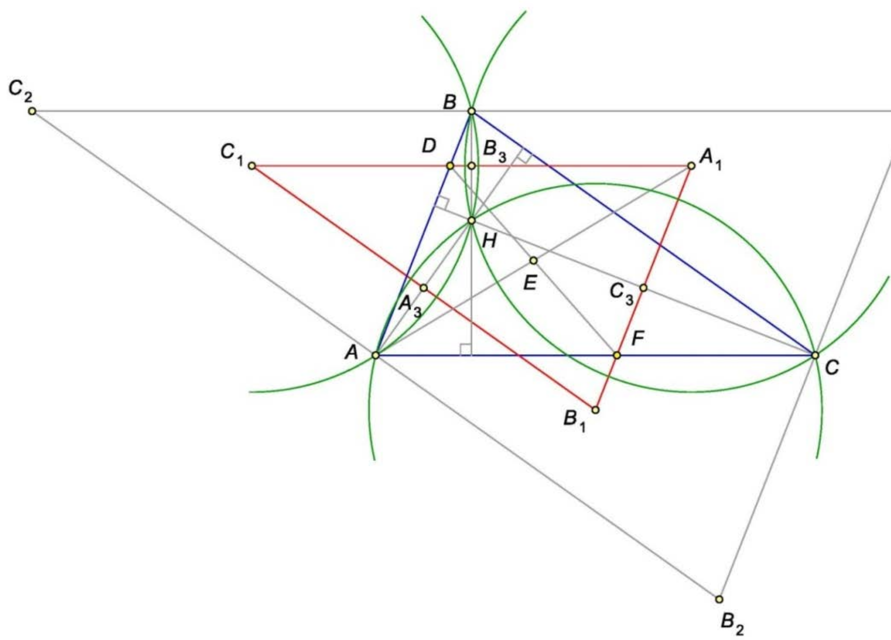
$$(z^2+x^2)(x^2+y^2)\geqslant(x^2+yz)^2 \text{ и } (x^2+y^2)(y^2+z^2)\geqslant(y^2+zx)^2.$$

Перемножив два последних неравенства с неравенством (*), после извлечения корня из обеих частей получим нужное неравенство.

5. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты, пересекающиеся в точке H. Около треугольников BCH, CAH, ABH описаны окружности с центрами в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Докажите, что отрезки AA_1, BB_1, CC_1 проходят через одну точку и точкой пересечения делятся пополам.

Решение. Покажем для начала, что точки A_1, B_1 и C_1 различны. Если какие-то две из них совпадают, то точки A, B, C, H лежат на одной окружности, что невозможно, так как H лежит внутри треугольника ABC. Поскольку центр описанной около треугольника окружности лежит на пересечении серединных перпендикуляров к сторонам треугольника, то прямые B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 суть серединные перпендикуляры к отрезкам AH, BH, CH. Отсюда следует, что $B_1C_1 \parallel BC$, $C_1A_1 \parallel CA$, $A_1B_1 \parallel AB$, следовательно, треугольники $A_1B_1C_1$ и ABC подобны. Проведём через каждую вершину треугольника ABC прямую, параллельную противолежащей стороне. Точки пересечения этих прямых обозначим A_2, B_2, C_2, причём $B_2C_2 \parallel BC$, $C_2A_2 \parallel CA$, $A_2B_2 \parallel AB$. Выполним теперь гомотетию с центром в точке H и коэффициентом 2. Обозначим через A_3, B_3, C_3 середины отрезков AH, BH, CH соответственно. Поскольку при гомотетии точки A_3, B_3, C_3 перейдут в точки A, B и C соответственно, то прямые B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 перейдут в прямые B_2C_2, C_2A_2, A_2B_2 соответственно, следовательно, точки A_1, B_1, C_1 перейдут в точки A_2, B_2, C_2. Поскольку при данной гомотетии длины отрезков увеличиваются в 2 раза и имеют место очевидные равенства $B_2C_2 = 2BC$, $C_2A_2 = 2CA$, $A_2B_2 = 2AB$, то $B_1C_1 = \frac{B_2C_2}{2} = BC$, $C_1A_1 = \frac{C_2A_2}{2} = CA$, $A_1B_1 = \frac{A_2B_2}{2} = AB$. Таким образом, треугольники $A_1B_1C_1$ и ABC равны. Заметим также, что векторы $\overrightarrow{A_1B_1}$ и $\overrightarrow{AB}$ противоположно направлены, поскольку векторы $\overrightarrow{A_2B_2}$ и $\overrightarrow{AB}$ противоположно направлены. Аналогично противоположно направлены векторы $\overrightarrow{B_1C_1}$ и $\overrightarrow{BC}$, а также $\overrightarrow{C_1A_1}$ и $\overrightarrow{CA}$.

Пусть D – точка пересечения AB и C_1A_1, F – точка пересечения AC и A_1B_1. Тогда ADA_1F – параллелограмм. Обозначим через E точку пересечения его диагоналей и выполним симметрию относительно этой точки. При этом F перейдёт в D, A в A_1, а поскольку при симметрии прямая переходит в параллельную ей прямую, то прямая AC перейдёт в A_1C_1, а прямая AB в A_1B_1. Так как при симметрии сохраняются длины отрезков, то точка B перейдёт в точку, отстоящую от точки A_1 на расстояние AB, т.е. в точку B_1. Аналогично точка C при этой симметрии перейдёт в C_1. Так как при симметрии с центром в точке E точки A, B и C перейдут в точки A_1, B_1 и C_1 соответственно, то это и означает, что отрезки AA_1, BB_1, CC_1 проходят через точку E и этой точкой делятся пополам.



Замечание. Можно доказать, что точка E является центром окружности Эйлера треугольника ABC.

Критерии. Если доказано, что отрезки AA_1, BB_1, CC_1 проходят через одну точку, но не доказано, что они точкой пересечения делятся пополам, – 4 балла.