

ИЗДАЕТСЯ С 1992 г.

mat.1september.ru

издательский
дом
1september.ru

май-июнь
2015

МАТЕМАТИКА Подписка на сайте www.1september.ru или по каталогу «Почта России»: 79073 (бумажная версия); 12717 (CD-версия)

ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ДОМ
«ПЕРВОЕ СЕНТЯБРЯ»

Главный редактор:

Артём Соловейчик
(генеральный директор)

Коммерческая деятельность:

Константин Шмарковский
(финансовый директор)

Развитие, IT и координация проектов:

Сергей Островский
(исполнительный директор)

Реклама, конференции и техническое
обеспечение Издательского дома:

Павел Кузнецов

Производство:

Станислав Савельев

Административно-хозяйственное

обеспечение: Андрей Ушков

Педагогический университет:

Валерия Арсланьян
(ректор)

ЖУРНАЛЫ ИЗДАТЕЛЬСКОГО ДОМА:

Английский язык – Е. Богданова,

Библиотека в школе – О. Громова,

Биология – Н. Иванова,

География – А. Митрофанов, и.о.

Дошкольное

образование – Д. Тюттерин,

Здоровье детей – Н. Сёмина,

Информатика – С. Островский,

Искусство – О. Волкова,

История – А. Савельев,

Классное руководство

и воспитание школьников – М. Битянова,

Литература – С. Волков,

Математика – Л. Рослова,

Начальная школа – М. Соловейчик,

Немецкий язык – М. Бузоева,

ОБЖ – А. Митрофанов,

Русский язык – Л. Гончар,

Спорт в школе – О. Леонтьева,

Технология – А. Митрофанов,

Управление школой – Е. Рачевский,

Физика – Н. Козлова,

Французский язык – Г. Чесновицкая,

Химия – О. Блохина,

Школа для родителей – Л. Печатникова,

Школьный психолог – М. Чибисова.

Иллюстрации: фотобанк Shutterstock

На с. 1 и с. 64 — коллажи из иллюстраций,
взятых с сайтов: <http://commons.wikimedia.org>,
<http://www.fromoldbooks.org>,
<http://www.royalmintmuseum.org.uk>,
<http://upload.wikimedia.org>, <http://imgkid.com>,
<http://cudl.lib.cam.ac.uk>, <https://www.flickr.com/>

УЧРЕДИТЕЛЬ:

ООО «ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ДОМ

«ПЕРВОЕ СЕНТЯБРЯ»

Зарегистрировано ПИ №Ф77-58424 от 25.06.14
в Роскомнадзоре

Подписано в печать: по графику 13.03.15,
фактически 13.03.15 Заказ №

Отпечатано в ОАО «Первая Образцовая типография»

филиал «Чеховский печатный двор»

ул. Полиграфистов, д. 1, Московская область,

г. Чехов, 142300; Сайт: www.chpd.ru;

E-mail: sales@chpk.ru; факс: 8(496)726-54-10,

8(495)988-63-76

АДРЕС РЕДАКЦИИ И ИЗДАТЕЛЯ:

ул. Киевская, д. 24, Москва, 121165

Телефон/ факс: (499) 249-3138

Отдел рекламы: (499) 249-9870

Сайт: 1september.ru

[facebook.com/School.of.Digital.Age](https://www.facebook.com/School.of.Digital.Age)

ИЗДАТЕЛЬСКАЯ ПОДПИСКА:

Телефон: (499) 249-4758

ПОДПИСНЫЕ ИНДЕКСЫ:

Почта России: бумажная версия – 79073,

CD-версия – 12717

МАТЕМАТИКА | май–июнь | 2015

ТЕМА НОМЕРА: УРОК ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

В НОМЕРЕ

4

МЕТОДОБЪЕДИНЕНИЕ /
МЕТОДИЧЕСКАЯ КОНСУЛЬТАЦИЯ
Математический практикум
А. Сгибнев, С. Сорокина,
А. Воронцов, Д. Шноль

10

МЕТОДОБЪЕДИНЕНИЕ /
ПРАКТИКУМ
Практические задания
с физическим содержанием
Г. Аджемян

16

МЕТОДОБЪЕДИНЕНИЕ /
НАШ ПРОЕКТ: «РАЗБОР УРОКА»
Тема урока: «Действия
с десятичными дробями»
С. Шумакова, И. Возмилова

24

МЕТОДОБЪЕДИНЕНИЕ /
МЕТОДИЧЕСКИЙ СЕМИНАР
Личностные результаты
освоения ООП
Е. Шмакова

34

ПОСЛЕ УРОКА / НАШ ПРОЕКТ
Итоги конкурса
«Математический потенциал».
Лучшие работы конкурса

41

ПОСЛЕ УРОКА / НА КРУЖКЕ
Об опыте ведения кружков,
или Как увлечь математикой?
А. Забелин

49

ПОСЛЕ УРОКА /
ОЛИМПИАДЫ, КОНКУРСЫ,
ТУРНИРЫ
Турнир Архимеда.
Московская математическая
регата. 7 класс
А. Блинков, А. Банникова,
Н. Наконечный, П. Чулков

54

ПОВЫШЕНИЕ КВАЛИФИКАЦИИ /
ЛЕКТОРИЙ
Решаем неравенства.
С. Шестаков

62

ПОСЛЕ УРОКА /
В КЛАДОВОЙ ГОЛОВОЛОМОК
Оригами «Кубик Рубика»
Н. Авилов

64

В КАБИНЕТЕ МАТЕМАТИКИ /
НА СТЕНД
Тауэр

К материалам, обозначенным этим символом, есть дополнительные материалы в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru

В оформлении номера использованы работы Надежды Хачатрян, Яны Чудиновой и Веры Тирской,
участниц конкурса «Математический потенциал».

ОБЛАЧНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ ОТ ИЗДАТЕЛЬСКОГО ДОМА «ПЕРВОЕ СЕНТЯБРЯ»

УВАЖАЕМЫЕ ПОДПИСЧИКИ БУМАЖНОЙ ВЕРСИИ ЖУРНАЛА!

Дополнительные материалы к номеру и электронная
версия журнала находятся в вашем Личном кабинете
на сайте www.1september.ru

Для доступа к материалам воспользуйтесь,
пожалуйста, кодом доступа, вложенным в № 1.
Срок действия кода с 1 января по 30 июня 2015 года.

Для активации кода:

- Зайдите на сайт www.1september.ru
- Откройте Личный кабинет (зарегистрируйтесь)
- Введите код доступа и выберите свое издание

Справки: podpiska@1september.ru или через службу
поддержки на портале «Первое сентября»

МАТЕМАТИКА. ПЕРВОЕ СЕНТЯБРЯ

Методический журнал для учителей математики

Издается с 1992 г.

Выходит один раз в месяц

РЕДАКЦИЯ:

Главный редактор: Л. Рослова

Отв. секретарь: Т. Черкавская

Редакторы: П. Камаев, О. Макарова, И. Коган

Дизайн макета: И. Лукьянов. Дизайн обложки: Э. Лурье

Корректор: Л. Громова. Верстка: Л. Кукушкина

Распространяется
по подписке

Цена свободная
Тираж 25 000 экз.

Тел. редакции: (499) 249-3460

E-mail: mat@1september.ru

Сайт: mat.1september.ru

ДОКАТИЛИСЬ ДО НУЛЯ!

Л. РОСЛОВА

■ Регионам сейчас дано право понижать минимальный пороговый критерий для выставления положительной отметки по результатам ОГЭ, без каких бы то ни было ограничений. Это привело к тому, что в прошедшем году в одном из регионов этот критерий был снижен до 1 балла. Это означает, что достаточно было решить одну задачу в одно умственное действие, чтобы отчитаться за изучение предмета за всю основную школу. Как говорится, дальше падать некуда — ниже только абсолютный нуль. Что это, как не дискредитация итоговой аттестации! И идеи единого образовательного пространства!

Помнится, что когда только начиналось обновление ГИА, речь зашла о праве регионов понижать рекомендуемый критерий на 1 балл, причем именно в условиях эксперимента. Было понятно, что соблюдение принципа независимости и довольно жестких критериев оценивания может в первое время приводить к неожиданным негативным результатам. И не должны ученики и учителя отдуваться за недостатки всей системы. При этом обсуждалось, что во избежание бесконтрольного (и бессовестного) использования этого права с целью сокрытия истинного положения дел и проблем оно должно компенсироваться обязательствами по выправлению ситуации. Но этого сделано не было. И негативный прогноз сбывся!

Нет, конечно, далеко не во всех регионах есть такие проблемы. Даже по совершенно независимым от нас данным международных исследований российские результаты выросли и по математике, и по естественно-научным дисциплинам. В чем, в частности, есть немалая заслуга введения независимой системы аттестации. Именно благодаря новой системе аттестации во многих регионах ведется вдумчивая системная работа: и проведение организовано честно, и анализ результатов не формально делается, и меры предлагаются, чтобы решить обнаруженные проблемы.

Но что же дальше? И на это есть ответ. Министерство озвучило планы по изменению основных параметров ОГЭ. Они таковы: в 2016 г. остаются обязательными 2 экзамена — русский язык и математика, в 2017 г. к ним добавляются 2 экзамена по выбору + шкалирование результатов переходит на федеральный уровень, с 2018 г. — 3 предмета по выбору, а с 2020 г. — 4 предмета. Это предложения. Они обсуждаются. И есть шанс принять участие в обсуждении. Как говорится, следите за анонсом и не пропустите. Если заинтересованы и хотите оказывать влияние.



А. СГИБНЕВ, С. СОРОКИНА (1),
А. ВОРОНЦОВ, А. СГИБНЕВ (2),
Д. ШНОЛЬ, А. СГИБНЕВ (3),
a.i.sgibnev@gmail.com,
г. Москва

5–6 классы

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ПРАКТИКУМ

Всем известны практикумы по физике, химии и биологии — школьники наблюдают свойства объектов, экспериментируют с ними, анализируют результаты. Можно делать то же самое с математическими объектами — получится математический практикум! Такой практикум разнообразит преподавание, показывает связи математики с жизнью, учит работать руками, а иногда очень помогает усвоить программный материал. В школе-интернате «Интеллектуал» (г. Москва) накоплен некоторый опыт проведения таких работ.

Схематически можно подразделить виды наших математических практикумов так:

5–7-е классы — работа с предметами;

7–9-е классы — работа с геометрическими моделями (программа «Живая геометрия»);

9–11-е классы — работа с численными моделями (Excel).

1. Введение числа π

Лабораторную работу проводим в 6-м классе перед тем, как ввести число π . Оно появляется во многих учебниках внезапно, без обоснования. Школьникам сообщается, что длина любой окружности пропорциональна диаметру с одним и тем же коэффициентом. Дело осложняется тем, что этот коэффициент иррационален и обозначается непонятной буквой (чуть ли не первой греческой буквой в жизни большинства школьников). Потом оказывается, что то же самое число почему-то участвует в формуле площади круга.

Мы вводим число π так:

1. Проводим урок математического практикума, на котором учащиеся самостоятельно экспериментально обнаруживают факт связи длины окружности с ее диаметром и приблизительно находят их отношение.

2. Рассказываем, что если измерять и вычислять все более точно, то это отношение будет стремиться к бесконечной непериодической дроби (доказано в XVIII в.). Эта дробь обозначается π в честь греческого слова περίφερεia (окружность); π равно примерно 3,1415926, для практических нужд обычно хватает 3,14 (к разговору о приближенных значениях дети подготовлены предыдущим практикумом). Сейчас известно более десяти триллионов цифр числа π (разумеется, их нашли не измерениями, а вычислениями).

3. С помощью картинок, мультфильма или модели (<http://www.etudes.ru/ru/models/circlearearectangle/>) наглядно выводится формула площади круга.

4. Школьники решают задачи, связанные с этими формулами.

В 9-м классе факт пропорциональности длины окружности ее диаметру будет доказан более строго, как и формула площади круга. Нам кажется важным, чтобы и в 6–8-х классах учащиеся пользовались этими формулами не просто как «заклинаниями» из учебника, а с пониманием того, откуда они берутся, хотя бы на наглядном уровне.



К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru.



Теперь приведем описание практикума, сделанное наблюдателем на открытом уроке.

Урок-практикум «Число Пи»

Сегодня у шестиклассников на партах нет учебников и тетрадей. Зато у них есть линейки и разные цилиндрические предметы. Учащиеся рассматривают предметы, выложенные у доски (консервная банка, кружки, тубус, скотч (разных диаметров), клеящий карандаш, банка чая, банка с влажными салфетками, колокольчик и др.).

Преподаватель — Алексей Иванович — дает детям задание: измерить диаметр каждой окружности, которую можно найти на этих предметах, и ее длину. Всем раздаются полоски бумаги, линейки и такие таблички:

Фамилия имя 1 _____

Фамилия имя 2 _____

Измеряемый объект	Диаметр (мм)	Длина окружности (мм)	Отношение длины окружности к диаметру («разы»)

(В сильном классе можно последний столбец не подписывать, чтобы школьники сами нашли связь.)

Учащиеся рассаживаются работать в парах. Обычно один человек в паре измеряет, другой записывает результаты. Во время урока они свободно перемещаются по классу, обсуждают свои действия и результаты.

Первый вопрос, который возникает: как же понять, где диаметр, если у этих окружностей не обозначен центр?

Антон (предлагает). Это будет самое длинное расстояние...

Алексей Иванович. Самая длинная из хорд. А как измерить длину окружности?

Антон. Измерить радиус и умножить его на 2 пи!

А.И. Нет, надо измерить непосредственно.

(Тут ученикам игодились полоски бумаги, с помощью которых можно измерить длину. Но не все так просто!)

Юля. А у нас не сходится вокруг банки!

(Но тут же находится решение: так как среди измеряемых предметов есть скотч и клеящий карандаш, то полоски бумаги можно удлинить, склеив между собой.)

Паша. Измеряемый объект — колокольчик! Какой у нас был диаметр?

Антон. Примерно 9,5 см.

А.И. А нестрашно, если у нас все сильно примерно? У кого колокольчик? Мы неправильно измерили диаметр! Паша, записывай: 6 см.

Слава. Алексей Иванович, а как вот эта штука называется?

А.И. Это тубус.

(В процессе экспериментальной работы может случиться всякое: у кого-то диаметр получился больше, чем длина окружности! У кого-то получаются очень длинные десятичные дроби при вычислении отношения длины к диаметру.)

А.И. За сколько знаков после запятой вы отвечаете, когда вычисляете отношение? Сколько знаков надо брать?

Кира. Я бы брала два знака, хотя можно брать и один. Тогда это отношение у нас получается примерно равным трем.

Антон. Получается 3,1 — там большие погрешности измерения.

Слава. Эта деталь гениальна, у нее диаметр ровно 100 мм!

(У кого-то отношение получается равным примерно 3 мм.)

А.И. Отношение уже не в миллиметрах. Это миллиметры, поделенные на миллиметры, то есть разы.

(Некоторые уже догадываются, чему должно равняться это отношение.)

Антон. У нас 3,1 получается, а должно быть больше! Здесь надо мерить с точностью до десятых миллиметра, а я не умею!

Паша. Получается бесконечное число при делении!

Антон. Оно не бесконечно большое, это бесконечно большая десятичная дробь, оно иррациональное!

А.И. Уже почти все предметы измерены? Пора считать все отношения!

Юля. Получилось 3,163529!

А.И. А сколько цифр мы будем брать после запятой?

Юля. Три? Хотя нет, я бы взяла одну, в лучшем случае — две.

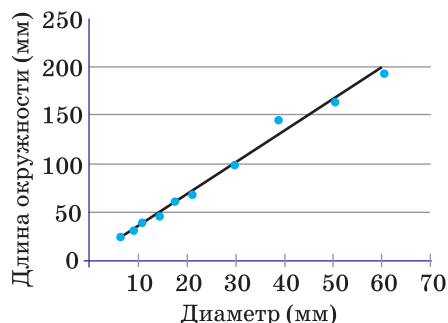
Антон. А я даже делить не буду, так как видно, что $\frac{340}{110} = 3,09$.

А.И. Откуда у тебя девять сотых, если ты не делил?

Антон. Это остаток от деления, то есть $\frac{10}{110}$, а это примерно равно $\frac{9}{100}$.

А.И. А теперь нанесем результаты своих измерений на доску.

(Учащиеся строят график зависимости длины окружности от диаметра. Получается почти прямая линия, хотя есть и отдельные неточности, связанные с погрешностями измерений: точку (37; 149) явно надо выкинуть.)



А.И. Давайте сравним наши результаты. Какие получаются отношения?

Все. Три с чем-то!

А.И. А меньше трех есть?

Все. Нет!

(У одного-двух человек получилось одно из отношений равным 3,00, и еще у кого-то для некоторых объектов получились результаты больше 3,5.)

А.И. У кого хоть раз получилось 3,1 или 3,2?

Все. У нас!

(Тогда учащиеся делают вывод, что раз 3,1 и 3,2 чаще всего встречаются, то для всех окружностей это отношение практически одинаково и оно примерно равно 3,15. Или этот вывод можно сформулировать так: «Отношение длины окружности к ее диаметру не зависит от окружности и примерно равно 3,15».)

Гриша. Мы получили ровно такое отношение!

Антон. И мы тоже!

А.И. Значит, хорошо померили или повезло. А почему такой разброс: есть и 3,0 и есть даже 3,7? С какой точностью мы мерили?

Все. Примерно полмиллиметра!

А.И. Но некоторые, вычисляя отношения, писали результат в виде 3,125893. Почему так делать не надо?

Ефим. А зачем столько цифр?

А.И. Видно, что на графике все точки, за некоторым исключением, хорошо ложатся на прямую линию. А куда дальше эта линия должна попасть?

Все. В ноль!

А.И. Ведь если радиус окружности равен нулю, то и длина ее равна нулю. Дальше про эту прямую и про эту зависимость мы поговорим в следующий раз.

Звонков в школе «Интеллектуал» нет, но 40 минут урока уже истекли, и детям пора на второй

завтрак. О числе пи, и о формулах, связанных с ним, учащиеся узнают на следующем уроке.



2. Построения с помощью листа бумаги

Многие слышали про оригами — японское искусство складывать из цветных листов бумаги красивые цветы и фигурки животных. Но не всем известно, что идеи искусства оригами, перенесенные в математику, дали начало новому разделу геометрии — *оригамике*. В отличие от традиции геометрических построений с помощью циркуля и линейки, введенной древними греками, в оригамике инструментом для построения является сам материал, из которого мы строим, — лист бумаги.

Подробно про оригамику написано в книге ее создателя: *Кадзуо Хага. Оригамика. Геометрические опыты с бумагой.* — М.: МЦНМО, 2012.

А мы предлагаем вам подборку задач для знакомства с этой прекрасной областью геометрии. Для решения понадобятся теорема Пифагора, теорема Фалеса, теорема о медианах (последняя необязательна).

Задачи

Дан квадратный лист бумаги со стороной 1. Сложите его так, чтобы получился:

1) угол $22,5^\circ$;

2) отрезок длиной $\frac{\sqrt{2}}{2}$;

3) отрезок длиной $\frac{\sqrt{5}}{2}$;

4) отрезок длиной $\frac{1}{3}$;

5) отрезок длиной $\frac{1}{\sqrt{5}}$;

6) отрезок длиной $\frac{\sqrt{2}}{3}$;

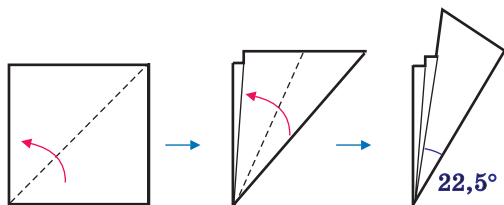
7) угол 30° ;

8) отрезок длиной $\frac{\sqrt{3}}{2}$;

9) угол 75° ;

10) сложите из листа бумаги правильный треугольник;

11) сложите из листа бумаги правильный шестиугольник.



Внимание! В задаче 4 школьники часто предлагают такое решение: разделить лист на три равные части. Оно не засчитывается, поскольку для этого требуется подгонять сгибы методом проб и ошибок, одновременно совмещая две пары прямых — концы листа с линиями перегибов.

Чтобы вы поняли, как вообще можно действовать с листом бумаги, опишем **решение задачи 1**. Заметим, что $22,5^\circ = 90^\circ : 4 = 45^\circ : 2$. Как получить угол 45° ? Берем квадрат и складываем по диагонали, совмещая смежные стороны. Затем перегибаем угол получившегося треугольника по биссектрисе, совмещая его стороны (то есть сторону квадрата с его диагональю).

Указания к задачам

2. $\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}$. 3. $\frac{\sqrt{5}}{2} = \sqrt{?^2 + ?^2}$. 4. *Способ I.*

Разбейте сторону на четыре равные части, возьмите три и воспользуйтесь теоремой Фалеса. *Способ II.* Разбейте квадрат на 16 равных квадратов, проведите диагональ в крайнем прямоугольнике размером 1×3 и продлите ее до конца квадрата. 5. Разбейте сторону на восемь равных частей. 6. Используйте теорему о медианах или поделите на три равные части диагональ квадрата. 7, 8. Постройте прямоугольный треугольник с гипотенузой 1 и катетом $\frac{1}{2}$. 9. $75^\circ = 90^\circ - \frac{30^\circ}{2}$. 10. Используйте дважды построение из задач 7 и 8. 11. Можно использовать правильный треугольник или откладывать дважды углы по 60° .

Замечания для учителя

Эта подборка пригодится в конце 8-го класса в качестве повторения и обобщения материала, когда полезно применить знания в новой ситуации или сменить вид деятельности.

Вместе с заданиями школьникам надо выдать по несколько квадратных листков.

Для несильных школьников можно дать несколько «разминочных» задач, например, построить угол 45° , построить отрезок длиной $\sqrt{2}$ и т.д.

Наоборот, для сильных школьников можно ограничить количество перегибов для некоторых задач. Например, в задачах 4, 6 и 10 можно обойтись всего тремя перегибами, а в задачах 7–9 — двумя. Такое ограничение тренирует

школьников оптимизировать решения, убирая лишние шаги.

Также с сильными школьниками полезно в явном виде сформулировать разрешенные операции. Сгибы появляются в результате следующих операций:

- а) совмещение двух прямых (отрезков);
- б) помещение точки на отрезок;
- в) совмещение двух точек;
- г) также разрешается делать перегиб, соединяющий две отмеченные точки.

Серьезной исследовательской задачей является описание класса построений, которые можно сделать с помощью таких перегибаний, имея изначально данный отрезок длиной 1.

3. Как подвести школьников к формуле биномиального распределения

Предлагаем вниманию читателей математический практикум по теории вероятностей. Идея состоит в том, чтобы быстро и наглядно набрать большую статистику за счет количества учеников в классе.

Один из сложных вопросов, присутствующих в школьной программе, — это распределение Бернулли (9-й класс). Вывод этой формулы «всухую» легко могут одолеть только школьники, склонные к теоретическому мышлению. Большинству до вывода формулы будет полезно проделать руками предлагаемые подготовительные задания. Дело в том, что задача о биномиальном распределении сложна не только техническим выводом формулы, но и количеством параметров в самой задаче: в каждом испытании может быть сложное условие успеха, надо фиксировать общее количество успехов, но только внутри каждой серии, а серии повторяются. Подобная лабораторная работа от простого задания к сложному, «проделанная руками», позволяет «прочувствовать» постановку задачи, ее практический смысл, получить навык вычисления значений, понятие о выборке (если серий будет проведено мало, то значения, полученные практически, окажутся далеки от расчетных).

Итак, каждому школьнику выдается одна или несколько монет. На столе перед доской лежат «стикеры» — узкие клейкие полоски бумаги. На доске внизу в ряд написаны числа: 0, 1, 2, 3, 4, 5.

Задание 1. Подбросить монету пять раз (или пять монет подбросить по разу) и посчитать, сколько орлов выпадет.

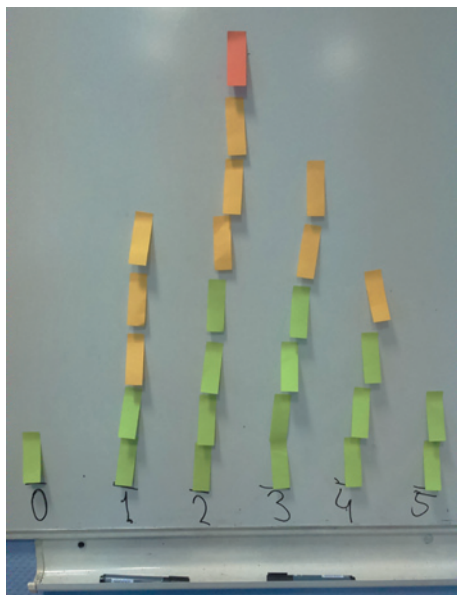
Серия испытаний = {пять подбрасываний монеты}.

Успех = {выпадение орла}.

Это количество успехов надо отметить стикером на доске. Например, если выпало три орла, наклеиваем стикер над числом «3». Затем процедура повторяется, всего надо произвести 8–10 серий. Следующий стикер наклеивается над предыдущим.

Замечание. Удобнее, чтобы школьник сначала провел все серии испытаний, фиксируя результаты, а затем уже наклеил стикеры. Также удобно работать в паре: один школьник бросает монеты, другой записывает результат.

В результате на доске получится наглядная диаграмма распределения количества орлов в сериях из пяти испытаний.



Коллективно подсчитываем количество стикеров в каждом столбце и заполняем таблицу 1. Считаем долю, которую число стикеров в каждом столбике составляет от общего количества.

Например.

Посмотрев на картинку и на эти числа, заметим, что столбики довольно симметричны относительно середины. Этого можно было ожидать: если монеты честные, то, скажем, один орел или четыре орла (то есть одна решка) должны выпадать одинаково часто.

Здесь уместно обсудить и другие вопросы. Почему мы переводим доли из записи типа $\frac{5}{197}$

в десятичные дроби. (Удобнее сравнивать значения.) Почему мы десятичные записи не оставляем в виде 0,0253807..., а округляем. (Десятичные и далее не несут для нас практически никакой информации, а только загромождают запись.)

Далее спросим себя, а как **рассчитать** вероятности в этих испытаниях?

Вероятность выпадения орла при подбрасывании одной монеты равна $\frac{1}{2}$, у решки такая же. Вероятность того, что не выпадет ни одного орла за пять бросков, равна

$$p_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32} \approx 0,031.$$

Вероятность того, что **первым** выпадет орел, а остальные решки, равна

$$\left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = p_0.$$

Такие же вероятности имеют варианты выпадения орла на 2, 3, 4 или 5-м месте. Это означает, что вероятность выкинуть одного орла в серии из пяти испытаний (на любом месте) равна

$$p_1 = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{32} \approx 0,156.$$

Таблица 1

Количество орлов в серии	0	1	2	3	4	5	Всего
Количество серий	5	32	62	65	30	3	197
Доля таких серий, округленно	0,025	0,162	0,315	0,33	0,152	0,015	1

Таблица 2

Вероятность	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
Формула	$C_5^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^5$	$C_5^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^4$	$C_5^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3$	$C_5^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2$	$C_5^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^1$	$C_5^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^0$
Приблизительное значение	0,031	0,156	0,312	0,312	0,156	0,031

Таблица 3

Вероятность	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
Формула	$C_5^0 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^0 \left(\frac{1}{4}\right)^5$	$C_5^1 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^1 \left(\frac{1}{4}\right)^4$	$C_5^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right)^3$	$C_5^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 \left(\frac{1}{4}\right)^2$	$C_5^4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4 \left(\frac{1}{4}\right)^1$	$C_5^5 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^5 \left(\frac{1}{4}\right)^0$
Приблизительное значение	0,001	0,015	0,088	0,264	0,396	0,237

Далее, найдем вероятность выкинуть двух орлов в серии. Вероятность того, что орлы будут на первых двух местах, равна

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2^5}.$$

Теперь надо понять, сколькими способами на пяти местах могут встать два орла. Это C_5^2 . Значит,

$$p_2 = C_5^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{10}{32} \approx 0,312.$$

Заметим, что число 5 при подсчете p_1 трактуется как C_5^1 .

Продолжая дальше, получаем таблицу 2 (зачем мы так громоздко записали формулы, станет ясно из дальнейшего).

Кстати, замечу, что чем больше школьники наклеивают стикеров, тем ближе становятся экспериментально полученные доли к рассчитанным по формулам. (Можно в какие-то моменты менять цвета стикеров — тогда легче увидеть «динамику».)

Задание 2. Подбросить пару монет пять раз и посчитать, сколько раз в паре выпадет хотя бы один орел.

Серия испытаний = {пять подбрасываний пары монет}.

Успех = {выпадение хотя бы одного орла в паре}.

Такую серию испытаний надо повторить 8–10 раз, далее отметить на доске результаты с помощью стикеров.

Получится несимметричная картина: «горб» явно смещен вправо. Понятно, что хотя бы одного орла в паре выбросить легче, чем ни одного. Составляем таблицу, аналогичную таблице 1.

Давайте рассчитаем вероятности успеха. Успеху соответствует выпадение ОО, ОР, РО. Неудаче — только РР. Поэтому вероятность успеха

равна $\frac{3}{4}$, а неудачи $\frac{1}{4}$. Составим таблицу 3, аналогичную таблице 2.

Теперь можно сформулировать задачу в общем случае.

Проводится серия из n испытаний. Вероятность успеха в каждом испытании p , вероятность неудачи $q = 1 - p$. Какова вероятность того, что в серии произойдет k успехов?

