МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ №1 (760)

ИЗДАЕТСЯ С 1992 г.

mat.1september.ru

издательский дом
1september.ru

Первое сентября

январь 2015

МАТЕМАТИКА Подписка на сайте www.1september.ru или по каталогу «Почта России»: 79073 (бумажная версия); 12717 (CD-версия)

ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ДОМ «ПЕРВОЕ СЕНТЯБРЯ»
Главный редактор: Артем Соловейчик (генеральный директор)
Коммерческая деятельность: Константин Шмарковский (финансовый директор)
Развитие, IT и координация проектов: Сергей Островский (исполнительный директор)
Реклама, конференции и техническое обеспечение Издательского дома: Павел Кузнецов
Производство: Станислав Савельев
Административно-хозяйственное обеспечение: Андрей Ушков
Педагогический университет: Валерия Арсланьян (ректор)

ЖУРНАЛЫ ИЗДАТЕЛЬСКОГО ДОМА:
Английский язык – А. Громушкина, **Библиотека в школе** – О. Громова, **Биология** – Н. Иванова, **География** – А. Митрофанов, и.о. **Дошкольное образование** – Д. Тюттерин, **Здоровье детей** – Н. Сёмина, **Информатика** – С. Островский, **Искусство** – О. Волкова, **История** – А. Савельев, **Классное руководство и воспитание школьников** – М. Битянова, **Литература** – С. Волков, **Математика** – Л. Рослова, **Начальная школа** – М. Соловейчик, **Немецкий язык** – М. Бузоева, **ОБЖ** – А. Митрофанов, **Русский язык** – Л. Гончар, **Спорт в школе** – О. Леонтьева, **Технология** – А. Митрофанов, **Управление школой** – Е. Рачевский, **Физика** – Н. Козлова, **Французский язык** – Г. Чесновицкая, **Химия** – О. Блохина, **Школа для родителей** – Л. Печатникова, **Школьный психолог** – М. Чибисова.

Иллюстрации: фотобанк Shutterstock

На с. 1 и с. 64 — коллаж из иллюстраций, взятых на https://ru.wikipedia.org

УЧРЕДИТЕЛЬ: ООО «ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ДОМ «ПЕРВОЕ СЕНТЯБРЯ»
Зарегистрировано ПИ №ФС77-58424 от 25.06.14 в Роскомнадзоре
Подписано в печать: по графику 12.11.14, фактически 12.11.14 Заказ №
Отпечатано в ОАО «Первая Образцовая типография» филиал «Чеховский печатный двор» ул. Полиграфистов, д. 1, Московская область, г. Чехов, 142300; Сайт: www.chpd.ru; E-mail: sales@chpk.ru; факс: 8(496)726-54-10, 8(495)988-63-76

АДРЕС РЕДАКЦИИ И ИЗДАТЕЛЯ:
ул. Киевская, д. 24, Москва, 121165
Телефон/ факс: **(499) 249-3138**
Отдел рекламы: **(499) 249-9870**
Сайт: 1september.ru

ИЗДАТЕЛЬСКАЯ ПОДПИСКА:
Телефон: **(499) 249-4758**

ПОДПИСНЫЕ ИНДЕКСЫ:
Почта России: бумажная версия – **79073**; CD версия – **12717**

ТЕМА НОМЕРА: ЕГЭ НА РИФАХ РЕФОРМ

В НОМЕРЕ

К материалам, обозначенным этим символом, есть дополнительные материалы в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru

ОБЛАЧНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ ОТ ИЗДАТЕЛЬСКОГО ДОМА «ПЕРВОЕ СЕНТЯБРЯ»

УВАЖАЕМЫЕ ПОДПИСЧИКИ БУМАЖНОЙ ВЕРСИИ ЖУРНАЛА!

Дополнительные материалы к номеру и электронная версия журнала находятся в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru
Для доступа к материалам воспользуйтесь, пожалуйста, кодом доступа, вложенным в № 1.
Срок действия кода с 1 января по 30 июня 2015 года.

