Задания муниципального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике, 2013 г.

7–8 классы

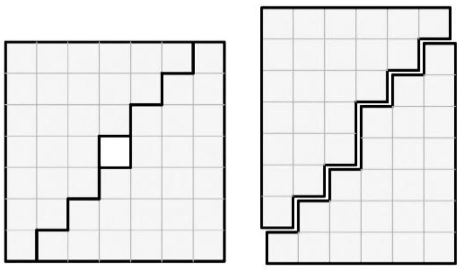
1. Перед алхимиком стоит котёл с расплавленным серебром и два куска золота. Если он бросит в котёл первый кусок золота, то получит 25%-й сплав золота. Если вместо этого он бросит в котёл второй кусок золота, то получит 40%-й сплав золота. Какой сплав золота он получит, если бросит в котёл оба куска золота?

Ответ: 50%-й.

Решение. В первом сплаве будет 75% серебра и 25% золота, следовательно, весовое соотношение серебра и золота 3:1. Во втором сплаве будет 60% серебра и 40% золота, поэтому весовое соотношение серебра и золота 3:2. Следовательно, на 3 части серебра в котле приходится 1 часть золота в первом куске и 2 части золота во втором куске. Если бросить в котёл всё золото, то на 3 части серебра будет приходиться 3 части золота, следовательно, получится 50%-й сплав золота.

2. Из разбитого на клетки квадрата размером 7×7 клеток вырезали центральную клетку. Можно ли получившуюся фигуру разрезать на две части, из которых удалось бы сложить прямоугольник (без наложений и пустот)?

Ответ: Да.



3. На столе лежат 7 монет разного веса и имеются весы, на которые можно положить любые три монеты и узнать их суммарный вес. Класть на весы другое количество монет нельзя. Найдите, как за 5 взвешиваний определить суммарный вес всех монет.

Решение. Пронумеруем монеты числами от 1 до 7. Взвесим монеты 1, 2 и 3, потом монеты 2, 3 и 4, затем монеты 3, 4 и 1, и, наконец, монеты 4, 1 и 2. Если сложить четыре числа, которые покажут при этом весы, то получится утроенный суммарный вес монет 1, 2, 3 и 4. Поделим эту сумму на 3, получим число x. За оставшееся взвешивание найдём суммарный вес монет 5, 6 и 7 (обозначим его через y). Тогда вес всех монет равен $x + y$.

4. Решите числовой ребус: $\overline{abc} + \overline{acb} + \overline{bac} = 2013$ (запись вида $\overline{abc}$ означает число, в десятичной записи которого слева направо следуют цифры a, b и c, причём разным буквам могут соответствовать одинаковые цифры). Укажите все возможные решения и объясните, как вы нашли неизвестные.

Ответ: $a = 8, b = 3, c = 0$ или $a = 9, b = c = 1$.

Решение. Исходное равенство можно переписать в виде

$$(100a + 10b + c) + (100a + 10c + b) + (100b + 10a + c) = 2013$$

или $210a + 111b + 12c = 2013$. Поделив обе части равенства на 3, получим

$$70a + 37b + 4c = 671.$$

Заметим, что поскольку числа $70a$ и $4c$ чётные, а 671 – нечётное, то b должно быть нечётным. Нам достаточно проверить значения a, равные 9, 8, 7, 6, 5, поскольку если $a \leq 4$, то $70a + 37b + 4c \leq 70 \cdot 4 + 37 \cdot 9 + 4 \cdot 9 = 649 < 671$.

Если $a = 9$, то $37b + 4c = 41$, откуда получаем, что $b = c = 1$.

Если $a = 8$, то $37b + 4c = 111$, откуда получаем, что $b = 3$ и $c = 0$.

Если $a = 7$, то $37b + 4c = 181$. Поскольку $0 \leq c \leq 9$, то $3{,}9 < \frac{181-36}{37} \leq b \leq \frac{181}{37} < 4.9$, а так как b нечётное, то решений нет.