Если школьники вникли в происходящее до этого, то они ответят:

$$C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}.$$

В более слабом классе можно ограничиться формулировкой для p и q с конкретными значениями n и k . Можно также до вывода общей формулы добавить еще несколько промежуточных заданий. Например, рассмотреть серии из 7 бросков или подбрасывать игральный кубик и считать успехом выпадение 1 или 2, а неудачей — выпадение любого из остальных чисел.

По этой же схеме (коллективный набор статистики, вывод формулы в частных случаях, сравнение результатов, общая формула) можно организовать еще несколько лабораторных работ по теории вероятностей. Например, в 5–7-х классах можно бросать игральные кубики. Сначала бросаем один кубик и наблюдаем распределение результатов от 1 до 6. Чем больше испытаний проведено, тем равномернее становятся «столбики». Затем бросаем пару кубиков и считаем сумму от 2 до 12, строим диаграмму, обсуждаем ее симметричность. Считаем доли, соответствующие каждой сумме. Выводим теоретическое распределение и сравниваем значения.

Более «игровая» реализация биномиального распределения описана в статье: Щетников А.И. «Живая» доска Гальтона. [Электронный ресурс] // Полином, 2009, № 4, с. 77–78. URL: <http://www.mathedu.ru/polinom/polinom2009-4-veiw.pdf>

ФОТО НА КОНКУРС

**Вашему вниманию представляется...
наглядное пособие, сделанное своими руками.**

Автор: Татьяна Васильевна Дейтес,
средняя школа № 5, г. Ишим, Тюменская обл.



Г. АДЖЕМЯН,
adzhemyan@i.home-edu.ru,
г. Москва

5–6 классы

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ С ФИЗИЧЕСКИМ СОДЕРЖАНИЕМ

■ Эффективность учебной деятельности, в которой развиваются универсальные учебные действия обучающихся, в 5–6-м классе во многом зависит от степени познавательной активности учащихся на уроках математики. Необходимо разработать разнообразные задания, которые активизировали бы процесс формирования универсальных учебных действий школьников. Для решения этой проблемы учащимся можно предложить практические задания с физическим содержанием, которые будут нацеливать учащихся на выполнение различных видов деятельности, формируя тем самым умение действовать в соответствии с поставленной целью. Важно, чтобы содержание работ было увлекательным и приводило подростков к осмысленному переносу знаний в типовые ситуации, учило анализировать события, явления, факты, формировало такие приемы и методы познавательной деятельности, которые способствовали бы развитию внутренних мотивов познания и создавали условия для развития мыслительной активности школьников и успешного формирования универсальных учебных действий.

Практические задания с физическим содержанием преследуют цели:

- развивать абстрактное и логическое мышление;
- формировать универсальные учебные действия в совместной познавательной деятельности.

Акцент сделан на упражнениях, развивающих «геометрическую зоркость», интуицию и воображение учащихся. Их выполнение доступно всем обучающимся.

Выполнение практических работ позволяет реализовать метод проектов (развивает исследовательские и творческие способности учащихся); монологический, диалогический, объяснительно-иллюстративный методы; методы демонстрации и наблюдения.

Для активизации деятельности учащихся при выполнении практических работ выбраны задания с проблемными ситуациями, новые понятия вводятся с помощью наглядных иллюстраций, чертежей и т.п.

В результате выполнения практических работ учащиеся узнают о применении математики для анализа физических явлений, знакомятся с объемными и плоскими геометрическими фигурами, учатся распознавать их на изображениях и среди предметов окружающего мира, изготавливают модели объемных тел как на компьютере, так и вручную; знакомятся с правильными многогранниками.



К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru.

10

МАТЕМАТИКА | май–июнь | 2015

При выполнении практических заданий в группе на смену пассивному усвоению знаний приходит их активный поиск во взаимодействии с одноклассниками, и даже учащиеся, не готовые к полному усвоению предлагаемых математических фактов, достаточно уверенно чувствуют себя в приведении собственных примеров, в работе над измерениями, чертежами. Согласовывая и обсуждая между собой выполнение заданий, они имеют возможность трансформировать решения, сопровождать их новыми надписями, чертежами и т.п. Все происходящее является отличной предпосылкой для формирования и развития составляющих универсальных учебных действий.

Работа в группах помогает ребятам сдружиться и перенести навыки сотрудничества не только на учебную деятельность, но и на внеучебные отношения: дружбу вне урока, класса, школы.

Разумеется, перечислить в одной статье все формы и методы подачи материала для формирования всех видов универсальных учебных действий при выполнении практических заданий с физическим содержанием невозможно, так как диапазон описания и применения педагогических технологий на уроках математики широк. Основное условие — это наполнение учебного процесса новым содержанием, отвечающим требованиям сегодняшнего дня.

Работа учащихся организуется так, чтобы способ решения был сначала описан словесно, а затем зафиксирован в виде вычислений или модели, графической или знаковой.

Форма организации занятий является дополнительной мотивацией к обучению и социализации детей.

Эти работы можно провести как на уроке, так и во внеурочное время. Организуя практические занятия, учитель перед началом изучения темы размещает на стенде «Информация к уроку» список практических работ, которые будут проводиться учащимися в классе; вывешивает инструкции по их проведению и выполнению и, конечно, образцы выполнения работ.

Учащиеся выполняют практические работы под руководством учителя в соответствии с содержанием изучаемого учебного материала или дополнительного материала для интеллектуального и творческого развития. Важным элементом практической работы является инструктаж, проводимый учителем, во время которого учащимся предъявляются: *цель работы; порядок ее выполнения; задания и контрольные вопросы.*

Объем заданий для практических работ спланирован с расчетом, чтобы за урок учащиеся смогли качественно с ними справиться.

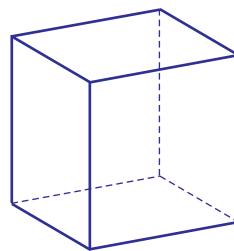
При оценивании практических работ нужно учитывать то, насколько верно учащиеся ответили на поставленные вопросы, соблюдали порядок выполнения работы, выбрали рациональный способ вычислений, сделали выводы, ответили на контрольные вопросы и т.п.

Сначала проверка выполнения заданий организуется внутри групп самими учащимися по общей схеме (оформление, ответы на поставленные вопросы, вычисления, заполнение таблицы, выводы, ответы на контрольные вопросы и т.п.). Затем отбираются 2–3 работы (в зависимости от количества групп) с учетом правильности решения, оригинальности оформления и глубины аналитической проработки материала. Выступающие сканируют свои работы для демонстрации на интерактивной доске, рассказывают и показывают решения. Это позволяет не только «разговорить» учащихся, но и научить слушать своего товарища. После проведения анализа выполненной работы, сравнения и обсуждения полученных результатов, анализа типичных ошибок учитель совместно с учениками оценивает выступающих по пятибалльной шкале. Неудовлетворительные оценки не ставятся.

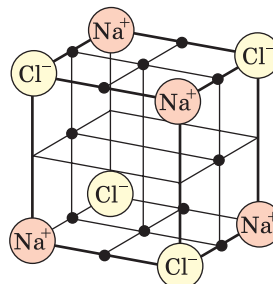
Приведем пример практической работы с физическим содержанием, предлагаемой учащимся 6-х классов при изучении темы «Куб и прямоугольный параллелепипед».

Практическая работа «В гостях у гексаэдра»

Молекулы некоторых веществ имеют форму *гексаэдра* или *куба*.



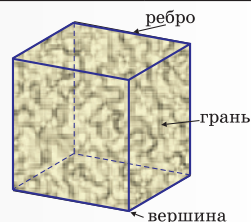
Например, модель молекулы поваренной соли (NaCl) — это шестигранник, в вершинах которого находятся ионы натрия (Na^+) и хлора (Cl^-).



Познакомимся с гексаэдром и его элементами.

1. Изображение гексаэдра

Внимательно рассмотрите изображение гексаэдра и сосчитайте число его граней, вершин и ребер. Результаты занесите в таблицу.



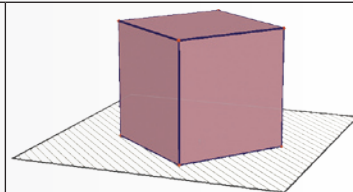
Название многогранника	Форма граней (нарисуйте)	Количество		
		граней	вершин	ребер

Правильность своих подсчетов проверьте с помощью формулы Эйлера:
число граней + число вершин – число ребер = 2 _____

2. Рисунок гексаэдра

Ответьте на вопросы, заполняя колонку ответов.

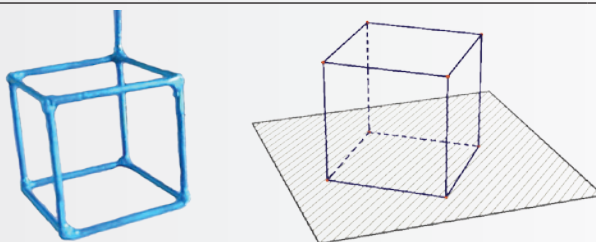
Грань гексаэдра называется видимой, если видны полностью все четыре ребра, принадлежащих этой грани!



Вопрос	Ответ
Сколько граней гексаэдра видимы на рисунке?	
Сколько граней гексаэдра не видимы на рисунке?	

3. Каркасная модель и чертеж гексаэдра

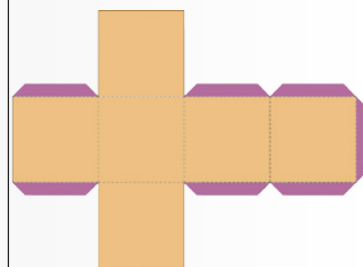
Ответьте на вопросы, заполняя колонку ответов.



Вопрос	Ответ
Сколько ребер выходит из одной вершины гексаэдра?	
Сколько граней имеют общую точку в одной вершине гексаэдра? Сосчитайте на каркасной модели гексаэдра количество вершин, в которых сходятся: а) и видимые, и невидимые ребра; б) только видимые ребра; в) только невидимые ребра.	

4. Работа с разверткой

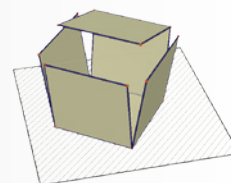
Вырежьте развертку гексаэдра (куба) по контуру, сложите по пунктирным линиям и склейте модель многогранника.



5. Разрезаем гексаэдр

Ответьте на вопросы, заполняя колонку ответов

Грань гексаэдра называется видимой, если видны полностью все четыре ребра, принадлежащих этой грани!



Вопрос

Ответ

Сосчитайте, сколько на рисунке разрезанного гексаэдра:

а) видимых граней; б) невидимых граней.

Каждая грань гексаэдра — квадрат.

Сосчитайте на рисунке разрезанного гексаэдра:

а) все видимые стороны граней;

б) все невидимые стороны граней;

в) вершины, из которых выходит четыре отрезка, принадлежащих разным граням;

г) вершины, из которых выходит два отрезка, принадлежащих разным граням.

Проверьте, выполняется ли для разрезанного куба формула Эйлера? _____.

В практических работах для 5–6-х классов особое место занимает изготовление физических моделей по готовым чертежам как на компьютере, так и вручную, что способствует получению учащимися более прочных знаний и умений применять теоретический материал на практике. Самодельные модели и приборы могут быть использованы при введении новых понятий, решении задач, выполнении практических и проектных работ и т.п.

Особый интерес представляет совместная деятельность учащихся 5–6-х классов при выполнении межпредметных проектных работ, раскрывающих связи геометрии и физики. Приведем пример проекта-задания «Точка Ферма».

Точка Ферма

Исследуя «замечательные точки треугольника» в динамической компьютерной среде «Живая математика» в 6-м классе, учащиеся обнаружили интересный факт: выбирая разные точки внутри треугольника и двигая их, они увидели, что сумма расстояний от этих точек до вершин треугольника в некоторых случаях уменьшается. Была выдвинута гипотеза, что среди этих точек может быть точка, сумма расстояний от которой до вершин треугольника является минимальной.

Оказалось, что этим вопросом интересовались выдающиеся ученые еще в XVII веке и название этой точки треугольника связано с их именами.

Впервые о ней упоминается в работах французского математика Пьера Ферма, который решал задачу о местоположении в треугольнике ABC такой точки F , чтобы сумма ее расстояний до вершин была минимальной.

А построил эту точку треугольника итальянский ученый Эванджелист Торричелли, известный как изобретатель ртутного барометра.

Определение. Точкой Ферма называется такая точка треугольника, сумма расстояний от которой до вершин треугольника является минимальной.

Одним из интересных свойств точки Ферма является то, что каждая сторона треугольника видна из нее под углом 120° .

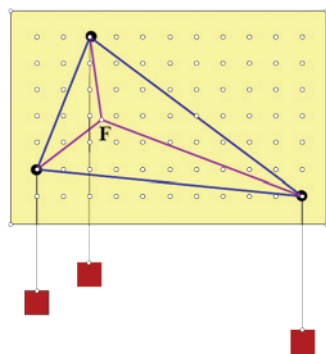
В данной работе удалось показать связь математики с физикой, увидеть применение этого математического факта. А именно: если на тело действуют три одинаковые силы и они уравновешивают друг друга, то углы между линиями, вдоль которых действуют эти силы, составляют 120° . Это и было использовано для построения модели, которая позволяла практически путем найти точку Ферма для любого треугольника.

Физическая модель точки Ферма

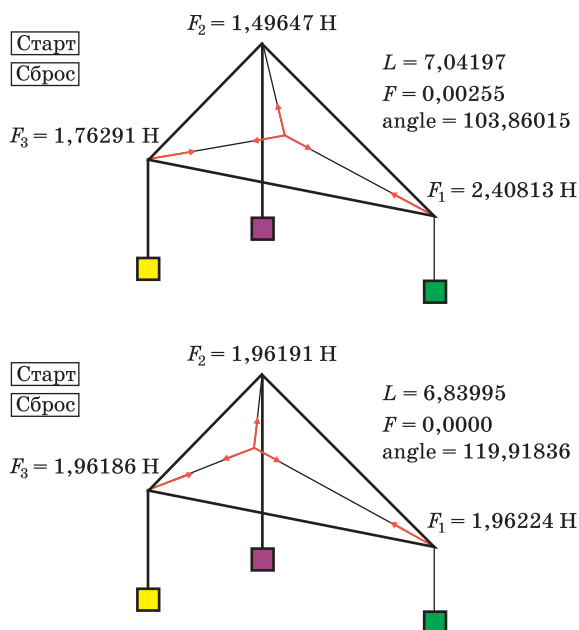
Суть модели в следующем: в отверстия доски плотно вставлены штырьки с блоками так, что их можно свободно переставить в любое другое отверстие доски. Эти штырьки являются вершинами треугольника. Стороны треугольника показываем с помощью резинового шнура, который натягиваем на эти штырьки. Использование доски, штырьков и шнура позволяет легко изменять вид треугольника. Через каждый блок перекидываем прочную, нерастяжимую нить с одинаковыми грузами на конце. Свободные концы нитей связываем в один узел. Когда грузы будут отпущены, они натянут нити и на этот узел со стороны нитей с грузами будут действовать силы натяже-

ния нитей. После того, как эти силы уравновесят друг друга, узел установится в искомой точке.

Измерив углы между нитями, можно убедиться в том, что каждый из них равен 120° (это можно сделать, приставив к нашей модели диск из оргстекла, где начерчены лучи, исходящие из одной точки и образующие между собой углы в 120°). Таким образом, каждая сторона треугольника из полученной нами точки видна под углом 120° , а этим свойством обладает точка Ферма. Отметим фломастером на модели ее местоположение для данного треугольника.



Экспериментальное доказательство этого факта ученики наблюдали и в компьютерной среде «Живая Физика».

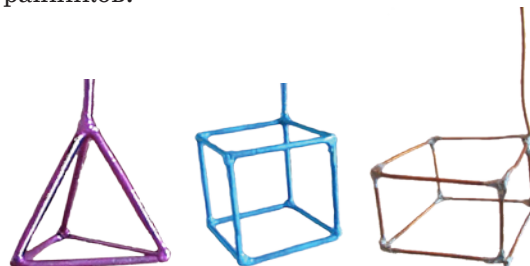


В данной динамической среде была создана аналогичная физическая модель приводя ее в движение, ученики могли проследить за изменениями величин сил и углов между линиями, вдоль которых действуют эти силы.

Очень интересно наблюдать за точкой Ферма в пространственных телах, где мыльные пленки стремятся сократиться до наименьших возможных размеров. Этим объясняется и шарообразная

форма мыльных пузырей. Желаящие могут прочитать книгу: Гегузин Я.Е. Пузыри. — М.: Наука, 1985. — (Библиотечка «Квант». Вып. 46).

Для проведения эксперимента нужно изготовить из тонкой и хорошо гнущейся проволоки каркасные модели правильного тетраэдра, куба, прямоугольного параллелепипеда и других многогранников.



В качестве примера рассмотрим каркасную модель тетраэдра.

Окунем эту модель в мыльный раствор и, осторожно вынимая ее из раствора, наблюдаем за передвижением мыльных пленок. (Приготовить мыльный раствор можно так: развести 1 часть какого-либо моющего средства в 10 частях холодной воды. Температура раствора имеет значение — из холодного раствора пленки получаются более стойкими.)

Пленки стремятся образовать поверхность наименьшей площади, а так как все грани тетраэдра равны, то силы поверхностного натяжения пленок могут «уравновесить» друг друга лишь в том случае, когда углы, под которыми они пересекаются, равны между собой. После установления равновесия в правильном тетраэдре можно увидеть точку пересечения сил натяжения.

Это явление поражает своей красотой. Попробуйте и вы построить аналогичные модели и понаблюдать за удивительным явлением в мыльных пленках.

Думается, что выполнение практических работ с физическим содержанием, независимо от формы организации (в группе, на уроке или внеурочно), поможет формированию универсальных учебных действий у учащихся, станет основой в их дальнейшей исследовательской и проектной деятельности и будет способствовать достижению высоких творческих результатов на городских выставках и конкурсах.

Литература

1. Границкая А.С. Научить думать и действовать: Адаптивная система обучения в школе: Кн. для учителя. — М.: Просвещение, 1991.
2. Иванова Е.Г. Методика обучения в сотрудничестве на начальном этапе средней общеобразовательной школы: Автореф. дис. канд. пед. наук. — М., 2003.

Продолжается прием заявок на 2015/16 учебный год

Фестиваль педагогических идей «Открытый урок» *festival.1september.ru*

Свидетельство о регистрации СМИ Эл. № ФС77-53231

В течение 12 лет – самый массовый, представительный и посещаемый педагогический форум Рунета. Самая большая коллекция авторских разработок учителей.

Разместить публикацию может каждый педагог. Всем авторам предоставляются документы о публикации. По итогам каждого учебного года выпускаются электронные и бумажные сборники.

В рамках фестиваля для желающих проводится конкурс презентаций. Всем участникам конкурса высылаются специальные дипломы.

Удобный Личный кабинет участника фестиваля, возможность автоматического создания личного профессионального портфолио. В помощь участникам – квалифицированные сотрудники оргкомитета. Единственный в России образовательный сайт, имеющий службу поддержки в режиме on-line 7 дней в неделю.



**Участвуйте в фестивале, размещайте свои работы,
получайте документы о публикации!**

Фестиваль творческих и исследовательских работ учащихся «Портфолио ученика» *project.1september.ru*

Свидетельство о регистрации СМИ Эл. № ФС77-53211

Площадка для публикации работ учащихся, выполненных под руководством педагогов.

Всем ученикам и педагогам предоставляются документы о публикации. По итогам каждого учебного года выпускаются электронные и бумажные сборники.

В рамках фестиваля для желающих проводится конкурс проектных работ.

Все участники конкурса награждаются специальными дипломами.



Участвуйте вместе с учениками!

Действия с десятичными дробями

Шумакова Светлана Валерьевна,
учитель математики,
Возмилова Ирина Сергеевна,
учитель математики,
МАОУ гимназия №18, г. Томск.

АКТУАЛИЗАЦИЯ

- ❖ Сформулируйте правило сложения и вычитания десятичных дробей.
- ❖ Сформулируйте правило умножения десятичных дробей.
- ❖ Сформулируйте правило деления десятичных дробей.

АКТУАЛИЗАЦИЯ

- ❖ Как умножить десятичные дроби: 100; 1000 и т.д.
- ❖ Как умножить десятичные дроби: 0,01; и т.д.
- ❖ Как разделить десятичные дроби: 100; 1000 и т.д.
- ❖ Как разделить десятичные дроби: 0,01 и т.д.

Фрагмент презентации публикуется
в авторской редакции

Сегодня в рубрике «Разбор урока»
мы обсуждаем урок в 5-м классе.

Урок проводят учителя
математики и информатики
Ирина Сергеевна ВОЗМИЛОВА и
Светлана Валерьевна ШУМАКОВА,
г. Томск

Урок обсуждают: главный редактор
журнала «Математика»

Лариса Олеговна РОСЛОВА,
редакторы — Петр Михайлович КАМАЕВ и
Ольга Васильевна МАКАРОВА

5 класс

ТЕМА УРОКА: «ДЕЙСТВИЯ С ДЕСЯТИЧНЫМИ ДРОБЯМИ»

Цели урока:

- образовательные: актуализация правил сложения, вычитания, умножения и деления десятичных дробей, определение роли, которую играет положение запятой в записи десятичного числа;
- развивающие: создание условий для развития интереса к предмету, развития математического мышления, умения анализировать, сравнивать, оценивать свою деятельность, умения быстро мыслить и быть внимательным.
- воспитательные: формирование навыка аккуратной записи десятичных дробей, воспитание дружеских взаимоотношений в классе и умения работать в коллективе.

Вид урока: обобщение и систематизация знаний.

Оборудование урока: компьютер, мультимедийный проектор, экран, презентация, раздаточный материал (карточки с заданиями).

Используемые технологии: здоровьесберегающая, дифференцированного подхода, развивающего обучения, парной и групповой деятельности, самодиагностики и самокоррекции результатов обучения.

Ход урока

Вступительное слово учителя. Решение задач — практическое искусство, которое требует напряжения ума, воспитывает упорство, развивает любознательность, смекалку. Перечисленные



К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru
(Презентация в авторской редакции)

16

МАТЕМАТИКА | май–июнь | 2015

ИЗАЦИЯ

гичную дробь на 10;

гичную дробь на 0,1;

гичную дробь на 10;

гичную дробь на 0,1;

Найди ошибку

$$8,5 + 2 = 8,7$$



10,5

$$0,52 - 0,3 = 0,22$$



$$0,1 - 0,003 = 0,07$$



0,097

$$0,006 : 10 = 0,06$$



0,0006

$$0,5 * 0,4 = 0,2$$



Вставить вместо многоточия число

$$1) 0,3 + 0,7 = 1$$

Проверка

$$2) 0,2 \cdot 5 = 1$$

!

$$3) 1,4 - 0,4 = 1$$

$$4) 1,35 : 1,35 = 1$$

$$5) 2 \cdot 0,5 = 1$$

качества необходимы человеку, ведь как говорится в известной поговорке: «Без труда не выловишь и рыбку из пруда». Сегодня мы заканчиваем изучение десятичных дробей. На предыдущих занятиях вы уже многому научились, и завершающий урок мы посвятим всем действиям с десятичными дробями.

Фрагмент мультфильма (слайд 2)

Всем известно, какое большое значение имеет запятая на письме. Но задумывались ли вы, ребята, как велика роль этого маленького знака — запятой — в математике? Оказывается, мы часто недооцениваем запятую, относимся к ней пренебрежительно. В то же время знание того, где, когда и как правильно ее использовать, помогает нам избежать множества неприятностей. И сегодня, выполняя задания с десятичными дробями, мы в этом убедимся.

Итак, ребята, какие цели урока мы для себя определим? (Слайд 3)

Актуализация опорных знаний

Фронтальный опрос (слайды 4, 5)

- Сформулируйте правило сложения и вычитания десятичных дробей.
- Сформулируйте правило умножения десятичных дробей.
- Сформулируйте правило деления десятичных дробей.

Устная работа «Думай и рассуждай» (слайды 7–10)

1. Найдите ошибку:

- а) $8,5 + 2 = 8,7$; б) $0,52 - 0,3 = 0,22$;
- в) $0,1 - 0,003 = 0,07$; г) $0,006 : 10 = 0,06$;
- д) $0,5 \cdot 0,4 = 0,2$.

2. Вставьте вместо многоточия число так, чтобы равенство стало верным:

- а) $0,3 + \dots = 1$; б) $0,2 \cdot \dots = 1$;
- в) $1,4 - \dots = 1$; г) $\dots : 1,35 = 1$;
- д) $\dots \cdot 0,5 = 1$.

3. Вставьте пропущенные в двузначных числах запятые так, чтобы равенство стало верным:

- а) $34 + 26 = 6$; б) $4 + 207 = 6,07$;
- в) $53 + 16 = 21,3$; г) $847 - 347 = 5$;
- д) $74 - 38 = 7,02$; е) $68 - 5 = 1,8$.

4. Три пары спортсменов при выступлении показали приблизительно равные результаты: 36,7; 36,716; 36,71. Определите, как распределились их места.

Групповая работа

Решение задач по группам и уровню сложности (слайды 12–15)

Задача 1. В каждом государстве имеется своя денежная единица. В России — это 1 рубль, в США — 1 доллар. Люди часто используют более мелкие единицы: 1 копейку (0,01 рубля), 1 цент (0,01 доллара). При переезде из государства в государство часто приходится обменивать деньги. Сейчас 1 доллар США наши банки оценивают в 62,45 рубля. Сколько российских денег надо заплатить за 10? 100? 1000 долларов? Планшет стоит 120 долларов. Какова его цена в рублях?

Задача 2. Три неразлучных друга — Ваня, Коля и Петя — решили узнать свой вес. Но шкала весов до 35 килограммов была повреждена и показания на ней прочитать не представлялось возможным. Поэтому Ваня взвесился сначала с Колей, получилось 62,4 кг; затем с Петей, получилось 57,5 кг; затем взвесились все вместе, и получили 96,7 кг. Какова масса каждого из них в отдельности?

Решение. 1) $96,7 - 62,4 = 34,3$ кг весит Петя;
2) $96,7 - 57,5 = 39,2$ кг весит Коля;
3) $62,4 - 39,2 = 23,2$ кг весит Ваня.

Задача 3. Валя, Нина и Наташа зашли в магазин и решили купить шоколадку стоимостью 35 рублей. У Вали и Нины было 30,6 руб., у Вали и Наташи — 23,8 руб., а у Нины и Наташи — 19,6 руб. Хватит ли девочкам денег на шоколадку? Сколько денег было у каждой?

РАССТАВЬТЕ ПРАВИЛЬНО ЗАПЯТЫЕ:

- 1) $34 + 26 = 6$ $3,4 + 2,6 = 6$
- 2) $4 + 207 = 6,07$ $4 + 2,07 = 6,07$
- 3) $53 + 16 = 21,3$ $5,3 + 16 = 21,3$
- 4) $847 - 347 = 5$ $8,47 - 3,47 = 5$
- 5) $74 - 38 = 7,02$ $7,4 - 0,38 = 7,02$
- 6) $68 - 5 = 1,8$ $6,8 - 5 = 1,8$



2м- 36,71



1м -36,716



3м - 36,7

Три пары спортсменов при выступлении показали приблизительно равные результаты: 36,7; 36,716; 36,71 определите, как распределились их места.

Задача

В каждом государстве есть своя денежная единица. В России это один рубль, в Украине — гривна, в Беларуси — белорусский рубль. Люди часто используют более мелкие денежные единицы: копейку (0,01 рубль), 1 цент (0,01 доллара). Переезжая из государства в другое, приходится обменивать деньги. Сейчас за 1 доллар США на территории России приходится обменивать 62 рубля. Сколько российских денег нужно, чтобы купить 100, 1000 долларов? Сколько будет стоить планшета, который в Америке он стоит 120 долларов?

Решение. 1) $30,6 + 23,8 + 19,6 = 74$ руб. — удвоенная сумма денег у девочек;

2) $74 : 2 = 37$ руб. — было всего денег у девочек;

3) $37 - 30,6 = 6,4$ руб. — у Наташи;

4) $37 - 23,8 = 13,2$ руб. — у Нины;

5) $37 - 19,6 = 17,4$ руб. — у Вали.

Задача 4. Из двух пунктов, расстояние между которыми 50 км, выехали одновременно навстречу друг другу два всадника. Скорость одного 10,6 км/ч, а скорость другого 14,4 км/ч. Вместе с первым всадником выбежала собака, скорость которой 18,2 км/ч. Встретив второго всадника, она повернула назад; добежав до первого всадника, она снова повернула назад, и так бегала до тех пор, пока всадники не встретились. Какое расстояние пробежала собака?

Решение.

При необходимости можно задать вопросы.

1. Как можно найти расстояние, которое пробежала собака?

[Умножить ее скорость на время бега.]

2. Как найти время, которое собака находилась в движении?

[Оно равно времени движения всадников до встречи.]

3. Как найти время движения всадников до встречи?

[Нужно расстояние, которое они проехали до встречи, разделить на скорость их сближения.]

1) $10,6 + 14,4 = 25$ км/ч — скорость сближения всадников;

2) $50 : 25 = 2$ ч — время до встречи;

3) $18,2 \cdot 2 = 36,4$ км — пробежит собака.

Представление результатов групповой работы

Физкультминутка (слайд 16)

Вверх рука и вниз рука.

Потянули их слегка.

Быстро поменяли руки!

Нам сегодня не до скуки.

Приседание с хлопками:

Вниз — хлопок и вверх — хлопок.

