Решения задач 9 класса

1. Прямая дорога проходит через 9 деревень. В двух соседних деревнях живут Петя и Вася. Каждый из них посчитал сумму расстояний от своей деревни до всех остальных на карте, где деревни выглядят точками на прямой. Докажите, что у них получились разные суммы.

Решение.
Обозначим деревни точками на прямой. Пусть A и B – деревни Пети и Васи, а остальные деревни – C_1, C_2, …, C_7. Пусть S_1 – сумма, которая получилась у Пети, S_2 – сумма, которая получилась у Васи. Тогда

$$S_1 - S_2 = (AC_1 - BC_1) + (AC_2 - BC_2) + \ \dots + (AC_7 - BC_7) + (AB - BA) =$$
$$= \pm AB \pm AB \pm AB \pm AB \pm AB \pm AB \pm AB.$$

Мы получили сумму семи одинаковых слагаемых, взятых со знаками «+» или «–». Она будет равна nAB, где n – нечётное число в промежутке от –7 до 7, следовательно, $S_1 - S_2 \neq 0$.

Критерии.
Проведено полное доказательство – **7 баллов.**
Рассмотрены все возможные случаи расположения деревень Пети и Васи относительно других деревень и верно найдена разность сумм расстояний для каждого случая – **7 баллов.**
Рассмотрен только один случай расположения точек на прямой и верно найдена разность сумм расстояний (без использования конкретных чисел для расстояний между точками) – **2 балла.**
Рассмотрен только один пример расположения точек на прямой с использованием конкретных чисел для расстояний между точками – **0 баллов.**

2. В городском соревновании школ состязались несколько школьных команд в различных видах спорта. Какое наименьшее количество медалей могло разыгрываться в соревновании, если известно, что все участвующие школы выиграли в этом соревновании различное количество медалей, первое место заняла школа, забравшая 1/5 всех разыгранных медалей, а последнее место заняла школа, получившая 1/7 всех разыгранных медалей?

Ответ: 140.

Решение. Количество всех медалей обозначим через n, оно должно делиться на 5 и на 7, т.е. оно делится на 35 и имеет вид $n = 35m$, где m – натуральное число. Пусть школа-аутсайдер набрала a медалей, школа-лидер – b медалей, все школы, кроме лидера и аутсайдера (будем называть их «средними»), набрали вместе k медалей, тогда $a = 5m$, $b = 7m$, $k = 23m$. Если $m = 1$, то $n = 35$, $a = 5$, $b = 7$, $k = 23$, между числами 5 и 7 есть только одно натуральное число 6, а «средние» школы в сумме должны набрать 23 медали. Получаем противоречие. Если $m = 2$, то $n = 70$, $a = 10$, $b = 14$, $k = 46$. Тогда «средние» школы могли набрать в сумме не более, чем $11 + 12 + 13 = 36$ медалей, а необходимо набрать 46, снова получаем противоречие. Если $m = 3$, то $n = 105$, $a = 15$, $b = 21$, $k = 69$. Количество «средних» школ не может быть больше 3, так как в противном случае они в сумме набирают не меньше, чем $16 + 17 + 18 + 19 = 70$ медалей, а должны 69. Но если «средних» школ не больше 3, то они вместе набирают не больше, чем $18 + 19 + 20 = 57$ медалей, противоречие. Если $m = 4$, то $n = 140$, $a = 20$, $b = 28$, $k = 92$, и распределение медалей может быть следующим: 20, 21, 22, 23, 26, 28. Возможен и другой вариант: 20, 21, 22, 24, 25, 28.

Критерии.

Приведено полное решение – **7 баллов.**
Приведён только пример распределения 140 медалей – **2 балла.**
Строго доказано, что n не может быть равно 35, 70 и 105, но не приведён пример распределения 140 медалей – **5 баллов.**
Строго доказано, что n не может быть равно 35 и 70, но не вполне обосновано, почему n не может быть равно 105, а также приведён пример распределения 140 медалей – **4 балла.**
Строго доказано, что n не может быть равно 35 и 70, но не вполне обосновано, почему n не может быть равно 105, к тому же отсутствует пример распределения 140 медалей – **3 балла.**
Приведён только ответ 140 без обоснования – **1 балл.**

3. На координатной плоскости нарисована парабола с уравнением $y = ax^2 + bx + c$. В точках A и B её пересекает прямая, причём оказалось, что середина отрезка AB находится в начале координат. Найдите уравнение этой прямой.