Для активации кода:
· Зайдите на сайт www.1september.ru
· Откройте Личный кабинет (зарегистрируйтесь)
· Введите код доступа и выберите свое издание

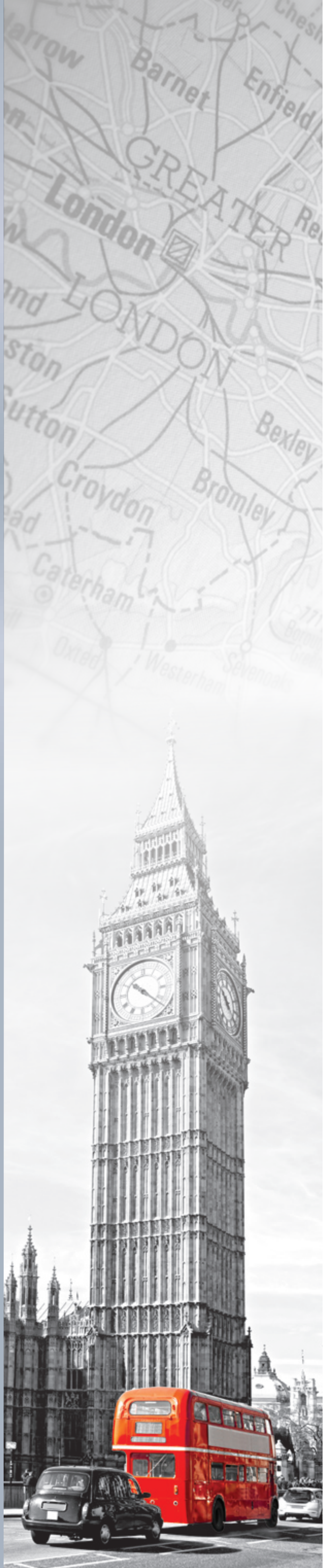
Справки: podpiska@1september.ru или через службу поддержки на портале «Первого сентября»

МАТЕМАТИКА. ПЕРВОЕ СЕНТЯБРЯ
Методический журнал для учителя математики
Издается с 1992 г. Выходит один раз в месяц

РЕДАКЦИЯ:
Главный редактор: Л. Рослова
Отв. секретарь: Т. Черкавская
Редакторы: П. Камаев, О. Макарова, И. Коган
Дизайн макета: И. Лукьянов. Дизайн обложки: Э. Лурье
Корректор: Л. Громова. Верстка: Л. Кукушкина

Распространяется по подписке
Цена свободная
Тираж 20 000 экз.

Тел. редакции: **(499) 249-3460**
E-mail: **mat@1september.ru**
Сайт: **mat.1september.ru**



МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЭКСКУРСИИ ПО ЛОНДОНУ И ОКРЕСТНОСТЯМ

Л. РОСЛОВА

■ В прошлом году в журнале был опубликован материал под названием «Путешествие в Лондон», в котором ученики, «путешествуя» по этому городу, изучают английский язык и решают задачи. И так вот случилось, что мне посчастливилось в конце года оказаться в Лондоне. Зайдя перед поездкой на сайт одного из туроператоров и просмотрев список десяти достопримечательностей города и окрестностей, которые мне настоятельно советовали посетить, я обнаружила, что все они вызывают у меня те или иные математические ассоциации. И это обстоятельство натолкнуло меня на мысль «поработать» туроператором и разработать специальный математический маршрут. Возможно, кто-то воспользуется им в реальности, кто-то виртуально. В любом случае, Англия и ее столица находятся на математической карте вовсе не на периферии, а в самом что ни на есть центре. Достаточно вспомнить хотя бы такое имя, как Исаак Ньютон.