Ноги, руки разминаем:

Точно знаем — будет прок;

Разминаем шею...

Стой!

И на месте мы шагаем,

Ноги выше поднимаем.

Потянулись, растянулись

Вверх, и в стороны, и вперед.

И за парты все вернулись —

Вновь урок у нас идет.

Самостоятельная работа с последующей взаимопроверкой

(слайды 17, 18)

Вариант I

Вычислите (1–4).

1. $4,25 \cdot 0,16$.

2. $600 - (8,671 - 2,271) \cdot 2,05 - 7,68$.

3. $173,8 : 10$. 4. $8,4 : 21$.

Вариант II

Вычислите (1–4).

1. $2,25 \cdot 0,32$.

2. $500 - 5,32 + 3,05 \cdot (9,438 - 5,238)$.

3. $18,46 : 10$. 4. $6,4 : 8$.

Итог урока

Значение десятичных дробей в жизни людей огромно. В каких областях они нужны?

(Ответы учащихся: когда строят дома, лечат людей, измеряют время; в спортивных состязаниях решающую роль играют сотые доли секунды.)

Рефлексия урока

Какие знания помогали вам на уроке?

Что нового узнали вы на уроке?

Кого из учащихся хотелось бы особо отметить и почему?

Как оцениваете свою работу на уроке?

Задача № 1

имеется своя денежная

США – 1 доллар.

её мелкие единицы: 1

(0,01 доллар).

государство часто

ьги.

ши банки дают 32, 45 р.

надо заплатить за 10,

шет в России, если в
паров?

Задача № 2

Три неразлучных друга Ваня, Коля и Петя – решили узнать свой вес. Но шкала весов до 35 килограммов была повреждена и показания в ней прочитать не представлялось возможным. Поэтому Ваня взвесился сначала с колей получилось 62,4 кг; затем с Петей, получилось 57,5 кг, затем взвесились все вместе и получили 96,7 кг.

Какова масса каждого из них в отдельности?

Задача № 3

Валя, Нина и Наташа зашли в магазин, решили купить шоколадку стоимостью 35 рублей. У Вали и Нины было 30,6 р., у Вали и Наташи 23,8 р., а у Нины и Наташи 19,5 р.
Хватит ли денег на шоколадку у девочек? Сколько денег было у каждой?

Задание на дом

№ 862, 859, 844 (а, б). Творческое задание: опишите историческое путешествие в страну десятичных дробей (сказка, рассказ, доклад и др.).

Литература и интернет-ресурсы

1. Зубарева И.И. Мордкович А.Г. Математика. 5 класс: учеб. для учащихся общеобразоват. учреж-

дений. — 8-е изд., стер. — М.: Мнемозина, 2012.
2. Зубарева И.И. Мордкович А.Г. Математика. 5–6 классы: методическое пособие для учителя. — 3-е изд., испр. — М.: Мнемозина, 2008. 3. Минаева С.С. Вычисляем без ошибок. Работы с самопроверкой для учащихся 5–6 классов. — 2-е изд., испр. — М.: Экзамен, 2011. 4. <http://pedsovet.su/load/136-1-0-13318>

Разбор урока

Л.Р. Урок окончен. Спасибо нашим коллегам. Переходим к обсуждению.

П.М. Можно я начну? Я бы хотел продолжить тему, которую мы уже обсуждали в последних номерах, тема эта — формулирование целей урока. Мы уже говорили, что делаем это часто формально, не очень задумываясь над их конкретным содержанием. Понятно, что это некоторое современное требование к представлению урока, которое учителю, ну, не очень, прямо скажем, интересно. Каждый учитель «заготовил» для себя какое-то количество формулировок и комбинирует их от урока к уроку. Это я по поводу «воспитания дружеских взаимоотношений в классе и умения работать в коллективе». Сразу вопрос: это только на этом уроке? На других мы этим не занимаемся? Не обращаем на это внимания?

Л.Р. Петр Михайлович, постойте, что ж мы сразу с претензий начинаем? Разве урок вам не понравился? Я прежде всего хочу поблагодарить коллег за интересный, на мой взгляд, продуманный урок. И хочу сказать, чем именно он меня привлек. Понравились мне устные упражнения, это не обычный, усыпляющий урок и мало привлекательный для большинства счет, а упражнения, где надо думать и рассуждать. Я просто настоятельно рекомендую коллегам обратить внимание на такого типа задания, ведь дети любят искать ошибки (не свои, конечно, а чужие!), и почему бы этим не пользоваться активнее. Заполнять пропуски интереснее, чем решать обычное уравнение, а искать что-то пропавшее, пропущенное (например, запятую) интерес-

нее, чем просто выполнять действие по правилу. Здесь появляется элемент загадочности; это больше похоже на головоломку, чем на традиционное упражнение в духе натаскивания. Мне кажется, что чем больше таких «морковок», тем быстрее и спокойнее формируются вычислительные навыки и преодолеваются известные трудности. Скука — вот главная беда в любом деле. А это, кстати, имеет отношение к воспитанию: надо показывать детям, что труд не обязан быть скучным. Бывают скучные люди, которым не нравится то, чем они занимаются. А у нас как раз противоположный случай — нашим учительницам очень нравится учить детей, они делают это с большой любовью и к детям, и к своей профессии.

П.М. Согласен. Вот и надо записывать такие мысли в цели урока.

Л.Р. И здесь я готова с вами согласиться. Мое мнение таково: надо писать конкретные вещи, а не про любовь к предмету и воспитание аккуратности вообще. Потому что учитель, посмотрев конспект через год, даже и не вспомнит, что он имел в виду, записывая эти фразы. Мысль будет потеряна, а надо, чтобы развивалась дальше. Скажем, на этом уроке акцент сделан на аккуратность работы с запятой, а дальше можно будет говорить об аккуратности изложения решения, аккуратности в рассуждениях. То есть результатом станет не единичный акт, а продуманная целенаправленная работа.

П.М. А ведь среди синонимов слова «аккуратность» есть и такие, которые весьма актуальны

Задача № 4

Из двух пунктов, расстояние между которыми 50 км, выехали одновременно навстречу друг другу два всадника. Скорость одного 10,6 км/ч, а скорость другого 14,4 км/ч. Вместе с первым всадником выбежала собака, скорость которой 18,2 км/ч. Встретив второго всадника она повернула назад; добежав до первого всадника, она снова повернула назад и бегала до тех пор, пока всадники не встретились.

Сколько километров пробежала собака до встречи всадников?

Физкультминутка

... И на месте мы шагаем,
Ноги выше поднимаем.
Потянулись, растянулись
Вверх, и в стороны, и вперед.
И за парты все вернулись —
Вновь урок у нас идет.



Самостоятельн

вар

1 вариант

1) $4,25 \cdot 0,16$

2) $600 - (8,671 - 2,271) \cdot 2,05 - 7,68$

3) $173,8 : 10$

4) $8,4 : 21$

в контексте математики: пунктуальность, буквальность, точность.

Л.Р. Вы упомянули о точности очень кстати. Давайте вернемся к устным упражнениям, там есть задача со спортивным сюжетом. Хочу обратить внимание коллег на то, что в реальной жизни в таком сюжете мы имеем дело с числами, имеющими одинаковое количество знаков после запятой. Можете зайти в Интернет и посмотреть результаты каких-нибудь соревнований. Ведь все результаты измеряются и вычисляются с одной и той же точностью, и нули не отбрасываются, поскольку они являются значащими. Поэтому, если мы хотим оставаться в рамках реальной ситуации, надо так: 36,700; 36,716; 36,710.

П.М. А я, с вашего позволения, продолжу высказывать критические соображения относительно вводной части, описания урока. У меня сомнения в части множественности используемых технологий: «здоровьесберегающая, дифференцированного подхода, развивающего обучения, парной и групповой деятельности, самодиагностики и самокоррекции результатов обучения». Во как! Целых пять можно насчитать. Разве мы не на каждом уроке должны задумываться о здоровье детей, или на этом уроке есть какие-то новшества в этом плане? Дать проверяющим?

Л.Р. Да, это интересное замечание. Я тоже не очень понимаю, можем ли мы говорить о том, что на данном уроке имеет место здоровьесберегающая технология. В чем она? В физкультминутке? Но их еще в наше школьное время практиковали. Понятие здоровьесберегающей технологии объединяет в себе все направления деятельности образовательного учреждения по формированию, сохранению и укреплению здоровья учащихся. Это не технология обучения, это характеристика образовательной технологии.

Дифференциация и развивающее обучение можно отнести к технологиям, а вот групповая форма работы — это способ организации обучения, тоже не технология. Эту форму можно применять в рам-

ках различных технологий. В общем, нельзя писать все это через запятую. Надо расписывать отдельно, причем конкретизируя.

Но мы с вами опять взяли критический вектор, а хочется поговорить о том, что понравилось.

П.М. Поддерживаю. Вопросы для устной работы хороши! Сразу видно, знает ли ученик правило. Но мне кажется, что пятиклассникам проще сначала ответить на такие вопросы, а потом, как итог, сформулировать правило. И более естественным было бы разделить задания «по действиям», например, в задании 1 дать только действия сложения и вычитания, в задании 2 — умножение, в задании 3 — деление.

Л.Р. Ну, мне так не показалось. Видно по решаемым задачам, что класс достаточно сильный, чтобы переключаться с одного действия на другое. Да и урок заключительный по теме. Здесь задания могут быть посложнее.

П.М. Конечно, хотелось бы увидеть, как создаются группы, когда? Или они были созданы ранее?

Л.Р. Может, даже их состав постоянен. Бывает и так.

П.М. Далее, задачи 2–4 очень хороши и очень просты для пятиклассников. То есть все группы достаточно сильные. И мне захотелось, чтобы они были решены совместно, с наводящими вопросами.

Л.Р. Это всегда тонкий вопрос: как определить, готовы ли дети решить новую для них, сложную задачу или пока не готовы. Может так случиться, что и вопросы не помогут навести на идею решения. Ответить на него помогут только чутье и опыт учителя. Но в любом случае, больше пользы, если они смогут найти решение самостоятельно, а в группе равных по силе учащихся это возможно, чем если бы они получили готовое решение от учителя. Мне кажется, не так страшно, даже если они и не найдут решения, ведь на помощь могут прийти другие группы. Вот вам и «воспитание дружеских взаимоотношений в классе и умения работать в коллективе», что в целях урока записано. Не поможет и это — можно дать задачу на дом,

1) $2,25 \cdot 0,32$

2) $500 - 5,32 +$

$+ 3,05 \cdot (9,438 -$

$5,238)$

3) $18,46 : 10$

4) $6,4 : 8$

1) $4,25 \cdot 0,16 = 0,68$

2) $600 - (8,671 - 2,271) \cdot$
 $2,05 - 7,68 = 579,2$

3) $173,8 : 10 = 17,38$

4) $8,4 : 21 = 0,4$

1) $2,25 \cdot 0,32 = 0,72$

2) $500 - 5,32 + 3,05 \cdot$
 $(9,438 - 5,238) = 507,49$

3) $18,46 : 10 = 1,846$

4) $6,4 : 8 = 0,8$

- № 862; 859; 844 а,б.

- Творческое задание

Историческое путешествие в страну десятичных дробей. (сказка, рассказ, доклад и др.)



пусть поговорят со старшими братьями-сестрами, родителями, поищут в книгах. А это уже развитие коммуникативных умений.

П.М. Посмотрите, схожие по идее решения задач 2 и 3 допускают очень красивую краткую запись условия, которая к тому же является пропедевтикой и к уравнениям с несколькими переменными, готовит детей к применению операции замены (подстановки). И еще. В задаче 2, чуть изменив вопрос: «Кто из ребят самый легкий, а кто самый тяжелый», можно еще раз обратиться к сравнению дробей.

Л.Р. Да, я тоже люблю давать несколько заданий на один сюжет. Хочется «выжать» из задачи максимум пользы. Это и время урока экономит, и обогащает его разнообразными видами деятельности.

П.М. У меня, кстати, создалось впечатление, что урок состоит из двух фрагментов: один посвящен действиям с десятичными дробями, а второй — решению задач, но части эти слегка перемешаны. Если бы самостоятельную работу поставить сразу после устных упражнений, то получились бы два законченных фрагмента. А заодно была бы достигнута цель актуализации правил действий с десятичными дробями.

Л.Р. А мне так не показалось. Актуализации мне хватило в ходе устной работы. Наоборот, мне понравилось, что идет периодическая смена видов деятельности и форм работы: устно — письменно, вычисления — рассуждения, в группе — самостоятельно. Не скучно. Это же непоседы-пятиклассники!

П.М. Не уверен, что вторая из образовательных целей — о роли запятой — на этом уроке достигнута, так как ей и не уделялось внимания.

Л.Р. Снова готова поспорить. А как же мультфильм, всеми нами любимый? Который, кстати, и настрой создает на весь урок, чего нельзя не отметить. А как же устные задания? Именно они и заставляли ученика все время думать про запятую. Была бы она неважна, думать было бы не о чем. Акцента не было? Возможно. Но лучше хо-

рошие, убедительные примеры без лишних слов, чем пустые слова, не подкрепленные запоминающимися примерами.

П.М. Еще несколько слов о заданиях самостоятельной работы. Почему нет заданий на сложение и вычитание десятичных дробей? Нет заданий на деление на десятичную дробь; есть деление только на натуральное число. И порядок заданий, на мой взгляд, неоправдан — пример на четыре действия стоит на втором месте. Он что: посилен каждому? Нет, в таких примерах ученики допускают много разнообразных ошибок.

Л.Р. Почему задание на все действия стоит на втором месте, не могу сказать. И примера на деление на десятичную дробь действительно нет. А вот что касается сложения и вычитания, то эти действия были в решении задач. Есть они и во втором примере. Кроме того, в задачах встречалось умножение на 10, 100, 1000, умножение десятичной дроби на натуральное число, так что разнообразие действий есть, и представлены действия весьма интересно. Возможно, над делением надо еще работать отдельно.

Что касается порядка заданий в работе, то действительно, сейчас принято располагать задания в такого рода работах по нарастанию сложности, это раз, и сначала отдельные действия, а затем пример, в котором несколько действий, это два. В этом много резоннов.

П.М. Так уж получилось, что сегодня я все больше замечания делаю. Есть у меня еще одно. Откровенно говоря, я не понял, в результате какой деятельности на уроке учащиеся приходят к выводу о значимости десятичных дробей в жизни. Быть может, этот вопрос будет более уместным после выполнения творческого домашнего задания, которое дети получают в конце урока?

Л.Р. Наверное, вы правы, но я бы хотела здесь отметить собственно это творческое задание. Не знаю, конечно, есть ли у учащихся доступ к историческим материалам; хорошо, если в библиотеке есть соответствующая литература или доступ к Ин-

тернету. Но очень хорошо, что учащиеся займутся такими изысканиями самостоятельно, да и форму представления результата они смогут выбрать. А чтобы учащиеся могли дать более аргументированный ответ на вопрос о применимости десятичных дробей, можно было бы дать им аналогичное творческое задание накануне этого урока. В этом случае они пришли бы на урок с уже готовыми своими примерами.

Ну, и еще одному моменту урока я бы дала положительную оценку. Это то, что учащиеся ушли с урока не с отметкой учителя в дневнике, а с самооценкой, которая формировалась по результатам выполнения заданий в ходе всего урока. Мне кажется, что нам в плане оценивания надо двигаться именно в этом направлении. Самооценка — вот что формирует личность. И это важно помнить.

Но мы совсем забыли поговорить о презентации к уроку.

О.М. А она того стоит. Презентация выдержана на базе одного шаблона. Есть титульный лист, на котором указаны данные авторов. (Напоминаю, что это придает завершенность презентации.) Сочетание цветовой гаммы, шрифта и фона слайдов выбрано удачно. Желтый фон и синий текст являются контрастным сочетанием, что обеспечивает хорошую читаемость, а также удачно смотрится черный шрифт на желтом фоне (слайды 17–19). Но есть и недочеты, как мы любим говорить. Здесь есть нарушения макета (расположение основных элементов), который должен быть жестким для всех слайдов: заголовки «прыгают» с места на место (слайды 12–15), задание к упражнениям (слайды 7–9) выделено разным цветом. Не допускайте этого, и ваша презентация послужит примером как для коллег, так и для учеников. Очень режет глаз красный шрифт на желтом фоне (слайды 12–15, 17, 18), я бы немного приглушила тон, сделала темно-красным или бордовым и использовала шрифт Calibri (слайды 7, 9), а лучше Verdana, он более читаемый при сочетании оттенков красного и желтого. Для заголовков можно оставить Times New Roman, но для основного текста лучше поменять Calibri или Verdana.

Слайды не перегружены текстом, содержание каждой части текстовой информации логически завершено, радует наличие логического ударения, выделенного красным цветом. Например, на слайдах 12–15 — это вопросы к задачам, а на слайдах 7, 8, 18 — ответы. На мой взгляд, в презентации есть необязательные слайды, например, слайды 3, 6, 11, 19, 20. Такие «проходные» слайды забирают на себя часть времени и внимания учеников. А внимание учеников для нас, учителей, очень дорого на уроке. Поэтому при создании презентации всегда думайте о тех, для кого она создается, и старайтесь избегать пустых по смыслу слай-

дов. В презентации авторы не указали ссылки на используемые графические объекты.

Хочу обратить ваше внимание на переход от слайда к слайду, в данном случае используется *Сдвиг вверх*. Такой эффект лучше использовать при смене фотографий, отражающих последовательные фазы какого-либо события или явления. В данном случае я советую вообще отказаться от видеоэффекта перехода.

В презентацию вставлен видеофрагмент мультфильма «В стране невыученных уроков» (слайд 2). И когда я запустила презентацию на своем компьютере, она «отказалась» работать. В чем же причина? Вставленный видеофрагмент должен храниться в одной папке с презентацией. При скачивании презентации с сайта <http://festival.1september.ru/articles/642692/> так оно и есть. Но в папке лежит видеофайл «ОТРЫВОК ИЗ МУЛЬТФИЛЬМА_.mp4», а в презентацию вставлен видеофайл «mmm.wmv». В этом и кроется причина отказа в работе: видеофайлы разные. Видеофайл должен быть один и тот же!

Как же нам, пользователям, поступить в данной ситуации?

Сначала рассмотрим самый простой и надежный способ. Копируете папку с презентацией и видеофрагментом на свой компьютер, открываете презентацию, удаляете видеофрагмент и заново его вставляете. Напомню, как вставить видео в презентацию. В PowerPoint открываете вкладку *Вставка*, выбираете *Фильм* — *Фильм из файла...* Выбираете видео для вставки и нажимаете *ОК*. Затем выбираете *Начало воспроизведения по щелчку* (воспроизведение начнется только после щелчка по рабочей области проигрывателя). При необходимости можно будет изменить режим начала воспроизведения на вкладке *Параметры*.

Другой способ — это перекодировка видеофрагмента. PowerPoint поддерживает следующие форматы видео: SWF, AVI, MPEG, ASF, WMV. При этом видео в формате WMV должно воспроизводиться на всех компьютерах, работающих под управлением операционной системы Windows. При этом формат WMV позволяет максимально сжать данные, соответственно, файл занимает мало места. Если же видеофайл имеет другой формат, не указанный выше, то его необходимо перекодировать с помощью специализированных программ, о которых вы можете прочитать в Интернете. Поэтому, уважаемые читатели, в любом случае проверяйте работоспособность своей презентации на другом компьютере! Тогда, если выявятся какие-либо недочеты, будет еще не поздно их исправить.

Л.Р. Что же, наше обсуждение закончено. Еще раз спасибо коллегам за предоставленную нам возможность поговорить на такие разные, но очень важные для учителя темы. Хороших вам уроков!



Педагогический университет
«**Первое сентября**»

Лицензия Департамента образования г. Москвы 77 № 000349, рег. № 027477 от 15.09.2010

ДИСТАНЦИОННЫЕ КУРСЫ ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

(с учетом требований ФГОС)

Ведется прием заявок на первый поток 2015/16 учебного года

образовательные программы:

- НОРМАТИВНЫЙ СРОК ОСВОЕНИЯ – **108** УЧЕБНЫХ ЧАСОВ

Стоимость – 4990 руб.

- НОРМАТИВНЫЙ СРОК ОСВОЕНИЯ – **72** УЧЕБНЫХ ЧАСА

Стоимость – от 3990 руб.

По окончании выдается удостоверение о повышении квалификации
установленного образца

Перечень курсов и подробности – на сайте edu.1september.ru

Пожалуйста, обратите внимание:

заявки на обучение подаются только из Личного кабинета,
который можно открыть на любом сайте портала www.1september.ru

Е. ШМАКОВА,
egt94180@mail.ru,
г. Москва

5–9 классы

ЛИЧНОСТНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОСВОЕНИЯ ООП

■ Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования, предъявляя требования к результатам освоения основной образовательной программы (ООП), делит эти результаты на три группы: личностные, метапредметные, предметные [1], [14]. Такая классификация позволяет объединить образовательные цели по формированию личности обучающегося, освоению им предметного содержания, адаптации к изменяющимся учебным или жизненным ситуациям. С позиций педагогического целеполагания, конструирования образовательных траекторий, контроля данная классификация неудобна, так как любая операция по освоению предметной деятельностью осуществляется с помощью общеучебных умений, принимается на уровне эмоций.

Группа личностных достижений занимает особое место в образовательном стандарте, ее необходимость обоснована в «Концепции духовно-нравственного развития и воспитания личности гражданина России» [7]. Концепция перечисляет базовые национальные ценности, на основе которых формулируются требования к личностным результатам. Ценности являются важнейшим компонентом человеческой культуры наряду с нормами и идеалами. Присвоение ценностей личностью обучающихся — одна из задач, которые входят в воспитательную систему школы. Одна из задач учителя заключается в создании целостной системы условий, способствующих присвоению личности заявленных ценностей [11].

Учитель формирует два типа личностных достижений: ценностные и познавательные. Для формирования первой группы необходимы определенные условия, формирование второй происходит в процессе проектирования типовой образовательной траектории. Для диагностики сформированности ценностей служат условные индикаторы, для второй — разработанные группы учебных задач.

Личные достижения первой группы

Проведем обзор личностных достижений первой группы, которые формируются на уроках математики в 5–6-х классах в единстве с предметными и метапредметными.

«Воспитание российской гражданской идентичности: патриотизма, любви и уважения к Отечеству, чувства гордости за свою Родину» [14]. Ценность — патриотизм.

Уважение к Отечеству, формируемое учителем математики, происходит в контексте знакомства с историей математических знаний в России. Учащимся предлагаются небольшие поисковые домашние задания, выполнение которых дает возможность формировать метапредметные умения, такие как самостоятельная постановка цели задания, формулирование задач. Такие задания для формирования предметных результатов наполняют задачами, содержащими исторические факты.



К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru
(Рекомендуемая литература.)

Пример *диагностического задания*. Составьте задачу на движение, содержащую старинные единицы длины. Задача должна содержать не менее трех действий. В тексте задачи используйте имена персонажей одной из русских народных сказок.

Данное задание проверяет предметные умения (составленная и решенная задача), метапредметные (анализ текста), личностные (выбор текста и качество использования информации).

«Формирование ответственного отношения к учению, готовности и способности обучающихся к саморазвитию и самообразованию». Ценность — труд и творчество.

Формированию устойчивых познавательных интересов способствует создание условий для проявления самостоятельной учебной деятельности. Этому способствуют вариативные задания. Учитель подбирает задачи разного уровня сложности, присваивает им баллы и сообщает учащимся, сколько баллов соответствует каждой оценке, после чего предлагает учащимся построить собственную образовательную траекторию. Личные достижения формируются на предметном содержании, где *метапредметной* составляющей является самостоятельное планирование учебной деятельности.

Диагностика. Любое предметное содержание, разбитое на систему задач. Учащимся предоставлена возможность самостоятельного выбора задач из предложенного массива, где каждой задаче соответствует определенный балл. Одинаковую оценку можно получить, решив большое количество простых заданий или несколько сложных. Это важно для мотивированных учащихся, имеющих затруднения в освоении предметного содержания. Структура траектории — выбранные задачи, результат — финальный балл.

«Формирование целостного мировоззрения, соответствующего современному уровню развития науки». Ценность — наука.

Учителю необходимо затрагивать вопрос о ценности знаний, стремлении к истине. На уроках ученики решают и конструируют задачи практического содержания (школьная столовая, результаты спортивных соревнований, ремонт класса). Уместно ввести понятия «истинное» и «ложное» высказывание, что способствует формированию такого метапредметного действия, как «Построение логического суждения». Предлагать учащимся предметные тексты, содержащие как истинные, так и ложные высказывания.

Индикаторы. Личностные — выбор текста для самостоятельно сконструированной текстовой задачи.

Диагностика. Диктанты, содержащие истинные и ложные утверждения.

В стандарте в рамках ценности «Социальная солидарность» выделены такие виды деятельности, как «формирование осознанного, уважительного и доброжелательного отношения к другому человеку, освоение социальных норм, развитие морального сознания, формирование коммуникативной компетентности, формирование ценности здорового и безопасного образа жизни; усвоение правил индивидуального и коллективного безопасного поведения».

Формированию социальных норм способствуют коллективные способы обучения. Учитель проектирует такие уроки на предметном содержании, организуя учебное сотрудничество как метапредметную деятельность в соответствии с рабочей программой. Если учащиеся еще не имеют такого опыта, целесообразно использовать уроки, где запланирована групповая учебная деятельность по решению задач.

Диагностика. В конце урока групповой работы учащимся предлагают оценочные листы, содержащие вопросы, по которым идентифицируют достижение *личностных* результатов (вопросы с акцентом на комфортность такой формы работы, позитив и негатив), *метапредметных* (вопросы, касающиеся конкретных действий, выполненных учащимся в составе группы). Для диагностики *предметного* содержания в структуре урока должна быть небольшая проверочная работа, которую по результатам работы группы каждый выполняет индивидуально.

«Формирование основ экологической культуры» вполне возможно организовать на уроках математики. Ценность — природа.

Развитие экологического опыта не является непосредственной задачей учителя математики, но в рамках интегрированных уроков учителю математики предоставляется возможность демонстрации разнообразия областей применимости своего предмета. Основным содержанием таких уроков является предметная область «биология-экология», цели уроков предполагают получение личностного результата в рамках развития экологической культуры. Предметное математическое содержание проявляется в вычислительных заданиях, построениях таблиц и диаграмм. Метапредметным результатом является применение экологического мышления в познавательной практике.

Диагностика. Задания, направленные на выявление сформированности личностных и предметных результатов, дает учитель, препода-

дающий экологию. Предметный результат: правильность вычислений, построений таблиц и диаграмм.

Формирование личности невозможно без «осознанного значения семьи в жизни человека». Ценность — семья.

Каждый ученик вносит в коллектив свои семейные традиции, нормы и правила. Задача учителя заключается в построении позитивного взаимодействия с семьями учащихся. Такую возможность дают творческие задания, которые учитель рекомендует выполнять с помощью родителей. Таким заданием может быть создание мини-справочника по текущему материалу, содержащему иллюстрации, примеры. Задание может выполняться на печатной основе или в компьютерном варианте. Совместное учебное дело формирует личностный результат по принятию ценностей семейной жизни. Предметное содержание — наполнение самого задания. Метапредметный результат — умение организовывать учебное сотрудничество.

Диагностика. Как вариант *диагностики* учащимся предлагают заполнить анкету, которая содержит вопросы, позволяющие выявить степень участия семьи в выполнении задания, а также вопросы, касающиеся круга участников, психологической атмосферы выполнения задания (личностные результаты), ролей, которые выполняли участники, организации работы (метапредметные результаты). Предметный результат — практическая ценность выполненного задания, его полезность.

Одна из целей формирования личности — «развитие эстетического сознания». Ценность — искусство.

Творческая деятельность эстетического характера вполне уместна для предметной области «Математика». Учащиеся 5–6-го класса с удовольствием выполняют практические работы с применением цветных карандашей, цветной бумаги, иллюстрируют текстовые задачи. Простой пример: работа в парах по теме «Транспортир, угол». Ученики изображают для соседа по парте карандашом несколько углов разного вида (прямые, тупые, острые). Задача соседа — измерить их градусную меру при помощи транспортира, раскрасить угол соответствующего вида определенным цветом. На уроках по темам «Обыкновенные дроби», «Сравнение обыкновенных дробей» дети выполняют аппликации из цветной бумаги, изображая равенство дробей, различные дроби и доли. Иллюстрирование текстовых задач — возможность для креативно мыслящих, но не всегда

математически одаренных детей применить свои способности. На уроках проектной деятельности учащиеся в составе группы составляют, решают и иллюстрируют текстовые задачи. Содержание регламентируется заранее (задачи на движение, действие происходит в Москве, время — 1812 г.).

Для внеклассной и проектной работы возможны такие формы деятельности, как оригами, куклы, различные мозаики. Расширение форм деятельности способствует активному усвоению предметного содержания, так как там присутствует большая наглядность и новизна. Такую работу можно организовать не на любом *предметном* содержании, но для усвоения геометрического материала она вполне уместна. Также здесь формируется метапредметное умение создавать модели, образы для решения учебных и познавательных задач.

Диагностика здесь имеет свои особенности. Оценка личностных достижений в «области искусства» субъективна. Учащиеся вместе с учителем заранее разрабатывают критерии оценивания конкретной работы. Личностные достижения в этой области связаны с метапредметными умениями, такими как владение основами самооценки, осуществление осознанного выбора в учебной деятельности. Проверка метапредметных результатов заключается в анализе правил оценивания, разработанных учеником. Предметное содержание проверяется по соответствию полученного учеником продукта с предъявленным образцом.