Если $a = 6$, то $37b + 4c = 251$. Поскольку $0 \leq c \leq 9$, то $5{,}8 < \frac{251-36}{37} \leq b \leq \frac{251}{37} < 6{,}8$, а так как b нечётное, то решений нет.

Если $a = 5$, то $37b + 4c = 321$. Поскольку $0 \leq c \leq 9$, то $7{,}7 < \frac{321-36}{37} \leq b \leq \frac{321}{37} < 8{,}7$, а так как b нечётное, то решений нет.

Критерии. Верно найдено только одно из решений – 3 балла, верно найдены оба решения без обоснования отсутствия других решений – 6 баллов.

5. Петя и Вася играют в следующую игру. Первым ходом Петя записывает на доске трёхзначное число $\overline{abc}$, следующим ходом Вася вычитает из него число $(\overline{ab} + c)$ и результат записывает на доске. Если получилось трёхзначное число $\overline{def}$, то Петя вычитает из него число $(\overline{de} + f)$ и результат снова записывает на доске и т.д. Выигрывает тот, кто первым запишет на доске двузначное число. Какой первый ход сделал Петя, если он выиграл, сделав 6 ходов? Укажите все возможные варианты.

Ответ: Петя первым ходом мог написать любое натуральное число в промежутке $[330; 369]$.
Решение. Заметим, что если из числа $\overline{abc}$ вычесть сумму $(\overline{ab} + c)$, то получится число $9 \cdot \overline{ab}$, т.е. число, кратное 9. Таким образом, последним ходом Петя написал двузначное число $\overline{cd}$, кратное 9 и дающее при делении на 9 двухзначное число. Таким числом может быть 90=9·10 или 99=9·11.

Если последним написанным числом было 90, то перед ним было написано трёхзначное число, которое начинается с цифр 10 и делится на 9. Значит, это число 108=9·12. Перед ним было записано число, начинающееся с цифр 12 и кратное 9, т.е. 126. Рассуждая аналогичным образом, получаем следующую последовательность чисел: 90, 108, 126, 144, 162. Перед числом 162 могло быть написано либо число 180, либо 189. В первом случае получаем последовательность 180, 207, 234, 261, 297. Следующее число должно начинаться с цифр 33 (поскольку 297=9·33), но оно не обязано быть кратным 9, поскольку оно было написано первым ходом. Получаем, что в этом случае первым могло быть написано любое натуральное число в промежутке $[330; 339]$. Во втором случае получаем последовательность 189, 216, 243, а затем снова два варианта: либо 270, либо 279. Перед числом 270 могло быть написано число 306, а перед ним – любое число от 340 до 349. Перед числом 279 могло быть написано число 315, а перед ним – любое число от 350 до 359. Итак, если последним написанным числом было 90, то вначале могло быть написано любое число в промежутке $[330; 359]$.

Если последним написанным числом было 99, то, рассуждая аналогично, получаем последовательность чисел 99, 117, 135, 153, 171, 198, 225, 252, 288, 324. Следующее число должно начинаться с цифр 36 (поскольку 324=9·36), но оно не обязано быть кратным 9, поскольку оно было написано первым ходом. Получаем, что в этом случае первым могло быть написано любое натуральное число в промежутке $[360; 369]$.

Критерии. Если в работе доказано, что каждое число, начиная со второго, должно быть кратно 9, но число, полученное в ответе, не входит в указанный промежуток – 1 балл.

Если правильно найден только один из двух возможных последних ходов и для него верно найдено только одно значение первого хода – 2 балла.

Если правильно найдены оба значения последнего хода и для каждого из них верно найдено только одно значение первого хода – 3 балла.

Если правильно найдено только значение 90 для последнего хода и для него верно найден один из трёх возможных промежутков, в которых может находиться первое число, – 3 балла.

Если правильно найдено только значение 90 для последнего хода и для него верно найдены два из трёх возможных промежутков, в которых может находиться первое число, – 4 балла.

Если правильно найдено только значение 90 для последнего хода и для него верно найдены все три возможных промежутка, в которых может находиться первое число, – 5 баллов.

Если правильно найдено только значение 99 для последнего хода и для него верно найден промежуток, в котором может находиться первое число, – 3 балла.