Ну а начать знакомство с математическим Лондоном я решила с его окрестностей. И первыми точками на нашем маршруте стали Оксфорд и Кембридж. Что вполне естественно. Их университеты, основанные соответственно в 1117 и 1209 годах, сильны и сегодня, занимая 5-е и 2-е места в мировом рейтинге университетов. Сильны они и своими математическими научными школами, давшими миру за прошедшие столетия когорты прекрасных математиков. Жаль, что их ровесница Москва получила свой университет аж на 5–6 столетий позже. Приходится догонять. В части математики, кстати, получается вполне успешно, и на их Ньютона мы можем ответить нашим Колмогоровым. И не только. Первая женщина-профессор Кембриджского университета – наша с вами соотечественница. И произошло это всего несколько лет тому назад. Верность традициям – залог долголетнего существования. И восприимчивость к новому. В общем, много интересного может открыться взору неравнодушного путешественника, и уж что-что, а путешествовать и открывать новое и неизведанное мы умеем не хуже других.

И открывая новую серию обложек журнала, я приглашаю вас в путешествие. Вы спросите, какие еще точки есть на нашем маршруте? Я же сказала, что топ-10: Британский музей, Тауэр, Гринвичская лаборатория, Букингемский дворец, музей Шерлока Холмса, Музей науки, Хэмптон-корт, ну и что-то еще, не буду раскрывать. Пусть это будет Джекпот. В дорогу!

С. ШЕСТАКОВ,
И. ЯЩЕНКО,
г. Москва

ЕГЭ-2015: БАЗОВЫЙ УРОВЕНЬ

Имя твоё – ногтём по стеклу,
Имя твоё – огнём по нутру,
Одно единственное движенье губ,
Имя твоё – троица букв.
Крестик, пойманный на лету,
Каша из ответов во рту,

Камень, кинутый в наш огород,
Придавит всё, что учил народ.
В СМИ возбуждая и брань, и смех,
Имя твоё задевает всех.
И в каждом классе каждый урок
Имя твоё, как пуля в висок.

Имя твоё – тестов грибы!
Имя твоё – поцелуй судьбы!
В июньской жаре ледяной ушат,
Имя твоё – чиновников штат,
Огромный, воинствующий, без ума.
С именем твоим – знаний тьма.

20.05.12

■ В 2015 году Единый государственный экзамен по математике претерпит существенные изменения. Эти изменения касаются прежде всего структуры КИМ и экзамена в целом: предполагается, что выпускник сможет выбрать один из двух вариантов экзамена — на базовом уровне (для выпускников, которым не требуется высокий балл; к ним относятся те, кто не собирается продолжать образование, и те, кто собирается делать это в университетах гуманитарного направления; вариант состоит из 20 заданий с кратким ответом, продолжительность экзамена 3 часа) или на профильном уровне (структура КИМ здесь аналогична — с некоторыми изменениями — структуре прошлых лет; продолжительность экзамена 3 часа 55 минут).

Форма и содержание экзамена требует более полного описания типов и особенностей заданий каждой из двух новых демоверсий и открытого банка задач (именно на его основе формируются задания с кратким ответом). Такому описанию, снабженному примерами решения задач, аналогичных задачам демоверсий, и посвящена эта статья. Надеемся, что она окажется полезной как выпускникам, так и учителям старшей школы, позволив им лучше ориентироваться в предстоящей итоговой аттестации.

Общие рекомендации к заданиям с кратким ответом

Ответом к заданиям варианта экзамена базового уровня является число или конечная десятичная дробь. При решении этих задач и проверке решений важно помнить следующее.

Проверка ответов осуществляется компьютером после сканирования бланка ответов и сопоставления результатов сканирования с правильными ответами. Поэтому цифры в бланке ответов следует писать разборчиво и строго в соответствии с инструкцией по заполнению бланка (с тем, чтобы, например, 1 и 7 или 8 и В распознавались корректно). К сожалению, ошибки сканирования полностью исключить нельзя, поэтому выпускнику, если он уверен в решении задачи, за которую получил минус, нужно идти на апелляцию.

Ответом к задаче может быть только целое число или конечная десятичная дробь. Ответ, зафиксированный в иной форме, будет распознан как неправильный. Поэтому если результатом решения задачи явилась обыкновенная дробь (например, $\frac{1}{8}$), перед записью ответа в бланк ее нужно обратить в десятичную, то есть в ответе написать 0,125.