Личностные результаты второй группы

Рассмотрим также процесс формирования на уроках математики личностных результатов второй группы у учащихся 5–6-го класса, отмечая связь с предметными и метапредметными. Проанализируем с этой позиции метапредметные достижения, перечисленные в стандарте.

«Умение самостоятельно определять цели своего обучения, ставить и формулировать для себя новые задачи в учебе и познавательной деятельности, развивать мотивы и интересы своей познавательной деятельности».

Ученик 5–6-го класса не может определять глобальные цели обучения, но способен формулировать подцели. Цель любого урока предполагает достижение личностных, метапредметных, предметных результатов. Момент мотивации должен быть построен так, чтобы учащийся сам или в диалоге мог сформулировать эти цели. Например: урок по теме «Округление чисел» начинается с обсуждения процесса выставления итоговых оценок в электронный журнал. Учащиеся

определяют предметную цель: разобраться, как округляют до целого. Затронуть вопрос о среднем балле (переход к личностным достижениям в области ответственности к своим поступкам). Совместно обсудить ход урока: какие задачи интереснее решать, что должно быть продуктом урока; таким образом учащиеся ставят метапредметную цель.

Диагностика. Обратной связью процесса формирования метапредметных и личностных достижений служит схема самостоятельной образовательной траектории ученика. Ее в самом простом виде можно представить так.

Мои цели:	Мои действия:	Мой продукт:
1	1	1
2	2	2
3	3	3

В конце урока учащиеся составляют общую схему, где слово «мой» заменяется на слово «наш».

Схема самостоятельной образовательной траектории, составленная учеником, способствует формированию умения целеполагания, служит индикатором его сформированности. Предметный результат урока — количество и качество правильно решенных выбранных учеником заданий.

Схема урока по теме «Округление чисел»

Мои цели:

- научиться округлять десятичные дроби;
- оценить свои успехи по математике;
- найти свой способ выбора задания;
- применить правило округления;
- предложить правила повышения среднего балла.

Мои действия:

- округлить до разных разрядов предложенную соседом по парте десятичную дробь;
- вычислить свой средний балл по математике за 2 недели и округлить полученное число до разряда единиц;
- выбрать из предложенных десяти заданий пять самых интересных;
- выполнить выбранные задания;
- записать свои предложения и выбрать самое важное из них.

Мой продукт:

- правильно округленная десятичная дробь;
- вычисленный средний балл;
- способ выбора заданий;
- правильно решенные примеры и задачи;
- предложение по повышению оценки по математике.

«Умение самостоятельно планировать пути достижения целей, в том числе альтернативные, осознанно выбирать наиболее эффективные способы решения учебных и познавательных задач».

Планирование путей достижения цели для учеников 5–6-го класса является сложной метапредметной задачей, успешное решение которой связано с личной мотивацией, зависящей от способа подачи предметного содержания. Развитию данного умения способствует проблемное обучение. При изучении признаков делимости учитель предлагает самостоятельно вывести признак делимости на 6. Решая проблему, ученик использует одну из четырех стратегий, описанных Д. Брунером (одновременное сканирование, последовательное сканирование, консервативное сосредоточение, рискованное сосредоточение).

1. Ученик старается использовать известные признаки делимости, отбирает нужные числа без всякой системы (одновременное сканирование).

2. Начиная с метода проб и ошибок, ученик находит закономерность, заключающуюся в делении нужных чисел и на 2, и на 3 (последовательное сканирование).

3. Ученик предполагает, что на 6 делятся числа, для которых одновременно выполняются признаки делимости на 2 и 3, и подтверждает предположение примерами (консервативное сосредоточение).

4. В процессе решения проблемы находятся еще аналогичные закономерности, в данном случае, признак делимости на 15 (рискованное сосредоточение).

«Умение соотносить свои действия с планируемыми результатами, осуществлять контроль своей деятельности в процессе достижения результата, определять способы действий в рамках предложенных условий и требований, корректировать свои действия в соответствии с изменяющейся ситуацией».

Для понимания смысла слова «действие» в контексте метапредметных результатов рассмотрим схему ориентировочной основы действия, описанную П.Я. Гальпериным [5]. П.Я. Гальперин считал, что «ориентировочная деятельность субъекта есть средство приспособления к ситуациям, которые отличаются от условий работы механизмов, управляющих автоматическими реакциями» [5, с. 134]. Схема ориентировочной основы действия играет важную роль в достижении заданной цели обучения, в частности, цели овладения содержанием обучения на требуемом уровне его усвоения. «Схема ООД — это знания, необходимые для выполнения действия, представленные в сжатой форме» [9, с. 38]. Объек-

Таблица 1

Схема решения уравнения вида $ax + b = cx + d$

№ п/п	Последовательность действий	Предмет действия	Продукт действия	Средства действия	Контроль
1	Перенести слагаемые, содержащие неизвестное, в левую часть, а числа в правую часть	Слагаемые	Слагаемые одного вида в разных частях уравнения	Правило переноса слагаемых	Проверка смены знака
2	Привести подобные слагаемые	Слагаемые	Коэффициент	Правило приведения подобных слагаемых	Правильность сложения чисел с разными знаками
3	Разделить обе части уравнения на коэффициент	Коэффициент	Корень уравнения	Правило деления чисел	Подстановка корня в исходное уравнение

тивная структура действия, представленная А.А. Золотаревым, состоит из следующих компонентов: предмета (того, что подлежит преобразованию), продукта (результат преобразования), операции, средств (дополнительные объекты для преобразования предмета в продукт). Предмет, продукт, средства называют объектами. Структура ООД, которую использует А.А. Золотарев [10], представлена в таблице 1: схема основных ориентировочных действий, предназначенная для решения уравнений (6-й класс).

От того, какую последовательность действий выстроит ученик, будет зависеть достижение предметного результата с позиции *личностных* достижений: построение индивидуальной траектории, которую определяют познавательные функции в структуре интеллекта.

Диагностика. Простейшая диагностика. Учитель предлагает алгоритм изучаемого действия, содержащий лишние операции. Ученик должен их обнаружить и исключить.

Более сложная диагностика правильности выбора последовательности действий. Ученику предлагается из операций, входящих в алгоритм, но предъявленных ему в перепутанном порядке, выбрать правильную последовательность.

Пример. В таблице содержится пронумерованный в неправильной последовательности список операций, из которых состоит алгоритм сложения чисел с разными знаками, где слагаемые являются обыкновенными дробями с разными знаменателями. Восстановите последовательность. Ответ запишите в виде пятизначного числа.

№	Операция
1	Определить слагаемое с большим модулем
2	Перед полученным числом поставить знак слагаемого, имеющего больший модуль
3	Привести дроби к общему знаменателю
4	Из большего модуля слагаемого вычесть меньший
5	Оценить результат

Ответ: 31 425.

«Умение оценивать правильность выполнения учебной задачи, собственные возможности ее решения».

Для выполнения оценочной деятельности учащемуся необходимо уметь выполнять простейшие дедуктивные умозаключения, что входит в состав *познавательной* сферы. Дедукция — это умозаключение, сделанное в отношении частного случая на основе общего положения. Например, зная то, что на три делятся все числа, сумма цифр которых кратна трем, мы можем утверждать, что число 412 815 разделится на три. Или, зная, что все березы сбрасывают листву на зиму, мы можем быть уверены в том, что какая-либо отдельная береза зимой также будет без листвы. Продемонстрируем значение логики дедуктивного вывода в процессе выполнения учебных задач. В качестве примера рассмотрим задачу нахождения медианы. При изучении темы «Среднее арифметическое» можно познакомить учащихся с понятием медианы.

Задача. Найти медиану набора чисел: 17, 4, 9, 11, 3, 5.

Решение данной задачи можно представить с помощью дедуктивных умозаключений, выполняемых в определенном порядке. Они составляют основу алгоритма нахождения медианы набора чисел, который состоит из следующих действий:

- определить, упорядочен ли набор по возрастанию;
- если нет, то изменить порядок чисел в наборе;
- выбрать число или числа, стоящие в середине набора;
- если серединой набора являются два числа, то найти их полусумму.

Структура алгоритма и составляющих его операций следует из логики дедуктивного вывода. Если в сознании учащегося не сформированы правила дедуктивного вывода, то с решением задачи он не справится, не сможет оценить правильность решения.

Необходимо, чтобы ученик умел выполнять простое силлогистическое умозаключение. При этом необходимо правильно использовать логические связи.

Таким образом, умение оценить возможность решения задачи (как метапредметное действие) основано на сформированности умения выполнять умозаключения, что входит в состав *личного* познавательного профиля. Без этого невозможно получить предметный результат.

Диагностика. Для оценки правильности выполнения учебной задачи формулируем алгоритм в виде вопросов.

1. Упорядочен ли набор чисел по возрастанию?
 2. Если набор был не упорядочен, изменили ли порядок чисел в нем?
 3. Нашли ли число или числа, стоящие в середине набора?
 4. Если в середине набора стоят два числа, то нашли ли их полусумму?
- Здесь рационально использовать работу в парах, где после самопроверки оценочную деятельность продолжает сосед по парте.

«Владение основами самоконтроля, самооценки, принятия решений и осуществления осознанного выбора в учебной и познавательной деятельности».

Оценочные действия являются личным интеллектуальным свойством. Поэтому формирование метапредметных достижений в области самоконтроля возможно только на предметном содержании. С позиции *предметных* достижений соответствующий навык считаем присвоенным, если ученик включает обратную связь в выполняемое действие.

Диагностика. Средством педагогической техники, позволяющим диагностировать и развивать основы самоконтроля, является метод самостоятельного нахождения ошибок. Ученику, выполнившему проверочную работу с ошибками, учитель возвращает работу без отметки, без указания ошибок, а с указанием количества неверно выполненных заданий. Задача ученика заключается в обнаружении ошибок и их исправлении. Для учащихся 5–6-х классов такой вид деятельности является достаточно сложным, но в этом процессе формируются соответствующие личностные, метапредметные и предметные результаты.

«Умение определять понятия, создавать обобщения, устанавливать аналогии, классифицировать, самостоятельно выбирать основания и критерии для классификации, устанавливать причинно-следственные связи,

строить логическое рассуждение, умозаключение (индуктивное, дедуктивное и по аналогии) и делать выводы».

Диагностика. Для диагностики умения определять понятия используют методику «Исключение лишнего». Учащийся работает с массивом понятий, среди которых необходимо исключить лишние. Недостатком таких заданий является возможность случайного исключения элемента. Структуру таких заданий можно представить следующим образом:

понятие, понятие, лишнее понятие, понятие.

Такие задания используют в математических диктантах, направленных на проверку усвоения понятий по пройденным темам. Приведем пример задания по разделу «Обыкновенные дроби» (6-й класс).

Пример.

делитель, кратное, разряд, цифра;
знаменатель, округление, дробь, черта;
запятая, деление, умножение, сокращение;
частное, отношение, часть, степень;
равенство, уменьшаемое, пропорция, отношение.

Существуют специальные **задания на установление аналогии**, которые можно представить следующим образом:

А относится к Б, как В относится к Г.

$A : B = B : ?$

В одних случаях последний член Г опускается и должен быть восстановлен тестируемым, в других случаях возможен выбор из ряда возможных ответов.

Примеры заданий такого вида:

делимое : делитель = вычитаемое : ? [разность]
поле : гектар = дачный участок : ? [ар]
обыкновенная дробь : черта =
= десятичная дробь : ? [запятая]
квадрат : сторона = куб : ? [ребро]
горизонтальная ось : абсцисса =
= вертикальная ось : ? [ордината]

Данная методика рассматривается как один из наиболее информативных способов изучения связей и отношений между понятиями, доступных ученику. Важность такого вида диагностических заданий в том, что «овладение этой логической операцией имеет очень большое значение в процессе обучения как на этапе усвоения знаний, так и на этапе применения этих знаний к определенному кругу новых явлений» [8, с. 24]. Для успешного решения таких задач необходимо последовательное выполнение нескольких мыслительных операций: сравнение двух понятий, установление логических отношений между

ними, анализ третьего объекта, выбор понятия в соответствии с поставленной задачей.

Рассмотрим задания *на установление вида связи*.

Существует определенный порядок действий при установлении взаимосвязей между объектами:

- 1) выделение двух объектов;
- 2) соединение объектов стрелками;
- 3) обоснование связей между ними.

Задания могут быть представлены в разной форме и отличаться по уровню сложности. Суть простых заданий заключается в выполнении двух первых действий. Ученику предлагается карточка, на которой содержится массив объектов, и он должен установить взаимосвязи между ними: соединить выделенные им объекты. Задание усложняется, если над стрелкой необходимо указать вид связи. При другом варианте предъявления задания на карточке объекты предъявляются в парах. Ученик определяет связь между указанными объектами.

Пример 1.

объект – (вид связи) – объект
 сумма – (результат арифметического действия) – произведение
 луч – (части прямой) – отрезок
 литр – (единицы объема) – баррель
 квадрат числа – (степень) – куб числа
 скорость – (движение) – время

Классификация объектов связана с умением находить соответствие между ними.

Рассмотрим задания *на восстановление соответствия*. К ним относятся задания на восстановление соответствия между элементами двух списков, порядка ряда. Главные преимущества заданий этого вида: возможность быстрой оценки уровня усвоения учебного материала и экономичность размещения заданий. Одна из возможных форм представления задания на восстановление соответствия заключается в установлении соответствия между элементами, представленными в таблице.

Пример 2. Установите соответствие между элементами, находящимися в столбцах 1 и 2 таблицы. В ответе перечислите пары в виде В – 2.

	Вид числа		Число
А	Десятичная дробь	1)	$\frac{5}{8}$
Б	Натуральное число	2)	–12
В	Обыкновенная дробь	3)	11
Г	Отрицательное целое число	4)	345
Д	Простое число	5)	0,89

Ответ: А – 5, Б – 4, В – 1, Г – 2, Д – 3.

«Умение создавать, применять и преобразовывать знаки и символы, модели и схемы для решения учебных и познавательных задач».

Началом любого информационного процесса является восприятие информации. Процесс восприятия информации связан с особенностями формы ее предъявления и кодирования. В кодировании информации участвуют зрительные, акустические и семантические коды, которые позволяют совершать переход от одного вида информации к другому. В процессе решения задач происходит постоянное перекодирование умственных образов, то есть переход от предметных образов к изображениям (двух- и трехмерным), фиксирующим не только их наблюдаемые свойства, но и происходящие в них сложные процессы, состояния, причинно-следственные связи и зависимости, пространственные, временные и структурные отношения, непосредственно не выводимые из наблюдаемых свойств и не сводимые к ним. Отметим, что в рамках логического подхода заранее предполагается, что учащийся идентифицирует информацию, предъявленную в любой форме. Но, как подчеркивает А.В. Бехтерев, в связи с возрастанием информационных потоков информация предъявляется в различных знаковых системах. Для образования важна «готовность человека к переработке этой информации, возможности ее перевода из одной знаковой системы в другую» [3, с. 3]. М.Е. Бершадский отмечает пять форм информации, предъявляемой в процессе обучения: образная, вербальная, графическая, знаковая, символическая [2]. С.А. Гильменов утверждает, что «способность к перекодированию информации связана со способностью постоянно удерживать... целостный образ изучаемого материала» [6, с. 254], продуцировать разные способы его выражения (образно-визуальный, схематический, вербальный). По мнению С.А. Гильменова, способности к перекодированию информации коррелируют с пониманием и усвоением учебной информации. При решении задачи анализ условия связан с перекодированием информации, в которой она предъявлена, к тому виду, в котором выполняется каждая операция. Задания на перекодирование информации направлены «на исследование понимания учащимися того, что одна и та же информация может быть представлена в различных формах» [2, с. 167]. Таким образом, метапредметные достижения по перекодированию информации связаны с предпочтительной модальностью получения информации личностью. Для предметной области «Математика» задания на перекодирование информации напрямую связаны с предметным содержанием. Так, рисунок к текстовой задаче является образ-

ной информацией, ее условие — вербальной, схема к задаче — знаково-символической.

Диагностика. В процессе обучения математике в 5–6-м классе важно, чтобы ученик мог выполнять следующие трансформации:

образное $\leftrightarrow$ вербальное
образное $\leftrightarrow$ знаково-символическое
вербальное $\leftrightarrow$ знаково-символическое

Для диагностики процесса перекодирования используют следующий вид заданий: ученик составляет схему по тексту задачи (от вербальной к знаково-символической), по схеме составляет текст задачи (от знаково-символической к вербальной).

«Смысловое чтение».

Смысловое чтение относят к метапредметным умениям. Процесс формирования данного умения связан с личностными особенностями процессов памяти ученика. Изучение памяти с позиции репрезентации знаний привело к появлению понятия семантической памяти. С ее помощью образуется информационная база интеллекта, осуществляется большинство мыслительных действий [13]. Р. Солсо, анализируя процесс репрезентации знаний, уделяет большое значение семантической памяти [12], подчеркивая, что это память на слова, понятия, правила и абстрактные идеи.

Диагностика. В учебном процессе при восприятии информации возникает сложность, связанная с многозначностью слов русского языка. Поэтому необходимо диагностировать семантическое пространство каждого ученика на изучаемой понятийной базе. Для этого используют подбор синонимов или антонимов к семантической единице.

Простейшая диагностика состоит из **заданий на дополнение ответа**. Она может использоваться в любой предметной области. Ее достоинство заключается в простоте для составителя, а недостатком является долговременность проверки и возможность замены слов синонимами. Структура таких заданий выглядит следующим образом:

авторский текст –
информационный пробел –
авторский текст

В 5-м и 6-м классах с помощью такой методики удобно проверять усвоенность понятий.

Пример. Вставьте вместо пропусков подходящие по смыслу слова.

Натуральное число называют _____, если оно имеет только два _____: единицу и _____ это число.

Натуральное число называют _____, если оно имеет более двух _____.

«Умение организовывать учебное сотрудничество и совместную деятельность с учителями и сверстниками; работать индивидуально и в группе; находить общее решение и разрешать конфликты на основе согласования позиций и учета интересов; формулировать, аргументировать и отстаивать свое мнение».

Эти метапредметные умения связаны с формированием коммуникативной компетентности, прописанной в части личностных результатов. Без них невозможна любая учебная деятельность, то есть достижение предметных результатов.

Критериями их оценивания являются следующие:

- продуктивность совместной деятельности, которая оценивается по полноте и обоснованности решения общей задачи;
- понимание возможности различных позиций и точек зрения (преодоление эгоцентризма), ориентация на позиции других людей, отличные от собственной;
- понимание возможности разных оснований для оценки одного и того же предмета, понимание относительности оценок или подходов к выбору;
- учет разных мнений и умение обосновывать собственное;
- учет разных потребностей и интересов;
- умение договариваться, приходить к общему решению, убеждать друг друга, аргументировать свои предложения и т. д.;
- взаимный контроль по ходу выполнения деятельности: замечают ли дети друг у друга отступления от общей цели, как на это реагируют;
- взаимопомощь по ходу работы;
- отношение к выработке общей точки зрения: позитивное (работают с удовольствием и интересом к мнению друг друга), нейтральное (взаимодействуют друг с другом в силу необходимости) или отрицательное (игнорируют друг друга, спорят, ссорятся, конфликтуют).

Для оценки выполнения общей задачи выделяют три уровня:

- низкий уровень: группа не составила общего плана решения задачи, решение распалось на самостоятельные части, выполненные каждым членом группы, учащиеся не пытались договориться друг с другом или не смогли прийти к общему согласию, настаивая каждый на своем;
- средний уровень: предъявленное решение имеет как черты общего замысла, так и автономные, противоречащие друг другу элементы; координация усилий между детьми частичная, не все спорные моменты преодолены;

– высокий уровень: задача полностью решена, дети активно обсуждали возможные варианты, пришли к согласию относительно плана деятельности, координировали усилия в процессе решения, следили за осуществлением плана.

Диагностика. После завершения работы учащимся предлагаются мини-анкеты:

1. Довольны ли вы результатом?
2. Кто и как именно проявлял активность в процессе работы, кто предлагал идеи?
3. Были ли альтернативные предложения? Почему их приняли или отвергли?
4. Довольны ли сотрудничеством?
5. Легко ли было договариваться друг с другом?

«Умение осознанно использовать речевые средства в соответствии с задачей коммуникации для выражения своих чувств, мыслей и потребностей, планирования и регуляции своей деятельности; владение устной и письменной речью, монологической контекстной речью».

Речевые действия как средства регуляции собственной деятельности:

– это использование адекватных языковых средств для отображения в форме речевых высказываний своих мыслей, побуждений и иных составляющих внутреннего мира (относится к ценностно-эмоциональной сфере личности);

– речевое отображение (описание, объяснение) учеником содержания совершаемых действий в форме речевых значений с целью ориентировки (планирование, контроль, оценка) предметно-практической или иной деятельности как в форме громкой социализированной речи, так и в форме внутренней речи (внутреннего говорения), служащей этапом интериоризации (переноса во внутренний план в ходе усвоения новых умственных действий и понятий) [15, с. 59].

С позиции получения запланированных предметных результатов для учителя актуальней формирование такого метапредметного достижения, как речевое отображение содержания учебных действий и интериоризация. Успешность прохождения процесса интериоризации зависит от свойств предъявляемой информации. Одним из таких свойств является свойство релевантности — адекватность замены одних информационных единиц другими.

Диагностика. Диагностика релевантности информационных единиц заключается в выявлении близких по процедуре информационных единиц. Этот вид диагностики позволяет построить индивидуальную семантическую метрику, то есть правило хранения информации в памяти ученика. По результатам диагностики можно выявлять взаимозаменяемые единицы информации. Диагностика релевантности направлена на выявление тех факторов, которые влияют на воспроизведение информации в некотором временном интервале, и связана с процессом забывания. Важной характеристикой процесса забывания является то, что информация находится в памяти, но извлечь и воспроизвести ее невозможно. Для того чтобы найти данную информацию, необходимо ее активировать с помощью специальных методов. Для образовательного процесса целью диагностики забывания является выявление нужной информации, допускающей замену информацией, близкой по смыслу. Данная методика заключается в следующем: учащимся перед изучением новой темы предлагают повторить определения понятий, на которых базируется новый материал. На следующем уроке учащиеся воспроизводят понятия и составляется таблица 2.

Данный вид диагностики целесообразно проводить за 2–3 урока до начала изучения новой темы, выделяя в ней необходимую изученную ранее информацию. Например, перед изучением темы «Измерение углов с помощью транспортира» учитель предлагает дома повторить определения: «угол», «развернутый угол». В начале урока учащиеся воспроизводят определения. Результаты сводятся в таблицу. Изучение результатов по классу позволяет учителю построить объяснение следующего урока так, чтобы актуализировать ту информацию, которая необходима для понимания нового материала, переноса во внутренний план новых понятий и алгоритмов.

Пример. Определения:

– Угол — это геометрическая фигура, которая состоит из точки и двух лучей, исходящих из этой точки.

– Угол называется развернутым, если обе его стороны лежат на одной прямой.

Количество единиц информации (количество слов) — 26.

Таблица 2

Результаты воспроизведения информационных единиц по темам «Луч», «Угол» учеником А.

Результаты воспроизведения		
Количество правильно воспроизведенных единиц информации	Количество тождественных замен	Количество значимых единиц информации, отсутствующих в тексте
10	13	4

Ученик А. дал следующие ответы:

– Углом называется *геометрическая фигура*, состоящая из точки и двух лучей.

– Угол называется развернутым, когда каждая из двух его сторон лежит на одной прямой.

Результаты диагностики по классу показали, что личная ошибка ученика А. — типичная ошибка класса. Пропущено важное уточнение о лучах, исходящих из одной точки. Из этого следует, что ученики не полностью усвоили понятие «угол». Учителю целесообразно вернуться к этому понятию, показать, как может выглядеть фигура, состоящая из точки и двух лучей

«Формирование и развитие компетентности в области использования информационно-коммуникационных технологий».

Для получения предметных результатов необходимы метапредметные умения в области информационно-технологических компетенций. Современные ученики часто предпочитают книге электронный носитель информации, при этом «продвинуто» учащихся уже в 5-м классе сильно разнится.

Диагностика. Для учета сформированности информационно-технологической компетенции целесообразно провести анкетирование.

Примерные вопросы для анкеты

1. Есть ли у вас электронная почта?
2. Пользуетесь ли вы поисковыми системами Интернета?
3. Есть ли у вас навык создания презентаций?
4. Используете вы видеоуроки в случае отсутствия в школе?
5. Пользуетесь ли вы цифровыми образовательными ресурсами?
6. Есть ли у вас страничка в социальной сети?

«Формирование и развитие экологического мышления, умение применять его в познавательной, коммуникативной, социальной практике и профессиональной ориентации».

Экологическое мышление — сознательный учет человеком причинно-следственных связей в глобальной системе Природа – Человек – Общество – Техника при теоретическом рассмотрении вопросов, планировании действий и их осуществлении.

Решая задачи экологического содержания, мы тем самым объединяем личностное восприятие с предметным и метапредметным содержанием. В результате учащиеся задумываются над важностью Природы в жизни Человека. Математика создает условия для развития умения давать количественную оценку состояния природных объектов и явлений, положительных и отрицательных последствий деятельности человека

в природном и социальном окружении. Текстовые задачи позволяют раскрыть вопросы среды обитания, заботы о ней, о рациональном природопользовании, восстановлении и приумножении ее природных богатств. Каждая задача вносит вклад в формирование экологического сознания. Важно научить учащихся анализировать задачи не только с предметной стороны, но и по содержанию текста.

Диагностика. Задачи для 5-го класса (1-е полугодие; тексты задач разработаны Ю.А. Бондаренковой [4]).

Задача 1. Тяжелые машины и автобусы за каждый километр пробега выделяют 23 грамма азота. Сколько газа выделил автобус маршрута № 17, если он сделал 5 рейсов? Расстояние от вокзала до деревни равно 15 км.

Какое значение играет природа в жизни человека? Люди знают, что разрушать природу нельзя, так зачем же они это делают? О чем бы ты написал в сочинении «Природа и здоровье человека»?

Если бы ты был архитектором города, то построил бы школу около большой автотрассы? Какие меры необходимо предпринимать по предотвращению загрязнения окружающей среды? Как влияет выброс вредных веществ на здоровье человека? Только ли человек страдает от этого?

Задача 2. На территории Смоленской области протекает 1150 рек. Что будет, если 122 реки пересохнут из-за вырубки деревьев? Сколько рек останется в нашей области?

Задача 3. Сотни тысяч птиц прилетают к нам весной. Все знают, какую роль они играют в охране леса от вредных насекомых. Подсчитано, что одна пара поползней приносит птенцам за день около 300 гусениц; дятлы — в 3 раза больше, чем поползни, а скворцы — в 5 раз больше поползней. На сколько больше гусениц приносят своим птенцам скворцы, чем дятлы? Что будет с лесом, если погибнет большая часть птиц?

Рассмотрев возможности формирования личностных достижений на уроках математики, сделаем следующие выводы:

– учитель включает в свою рабочую программу уроки, на которых планируется присвоение соответствующих ценностей учащимися [16];

– достижение метапредметных результатов будет обеспечено только при условии учета познавательных особенностей учащихся;

– современные средства диагностики результатов освоения программы учащимися 5–6-х классов представляют единый комплекс, содержащий задания для диагностики предметных, метапредметных и личностных (ценностных) достижений ученика.

ЛУЧШИЕ РАБОТЫ КОНКУРСА

■ В конкурсе приняли участие 306 учащихся 5–11-х классов из 38 населенных пунктов.

Победитель конкурса

Команда учащихся средней школы № 2 г. Суджа Курской области, 6-й и 8-й классы, руководитель: Татьяна Михайловна Воронцова.

Призеры конкурса

Команда учащихся Еметкинской средней школы, дер. Еметкино, Козловского района Чувашской Республики, 5-й класс, руководитель: Лариса Геннадиевна Егорова.

Команда учащихся 8 «Б» класса средней школы № 32 г. Нальчика Кабардино-Балкарской Республики, руководитель: Елена Александровна Пышная.

Поощрительная премия

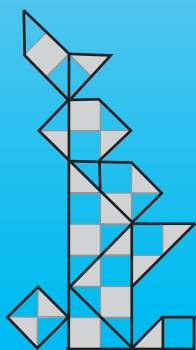
Джабраилов Магомед, ученик 6 «1» класса гимназии № 7 г. Махачкалы, Республика Дагестан, руководитель: Нуржаган Магомедовна Акаева.

Дополнительно хотим отметить следующих учителей, которые сумели заинтересовать и организовать участие своих учеников:

Джужь Валентина Александровна, гимназия № 10 ЛИК, г. Невинномысск Ставропольского края;

Салахова Ризиды Хаметхарисовна, Лашманская средняя школа Черемшанского района Республики Татарстан.

Поздравляем победителей и призеров конкурса! С удовольствием знакомим читателей журнала с лучшими работами, присланными на наш конкурс.