Ответ: $y = bx$.

Решение. Пусть (x_0, y_0) – координаты точки A. Тогда координаты точки B равны $(-x_0, -y_0)$, так как точки A и B симметричны относительно начала координат. Прямая AB проходит через начало координат, поэтому её уравнение имеет вид $y = kx$. Поскольку точка A принадлежит этой прямой, то $y_0 = kx_0$, т.е. $k = \frac{y_0}{x_0}$ $(x_0 \neq 0)$. Точки $A(x_0, y_0)$ и $B(-x_0, -y_0)$ принадлежат параболе, поэтому мы можем записать два равенства: $y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$ и $-y_0 = ax_0^2 - bx_0 + c$. Вычитая из первого равенства второе, мы получаем $2y_0 = 2bx_0$. Тогда $k = \frac{y_0}{x_0} = b$.

Критерии.
Обоснованно получен верный ответ – **7 баллов.**
Получен верный ответ только для конкретных значений a, b и c – **1 балл.**

4. Петя и Вася играют в следующую игру. Петя первым ходом записывает на доске любое натуральное число от 1 до 9 включительно. Второй ход делает Вася. За один ход можно стереть записанное на доске число и записать вместо него либо число на единицу большее, либо число в два раза большее. Ходы делаются по очереди. Выигрывает тот, кто первым запишет число 100 или большее. Кто из игроков может обеспечить себе выигрыш при правильной игре и как он должен играть?

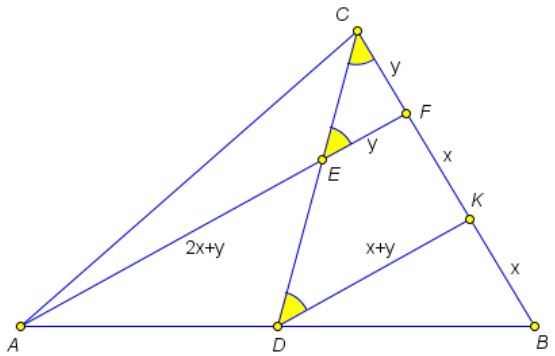
Ответ: Петя.

Решение. Первым ходом Петя должен написать любое нечётное число от 1 до 9. Какой бы ход ни сделал Вася, он напишет чётное число. Петя должен следующим ходом прибавить 1, получится нечётное число. Далее, если Вася своим последним ходом написал число, не превосходящее 48, Петя должен прибавить к нему 1, а если Вася написал число, большее 48 (причём оно будет чётным и не менее 50), то Пете нужно умножить его на 2 и этим ходом он выиграет. Покажем, что эта стратегия действительно выигрышная. Если предположить, что Вася сделал в этой игре последний ход и выиграл, то это означает, что последним ходом Петя написал число от 50 до 99. Последним ходом Петя прибавить 1 не мог, так как он прибавляет 1 только к числам, не превосходящим 48, умножить на 2 он тоже не мог, так как он умножает на 2 только число, не меньшее 50, и при этом он выигрывает. Получаем, что Петя не мог сделать ход, после которого на доске окажется число от 50 до 99, следовательно, Вася выиграть не сможет, т.е. выиграет Петя.

Критерии. Приведено полное решение – **7 баллов.**

5. В треугольнике ABC проведена медиана CD. На отрезке BC выбрана точка F и проведена прямая AF, пересекающая CD в точке E. Оказалось, что $CF = EF$. Докажите, что $AE = BC$.

Решение.



Пусть K – середина отрезка BF. Тогда DK – средняя линия треугольника ABF. Поэтому $DK \parallel AF$ и $AF = 2DK$. Пусть $BK = KF = x$, $CF = EF = y$. Так как $DK \parallel AF$, то $\angle KDE = \angle FEC$ (соответственные), но $\angle FEC = \angle FCE$ (так как треугольник FCE – равнобедренный), следовательно, $\angle KDE = \angle FCE$, т.е. треугольник DKC – равнобедренный и $DK = CK = x + y$. Тогда $AE = AF - EF = 2DK - y = 2(x + y) - y = 2x + y = BC$.

Критерии.

Приведено полное доказательство – **7 баллов.**