Единицы измерения (в каких именно единицах должен быть дан ответ, указывается в условии задачи) в бланке ответов писать не нужно, в противном случае сканер, вероятно, распознает ответ как неправильный.

Задание 1

Тип задания по КТ. Задание на вычисления и преобразования, проверяющее умение выполнять арифметические действия, сочетая устные и письменные приемы.

Характеристика задания. Несложное задание на вычисление значений арифметических выражений.

К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru

Комментарий. Для решения задачи достаточно уметь выполнять арифметические действия с целыми числами и дробями.

Пример с решением. Найдите значение выражения $5+\frac{4}{5}+\frac{3}{4}$.

Решение. Поскольку $\frac{4}{5}=0,8$, $\frac{3}{4}=0,75$, искомое значение равно сумме $5 + 0,8 + 0,75 = 6,55$.

Ответ: 6,55.

Задание 2

Тип задания по КТ. Задание на вычисления и преобразования, проверяющее умение выполнять арифметические действия, сочетая устные и письменные приемы.

Характеристика задания. Несложное задание на вычисление значений арифметических выражений, в том числе на действия со степенями.

Комментарий. Для решения задачи достаточно уметь выполнять арифметические действия с целыми числами, дробями, корнями, степенями.

Пример с решением. Найдите значение выражения $\frac{0,36\cdot 10^9}{0,9\cdot 10^7}$.

Решение. $\frac{0,36\cdot 10^9}{0,9\cdot 10^7}=\frac{0,36}{0,9}\cdot\frac{10^9}{10^7}=0,4\cdot 10^2=40$.

Ответ: 40.

Задание 3

Тип задания по КТ. Задание на использование приобретенных знаний и умений в практической деятельности и повседневной жизни, проверяющее умение решать прикладные задачи, в том числе социально-экономического и физического характера, на наибольшее и наименьшее значения, на нахождение скорости и ускорения.

Характеристика задания. Несложная текстовая задача, моделирующая реальную или близкую к реальной ситуацию.

Комментарий. Для решения задачи обычно достаточно понимания того, что процент — это просто одна сотая часть некоторой величины и для того, чтобы найти k% от некоторой величины, достаточно эту величину умножить на $\frac{k}{100}$.

Пример с решением. Налог на доходы физических лиц (НДФЛ) в РФ составляет 13% от начисленной заработной платы. Сколько рублей получит работник после уплаты НДФЛ, если начисленная заработная плата составляет 30 000 рублей?

Решение. Работник получит 87%, то есть 0,87 от начисленной заработной платы, или $0,87 \cdot 30\,000 = 26\,100$ рублей.

Ответ: 26 100.

Задание 4

Тип задания по КТ. Задание на выполнение вычислений и преобразований, проверяющее умение вычислять значения числовых и буквенных выражений, осуществляя необходимые подстановки и преобразования.

Характеристика задания. Задание на выполнение расчета по данной формуле.

Комментарий. Несложное задание на вычисление значения некоторой величины по данной формуле (из курса физики, химии и т.п.).

Пример с решением. Найдите v_0 из равенства $v = v_0 + at$, если $v = 25$, $t = 3$ и $a = 6$.

Решение. По данной формуле находим, что $v_0 = v - at = 25 - 6 \cdot 3 = 25 - 18 = 7$.

Ответ: 7.

Задание 5

Тип задания по КТ. Задание на выполнение вычислений и преобразований, проверяющее умение проводить по известным формулам и правилам преобразования буквенных выражений, включающих степени, радикалы, логарифмы и тригонометрические функции.

Характеристика задания. Несложная задача на вычисление значения выражения.

Комментарий. Для решения задачи достаточно знания основных фактов и формул тригонометрии, свойств корней, степеней и логарифмов.

Пример с решением. Найдите $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = -0,6$ и $270° < \alpha < 360°$.