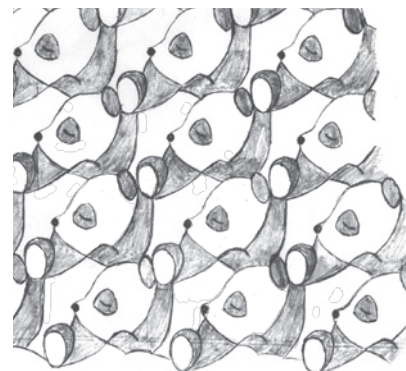
ЗАЙЧИК

Сычева Анастасия, 7-й класс, СОШ № 3,
г. Искитим Новосибирской обл.
(учитель: Л.П. Ипатова)



«КОТИК С РЫБКАМИ»

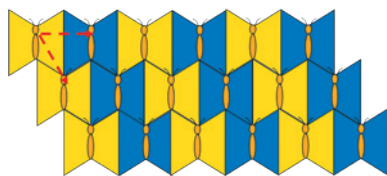
Дьяченко Анастасия, 8-й класс, МКОУ «Суджанская
средняя общеобразовательная школа № 2»
(учитель: Т.М. Воронцова)



«СПЯЩИЙ ПАНДА»

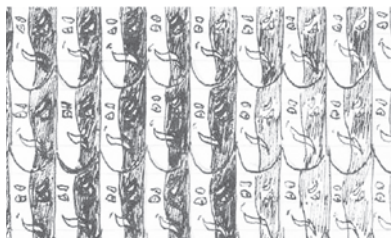
Мусаева Ольга, 8-й класс, МКОУ «Суджанская
средняя общеобразовательная школа № 2»
(учитель: Т.М. Воронцова)

Этап 1. Паркеты



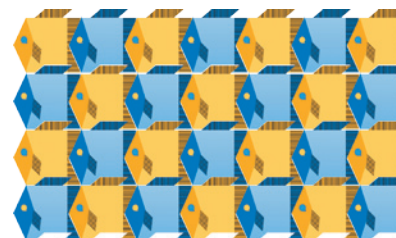
«БАБОЧКИ»

М. Аршакян, 7-й класс, СОШ № 34,
г. Каменск-Уральский, Свердловская обл.
(учитель: Т.В. Голубь)



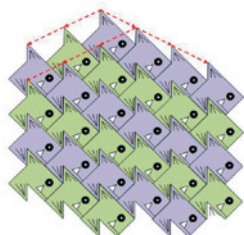
«МАСКИ»

Е. Ковалевская, 7-й класс, СОШ № 34,
г. Каменск-Уральский, Свердловская обл.
(учитель: Т.В. Голубь)



«РЫБКИ»

В. Яздан, 5-й класс, СОШ № 5,
г. Пролетарск, Ростовская обл.
(учитель: Л.Г. Яздан)



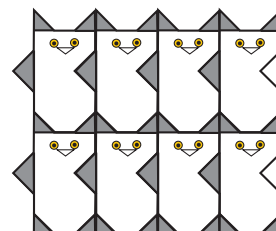
«ПИРАНЬИ»

А. Капустина, 7-й класс, СОШ № 34,
г. Каменск-Уральский, Свердловская обл.
(учитель: Т.В. Голубь)



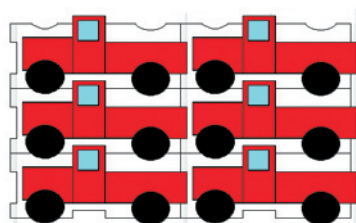
«РУССКИЕ МОТИВЫ»

Команда «МК Альфа», 5-й класс,
СОШ № 48, г. Ярославль
(учитель: К.Н. Цветкова)



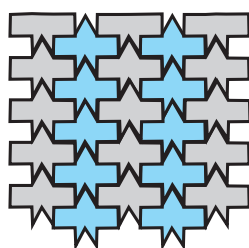
«СОВЫ»

Команда «ЛИК», гимназия № 10,
г. Невинномысск, Ставропольский край
(учитель: В.А. Джуль)



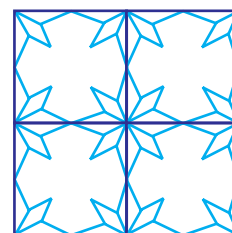
«КРАСНЫЙ АВТОМОБИЛЬ»

Команда «ЛИК», гимназия № 10,
г. Невинномысск, Ставропольский край
(учитель: В.А. Джуль)



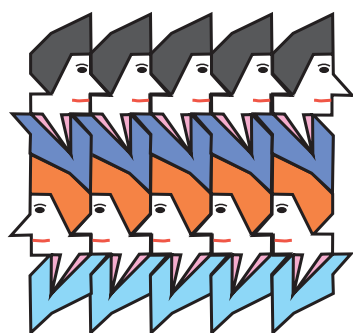
«СТЯЯ ЛАСТОЧЕК»

Ковалева Кристина и Кузнецова екатерина,
7-й класс, СОШ №3, г. Искитим Новосибирской обл.
(учитель Л.П. Ипатова)



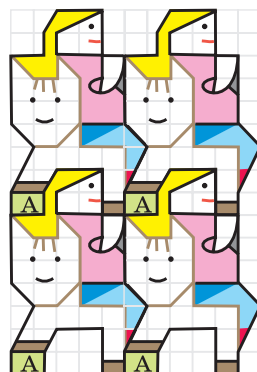
«АСТРЫ»

Гурьев Родион, 6-й класс, «Вилуйская гимназия»,
г. Вилуйск, Республика Саха (Якутия)
(учитель: Н.Н. Сафронов)



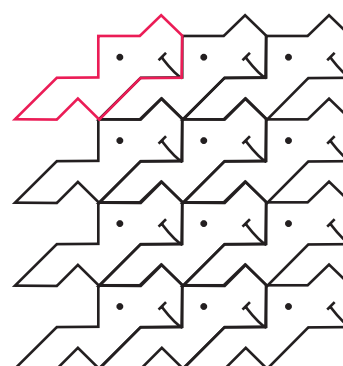
«ЛИЦА»

М. Кулабухова, 8 «А» класс,
школа № 4, г. Калуга
(учитель: И.В. Аронская)



«ДЕВОЧКА,
ЛОШАДКА И КУБИК»

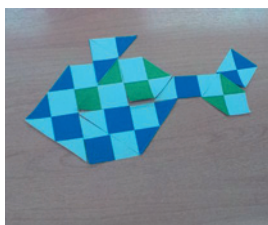
Д. Новикова, 6-й класс, «Вилуйская гимназия»,
г. Вилуйск, Республика Саха (Якутия)
(учитель: Н.Н. Сафронов)



«СТАДО НОСОРОГОВ»

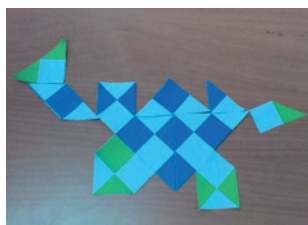
А. Кезин, 6-й класс,
лицей, г. Черемхово,
Иркутская обл. (учитель: Е.В. Сафонова)

Этап 2. Клетчатый танграм



РЫБКА ИЛИ ВЕРТОЛЕТ

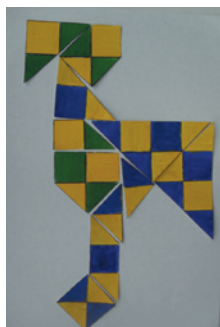
И. Шайхетдинова, Б. Салахов, Л. Нуртдинова, И. Хасаншин, Н. Нуретдинова,
6-й класс, Лашманская СОШ, Черемшанский р-н, Республика Татарстан (учитель: Р.Х. Салахова)



БЕГУЩИЙ ВЕРБЛЮД



УТОЧКА



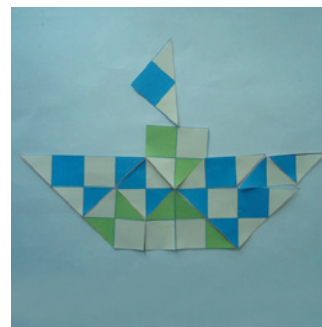
ЖУРАВЛЬ

Н. Камалова, 8-й класс, с. Сулейменово,
Курганская обл. (учитель: Сандярова)

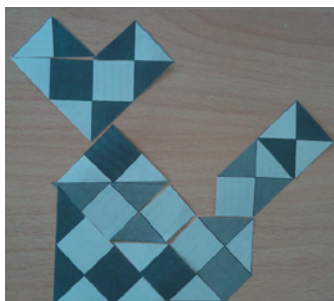


БЕГУЩИЙ ЧЕЛОВЕК

В. Яздан,
5-й класс, СОШ № 5, г. Пролетарск, Ростовская обл. (учитель: Л.Г. Яздан)

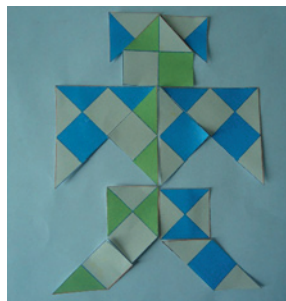


КОРАБЛИК



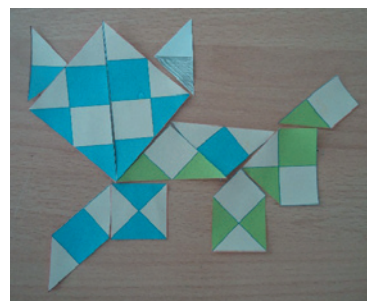
КОТЕНОК

Ю. Тарасова, 7-й класс, СОШ № 5, г. Пролетарск,
Ростовская обл. (учитель: Л.Г. Яздан)



СИЛАЧ

И. Мантуло,
7-й класс, СОШ № 5, г. Пролетарск, Ростовская обл. (учитель: Л.Г. Яздан)



ЛЕВ



ДЕВОЧКА В ПОНЧО

Н. Хачатрян, 7-й класс, СОШ № 5, г. Пролетарск,
Ростовская обл. (учитель: Л.Г. Яздан)



ЩЕНОК

Г. Шац, 7-й класс, СОШ № 5, г. Пролетарск,
Ростовская обл. (учитель: Л.Г. Яздан)



ЧЕЛОВЕЧЕК

Д. Яковенко, 7-й класс, СОШ № 5, г. Пролетарск,
Ростовская обл. (учитель: Л.Г. Яздан)

Этап 3. Дальность горизонта

КОМАНДА «КВАНТОР»

(Д. БАБУГОВА, М. КАРТЛЫКОВА,
Э. НАТБИЕВА, А. КУЗНЕЦОВА),
8 «Б» КЛАСС, СШ № 32,
Г. НАЛЬЧИК
(РУКОВОДИТЕЛЬ: Е.А. ПЫШНАЯ)

Мы живем в Кабардино-Балкарии, и если брать самую высокую точку нашей местности, то она совпадет с самой высокой точкой Европы — с вершиной горы Эльбрус. Эльбрус двуглавый, поэтому мы решили посчитать дальность горизонта для обеих вершин Эльбруса и для седловины (между вершинами) **1**. Высоту всех трех точек мы узнали из книги «Заповедная страна», авторами которой являются наши земляки, Мария и Виктор Котляровы.

Западная вершина:

$$h = 5642 \text{ м} = 5,642 \text{ км};$$

$$L = 113\sqrt{h}, \quad L = 113\sqrt{5,642} \approx 268,41 \text{ км}.$$

Принимаем во внимание атмосферную рефракцию, умножая полученный результат на 1,06. Получаем 284,51 км.

Ответ: 284,51 км.

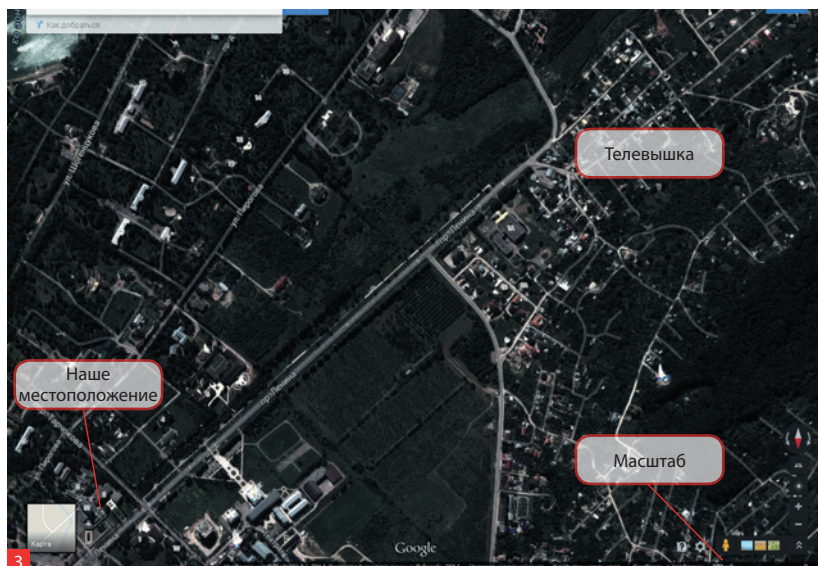
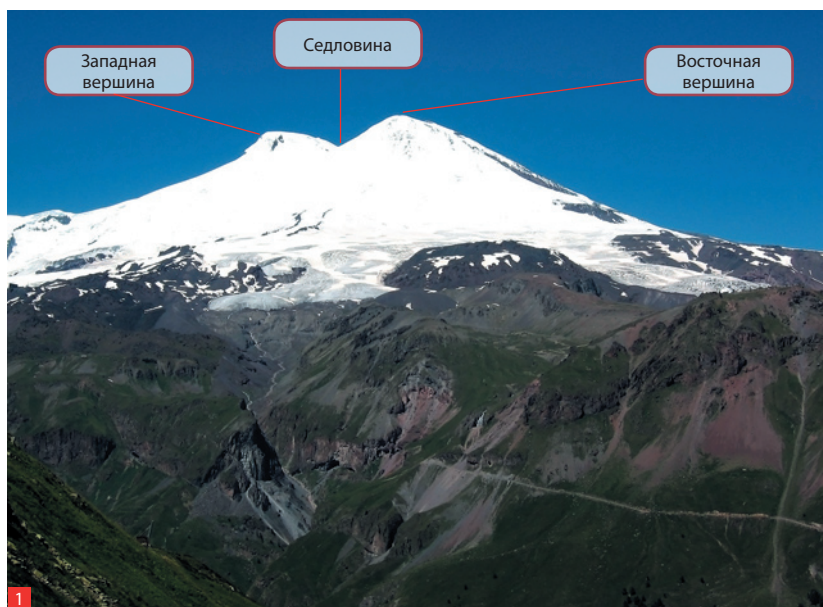
Восточная вершина:

$$h = 5621 \text{ м} = 5,621 \text{ км};$$

$$L = 113\sqrt{h}, \quad L = 113\sqrt{5,621} \approx 267,91 \text{ км}.$$

Принимаем во внимание атмосферную рефракцию, умножая полученный результат на 1,06. Получаем 283,98 км.

Ответ: 283,98 км.



Седловина:

$$h = 5200 \text{ м} = 5,2 \text{ км};$$

$$L = 113\sqrt{h}, \quad L = 113\sqrt{5,2} \approx 257,68 \text{ км}.$$

Принимаем во внимание атмосферную рефракцию, умножая полученный результат на 1,06. Получаем 273,14 км.

Ответ: 273,14 км.

Самым же высоким сооружением города Нальчика является телевышка **2**.

Ее высота тоже известна, но мы решили воспользоваться одним из способов определения высоты, описанным в книге Я.И. Перельмана. А для определения расстояния до объекта — более современными технологиями, картами Google **3**.

Масштаб карты 1 : 25 000.

Расстояние от телевышки до места наблюдения по карте равно 8 см. Значит, реальное расстояние:

$$8 \cdot 25\,000 = 200\,000 \text{ см} = 2000 \text{ м} = 2 \text{ км}.$$

Далее мы выехали на место, с которого измеряли башню.

Проспект Ленина, улица, с которой мы проводили измерения, имеет подъем, поэтому основание телевышки находилось на уровне наших глаз. Для измерения высоты мы воспользовались обычным карандашом.

Правильное положение руки при измерении высоты **4**:

Неправильное положение руки при измерении высоты **5**:

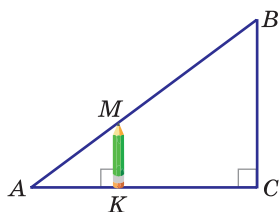


Далее решаем задачу (кстати, мы еще не проходили подобие треугольников, но благодаря этому конкурсу мы узнали много нового, спасибо!).

Дано: $AC = 2000$ м (вычислили по карте);

$AK = 0,6$ м (длина руки);

$KM = 0,058$ м (высота карандаша).



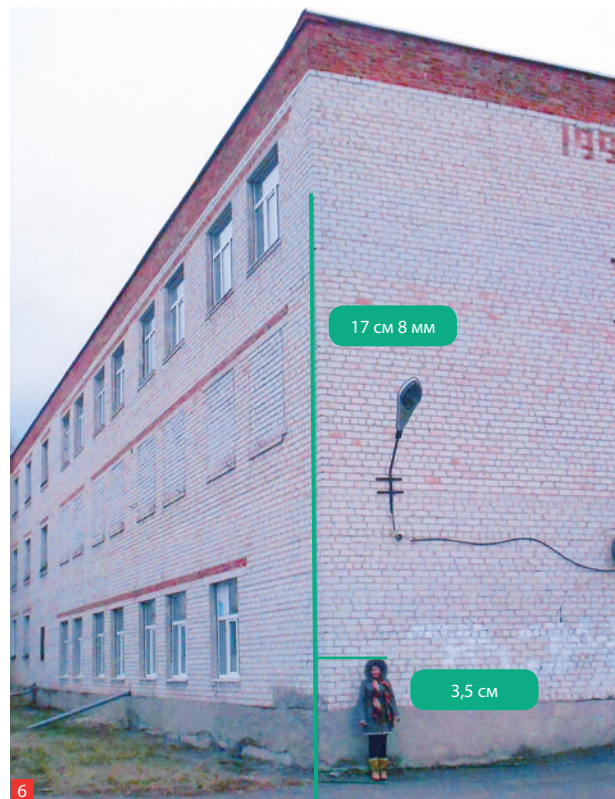
Найти: BC .

Решение. Из подобия треугольников AMK и ABC следует:

$$\frac{AC}{AK} = \frac{BC}{KM}, \quad BC = \frac{AC \cdot KM}{AK},$$

$$BC = \frac{2000 \cdot 0,058}{0,6} \approx 193,3 \text{ м.}$$

Ответ: $BC = 193,3$ м



Остается найти дальность горизонта:

$$L = 113\sqrt{h}, \quad h = 0,193 \text{ км,}$$

$$L = 113\sqrt{0,193} \approx 49,64 \text{ км.}$$

Принимаем во внимание атмосферную рефракцию, умножая полученный результат на 1,06. Получаем 52,62 км.

Ответ: 52,62 км.

А. ГРИНЬ, Е. НЕЧАЕВА,
А. ДЬЯЧЕНКО, О. МУСАЕВА,
А. МЕЛЬНИКОВ, Д. ШЕВЯКИН,
УЧАЩИЕСЯ 6-ГО И 8-ГО КЛАССОВ,
СУДЖАНСКАЯ СШ № 2, Г. СУДЖА, КУРСКАЯ ОБЛ.
(РУКОВОДИТЕЛЬ: Т.М. ВОРОНЦОВА)

На первом заседании группы по заданию № 3 А. Гринь и Е. Нечаева (6-й класс), после прочтения ответили, что хорошо виден горизонт и окрестности из окон третьего этажа нашей школы, если смотреть на северо-запад, и со второго этажа, если смотреть на юго-восток.

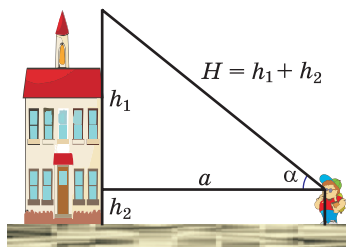
На вопрос, как измерить высоту здания, ученики группы ответили по-разному.

1. Посмотреть по строительной смете или плану.
2. Сложить высоту трех этажей от пола до потолка и сделать поправку на межэтажные перекрытия и потолок.
3. Сделать фотографию школы и стоящего рядом ученика 6. Зная рост ученика и измерив его рост и высоту школы по фотографии, решать задачу на пропорцию.



4. Взять угломер, определить с его помощью угол между горизонтом и точкой наблюдения **7** и решить задачу, показанную на рисунке (H — высота объекта, h_1 и h_2 — высота до объекта и высота до глаза наблюдателя, a — расстояние до здания).

5. Взять современный прибор для определения высоты (тахеометр), определить высоту интересующего нас здания.



Мы отказались от первых двух предложений, посчитав их малоинтересными и выполнимыми не для всех случаев (то есть частным случаем).

Старшие участники нашей группы, О. Мусаева и Н. Дьяченко, а также А. Мельников и Д. Шевякин предположили, что самым высоким зданием пристанционной части города может быть здание элеватора, пятиэтажный дом (он в г. Суджа единственный) или колокольня Замостянского храма Преображения Господня. Решили все это проверить.

Дальность горизонта, видимого с третьего этажа нашей школы (работа Е. Нечаевой и А. Гринь, 6-й класс.) Определение высоты выполним по фотографии.

Высота точки наблюдения на фотографии — 17,8 см.

Высота Е. Нечаевой на фотографии — 3,5 см.

Рост Е. Нечаевой — 1,62 м = 162 см.

Определим высоту точки наблюдения с третьего этажа школы (H).



$$H = \frac{17,8 \cdot 162}{3,5} = 824 \text{ см} = 8,24 \text{ м} = 0,00824 \text{ км};$$

$$L \approx 113\sqrt{0,00824} \approx 10,26 \text{ км},$$

с учетом рефракции

$$L \approx 10,26 \cdot 1,06 \approx 10,88 \text{ км}.$$

Проверим высоту с помощью угломера.

Как далеко можно видеть с колокольни церкви Преображения?

Способ I. Угломером измерили угол α и проверили с помощью тахеометра **8**. Измерили расстояние (рулеткой и с помощью тахеометра) до основания колокольни: $AB = 27 \text{ м}$.

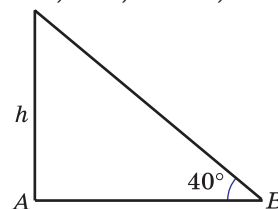
$$\operatorname{tg} 40^\circ = \frac{h}{AB},$$

$$h = AB \cdot \operatorname{tg} 40^\circ, h = 27 \cdot 0,83 = 22,41 \text{ м};$$

$$L \approx 113\sqrt{0,02241} \approx 16,92 \text{ км},$$

с учетом рефракции

$$L \approx 16,92 \cdot 1,06 \approx 17,94 \text{ км}.$$



Способ II. $h = 22,53 \text{ м}$ — данные тахеометра.

$$L \approx 113\sqrt{0,02253} \approx 16,95 \text{ км},$$

с учетом рефракции

$$L \approx 16,95 \cdot 1,06 \approx 17,96 \text{ км}.$$

Самым высоким объектом в нашем городе является здание элеватора. Его высота 44,99 м; определяли высоту с помощью тахеометра, а также угломера:

$$L \approx 113\sqrt{0,04499} \approx 23,96 \text{ км},$$

с учетом рефракции

$$L \approx 23,96 \cdot 1,06 \approx 25,397 \text{ км}.$$



И. ВАСИЛЬЕВА, Ф. АЛИЕВА, А. КИРИЛЛОВА,
А. СОЛОВЬЕВ, М. ТИМОФЕЕВ, А. ПОЧИНКИН,
Д. ГАВРИЛОВ, Л. ЧЕТВЕРГОВА, Л. СЕРГЕЕВА,
5, 6, 8-Й КЛАССЫ, ЕМЕТКИНСКАЯ СРЕДНЯЯ
ШКОЛА, КОЗЛОВСКИЙ Р-Н, ЧУВАШСКАЯ
РЕСПУБЛИКА (РУКОВОДИТЕЛЬ: А.Г. ЕГОРОВА)

Самым высоким сооружением в нашей деревне является вышка сотовой связи МТС **9**:

$$h = 85 \text{ м} = 0,085 \text{ км.}$$

Если туда залезть, то мы бы увидели горизонт на расстоянии

$$L = 113\sqrt{0,085} \approx 32,9 \text{ км.}$$

Некоторые из членов нашего кружка вместе с руководителем с 10 по 12 октября 2014 г. побывали в Москве на «Фестивале науки». Оттуда мы привезли фотографию с видом Москвы, снятую нами с 28 этажа МГУ **10**. И нам стало любопытно узнать дальность горизонта в данном случае. Мы узнали, что высота здания МГУ на уровне 36-го этажа равна 236 м. Тогда будем полагать, что высота 28-го этажа примерно равна 184 м:

$$h = 236 : 36 \cdot 28 \approx 184 \text{ м.}$$

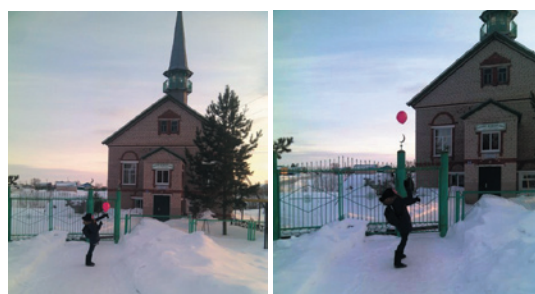
$$L = 113\sqrt{0,184} \approx 48,5 \text{ м}$$

— дальность горизонта.



Л. ГАЛИМОВА, Л. ШАЙХУТДИНОВА,
А. АБУНАГИМОВА, Р. ГАЗИМЗЯНОВА,
10-Й КЛАСС, ЛАШМАНСКАЯ СШ,
РЕСПУБЛИКА ТАТАРСТАН
(РУКОВОДИТЕЛЬ: Р.Х. САЛАХОВА)

Мы живем в татарском селе. Самые высокие — вышка сотовой связи (кстати, их у нас три) и здание мечети.



Высоту мечети мы измеряли с помощью шарика в безветренную погоду. И у нас высота мечети получилась равной 20 м. Мы уточнили высоту у председателя колхоза — ответ совпал с нашим.

Дальность горизонта:

$$L = 113\sqrt{0,02} \approx 15,98 \text{ км, } \frac{1}{15} \cdot 15,98 = 1,06 \text{ км,}$$

а с поправкой

$$15,98 + 1,06 = 17,04 \text{ км.}$$

Ответ: дальность горизонта с высоты мечети 17,04 км.

Высота сотовой вышки:

Дальность горизонта:

$$50 \text{ м} = 0,05 \text{ км;}$$

$$L = 113\sqrt{0,05} + \frac{1}{15} \cdot 113\sqrt{0,05} \approx 26,95 \text{ км.}$$

Ответ: дальность горизонта с сотовой вышки 26,95 км.

А. ЗАБЕЛИН,
alvazab@mail.ru,
г. Москва

ОБ ОПЫТЕ ВЕДЕНИЯ КРУЖКОВ, ИЛИ КАК УВЛЕЧЬ МАТЕМАТИКОЙ?

■ На уроках математики мы учим складывать, вычитать, умножать, делить. Сначала натуральные числа, затем дроби, отрицательные числа. Учим школьников решать пропорции, высчитывать проценты, раскрывать скобки, раскладывать на множители, решать уравнения и т.д. Это все техника. А математика предлагает огромный набор средств! Но вот где их можно использовать. На мой взгляд, на уроках математики они обычно раскрываются явно недостаточно, особенно в средней и старшей школе, где объем материала весьма велик. Ребята часто спрашивают нечто вроде «А можно ли решать эту задачу через пропорции?», действительно не понимая, можно в данном случае применять пропорцию или нельзя. А то просто применяют, не понимая сути того, что делают. Отсюда формальное отношение к математическим процедурам, постепенное угасание желания мыслить на уроках математики. Ребятам остается поверить учителю на слово, что то или иное средство работает, а то и просто выучить. Разве такое станет интересным?

У меня складывается впечатление, что на уроках математики мы часто своими предлагаемыми темами отвечаем на незаданные школьниками вопросы, даем им инструменты, которые не ясно, как работают и для чего нужны. И вполне логично, что ребята задаются вопросом «Зачем нам это?». Но если в голове учащегося созрел вопрос «А как?!» («А почему?», «Как же это может быть?!») — вот тогда соответствующие знания будут актуальны и желанны. Ребята будут искать ответы, и если не найдут, то информация от учителя будет для них в самую точку. Указанные вопросы возникают в головах школьников тогда, когда их что-то зацепило в предлагаемых сюжетах (заданиях) или активностях. Просто оглашение новой темы никак не «цепляет» и не увлекает.

Мало смысла отвечать на незаданные вопросы, поэтому основной своей задачей вижу увлечение учеников и побуждение их к размышлениям. Дело это непростое, особенно если у школьника уже сложилось негативное отношение к математике и привычка, решая задачу, не думать, а вспоминать, как учили, или делать задания автоматически. Такие случаи, к сожалению, не редкость, особенно ближе к старшим классам. Формальные алгоритмы действия по образцу, формулы и теоремы у многих не вызывают ничего, кроме скуки, а иногда и злости. Однако учебные программы перенасыщены именно таким содержанием. Места в программе для чего-либо действительно увлекательного из области математики обычно почти не находится, к большому моему сожалению.

Ликвидировать указанные недостатки способны факультативные занятия по математике или кружки. Они, с моей точки зрения, призваны побуждать школьников думать самостоятельно, искать *свои* пути решения (а не заготовленные кем бы то ни было) и действовать не по формулам, а по логике и здравому смыслу. Я уже более 12 лет веду различные кружки по математике для учащихся 1–9-х классов и вижу в таких занятиях большую ценность и пользу. Я набирался опыта в проведении кружков на Малом Мехмате МГУ, в школе-интернате «Интеллектуал», в школе «Золотое сечение». Наконец я решил привести в систему свой опыт и поделиться им с коллегами и всеми интересующимися.

Главное, что я хочу осветить в статье, — это принципы подбора материала для занятий и принципы проведения занятий. Те же идеи можно использовать и на уроках математики.

«Свободная программа»

На моих кружках нет списка изучаемых тем в строго определенном порядке (как это обычно бывает на уроках) и нет конкретных знаний, умений, навыков, которые школьники обязательно должны приобрести. Дело в том, что, входя в класс со словами «Тема сегодняшнего урока — решение задач на пропорции», едва ли мы этим увлечем и замотивируем детей. Но эти же самые пропорции могут появиться из разных интересных жизненных сюжетов. Тогда учителю останется только вовремя озвучить: «Это назвали пропорцией». Аналогично дело обстоит и с другими темами, как в рамках школьной программы, так и вне ее. Работу на своих кружках я строю от сюжета (задачи) к темам и разделам математики, а не наоборот, как это традиционно бывает на уроках! Задачи выступают в первую очередь не почвой для тренировки умений и навыков, а почвой для размышлений и поиска нужной математики в различных ситуациях. Такой подход я называю «свободной программой».

У преподавателя, разумеется, для каждой задачи и активности, предлагаемой на занятии, имеется представление о ее математической подоплеке, зачастую весьма глубокой. Задача предстает как вершина айсберга, а преподаватель видит весь айсберг или хотя бы большую его часть. Другими словами, учитель должен понимать, на какие темы и как можно выйти из конкретных заданий и активностей.

При таком подходе учителю необходима гибкость, умение распознать и подхватить проявившуюся тему, готовность, ориентируясь на ситуацию, уровень и интересы ребят, сменить акценты. При этом каждый ученик возьмет свое

и в своем объеме, то есть продвинется в том, к восприятию чего он оказался готов.

«Свободная программа» вполне подходит для подготовки школьников к олимпиадам, при этом сама подготовка для меня не самоцель. Главные цели кружков — увлечение ребят и развитие их способностей мыслить.

Занятие кружка обычно длится 40–60 минут для 4–6-х классов, 60–90 минут для 7–8-х классов. Хорошо, если учащихся в группе не более двенадцати. В этом случае можно уделить больше внимания каждому и больше индивидуализировать процесс. Однако возможна работа и с группами до 30 человек.

Чаще всего для одного занятия я подбираю задания на различные темы, но занятие может быть и тематическим, в том смысле, что для него подобраны задания с общей идеей, хотя сюжеты при этом могут быть самыми разнообразными. Такими идеями могут быть: четность, использование графов, обратного хода, принципа Дирихле и пр. Задания могут быть настолько нестандартными, что распознать в них указанную тему довольно сложно. Например, слово «четность» вовсе не означает, что задачи будут про четные и нечетные числа. Сюжет может быть даже таким:

В рюкзаке лежит 4 банки: две со сгущенными сливками и две со сгущенным молоком. Наугад достают две банки. Если это одинаковые банки, то они идут на завтрак, а в рюкзак кладут банку с молоком. Если банки разные, то они тоже идут на завтрак, но в рюкзак кладут банку со сливками. В конце концов в рюкзаке осталась одна банка. Что в ней: молоко или сливки?

На первом занятии при знакомстве с ребятами интересно пообщаться на тему «Для чего нужна математика, чему она учит?». Ответы школьников отразят их представления и могут быть весьма показательными. Попробуйте.

Подбор заданий и материалов для занятий

При подготовке заданий и занятий я исхожу из убеждения в том, что вовлечение во что бы то ни было должно иметь эмоциональный механизм. Причем играют роль эмоции как со стороны преподавателя, так и школьников.

Во-первых, увлечь может прежде всего увлеченный. Поэтому подбирать для кружка нужно задания и активности, которые захватывают самого преподавателя. Тогда занятие будет проходить живо и ярко. Поэтому и приводить я буду примеры, которые лично меня увлекают.

Во-вторых, такие детские эмоции, как радость, веселье, удивление, ощущение невероятного, чудесного, красивого не только создают благо-

приятный фон для занятия, но и существенно способствуют развитию интереса. Даже если они придут не из самой математики, а из сюжета задачи или атмосферы вокруг, они все равно будут делать свое доброе дело. Что же, будем способствовать возникновению таких эмоций. Вот почему я уделяю внимание еще и загадочности, чудесам, интригам, юмору.

Занятие я начинаю обычно с разминочной части, для которой готовлю простое задание или задание с хитринкой. Простые задания даются для того, чтобы каждый смог решить и почувствовать успех, что немаловажно. Задания с хитринкой, на смекалку апеллируют к внимательному слушанию и восприятию ситуации, при этом не требуют почти никакой арифметики или же требуют самой простейшей. Я сразу предупреждаю ребят, что предлагаю иногда задачи-ловушки, которые лишь кажутся совсем простыми, и предостерегаю не попадаться в эти ловушки. Тем самым создаю некую интригу.

Пример 1. В кошельке лежит две монеты на общую сумму 15 копеек. Одна из них не пятак. Что это за монеты?

Пример 2. В Наоборотии этажи в домах считаются не как у нас, а сверху вниз (то есть верхний этаж имеет номер 1). Дима живет в Наоборотии на 5-м этаже 12-этажного дома. Какой это этаж по нашей привычной системе?

При решении второй задачи многие ребята быстро дают неверный ответ 7. Ниже я приведу реальные диалоги с моих занятий, в том числе и в связи с указанной задачей.

Важнейший принцип подбора материалов для занятий кружка — обязательное наличие увлекательных, необычных и захватывающих заданий. Чем же можно увлечь ребят? Специальными заданиями и самой процедурой занятия. Это могут быть: логические задачи, математические игры, фокусы, головоломки (в том числе материальные, принесенные на занятие), творческие задачи, интерактивные задания, демонстрация увлекательных явлений, демонстрации математических видеосюжетов и анимаций, парадоксы и софизмы, задания на интуицию, многовариантные (неоднозначные) задачи и задачки-истории. Приведу примеры для каждого случая.

Логические задачи

Почти в каждое занятие я включаю задание на логику. Такие задания традиционны и в то же время увлекательны и полезны, так как развивают умения, важные для любой сферы. Логических задач великое множество, приведу лишь два примера.

Пример 3. Ангелине пришли два письма по электронной почте в неизвестной кодировке.

В первом была подпись «КЛУЛ», а во втором — «вПОЛ». Известно, что письма могли написать Петя, Дима и Саша. Кто из них прислал первое письмо, а кто второе?

Еще более увлекательны сложные удивляющие задачи на логику.

Пример 4. В парке гуляет двое мужчин. Первый спрашивает второго, сколько лет двум его дочерям.

Второй говорит: «Произведение возрастов двух моих дочерей меньше 6 и равно числу голубей на той лавке».

Первый: «Мне этого недостаточно».

Второй: «Ладно. Тогда старшая из дочерей — вылитая моя жена».

Первый: «Теперь понятно».

Чему равно число голубей на лавке? И сколько лет дочерям?

Математические игры

Игра «**13 палочек**». Играют двое, ходят по очереди. За один ход разрешается взять 1, 2 или 3 палочки. Проигрывает тот, кто берет последнюю палочку. Можно ли научиться играть в эту игру так, чтобы точно выиграть? А как играть, если палочек не 13, а 14?

В детстве я смотрел популярную телеигру «Ключи от форта «Боярд», и там каждый раз одному из участников предлагалась именно такая игра. Я еще тогда придумал для нее выигрышную стратегию, но, к моему удивлению, мало кому из реальных участников удавалось выиграть. А ведь выигрыш там был приличный.

Игра «**Две кучи конфет**». Имеется две кучи конфет: в первой — 40 штук, во второй — 45. За ход нужно одну кучу съесть, а другую разделить на две (необязательно равные). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Как играть в эту игру, чтобы точно выиграть?

Фокусы

Фокус «**Отгадаю зачеркнутую цифру**». Я прошу каждого школьника загадать трехзначное число, затем вычесть из него его первую, потом вторую и, наконец, третью цифры исходного числа. Если получилось двухзначное число, то прошу дописать в его начало ноль. Из полученного в итоге трехзначного числа я прошу назвать мне две любые цифры, а я отгадываю третью цифру. Вычисления все ученики проделывают одновременно, а затем я по очереди выслушиваю по две их цифры и называю каждому третью, чтобы удивить всех и каждого.

Однажды я, работая вожатым в детском лагере, между делом показал подобный фокус совсем незаинтересованным математикой подросткам.

Секрета, разумеется, не раскрыл. Так они потом долго за мной бегали, спрашивая, как же я это делаю. Засело в головах! Пришлось им напомнить про признак делимости, который, между прочим, входит в школьную программу. Фактически ребята спонтанно заинтересовались математикой!

В моей коллекции фокусов много: с числами, карточками, монетами, домино, шахматной доской, веревками, линиями и пр. Фокусы я люблю показывать, а школьники очень любят их смотреть, удивляясь и озадачиваясь.

Головоломки

Например, я прошу собрать пирамидку из принесенных деталей или вырезать из обычного листа бумаги продемонстрированную странную штуку. Как вариант, можно озадачить ребят головоломкой, чтобы она «варилась» в головах, а затем перейти к другим задачам. При этом кто-то обязательно продолжит думать над головоломкой.

Творческие задачи

Пример 5. На острове Мохнатый 4 королевства, причем каждое граничит с тремя остальными. Нарисуйте карту острова так, как вы ее себе представляете.

Пример 6. Каким мог бы быть лист фанеры в виде многоугольника, чтобы его можно было одним прямолинейным распилом разделить на 5 частей? Нарисуйте.

Весьма ярко проходит на занятии поиск способов вырезать в тетрадном листке такую дырку, через которую пролез бы человек. Скотч и клей при этом использовать нельзя. Удивлению ребят не будет предела.

Интерактивные задания

Можно, например, устроить интерактивный процесс на осмысление и проверку вероятностей: мы бросаем 2 монеты 50 раз и отмечаем на доске, сколько раз выпадает подряд два орла, две решки и орел с решкой. Похожие вещи можно делать с двумя игральными кубиками.

Другой пример: я приношу в класс 5 колпаков, и мы, разыгрывая, пытаемся решить следующую непростую логическую задачу.

Пример 7. Три мудреца не могли решить, кто из них самый мудрый. Помог им случайный прохожий. Он достал из мешка пять колпаков, три белых и два черных, и сказал, что мудрейшим будет объявлен тот, кто первым отгадает, какого цвета на нем колпак. Затем посадил спорщиков лицом друг к другу, завязал им глаза, надел по колпаку и разрешил снять повязки. Долго думали мудрецы. Наконец один из них воскликнул: «На мне белый колпак!». Как он это понял?

Стоит отметить, что школьники очень любят разыгрывание подобных задач.

Демонстрация увлекательных явлений

Демонстрация бесконечной шоколадки, которую можно бесконечное количество раз резать специальным образом так, чтобы каждый раз оставалась для съедания одна долька. Можно продемонстрировать треугольник с исчезающей клеткой. Весьма увлекательным и загадочным также является разрезание лент Мебиуса.

Демонстрация математических видеосюжетов и анимаций

Я люблю показывать видео про езду на квадратных колесах. Также иногда использую интерактивную анимацию к классической задаче про нахождение фальшивой монеты среди девяти одинаковых на вид. Последнее можно разыгрывать и в реальности, конечно.

Парадоксы и софизмы

Озадачивают ребят доказательства того, что любые два числа равны между собой или что $2 \cdot 2 = 5$. Увлекают и известные парадоксы про день казни или про брадобрея.

Пример 8. Парадокс брадобрея. Генерал призвал брадобрея и приказал брить всех, за исключением тех, кто бреется самостоятельно. Брадобрей без забот проработал один день, а на следующее утро не смог выполнить приказа, задумавшись, брить себя или нет. Кто должен брить брадобрея?

Задания на интуицию

Например, я прошу представить себе, что вы берете листок бумаги и складываете его пополам, потом еще раз пополам, а затем еще и еще — всего 50 раз. И затем прошу предположить, какую толщину будет иметь слой бумаги, сложенный подобным образом. Или определить вес 1000 стальных шариков диаметром 1 мм. Или сколько километров человек может пройти за год. Предположения ребят я обычно записываю на доске, а затем мы вместе проводим приблизительные расчеты. Это приносит ребятам массу удивлений.

Многовариантные (неоднозначные) задачи и задачки-истории

Например, задача про сдачу в магазине, деление наследства, арбузов, лепешек. Истории и сами по себе увлекательны. Здесь всегда есть что обсудить и о чем поспорить, а научные цивилизованные споры я всегда приветствую на своих занятиях.

Много прекрасных задач можно взять из книг Я.И. Перельмана, М. Гарднера, Е.И. Игнатьева и др.

Приведу еще несколько идей-рекомендаций по подбору заданий.

Опыт в целом подсказывает, что задача более увлекательна для ребят, если она:

- наглядна, жизненна, с интересным сюжетом;
- в условии содержит рисунок;
- не требует сложных вычислений;
- решается довольно просто, когда нащупана подходящая идея;
- создает эмоциональный эффект «ага-реакции» при догадке.

Особенно это важно для младших классов. Здесь же отмечу, что вычислительные навыки, память на формулы и факты, а также быстрота мыслительных процессов не входят в структуру математических способностей.

Расширяемые задачи

Расширяемые задачи — это задачи, условия которых можно изменить по ходу занятия, побудив сильных школьников думать дальше и двигаться в сторону обобщения.

Пример 9. В Таниной квартире имеется 8 розеток, 15 тройников и неограниченный запас утюгов. Какое наибольшее число утюгов Таня может включить в сеть одновременно?

Эту задачу можно обобщить на n розеток и m тройников и вывести формулу.

Пример 10. Хозяин квартиры хочет расставить 6 кресел вдоль стен прямоугольной комнаты так, чтобы вдоль каждой стены кресел стояло поровну. При этом каждое кресло должно стоять именно у стены (в центр комнаты хозяин ставить их не хочет).

После расстановки 6 кресел я предлагаю тем, кто быстрее справился, расставить 7, 5, 3, 9 кресел (каждый в своем темпе рисует у себя в тетрадке схемы комнат с креслами). Позже можем обобщить, что кресло, поставленное в угол комнаты, становится как бы двойным, так как считается 2 раза: вдоль одной стены и вдоль другой. А тогда мы можем заранее посчитать, сколько кресел нужно ставить в угол. И в этом случае решение задачи может стать уже не подбором-перебором, а логичным рассуждением.

Часто одни и те же задачи я даю для ребят разных возрастов. Различие может быть в способе работы с этими задачами и в глубине изучения лежащей в их основе математики. Универсальность многих задач для разных возрастов видна из приведенных примеров. Для младших школь-

ников можно остановиться на решении одной задачи с конкретными числами, а для старших выходить на общие закономерности.

Некоторые задачи могут способствовать расширению кругозора, приводя к сведениям из истории, биологии, географии, физики, а задания с юмором способствуют положительной атмосфере на занятии.

Пример 11. Кошей Бессмертный родился в год битвы на Куликовом поле, а паспорт получил в год Великой Октябрьской Революции. Сколько лет он прожил без паспорта? Сколько лет ему исполнилось в год полета Ю.А. Гагарина в космос? На сколько лет А.С. Пушкин младше Кошей Бессмертного?

Пример 12. «А это вам видеть пока рановато», — сказала Баба Яга своим 33 юным ученикам и приказала: «Закройте глаза!» Правый глаз закрыли все мальчики и треть девочек. Левый глаз закрыли все девочки и треть мальчиков. Сколько учеников все-таки увидели то, что видеть пока рановато?

Теперь поделюсь опытом, как можно работать с предложенными заданиями.

Возможные формы работы на занятиях

На многих своих занятиях в какой-то момент я выдаю листочек с задачами. Желательно, чтобы эти листочки были привлекательными для ребят и содержали красивые иллюстрации к задачам. Если в выданном листке ученики видят задание с картинкой, пусть даже схемой или табличкой с числами, то, по моему опыту, большинство учащихся возьмется за такую задачу раньше, чем за другие задачи из листка. В те же листки по возможности я включаю заготовки для того, чтобы сэкономить время школьников за счет подготовительной и не самой веселой деятельности по вычерчиванию таблиц, перерисовыванию фигур, переписыванию чисел и выражений. Например, если делим квадратный торт, то я заготовлю пустой квадрат, если зачеркиваем цифры в числе, то несколько раз напечатаю это число для проб, если заполняем магический квадрат 3×3 , то напечатаю в листке несколько пустых таких квадратов.

Форматы работы с заданиями

1. Общее обсуждение одной задачи (совместный поиск решения в группе), в процессе которого я иногда веду запись всех идей на доске, даже если они с чьей-либо точки зрения не помогут в решении конкретной задачи. Возможен метод мозгового штурма. В ситуациях общего обсуждения большое внимание я уделяю уме-

нию взаимодействовать, слушать и понимать друг друга и обращаю внимание ребят на это. На занятии можно устроить голосование за верный вариант решения; такой способ побуждает всех включиться и некоторым образом отнестись к предложенным вариантам.

2. Каждый решает задачи сам, имея перед собой выданный листок с заданиями, поднимает руку в случае возникновения вопроса, идей или решения, преподаватель подходит. Я всегда подчеркиваю, что сначала озвучивается идея решения и только потом ответ. По истечении некоторого времени можно устроить обсуждение или разбор наиболее трудных и проблемных для многих ребят мест.

3. Игровой формат сам по себе гораздо более увлекателен для учащихся. Можно использовать на части занятия математические игры. Играть ребята могут друг с другом, в парах, тройках, с преподавателем. Есть вариант провести целиком занятие в формате командной игры, например, «Математической карусели», задачи при этом могут быть самые разнообразные.

4. Интерактивное разыгрывание задач дети очень любят. Например, полезно разыграть задачу про мудрецов и колпаки, про распознавание фальшивой монеты среди нескольких путем взвешиваний на весах и пр.

5. Демонстрация фокуса, видео, анимации, наглядной материальной головоломки.

Одно занятие может включать в себе несколько форм работы поочередно. Разнообразие и смена видов деятельности идут на пользу.

Принципы ведения занятий

Если обобщить, то основным сквозным принципом для меня является принцип достаточной свободы для школьников. Он включает в себя свободу выбора задач для решения из выданного преподавателем листка, способов решения, высказываний, оформления решений или их отсутствия в письменном виде и пр. Каждый ученик решает и осмысливает все в своем темпе и объеме, его никто не торопит. На занятиях отсутствует назидательность, жесткие требования со стороны преподавателя, наказания. Существуют только рамки приличия и подход «не навреди другому». Дело в том, что принуждение зачастую пробуждает ответное отторжение, чего мне лично не хотелось бы.

Основные принципы, транслируемые и прививаемые школьникам

1. *Идея, процесс размышления над задачей важнее, чем ответ.* Проводя кружки, я наблюдал, с чего начинают рассказывать решение за-

дачи школьники: с размышлений или с ответа. Я заметил, что многие начинают именно с ответа. В таких случаях я прошу объяснить путь к озвученному ответу, не оценивая его правильности. Мое наблюдение может свидетельствовать о том, что у ребят имеется представление, что в математике главное — ответ. На кружках медленно, но верно я пытаюсь сломать этот стереотип, не принижая ценности верного ответа. Частенько школьники, предложив ошибочное решение, спрашивают: «Ну а ответ-то правильный?!» На такие вопросы я не отвечаю, повторив обозначенный здесь принцип.

2. *Ошибки в ходе размышлений или вычислений никак не наказываются!* Данный принцип способствует проявлению творческой активности, что я очень ценю. Заметив ошибку, преподаватель вместо явного указания на нее может привести контрпример либо альтернативный способ размышления, противоречащий исходному или приводящий к иному ответу. Это обеспечит проблемный подход к обучению и активизирует мыслительный процесс. Преподаватель предложит спокойно искать свою ошибку или иной подход к решению, подчеркнув ценность проведенного школьником поиска.

3. *Лучше решать задачу вдумчиво, долго, но верно, чем быстро и неверно.* Практически в каждой группе находятся те, кто торопливо выдает один ошибочный ответ за другим. Данный принцип призывает ребят не спешить. Я всегда подчеркиваю, что необязательно решить все предложенные задачи, к тому же никакие отметки не выставляются.

4. Приветствуется и предпочитается проведение и объяснение школьниками своих решений на наглядных рисунках, схемах, моделях. Если можно решить задачу «на пальцах», то лучше решать именно так.

Другие принципы ведения занятий

— Создание и поддержание положительного эмоционального фона, в том числе использование юмора, шуток.

— Отсутствие оценок. Хотя элемент соревнования может быть включен, если преподаватель считает это целесообразным в конкретном случае.

— Отсутствие домашних заданий, которые часто вызывают у школьников отрицательные эмоции. При этом почти всегда в конце занятия остаются нерешенные задания, над которыми желающие с удовольствием размышляют дома после занятия.

— Занятие начинается с достаточно простых заданий, затем идут сложные и на конец заго-

товлены наиболее сложные, до которых доберутся не все ученики, а только самые продвинутые.

– В конце занятия специально оставляется открытым вопрос, нерешенная задача. В таких случаях будет работать психологический эффект неоконченного действия. Поэтому не стоит к финалу занятия отвечать на все вопросы.

– Живость процесса, включение элементов интерактивности.

– Гибкость процесса ведения, учет особенностей и уровня конкретной группы и отдельных учеников. Углубление в математические закономерности и глубины допустимо до тех пор, пока ребятам интересно. Важно не допускать скуки.

Два примера реальных диалогов с занятием

Диалог в разминочной части одного из моих занятий с 5–6-ми классами с некоторыми комментариями в скобках.

Я. Начнем с разминочной задачки. Она, как обычно, несложная. Но повторяю и предостерегаю: могут быть ловушки. Не попадитесь!

Задача. В Наоборотии этажи в домах считают не как у нас, а сверху вниз (то есть верхний этаж имеет номер 1). Дима живет там на 5-м этаже 12-этажного дома. Какой это этаж по нашей привычной системе?

Школьник А (через 5 секунд). На 7-м!

Я. А как ты это получил?

Школьник А. $12 - 5 = 7$.

Я. Это уж точно. Но как это относится к нашей задаче? (Такой вопрос оказывается очень полезным, так как часто школьники предлагают математические действия, не вникнув полностью в ситуацию задачи.)

Школьник А (немного призадумавшись). Ну, всего 12 этажей, а он живет на 5-м, значит, вычитаем.

Я. Кто согласен с этим решением? (Все поднимают руки!)

Я (с улыбкой и хорошим настроением). Вот и попались! Я же предупредил вас, что могут быть ловушки! (И тут все сразу задумались, кто-то начал рисовать схему, кто-то представил себе дом, — а это то, чего я и хотел.)

Школьница С (через 20 секунд). А-а-а! На 8-м! (Не удержавшись, на радостях выдала верный ответ. Такие догадки-открытия («А-а-а!») я очень ценю. Хотя я прошу ребят не озвучивать сразу свои ответы, тем более на весь класс, но на радостях такое явление вполне понятно.)

Я. Соня, здорово, что ты поняла. Только давайте все-таки не озвучивать ответы сразу вслух, а поднимать руку.

Другой пример реального диалога с занятием для 4-го класса. Подобные диалоги с этой же самой задачей у меня происходили со школьниками самых разных возрастов: с 1-го по 6-й класс.

Задача. Хозяин квартиры хочет расставить 6 кресел вдоль стен прямоугольной комнаты так, чтобы вдоль каждой стены кресел стояло поровну. При этом каждое кресло должно стоять именно у стены (в центр комнаты хозяин ставить их не хочет).

Школьница Л (ответ через 5 секунд). Это невозможно.

Преподаватель. Почему?

Школьница Л. Шесть не делится на четыре.

Преподаватель. Это вне всякого сомнения. Но как этот факт относится к нашей задаче?

Школьница Л (призадумавшись). Ну, кресел шесть, а стен четыре.

Преподаватель. Получается, что шесть кресел раздать четырем людям нельзя так, чтобы всем досталось поровну (если, конечно, не пилить кресла пополам), а как-то хитро расставить их, наверное, можно попробовать.

Школьник В (после некоторых раздумий). О! У меня получилось! (Показывает.)

Преподаватель (подходит, смотрит нарисованную схему). Проверяем. Сколько всего у тебя на рисунке кресел?

Школьник В. Шесть.

Преподаватель. А по сколько вдоль каждой стены?

Школьник В. Тут два, тут два... А, нет, тут всего одно...

Преподаватель. Тогда пробуем исправить.

Школьник С. Я сделал!

Преподаватель (проверяет аналогичным образом). Получается, что все верно! Поздравляю! (Преподаватель теперь расширяет задачу для того, кто быстрее решил.) А теперь хозяин докупил еще одно кресло. Попробуй теперь, их 7 штук, так же расставить, чтобы вдоль каждой стены кресел стояло поровну.

Школьник С. Это уже сложнее. (И после 10-секундных раздумий). Это невозможно! Семь — нечетное число.

Преподаватель. А почему оно должно быть, по-твоему, четным?

Школьник С. Но иначе не разделится.

Преподаватель. Подожди, шесть у нас тоже не делилось на четыре.

Школьник С. Нет, четное количество кресел можно расставить, а нечетное нельзя.

Преподаватель. О! Это уже настоящая гипотеза. Математика и научные исследования так и развиваются: строятся гипотезы-предположения, а затем они проверяются. Да-

вай и здесь проверять. Мы ведь пока не доказали этого факта, пока это лишь идея. Проверишь?

Школьник М (решив задачу про 6 кресел и приступив решать про 7). Невозможно! А может быть, что задача нерешаема?

Преподаватель. Часто ли вы на уроках математики встречаете задачи, которые нельзя решить?

Школьник М. Нет.

Преподаватель. А в реальной жизни? Допустим, мы собираемся в поход и хотим пройти 700 км за неделю. Это по 100 км в день. Нереальная задача для человека. Я на своих занятиях вполне могу иногда давать вам задания, которые невозможно решить. Только невозможность придется обосновать!

Школьник К. Нет! Это возможно! Я решил! (Тянет руку, подсказывая на месте и сияя, показывает верное решение.)

Преподаватель. Здорово! Кто-то предполагал, что такое невозможно, а ты нашел решение! А теперь подумай, любое ли количество кресел можно так расставить?

Показатели успеха кружковых занятий

Для меня показатели успеха кружка не столько математические, сколько психологические! Интерес и увлеченность школьников важнее освоения ими тех или иных тем. Тем более что первое часто ведет ко второму, а вот второе к первому — едва ли. Кратко перечислю показатели успешности кружков, как я их вижу:

- горящие глаза детей;
- хорошее настроение на занятии и сразу после него у учеников и преподавателя;
- отсутствие слежения за временем со стороны

учеников (без фраз «А сколько еще осталось?»), а иногда и со стороны преподавателя;

- ощущение, что время пролетело быстро, нежелание расходиться после окончания занятия;
- сожаление, что занятия проходят редко (раз в неделю, а не два), что впереди перерыв на каникулы и пр.;

- содержательные вопросы от учащихся в процессе и после занятия;

- стремление содействовать преподавателю при подготовке и ведении занятия («Я сделаю колпаки к следующему занятию для задачи про мудрецов», «А я принесу настоящую шоколадку, чтобы на ней мы решали задачку про шоколадку», «А я принесу свою интересную задачку»);
- продолжение размышлений над нерешенными задачами после занятия.

Надеюсь, вы почерпнете из этой статьи идеи для своих занятий. Мой опыт показывает, что использование описанных материалов и принципов способствует тому, что школьники получают удовольствие от участия в кружке, а преподаватель — от проведения его.

Литература

1. Андреев А. Попробуй, отгадай! Триста головоломок и занимательных задач. — Т.: Еш гвардия, 1962.
2. Гарднер М. Математические чудеса и тайны / Пер. с англ. — М.: Наука, 1978.
3. Гарднер М. А ну-ка, догадайся! / Пер. с англ. — М.: Мир, 1984.
4. Игнатъев Е.И. В царстве смекалки / Под ред. М.К. Потапова. — М.: Наука, 1979.
5. Козлова Е.Г. Сказки и подсказки (задачи для математического кружка). — Изд. 2-е, испр. и доп. — М.: МЦНМО, 2004.
6. Перельман Я.И. Занимательные задачи и опыты. — М.: Детская литература, 1972.
7. Перельман Я.И. Живая математика. — М.: Наука, 1967.
8. Перельман Я.И. Математика в занимательных рассказах. — М.: АСТ, Астрель, 2012.



«Кубик Рубика» в технике оригами.

Пятиклассники школы № 7 с руководителем кружка Н.В. Черниковой, ст. Егорлыкская, Ростовской обл.

Автор фото: Н. Авилов

Работа над ошибками

В №1/2015 на с. 6 в задании 8 в решении вместо $4 \cdot 6 = 24$ записано $4 \cdot 6 = 44$, что неверно.

В №3/2015 на с. 2 и 4 опечатка в фамилии одного из авторов статьи «Региональный компонент на уроках математики», верно — О. Лаврова. Приносим наши извинения читателям журнала.

А. БЛИНКОВ, А. БАННИКОВА,
Н. НАКОНЕЧНЫЙ, П. ЧУЛКОВ,
г. Москва

7 класс

ТУРНИР АРХИМЕДА

МОСКОВСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ РЕГАТА

Математическая регата 7-х классов прошла 26 апреля 2014 года в Московском городском дворце детского (юношеского) творчества. Финансовую поддержку регаты осуществлял, как всегда, Департамент образования г. Москвы, а организационную и техническую — Московский центр непрерывного математического образования.