Решение. Поскольку $270° < \alpha < 360°$, получим, что $\cos\alpha > 0$. Искомое значение найдем по формуле

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-(-0,6)^2}=$$
$$=\sqrt{1-0,36}=\sqrt{0,64}=0,8.$$

Ответ: 0,8.

Задание 6

Тип задания по КТ. Задание на использование приобретенных знаний и умений в практической деятельности и повседневной жизни, проверяющее умение анализировать реальные числовые данные, информацию статистического характера; осуществлять практические расчеты по формулам; пользоваться оценкой и прикидкой при практических расчетах.

Характеристика задания. Несложная арифметическая текстовая задача на использование приобретенных знаний и умений в практической деятельности и повседневной жизни.

Комментарий. Как правило, задачу можно решить, выполнив деление с остатком и округлив результат до ближайшего целого числа либо воспользовавшись оценкой и прикидкой.

Пример с решением. Конфета стоит 4 руб. 30 коп. Какое наибольшее число конфет можно купить на 50 рублей?

Решение. Решать задачу можно по-разному, например, поделив 50 на 4,3 с остатком и получив в качестве целой части 11. Можно сделать прикидку, сообразив, что 10 конфет стоят 43 рубля и, чтобы при покупке не выйти за пределы 50 рублей, добавить к этим 10 конфетам можно еще только одну.

Ответ: 11.

Задание 7

Тип задания по КТ. Задание на решение уравнения или системы уравнений, проверяющее умение решать рациональные, иррациональные, показательные, тригонометрические и логарифмические уравнения, их системы.

Характеристика задания. Несложное рациональное, показательное, логарифмическое, тригонометрическое или иррациональное уравнение.

Комментарий. Уравнение сводится в одно действие к линейному или квадратному (в последнем случае, в зависимости от условия, в ответе нужно указать только один из корней — меньший или больший).

Пример с решением. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{6}\right)^{12-7x}=36.$

Решение. Приведя левую и правую части уравнения к степеням числа 6, получим уравнение $6^{7x-12}=6^2$, откуда $7x-12=2$ и, значит, $x=2$.

Ответ: 2.

Задание 8

Тип задания по КТ. Задание на построение и исследование простейших математических моделей, проверяющее умение моделировать реальные ситуации на языке геометрии, исследовать построенные модели с использованием геометрических понятий и теорем, аппарата алгебры; решать практические задачи, связанные с нахождением геометрических величин.

Характеристика задания. Несложная задача по планиметрии, связанная с практическими расчетами площадей, длин, углов.

Комментарий. Для решения задачи достаточно знать основные свойства и формулы, связанные с треугольниками и многоугольниками.

Пример с решением. В квартире две прямоугольные комнаты. Размеры первой комнаты — 4 м × 6 м, а размеры второй комнаты — 3 м × 7 м. Какая из этих комнат больше по площади? В ответ запишите площадь меньшей комнаты в квадратных метрах.

Решение. Площадь первой комнаты равна $4\cdot6=44$ м², площадь второй комнаты равна $3\cdot7=21$ м².

Ответ: 21.

Задание 9

Тип задания по КТ. Задание на использование приобретенных знаний и умений в практической деятельности и повседневной жизни, проверяющее умение анализировать реальные числовые данные, информацию статистического характера; осуществлять практические расчеты по формулам; пользоваться оценкой и прикидкой при практических расчетах.

Характеристика задания. Несложное задание на различение и сопоставление различных величин или характеристик с единицами их измерения.

Комментарий. Для решения задачи достаточно умения анализировать простейшие данные и понимать их примерный диапазон.

Пример с решением. Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

Величина	**Возможное значение**
А) рост ребенка	1) 21 км
Б) толщина листа бумаги	2) 26 м
В) длина автобусного маршрута	3) 0,1 мм
Г) высота жилого дома	4) 108 см

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер ее возможного реального значения.

А	Б	В	Г

Решение. Понятно, что рост ребенка не может быть равен ни 21 км, ни 26 м, ни 0,1 мм. Поэтому в данном случае он равен 108 см. Аналогично находим, что толщина листа бумаги равна 0,1 мм, длина автобусного маршрута равна 21 км, высота жилого дома равна 26 м. Таблица имеет вид:

А	Б	В	Г
4	3	1	2

Ответ: 4312.