Также, по традиции, каждый участник и руководитель команды по окончании регаты получал небольшую брошюру с условиями и решениями задач только что прошедшей регаты. Эти специальные выпуски регулярно готовятся коллективом редакции «Архимед» под руководством П.В. Чулкова (издание АНО «Институт логики» и редакции «Архимед»).

В регате 7-х классов участвовало 82 команды. Помимо команд из Москвы, в ней приняли участие команды физико-математических школ № 5 г. Долгопрудного, № 30 и № 366 Санкт-Петербурга, а также городов Железнодорожного, Королева, Переславля, Протвино, Саранска, Троицка и Черноголовки.

Дипломами Турнира Архимеда и математической литературой (традиционно предоставляемой МЦНМО) были награждены 12 команд. Результаты этой регаты уникальны: победителями были объявлены сразу 5 команд (их результаты практически неразличимы): гимназии № 1543, школ № 2007, № 25, № 179 (все из Москвы) и № 366 из Санкт-Петербурга.

Полные итоги регаты опубликованы на сервере МЦНМО (<http://olympiads.mccme.ru/regata>). Там же можно найти материалы регат предыдущих лет, которые ежегодно публикуются и на страницах журнала «Математика. Первое сентября». Подробно о том, как проводятся математические регаты, и материалы всех прошедших регат см.: Блинков А.Д., Гуровиц В.М., Горская Е.С. Московские математические регаты. — М.: МЦНМО, 2014 (в двух частях).

Условия задач

Первый тур

(10 минут; каждая задача — 6 баллов)

1.1. Тетрадь, ручка и карандаш стоят 120 рублей. А 5 тетрадей, 2 ручки и 3 карандаша стоят 350 рублей. Что дороже: две тетради или одна ручка? Ответ обоснуйте.

1.2. В треугольнике DEF проведена медиана DK . Найдите углы треугольника, если $\angle KDE = 70^\circ$, $\angle DKF = 140^\circ$. Ответ обоснуйте.

1.3. Найдите наибольшее четырехзначное число, которое делится на 7 и записывается четырьмя различными цифрами. Ответ обоснуйте.

Второй тур

(15 минут; каждая задача — 7 баллов)

2.1. Число $\frac{100!}{10^{50}}$ записали в виде несократимой дроби. Найдите ее знаменатель. Ответ обоснуйте. (Напомним, что $100!$ — это произведение всех натуральных чисел от 1 до 100.)

2.2. Покажите, как разрезать фигуру, изображенную на рисунке 1, на восемь равных частей пятью прямолинейными разрезами.

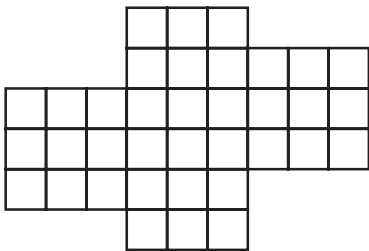


Рис. 1

2.3. По кругу стоят 12 детей. Мальчики всегда говорят правду мальчикам и врут девочкам, а девочки всегда говорят правду девочкам и врут мальчикам. Каждый из них сказал одну фразу своему соседу справа: «Ты — мальчик» или «Ты — девочка». Таких фраз оказалось поровну. Сколько мальчиков и сколько девочек стоит по кругу? Ответ обоснуйте.

Третий тур

(15 минут; каждая задача — 7 баллов)

3.1. Два поезда, в каждом из которых по 20 одинаковых вагонов, двигались навстречу друг

другу по параллельным путям с постоянными скоростями. Ровно через 36 секунд после встречи их первых вагонов пассажир Вова, сидя в купе четвертого вагона, поравнялся с пассажиром встречного поезда Олегом, а еще через 44 секунды последние вагоны поездов полностью разъехались. В каком по счету вагоне ехал Олег? Ответ обоснуйте.

3.2. В равнобедренном треугольнике ABC угол B равен 30° , $AB = BC = 6$. Проведены высота CD треугольника ABC и высота DE треугольника BDC . Найдите BE . Ответ обоснуйте.

3.3. Учительница записала на доске два натуральных числа. Леня умножил первое число на сумму цифр второго и получил число 201 320 132 013. Федя умножил второе число на сумму цифр первого и получил 201 420 142 014. Не ошибся ли кто-то из ребят? Ответ обоснуйте.

Четвертый тур

(20 минут; каждая задача — 8 баллов)

4.1. В соревнованиях велогонщиков на круговом треке приняли участие Вася, Петя и Коля, стартовав одновременно. Каждый круг Вася проезжал на 2 секунды быстрее Пети, а Петя на три секунды быстрее Коли. Когда Вася закончил дистанцию, Пете осталось проехать один круг, а Коле — два круга. Сколько кругов составляла дистанция?

4.2. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ отмечены точки M и N соответственно так, что лучи AM и AN делят угол BAD на три равные части. ME — высота треугольника MAN . Найдите угол EDN . Ответ обоснуйте.

4.3. Из шахматной доски (размером 8×8) вырезали центральный квадрат размером 2×2 . Можно ли оставшуюся часть доски разрезать на равные фигурки в виде буквы «Г», состоящие из четырех клеток? Фигурки можно поворачивать и переворачивать. Ответ обоснуйте.

Ответы, решения, комментарии

1.1. Ручка стоит дороже.

Обозначим цены тетради, ручки и карандаша через T , P и K соответственно. Тогда:

$$T + P + K = 120 \quad (1)$$

$$5T + 2P + 3K = 350. \quad (2)$$

Умножив обе части уравнения (1) на 3, получим: $3T + 3P + 3K = 360$. Вычтем это уравнение из уравнения (2): $2T - P = -10$.

Следовательно, одна ручка на 10 рублей дороже, чем две тетради.

Комментарий. Аналогичные рассуждения могут быть проведены словесно — без выписывания уравнений в явном виде.

1.2. 70° , 90° и 20° .

Так как угол DKF внешний для треугольника DKE , то

$$\angle DEK = \angle DKF - \angle KDE = 70^\circ$$

(рис. 2). Значит, треугольник DKE равнобедренный и $DK = EK = FK$.

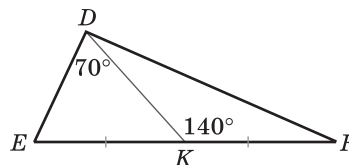


Рис. 2

Таким образом, медиана DK треугольника DEF равна половине стороны EF , к которой она проведена, поэтому этот треугольник прямоугольный: $\angle EDF = 90^\circ$. Следовательно,

$$\angle DFE = 180^\circ - (\angle DEF + \angle EDF) = 20^\circ.$$

1.3. 9870.

Выберем последовательно наибольшие возможные значения в разрядах тысяч, сотен и десятков, то есть будем искать число вида $987a$. Число 987 делится на 7, значит, a должно делиться на 7. Так как значение $a = 7$ выбрать нельзя, то $a = 0$. Число 9870 — искомое.

2.1. 5^{26} .

Так как $10^{50} = 2^{50} \cdot 5^{50}$, то для ответа на вопрос задачи надо выяснить, какие из этих ста простых множителей сократятся.

Заметим, что $100! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 99 \cdot 100$ содержит 50 четных чисел, значит, в разложении числа $100!$ на простые множители не меньше 50 двоек. Следовательно, 2^{50} сократится.

Среди всех натуральных чисел от 1 до 100 ровно двадцать чисел делятся на 5 и ровно четыре из них делятся на 25. Значит, в разложении числа $100!$ на простые множители число 5 содержится с показателем степени 24. Сократив дробь на 5^{24} , получим в знаменателе 5^{26} .

2.2. См. рисунок 3.

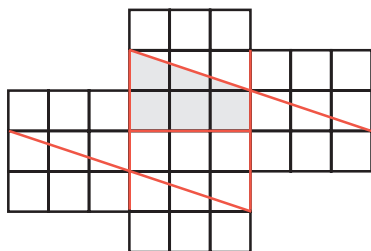


Рис. 3

Комментарий. Показанный способ разрезания можно придумать исходя из следующих соображений. Площадь данной фигуры 36 клеток, поэтому каждая из частей, полученных по результатам разрезания, должна иметь площадь 4,5 клетки. Значит, разрезать по границам клеток смысла не имеет. Кроме того, чтобы получить восемь равных фигур, разрезы должны проходить по диагоналям четырех прямоугольников с границами на сетке.

2.3. 6 мальчиков и 6 девочек.

Из условия задачи следует, что каждый мальчик произносил одну и ту же фразу: «Ты — мальчик». Действительно, если его сосед спра-

ва — мальчик, то он этой фразой говорил правду, а если это девочка, то он этой фразой лгал. Аналогичное рассуждение показывает, что каждая девочка говорила только фразу «Ты — девочка».

Так как этих фраз было произнесено поровну, то по кругу стоят 6 мальчиков и 6 девочек.

3.1. В 15-м вагоне.

Будем считать, что первый поезд (в котором ехал Вова) неподвижен. Тогда другой поезд двигался относительно первого, преодолевая расстояние, равное $20 + 20 = 40$ вагонам за $36 + 44 = 80$ секунд, то есть со скоростью 0,5 вагона в секунду.

От момента встречи первых вагонов поездов до момента, когда Олег поравнялся с Вовой, прошло 36 секунд, значит, Олег за это время проехал расстояние, равное 18 вагонам. Следовательно, на момент встречи первых вагонов расстояние между Вовой и Олегом составляло 18 вагонов. Таким образом, если не считать вагоны, в которых они ехали, то между ними 17 вагонов. Вова ехал в четвертом вагоне, то есть между ним и Олегом было 3 вагона первого поезда и 14 вагонов второго поезда, значит, Олег ехал в пятнадцатом вагоне второго поезда (рис. 4).

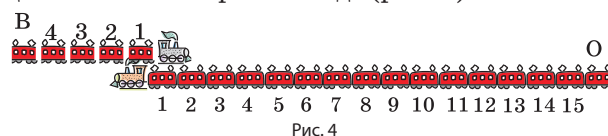


Рис. 4

3.2. 4,5.

Так как треугольник BDC прямоугольный и его катет DC лежит напротив угла DBC , который равен 30° , то $DC = \frac{1}{2} BC$ (рис. 5). Кроме того,

$$\angle DCB = 90^\circ - \angle DBC = 60^\circ,$$

значит, в прямоугольном треугольнике CED катет CE лежит напротив угла CDE , который равен 30° . Следовательно,

$$CE = \frac{1}{2} DC = \frac{1}{4} BC.$$

$$BE = BC - CE = \frac{3}{4} BC = 4,5.$$

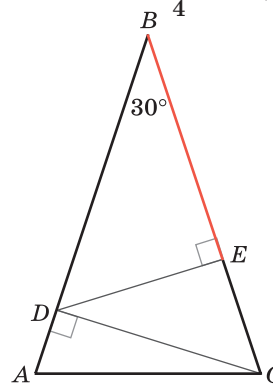


Рис. 5

3.3. Кто-то из ребят ошибся.

Воспользуемся **признаком делимости на 3 и 9**: число делится на 3 (9) тогда и только тогда, когда его сумма цифр делится на 3 (9). Сумма цифр числа 201 320 132 013 равна 18, значит, оно делится на 9 и на 3. Сумма цифр числа 201 420 142 014 равна 21, значит, оно делится на 3, но не делится на 9.

Далее можно рассуждать по-разному.

Способ I. Возможны три случая:

1) если оба числа, записанных учительницей, делились хотя бы на 3, то оба полученных произведения должны были делиться на 9. Это означает, что Федя наверняка ошибся;

2) если одно из записанных чисел делилось на 3, а другое — нет, то оба произведения должны были делиться на 3 и не делиться на 9. В этом случае наверняка ошибся Ленья;

3) если ни одно из записанных чисел не делилось на 3, то оба произведения не могли быть кратны трем, то есть ошиблись оба мальчика.

Способ II. Предположим, что Федя не ошибся. Тогда, так как 201 420 142 014 делится на 3, но не делится на 9, то одно из чисел, записанных учительницей, делилось на 3, но не делилось на 9, а другое — не делилось на 3. В этом случае Ленья не мог получить число, делящееся на 9, то есть Ленья ошибся.

Таким образом, они не могли быть правы одновременно, значит, кто-то из мальчиков ошибся.

Комментарий. Для решения также можно использовать более общее утверждение: любое число и его сумма цифр имеют одинаковые остатки от деления на 3 (9).

4.1. 6 кругов.

Пусть дистанция составляла n кругов, а Вася преодолевал каждый круг за t секунд. Тогда всю дистанцию Вася проехал за tn секунд. Петя проехал $(n - 1)$ круг, проезжая каждый круг за $(t + 2)$ секунды, значит, к моменту финиша Васи он затратил $(t + 2)(n - 1)$ секунд. Коля проехал $(n - 2)$ круга, проезжая каждый круг за $(t + 5)$ секунд, значит, к моменту финиша Васи он затратил $(t + 5)(n - 2)$ секунд.

Из условия задачи следует, что

$$tn = (t + 2)(n - 1) = (t + 5)(n - 2),$$

что можно записать в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} tn = (t + 5)(n - 2), \\ tn = (t + 2)(n - 1). \end{cases}$$

Решим ее.

Раскроем скобки и приведем подобные слагаемые:

$$\begin{cases} 5n - 2t = 10, \\ 2n - t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5n - 2t = 10, \\ 4n - 2t = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 6, \\ t = 10. \end{cases}$$

4.2. 15°.

Заметим, что прямоугольные треугольники MBA и MEA равны (по гипотенузе и острому углу, рис. 6). Следовательно,

$$AE = AB = AD,$$

то есть треугольник DAE равнобедренный. Так как

$$\angle DAE = 30^\circ,$$

то

$$\angle EDA = \angle DEA = (180^\circ - \angle DAE) : 2 = 75^\circ.$$

Значит,

$$\angle EDN = 90^\circ - \angle EDA = 15^\circ.$$

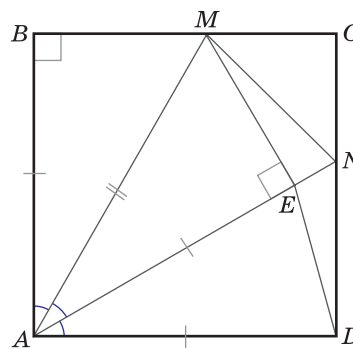


Рис. 6

4.3. Нет, нельзя.

Предположим, что искомое разрезание возможно. Покрасим горизонтали доски поочередно в два цвета («матрасиком», рис. 7).

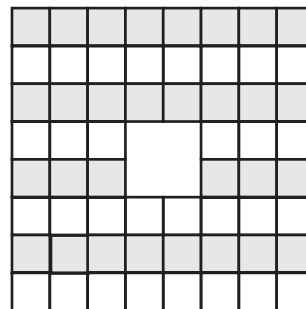


Рис. 7

Тогда в каждой фигурке, независимо от ее расположения, будут три клетки одного цвета и одна клетка другого цвета. Так как в оставшейся части доски по 30 клеток каждого цвета, то фигурок при разрезании может получиться только четное количество.

С другой стороны, фигурок будет

$$(64 - 4) : 4 = 15,$$

то есть нечетное количество.

Полученное противоречие показывает, что указанное разрезание осуществить невозможно.

ж у р н а л

Математика – Первое сентября

2-е полугодие 2015 года

ПОДПИСКА

на сайте www.1september.ru и в почтовых отделениях РФ



Индекс	Название издания	Периодичность в полугодие	1 месяц		6 месяцев	
			Каталожная цена (руб.)	Подписная цена (руб.)	Каталожная цена (руб.)	Подписная цена (руб.)
Название блока в разделе «Журналы»	ПЕРВОЕ СЕНТЯБРЯ. ЖУРНАЛЫ ИЗДАТЕЛЬСКОГО ДОМА (499)249-31-38					
79073	Математика – Первое сентября. Бумажная версия С дополнительными материалами и презентациями на сайте www.1september.ru <i>В июле не выходит. Подписка на июль не принимается.</i> (-) 160 г 64 стр.	5	440.00		2200.00	
12717	Математика – Первое сентября. Электронная версия на CD (полная копия бумажной версии) С дополнительными материалами и презентациями <i>В июле не выходит. Подписка на июль не принимается</i> (-) 75 г	5	160.00		800.00	
сайт 1september.ru	Математика – Первое сентября. Электронная версия	5	–		–	500.00

Подписку принимают во всех отделениях связи Российской Федерации, а также на сайте www.1september.ru

При подключении школы к проекту «Школа цифрового века» (см. digital.1september.ru) каждый учитель получает доступ ко всем журналам Издательского дома «Первое сентября». Стоимость подключения школы на год – 6 тыс. рублей независимо от количества учителей

При оформлении подписки на сайте оплата производится по квитанции в отделении банка или электронными платежами on-line



С. ШЕСТАКОВ,
isser@yandex.ru,
г. Москва

РЕШАЕМ НЕРАВЕНСТВА

2.1. Целые неравенства и системы неравенств

Эта статья посвящена методам решения целых неравенств и систем неравенств. Целыми рациональными неравенствами (или просто целыми неравенствами) называют неравенства вида $f(x) \vee 0$, где $f(x)$ — многочлен, знаком « $\vee$ » обозначен здесь и далее один из четырех возможных знаков неравенств « $>$ », « $<$ », « $\geq$ », « $\leq$ ». Степенью неравенства $f(x) \vee 0$ называется степень многочлена $f(x)$. Неравенства вида $p(x) \vee q(x)$, где $p(x)$ и $q(x)$ — многочлены, также называют целыми: они сводятся к неравенству $f(x) \vee 0$, где $f(x) = p(x) - q(x)$. Часто для того, чтобы в левой или правой частях неравенства получить многочлен той или иной степени, надо выполнить некоторые предварительные действия. Как правило, это алгебраические преобразования, связанные с раскрытием скобок, применением формул сокращенного умножения и приведением подобных. В некоторых случаях определить степень неравенства можно, не совершая указанных действий, а сделав предварительный устный анализ того, какие алгебраические выражения получатся после выполнения таких действий.

Вначале разбираются простейшие целые неравенства — линейные и квадратные, а также их системы, затем — более сложные неравенства и системы неравенств.

Линейные и квадратные неравенства

Линейные неравенства

Напомним, что функция $y = ax + b$ называется линейной. Неравенства вида $ax + b \vee 0$ при $a \neq 0$ также называются линейными. При $a \neq 0$ алгебраическое выражение $f(x) = ax + b$ является многочленом первой степени. Соответственно, линейные неравенства — это целые неравенства первой степени.

Для придания наглядного смысла решению линейных неравенств воспользуемся графической интерпретацией.

Графиком линейной функции $y = ax + b$ является прямая, пересекающая ось абсцисс в точке, ордината которой равна нулю, то есть $ax + b = 0$, откуда $x = -\frac{b}{a}$. Если $a > 0$, линейная функция принимает положительные значения при всех $x \in \left(-\frac{b}{a}; +\infty\right)$, отрицательные значения — при всех $x \in \left(-\infty; -\frac{b}{a}\right)$ и обращается в нуль при $x = -\frac{b}{a}$ (рис. 1, а). Если $a < 0$, линейная функция принимает положительные значения при всех $x \in \left(-\infty; -\frac{b}{a}\right)$, отрицательные значения — при всех $x \in \left(-\frac{b}{a}; +\infty\right)$ и обращается в нуль при $x = -\frac{b}{a}$ (рис. 1, б).

Разумеется, при решении линейных неравенств графики обычно не используют, а приводят неравенство к виду $ax \vee -b$, после чего делят обе части последнего неравенства на число a .



К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru (Упражнения по теме «Линейные и квадратные неравенства», диагностическая работа 1.)

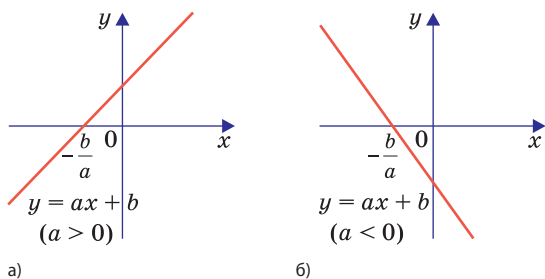


Рис. 1

Стандартная ошибка в решениях линейных неравенств связана именно с этим делением: если число a отрицательно, знак неравенства нужно изменить на противоположный, о чем многие забывают. При решении неравенств вида $ax + b \vee cx + d$ удобно все слагаемые, содержащие переменную, перенести в левую часть, а все числа — в правую:

$$ax - cx \vee d - b, (a - c)x \vee d - b.$$

Если $a \neq c$, остается сделать последний шаг — разделить обе части неравенства на число $a - c$ (с изменением знака неравенства на противоположный в случае, если это число отрицательно). Если $a = c$, получаем неравенство вида $0 \cdot x \vee d - b$, которое — в зависимости от знака неравенства и числа в правой части — либо не имеет решений, либо справедливо при любом действительном значении переменной.

Пример 1. Решить неравенство

$$3x + 7 < 7x + 3.$$

Решение. Перепишем неравенство в виде

$$3x - 7x < 3 - 7, -4x < -4.$$

Разделим обе части последнего неравенства на число -4 , поменяв знак неравенства на противоположный. Получим: $x > 1$.

Ответ: $(1; +\infty)$.

Следующая задача — **неравенство первой степени с иррациональными коэффициентами**, требующее для решения определенной арифметической культуры.

Пример 2. Решить неравенство

$$x\sqrt{2} \geq x\sqrt[3]{3} + \sqrt{3} + \sqrt[3]{2}.$$

Решение. Перепишем неравенство в виде

$$x\sqrt{2} - x\sqrt[3]{3} \geq \sqrt{3} + \sqrt[3]{2}, (\sqrt{2} - \sqrt[3]{3})x \geq \sqrt{3} + \sqrt[3]{2}.$$

Определить знак числа в скобках можно разными способами, например, записав уменьшаемое и вычитаемое в виде корней одной степени:

$$\sqrt{2} - \sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{2^3} - \sqrt[6]{3^2} = \sqrt[6]{8} - \sqrt[6]{9} < 0.$$

Следовательно, число $\sqrt{2} - \sqrt[3]{3}$ отрицательно, и при делении обеих частей неравенства на это

число знак неравенства нужно изменить на противоположный. Получим:

$$x \leq \frac{\sqrt{3} + \sqrt[3]{2}}{\sqrt{2} - \sqrt[3]{3}}.$$

Ответ: $\left(-\infty; \frac{\sqrt{3} + \sqrt[3]{2}}{\sqrt{2} - \sqrt[3]{3}}\right]$.

Решение систем целых неравенств первой степени с одной переменной состоит в решении каждого неравенства системы с последующим нахождением пересечения найденных множеств решений.

Пример 3. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} 7(6x+5) - 5(6x+7) \leq 12x + 21, \\ \frac{x+2}{3} + \frac{x+3}{2} \geq \frac{x+5}{4} + \frac{x+4}{5}. \end{cases}$$

Решение. Решим первое неравенство данной системы. Раскроем скобки в левой части этого неравенства:

$$42x + 35 - 30x - 35 \leq 12x + 21.$$

После упрощений получим:

$$12x \leq 12x + 21, 12x - 12x \leq 21, 0 \cdot x \leq 21.$$

Решением последнего неравенства является любое действительное число. Следовательно, решением всей системы будет решение ее второго неравенства. Решим второе неравенство данной системы. Чтобы избавиться от дробей, умножим обе части этого неравенства на общий знаменатель всех дробей, то есть на $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$. Получим:

$$20(x+2) + 30(x+3) \geq 15(x+5) + 12(x+4).$$

Раскроем скобки и приведем подобные в каждой части полученного неравенства:

$$20x + 40 + 30x + 90 \geq 15x + 75 + 12x + 48,$$

откуда

$$50x + 130 \geq 27x + 123.$$

Перенесем все слагаемые, содержащие переменную в левую часть неравенства, а все числа — в правую:

$$50x - 27x \geq 123 - 130, 23x \geq -7.$$

Осталось обе части последнего неравенства разделить на 23 , после чего получим: $x \geq -\frac{7}{23}$.

Ответ: $\left[-\frac{7}{23}; +\infty\right)$.

Замечания. 1. Решение неравенств с дробными коэффициентами обычно связано с большим числом ошибок. Чтобы снизить вероятность таких ошибок, рекомендуется при возможности сначала получить неравенство с целыми коэффициентами, умножив обе его части на общий знаменатель дробей, как это было сделано при решении примера 3.

2. В некоторых случаях в процессе решения линейных и более сложных неравенств после приведения подобных получается неравенство, не содержащее переменной. Такие ситуации ставят в тупик многих учеников и выпускников, хотя ничего сложного в интерпретации полученных неравенств нет. Для этого достаточно ответить на вопрос: «При каких значениях переменной выполняется полученное неравенство?» Так, например, неравенство $0 > 5$ не выполняется ни при каких допустимых значениях переменной, а неравенство $0 \leq 21$ выполняется при любом действительном значении переменной. При решении примера 3 неравенство $0 \leq 21$ для большей наглядности было записано в виде $0 \cdot x \leq 21$; использовать такую запись рекомендуется в тех случаях, когда ответ на вопрос о решениях неравенств, подобных приведенным выше, вызывает определенные затруднения.

Перейдем теперь к квадратным неравенствам, вспомнив основные определения и факты, связанные с ними.

Квадратные неравенства

Напомним, что функция $y = ax^2 + bx + c$ при $a \neq 0$ называется квадратичной. Неравенства вида $ax^2 + bx + c \vee 0$ при $a \neq 0$ (знаком « $\vee$ » обозначен, как обычно, один из четырех возможных знаков неравенств « $>$ », « $<$ », « $\geq$ », « $\leq$ ») называются квадратными. При $a \neq 0$ алгебраическое выражение $f(x) = ax^2 + bx + c$ является многочленом второй степени. Соответственно, квадратные неравенства — это целые неравенства второй степени.

Для придания наглядного смысла решению квадратных неравенств вновь воспользуемся графической интерпретацией.

Сначала рассмотрим случай $a > 0$. В этом случае графиком квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ является парабола, ветви которой направлены вверх. Абсцисса x_0 вершины параболы находится по формуле $x_0 = -\frac{b}{2a}$. Расположение

графика квадратичной функции относительно оси абсцисс существенным образом связано со знаком дискриминанта $D = b^2 - 4ac$ квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$.

Если $D > 0$, график функции $y = ax^2 + bx + c$ пересекает ось абсцисс в двух точках, x_1 и x_2 . Числа x_1 и x_2 являются корнями квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$; условимся, что здесь и далее x_1 — меньший корень, x_2 — больший корень этого уравнения, то есть

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}.$$

Таким образом, если $a > 0$ и $D > 0$, то квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ принимает положительные значения при всех $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$, отрицательные значения — при всех $x \in (x_1; x_2)$ и обращается в нуль в точках $x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$ и $x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ (рис. 2, а).

Если $D = 0$, то

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} = x_0,$$

то есть график функции $y = ax^2 + bx + c$ имеет с осью абсцисс единственную общую точку — вершину параболы. Таким образом, если $a > 0$ и $D = 0$, то квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ принимает положительные значения для всех $x \in (-\infty; x_0) \cup (x_0; +\infty)$, обращается в нуль в точке $x_0 = -\frac{b}{2a}$, а отрицательных значений не принимает (рис. 2, б).

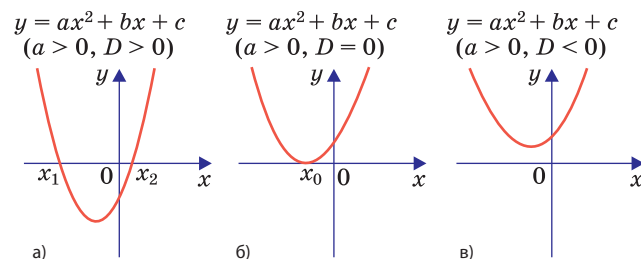


Рис. 2

Если $D < 0$, то квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ действительных корней не имеет, следовательно, график функции $y = ax^2 + bx + c$ не имеет с осью абсцисс ни одной общей точки, то есть целиком расположен выше оси абсцисс. Таким образом, если $a > 0$ и $D < 0$, то квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ принимает только положительные значения (рис. 2, в).

Случай $a < 0$ рассматривается аналогично. В этом случае графиком квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ является парабола, ветви которой направлены вниз. Если $D > 0$, график функции $y = ax^2 + bx + c$ пересекает ось абсцисс в двух точках, x_1 и x_2 . Таким образом, при $a < 0$ и $D > 0$ квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ принимает положительные значения для всех $x \in (x_1; x_2)$, отрицательные значения — для всех $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$ и обращается в нуль в точках $x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ (рис. 3, а). Если $D = 0$,

график функции $y = ax^2 + bx + c$ имеет с осью абсцисс единственную общую точку — вершину x_0 параболы. Таким образом, если $a < 0$ и $D = 0$, то квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ принимает отрицательные значения для всех x

$\in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$, обращается в нуль в точке $x_0 = -\frac{b}{2a}$, а положительных значений не принимает (рис. 3,б). Если $D < 0$, то квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ действительных корней не имеет, следовательно, график функции $y = ax^2 + bx + c$ не имеет с осью абсцисс ни одной общей точки, то есть целиком расположен ниже оси абсцисс. Таким образом, если $a > 0$ и $D < 0$, то квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ принимает только отрицательные значения (рис. 3,в).

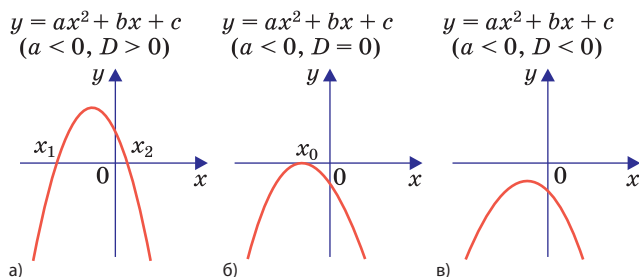


Рис. 3

Итак, решение квадратного неравенства $ax^2 + bx + c \vee 0$ определяется, в сущности, знаком старшего коэффициента a и знаком дискриминанта $D = b^2 - 4ac$.

Замечание. Получив неравенство $ax^2 + bx + c \vee 0$, в котором $a < 0$, целесообразно сразу умножить обе части неравенства на -1 , поменяв знак неравенства на противоположный. Это нехитрое правило позволит решать квадратные неравенства только с положительным старшим коэффициентом, и настоятельно рекомендуется к применению: число ошибок при решении квадратных неравенств с отрицательным старшим коэффициентом на ЕГЭ и ОГЭ по математике выходит за границы разумного, причем ошибки (как в определении знаков корней квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$, так и в выписывании самих решений) совершают в большом количестве даже сильные школьники и выпускники.

Квадратное неравенство $ax^2 + bx + c \vee 0$ с положительным старшим коэффициентом будем в дальнейшем называть базовым. Поскольку наиболее распространенным типом квадратных неравенств являются неравенства с положительным дискриминантом, то, найдя нули квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ (или, что то же, корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$), то есть корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, можно, основываясь на свойствах квадратичной функции, сразу выписать множество решений неравенства. При положительном дискриминанте для базовых квадратных неравенств вида

$$ax^2 + bx + c < 0 \text{ или } ax^2 + bx + c \leq 0$$

этим множеством является промежуток «между корнями» трехчлена, то есть

$$(x_1; x_2) \text{ или } [x_1; x_2]$$

соответственно; для базовых квадратных неравенств вида

$$ax^2 + bx + c > 0 \text{ или } ax^2 + bx + c \geq 0$$

множеством решений является объединение промежутков «за корнями» трехчлена, то есть

$$(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty) \text{ или } (-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$$

соответственно.

Другой способ решения квадратных неравенств связан с разложением квадратного трехчлена на линейные множители и применением метода интервалов. Напомним, что если дискриминант $D = b^2 - 4ac$ квадратного трехчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ положителен, а

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \text{ и } x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$$

— корни трехчлена, то

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Точки x_1 и x_2 разбивают числовую прямую на три промежутка, в каждом из которых знак $f(x)$ легко определить по ее знаку в одной из точек промежутка, после чего остается записать ответ. При решении неполных квадратных неравенств, то есть неравенств вида

$$ax^2 + bx \vee 0 \text{ или } ax^2 + c \vee 0,$$

обычно используют разложение на линейные множители путем вынесения общего множителя или применения формулы разности квадратов.

Замечание. Промежутки знакопостоянства выражения $a(x - x_1)(x - x_2)$ при $a > 0$ можно определить еще и следующим образом. Так как $a > 0$, то при любом значении переменной x число $a(x - x_1)(x - x_2)$ будет иметь тот же знак, что и число $(x - x_1)(x - x_2)$. Поскольку $x_1 < x_2$, то $x - x_1 > x - x_2$ при любом значении x . Произведение двух чисел отрицательно в том и только том случае, если меньшее из них отрицательно, а большее положительно:

$$\begin{cases} x - x_1 > 0, \\ x - x_2 < 0, \end{cases} \begin{cases} x > x_1, \\ x < x_2, \end{cases}$$

то есть

$$x_1 < x < x_2, \text{ или } x \in (x_1; x_2).$$

Произведение двух чисел положительно в том и только том случае, если меньшее из них положительно (тогда и большее положительно) или большее отрицательно (тогда и меньшее отрицательно):

$$\begin{cases} x - x_1 < 0 \\ x - x_2 > 0, \end{cases} \begin{cases} x < x_1 \\ x > x_2, \end{cases}$$

то есть

$$x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty).$$

Итак, если привести квадратное неравенство к базовому виду и найти корни соответствующего квадратного трехчлена, можно практически сра-

зу записать ответ: в случае существования двух различных корней x_1 и x_2 решением неравенства будет либо промежуток между ними, либо объединение двух числовых лучей с началами в точках x_1 и x_2 .

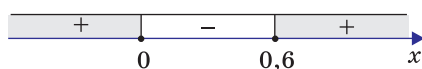
Прежде чем переходить к разбору примеров, подчеркнем, что неважно, какой способ решения квадратного неравенства будет использован, главное, чтобы это решение было хотя бы в минимальной степени обосновано — либо ссылкой на свойства квадратичной функции, либо ссылкой на метод интервалов.

Пример 4. Решить неравенство $5x^2 \geq 3x$.

Решение. Приведем неравенство к базовому виду:

$$5x^2 - 3x \geq 0, \quad 5x(x - 0,6) \geq 0.$$

Решим неравенство методом интервалов:



Ответ: $(-\infty; 0] \cup [0,6; +\infty)$.

Пример 5. Решить неравенство $49 - 25x^2 \geq 0$.

Решение. Приведем неравенство к базовому виду, умножив обе его части на -1 и перегруппировав слагаемые:

$$-49 + 25x^2 \leq 0, \quad 25x^2 - 49 \leq 0.$$

Разложим по формуле разности квадратов левую часть полученного неравенства на множители:

$$(5x - 7)(5x + 7) \leq 0.$$

Решим неравенство методом интервалов:



Ответ: $[-1,4; 1,4]$.

Пример 6. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} -0,3x + 0,2 \geq 0, & 2x + 0,3, \\ x^2 + 3x + 1 \geq 0, & 2(2 - x). \end{cases}$$

Решение. Решим первое неравенство данной системы. Чтобы избавиться от дробей, умножим обе части этого неравенства на число 10. Получим:

$$-3x + 2 \geq 2x + 3, \quad -5x \geq 1, \quad x \leq -0,2.$$

Решение первого неравенства данной системы — промежуток $(-\infty; -0,2]$. Решим второе неравенство данной системы. И здесь избавимся от дроби, умножив обе части неравенства на число 5: $5x^2 + 15x + 5 \geq 2 - x$. Перенесем все слагаемые в левую часть неравенства и приведем подобные:

$$5x^2 + 16x + 3 \geq 0.$$

Старший коэффициент в левой части полученного неравенства положителен, нулями квадратичной функции $y = 5x^2 + 16x + 3$ являются

числа -3 и $-0,2$ (их можно найти с помощью формулы корней квадратного уравнения или с помощью формул Виета).



Поэтому решение неравенства: $(-\infty; -3] \cup [-0,2; +\infty)$. Следовательно, решение данной системы: $(-\infty; -3] \cup \{-0,2\}$.

Ответ: $(-\infty; -3] \cup \{-0,2\}$.

О формулах Виета для неприведенного квадратного трехчлена

При решении квадратных неравенств часто оказываются полезными формулы Виета:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

(здесь x_1 и x_2 — корни квадратного трехчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$). Эти формулы позволяют, подобрав два числа по их произведению и сумме, записать решение квадратного неравенства почти сразу, поскольку найденные числа и являются корнями трехчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$. Однако (за исключением случая $a = 1$) в указанном виде эти формулы использовать неудобно, так как сумма и произведение искомых чисел являются дробями, а «подобрать» такие числа сложно. Помогут здесь следующие простые рассуждения. Запишем формулы Виета в виде системы:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a}. \end{cases}$$

Если умножить обе части первого уравнения системы на a , а обе части второго уравнения на a^2 , получим систему, которую можно записать так:

$$\begin{cases} (ax_1) + (ax_2) = -b, \\ (ax_1)(ax_2) = ac. \end{cases}$$

Таким образом, если найти два числа, произведение которых равно ac , а сумма равна $-b$, то это будут числа ax_1 и ax_2 , после чего останется каждое из найденных чисел разделить на a и получить корни данного квадратного трехчлена. При определенном навыке такие вычисления легко проводятся устно: на «роль» ax_1 и ax_2 претендуют делители числа ac , и, перебирая «по возрастанию» возможные делители этого числа (начиная с простейшего — единицы), можно довольно быстро получить ответ.

Пример 7. Решить неравенство

$$9x^2 - 73x + 8 \leq 0.$$

Решение. Найдем сначала два числа, произведение которых равно $9 \cdot 8 = 72$, а сумма равна 73.

Поскольку произведение этих чисел положительно, то это числа одного знака. Поскольку их сумма положительна, то это положительные числа. Уже простейший делитель числа 72 позволяет найти искомые числа:

$$1 \cdot 72 = 72, 1 + 72 = 73.$$

Осталось разделить найденные числа на 9 и получить корни квадратного трехчлена в левой части неравенства: $\frac{1}{9}$ и $\frac{72}{9} = 8$. Поскольку старший коэффициент трехчлена положителен, решением неравенства является отрезок $\left[\frac{1}{9}; 8\right]$.

Ответ: $\left[\frac{1}{9}; 8\right]$.

Пример 8. Решить неравенство

$$4x^2 - 15x + 9 > 0.$$

Решение. Найдем два числа, произведение которых равно $4 \cdot 9 = 36$, а сумма равна 15. Поскольку произведение этих чисел положительно, то это числа одного знака. Поскольку их сумма положительна, то это положительные числа. Перебирая пары делителей числа 36 «по возрастанию» меньшего делителя (1 и 36, 2 и 18, 3 и 12), уже на третьем шаге находим числа, сумма которых равна 15: это 3 и 12. Разделив каждое из них на 4, получим корни квадратного трехчлена в левой части неравенства:

$$\frac{3}{4} = 0,75 \text{ и } \frac{12}{4} = 3.$$

В силу положительности старшего коэффициента этого трехчлена решением неравенства является множество $(-\infty; 0,75) \cup (3; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; 0,75) \cup (3; +\infty)$.

Пример 9. Решить неравенство

$$6x^2 + 5x - 4 < 0.$$

Решение. Найдем сначала два числа, произведение которых равно $6 \cdot (-4) = -24$, а сумма равна -5 . Поскольку произведение двух этих чисел отрицательно, одно из них является положительным, другое — отрицательным. Сумма этих чисел также отрицательна, поэтому меньший по модулю делитель числа -24 будем брать со знаком «плюс», а больший — со знаком «минус»: 1 и -24 , 2 и -12 , ... На третьем шаге получаем два числа, сумма которых равна -5 : это 3 и -8 . Разделив каждое из этих чисел на 6, найдем корни квадратного трехчлена в левой части неравенства:

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2} \text{ и } -\frac{8}{6} = -\frac{4}{3}.$$

Поскольку старший коэффициент трехчлена положителен, решением неравенства является интервал $\left(-\frac{4}{3}; \frac{1}{2}\right)$.

Ответ: $\left(-\frac{4}{3}; \frac{1}{2}\right)$.

Разумеется, рассмотренный прием применим только в тех случаях, когда корни квадратного трехчлена в левой части неравенства рациональны.

Пример 10. а) Решить неравенство

$$2x^2 - (2\sqrt{5} + 3\sqrt{3})x + 3 + \sqrt{15} < 0.$$

б) Найти все целые решения неравенства.

Решение. а) Найдем дискриминант D квадратного трехчлена в левой части неравенства:

$$D = (2\sqrt{5} + 3\sqrt{3})^2 - 4 \cdot 2 \cdot (3 + \sqrt{15}) =$$

$$= 20 + 12\sqrt{15} + 27 - 24 - 8\sqrt{15} = 23 + 4\sqrt{15}.$$

Дискриминант представляет собой числовое выражение вида $p + q\sqrt{r}$. Обычно в такого рода задачах это выражение является полным квадратом, то есть квадратом суммы двух каких-то чисел. Чтобы найти эти числа, используют рассуждения, аналогичные следующим. Пусть дискриминант является квадратом суммы чисел a и b :

$$(a + b)^2 = 23 + 4\sqrt{15}.$$

Предположим, что сумма квадратов этих чисел равна 23, а их удвоенное произведение $2ab$ равно $4\sqrt{15}$. Тогда $ab = 2\sqrt{15}$. Наиболее вероятными претендентами на роль a и b являются либо 1 и $2\sqrt{15}$, либо 2 и $\sqrt{15}$, либо $2\sqrt{3}$ и $\sqrt{5}$, либо $2\sqrt{5}$ и $\sqrt{3}$. Поскольку сумма квадратов искомых чисел равна 23, то это числа $2\sqrt{5}$ и $\sqrt{3}$. Следовательно,

$$D = (2\sqrt{5} + \sqrt{3})^2, \quad \sqrt{D} = 2\sqrt{5} + \sqrt{3}.$$

Тогда по формуле корней квадратного уравнения находим:

$$x_1 = \frac{2\sqrt{5} + 3\sqrt{3} - 2\sqrt{5} - \sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$x_2 = \frac{2\sqrt{5} + 3\sqrt{3} + 2\sqrt{5} + \sqrt{3}}{4} = \sqrt{3} + \sqrt{5}.$$

Поскольку старший коэффициент в левой части данного неравенства положителен, то (по свойствам квадратичной функции) решением неравенства будет промежуток $(x_1; x_2)$, то есть

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \sqrt{3} + \sqrt{5}\right).$$

б) Для ответа на второй вопрос задачи нужно определить, между какими двумя последовательными целыми числами заключено каждое из чисел $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $x_2 = \sqrt{3} + \sqrt{5}$. Ясно, что

$$0 < \frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{\sqrt{4}}{2}, \quad 0 < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1.$$

Также очевидно, что

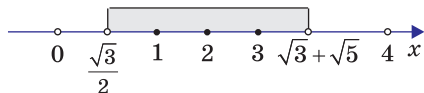
$$1 < \sqrt{3} < 2, \quad 2 < \sqrt{5} < 3.$$

Поэтому

$$1 + 2 < \sqrt{3} + \sqrt{5} < 2 + 3, \quad 3 < \sqrt{3} + \sqrt{5} < 5.$$

Остается сравнить $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ и 4. Допустим, что $\sqrt{3} + \sqrt{5} \geq 4$. Следовательно,
 $(\sqrt{3} + \sqrt{5})^2 \geq 16$, $3 + 2\sqrt{15} + 5 \geq 16$, $2\sqrt{15} \geq 8$,
 $\sqrt{15} \geq 4$, или $\sqrt{15} \geq \sqrt{16}$.

Пришли к противоречию. Поэтому допущение неверно, и $\sqrt{3} + \sqrt{5} < 4$. Таким образом, $3 < \sqrt{3} + \sqrt{5} < 4$. Значит, целыми решениями данного неравенства являются числа 1, 2, 3:



Ответ: а) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \sqrt{3} + \sqrt{5}\right)$; б) 1, 2, 3.

Замечание. Пример 10 показывает, что задача на обычное квадратное неравенство в некоторых случаях может оказаться достаточно сложной. Обратим внимание на сравнение чисел $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ и 4, а также оформление такого сравнения в тексте решения. С необходимостью сравнения иррациональных чисел приходится сталкиваться при решении самых разных неравенств (например, задачи С3 ЕГЭ по математике) и уравнений (например, задачи С1 ЕГЭ по математике). Оформить такое сравнение на чистовике можно либо от противного (как это было сделано при разборе примера), либо записав в чистовике последовательность действий, обратную проделанной в черновике: ведь доказывать неравенство можно, только опираясь на очевидное верное неравенство. В последнем случае в чистовике следует привести такое доказательство:

$$15 < 16 \Rightarrow \sqrt{15} < 4 \Rightarrow 2\sqrt{15} < 8 \Rightarrow 3 + 2\sqrt{15} + 5 < 16 \Rightarrow \\ \Rightarrow (\sqrt{3} + \sqrt{5})^2 < 16 \Rightarrow \sqrt{3} + \sqrt{5} < 4.$$

Пример 11. а) Решить неравенство

$$x^2 > 1,25x + 1,5. \quad (1)$$

б) Решить неравенство

$$x + 1 \leq \frac{4}{9}x^2. \quad (2)$$

в) Найти все решения неравенства (2), не являющиеся решениями неравенства (1).

Решение. а) Решим неравенство (1). Чтобы избавиться от дробей, умножим обе части этого неравенства на число 4. Получим:

$$4x^2 > 5x + 6.$$

Приведем неравенство к базовому виду:

$$4x^2 - 5x - 6 > 0.$$

Найдем корни квадратного трехчлена в левой части неравенства, воспользовавшись формулами Виета. Для этого сначала найдем два числа, произведение которых равно $4 \cdot (-6) = -24$, а сумма равна 5. Поскольку произведение двух этих чисел отрицательно, одно из них является положительным, другое — отрицательным. Сумма

этих чисел положительна, поэтому меньший по модулю делитель числа -24 будем брать со знаком «минус», а больший — со знаком «плюс»: -1 и 24 , -2 и 12 , -3 и 8 . На третьем шаге получаем искомые числа, сумма которых равна 5: это -3 и 8 . Разделив каждое из этих чисел на 4, найдем корни квадратного трехчлена в левой части неравенства:

$$-\frac{3}{4} = -0,75 \text{ и } \frac{8}{4} = 2.$$

В силу положительности старшего коэффициента этого трехчлена, решение неравенства: $(-\infty; -0,75) \cup (2; +\infty)$.

б) Решим неравенство (2). Чтобы избавиться от дробей, умножим обе части этого неравенства на число 9. Получим:

$$9x + 9 \leq 4x^2, -4x^2 + 9x + 9 \leq 0.$$

Приведем неравенство к базовому виду, умножив обе его части на -1 и поменяв знак неравенства на противоположный:

$$4x^2 - 9x - 9 \geq 0.$$

Найдем корни квадратного трехчлена в левой части, вновь воспользовавшись формулами Виета. Для этого сначала найдем два числа, произведение которых равно $4 \cdot (-9) = -36$, а сумма равна 9. Поскольку произведение двух этих чисел отрицательно, одно из них является положительным, другое — отрицательным. Сумма этих чисел положительна, поэтому меньший делитель числа 36 будем брать со знаком «минус», а больший — со знаком «плюс»: -1 и 36 , -12 и 18 , -3 и 12 . На третьем шаге получаем искомые числа, сумма которых равна 9: это -3 и 12 . Разделив каждое из этих чисел на 4, найдем корни квадратного трехчлена в левой части неравенства:

$$-\frac{3}{4} = -0,75 \text{ и } \frac{12}{4} = 3.$$

В силу положительности старшего коэффициента этого трехчлена решение неравенства: $(-\infty; -0,75] \cup [3; +\infty)$.

в) Найдем все решения неравенства (2), не являющиеся решениями неравенства (1). Для этого нужно найти все числа из множества $(-\infty; -0,75] \cup [3; +\infty)$, не принадлежащие множеству $(-\infty; -0,75) \cup (2; +\infty)$. В данном случае это сделать совсем просто: единственным таким числом является $-0,75$.

Ответ: а) $(-\infty; -0,75) \cup (2; +\infty)$; б) $(-\infty; -0,75] \cup [3; +\infty)$; в) $-0,75$.

Рассмотренный пример моделирует на довольно простом уровне достаточно типичную ситуацию, возникающую при решении некоторых задач ЕГЭ, прежде всего задачи С3: условие задачи требует ответа на три вопроса, за правильный ответ на каждый из которых начисляется один первичный балл.



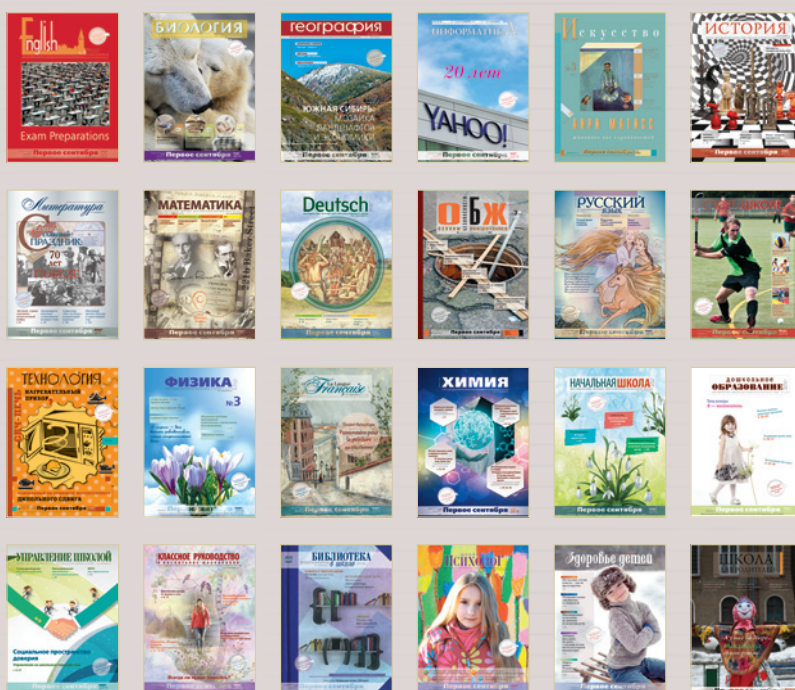
Общероссийский проект Школа цифрового века

Издательский дом «ПЕРВОЕ СЕНТЯБРЯ» • Издательство «ПРОСВЕЩЕНИЕ»

2015/16 учебный год

Каждому учителю:

- 24 предметных ежемесячных журнала
- десятки курсов повышения квалификации



Стоимость участия в проекте
6 тысяч рублей от школы*
за весь учебный год
независимо от количества учителей

Подробности на сайте
digital.1september.ru
или
facebook.com/School.of.Digital.Age

* Индивидуальная подписка на журналы – на сайте www.1september.ru или во всех отделениях связи РФ по каталогу «Почта России»

Н. АВИЛОВ,
avilow@rambler.ru,
ст. Егорлыкская, Ростовская обл.



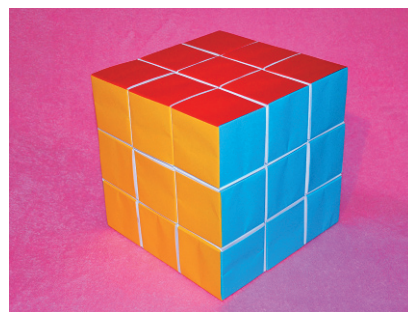
Ведущий рубрики — Николай Иванович Авиллов — на фоне своей коллекции головоломок

ОРИГАМИ «КУБИК РУБИКА»

■ Оригами — древнее искусство складывания из бумаги различных фигурок. С детства нам знакомы бумажные лодочки и самолетики, из газет мы мастерили шляпы и кепки, защищающие голову от солнечных лучей, — все это можно считать оригами.

При складывании сложных фигур процесс превращается в настоящую загадку. Примером такой конструкции является бумажная модель, напоминающая популярную головоломку — кубик Рубика.

Изготовили ее пятиклассники средней школы № 7 донской станции Егорлыкская под руководством учителя черчения Н.В. Черниковой на занятиях кружка «Умелые руки». На выставочном стенде кружка много красивых фигур оригами. Познакомившись с этой коллекцией, я предложил им сделать оригами «Кубик Рубика». Вот что у них получилось.



Фигуры классического оригами складываются из квадратного листа бумаги с помощью изгибов-перегибов, без клея и разрезов бумаги. Одной из разновидностей оригами является модульное оригами. Фигуры модульного оригами собираются из заранее подготовленных одинаковых частей-модулей, которые вставляются друг в друга и не распадаются, удерживаясь за счет трения.

Оригами «Кубик Рубика» сделан именно в этой технике. Каждый модуль складывается по правилам классического оригами из одного квадратного листа бумаги. Как изготовить модуль, показано ниже на четырех фото. Квадратный лист двумя перегибами вовнутрь делится на три равные части (фото 2), затем обе крайние части заготовки внешним перегибанием делятся пополам (фото 3). Полученная фигура двумя перегибами поперек снова делится на три равные части, концы заготовки заворачиваются вовнутрь.

Получился П-образный модуль, назовем его «скобкой» (фото 4). Скобка содержит два кармана и имеет две ножки. Для нашей головоломки нужно подготовить 162 таких модуля: 108 из белой бумаги и 54 из цветной бумаги, по 9 штук каждого из шести цветов граней кубика Рубика.

Далее нужно изготовить 27 кубиков. Каждый кубик складывается из шести модулей-скобок. Подробно описывать не стану, скажу лишь, что ножки каждого модуля вставляются в карманы двух



К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru

других модулей, а в каждый модуль вставляется по две ножки других модулей. Процесс изготовления кубика показан на фото 5–9.

По этой технологии изготавливаются 27 кубиков:

- 1 кубик полностью белый, это внутренний кубик;
- 6 кубиков с одной цветной гранью, именно она будет видна на поверхности оригами;
- 12 кубиков с двумя цветными гранями, это реберные кубики в нашем оригами;
- 8 кубиков с тремя цветными гранями, они будут находиться в углах нашего кубика Рубика.

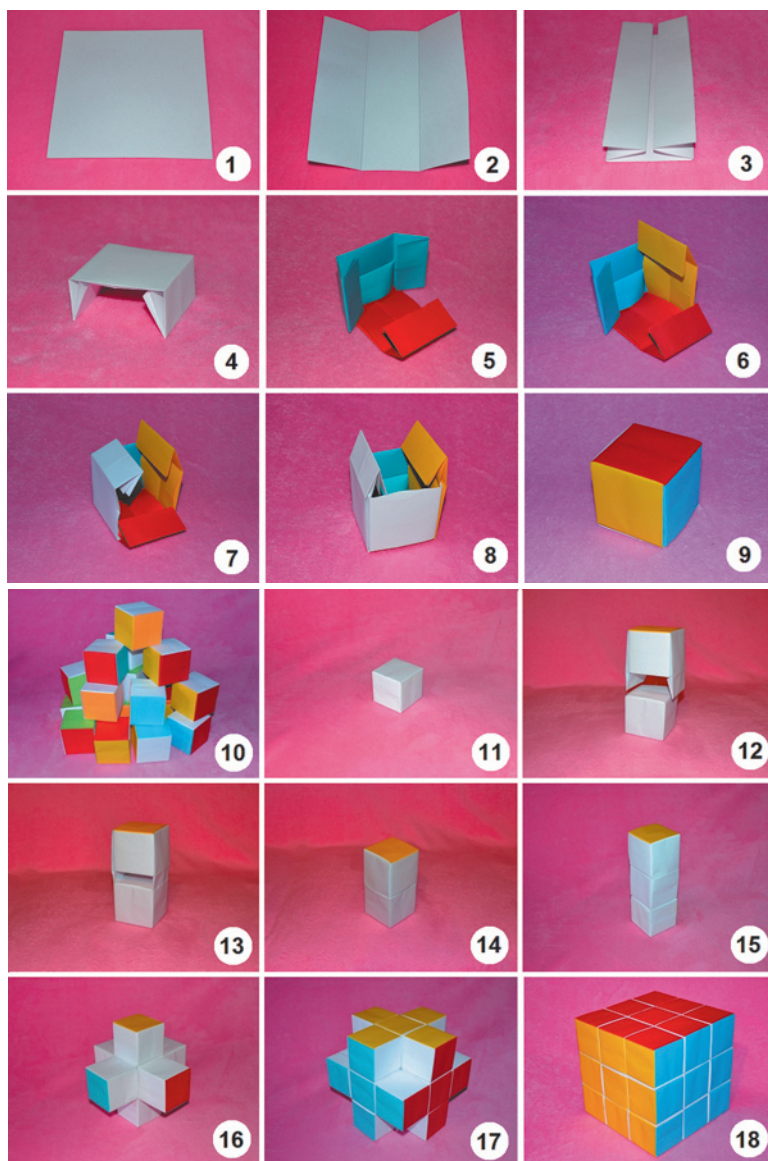
На фото 10 показан подготовленный набор кубиков. Цветные грани этих кубиков подбираются в соответствии со стандартной раскраской кубика Рубика. В нем противоположные грани таких цветов: красный и оранжевый, белый и желтый, зеленый и синий.

Теперь можно приступить к сборке оригами «Кубик Рубика», соединив изготовленные кубики в нераспадающийся куб $3 \times 3 \times 3$. На фото 11–14 показано, как соединяются белый внутренний кубик с кубиком, содержащим одну желтую грань. Для этого во втором кубике извлекаем две ножки двух различных скобок и вставляем их в карманы двух скобок белого кубика. Кубики соединяются воедино, образуя параллелепипед $1 \times 1 \times 2$.

Затем таким же образом к противоположной грани белого кубика присоединяем еще один кубик, и получается параллелепипед $1 \times 1 \times 3$ (фото 15). Присоединив еще четыре кубика с одной цветной гранью, получим крестовину (фото 16). Цветные грани на торцах определяют раскраску будущего кубика Рубика.

Следующим шагом к крестовине присоединяем двенадцать реберных кубиков с двумя цветными гранями (фото 17). И на заключительном этапе присоединяем восемь угловых кубиков с тремя цветными гранями.

Наш «Кубик Рубика» готов. Скажу честно, фотографировать и описывать процесс сборки легче, чем соединять заготовки в единую конструкцию. Здесь надо проявить аккуратность и большое терпение. А головоломка заключается в том, чтобы повторить то, что удалось сделать пятиклассникам вместе с руководителем кружка Натальей Васильевной Черниковой.



Мы же заметим для себя, что великие умы, занимающиеся построением весьма абстрактных теорий, далеких от повседневности, могут оказаться чрезвычайно полезными обществу в абсолютно приземленной сфере деятельности. Дисциплина, логика и научный метод – вот то, чем они владеют в совершенстве. А это залог успеха в решении не только научных, но и любых практических проблем. Так зачем же разбрасываться таким богатством?

Л. Рослова

май-июнь
2015