Задание 10

Тип задания по КТ. Задание на построение и исследование простейших математических моделей: моделирование реальных ситуаций на языке теории вероятностей и статистики; вычисление в простейших случаях вероятности событий.

Характеристика задания. Несложная задача по теории вероятностей или статистике.

Комментарий. Для решения задачи достаточно уметь находить отношение числа благоприятных для наступления некоторого события исходов к числу всех равновозможных исходов.

Пример с решением. В коробке лежит 10 одинаковых по внешнему виду конфет, в трех из которых нет фруктовой начинки. Ваня берет одну конфету. Найдите вероятность того, что в этой конфете будет фруктовая начинка.

Решение. Число конфет с фруктовой начинкой равно 7, число всех конфет равно 10. Поэтому искомая вероятность равна 0,7.

Ответ: 0,7.

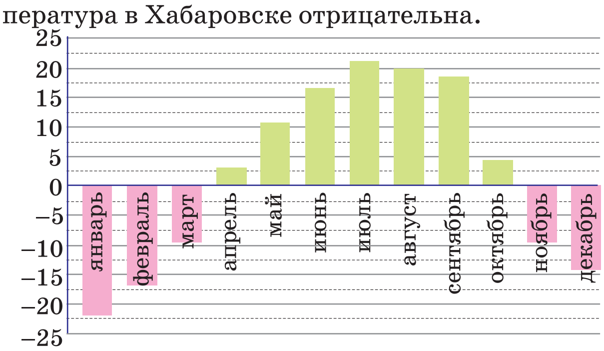
Задание 11

Тип задания по КТ. Задание на использование приобретенных знаний и умений в практической деятельности и повседневной жизни: описание с помощью функций различных реальных зависимостей между величинами и интерпретация их графиков; извлечение информации, представленной в таблицах, на диаграммах, графиках; определение значения функции по значению аргумента при различных способах задания функции; описание поведения и свойств функции по ее графику, нахождение по графику функции наибольшего и наименьшего значений; построение графиков изученных функций

Характеристика задания. Задание на чтение графика функции (диаграммы), моделирующего реальную или близкую к реальной ситуацию. График (диаграмма) характеризует изменение в зависимости от времени некоторой величины (температуры, стоимости акций и т.д.). Как правило, в задании требуется найти наибольшее (наименьшее) значение этой величины, разность между наибольшим и наименьшим значениями (возможно, за определенный период времени), время, когда величина достигает данного значения, вычислить среднее значение величины.

Комментарий. Простейшее задание на считывание информации, представленной в виде диаграммы или графика, возможно, требующее незначительных вычислений, например, нахождения среднего значения некоторой величины.

Пример с решением. На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха (в градусах Цельсия) в Хабаровске по результатам многолетних наблюдений. Найдите по диаграмме количество месяцев, когда среднемесячная температура в Хабаровске отрицательна.



Решение. Для ответа на вопрос задачи достаточно «посчитать столбики», расположенные в нижней полуплоскости относительно горизонтали, соответствующей нулевой температуре. Таких столбиков — ровно 5.

Ответ: 5.

Задание 12

Тип задания по КТ. Задание на построение и исследование простейших математических моделей, проверяющее умение моделировать реальные ситуации на языке алгебры, составлять уравнения и неравенства по условию задачи; исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры.

Характеристика задания. Задание на анализ практической ситуации: несложная текстовая задача (возможно, с табличными данными) на оптимальный выбор, моделирующая реальную или близкую к реальной ситуацию.

Комментарий. Чтобы решить задачу, достаточно подсчитать стоимость товара или услуги, исходя из данных задачи, и в ответе указать наименьшую из них либо сделать выборку товаров или услуг, суммарная стоимость которых не превосходит определенного значения. В последнем случае задача может иметь несколько решений, и в ответе достаточно указать результат любого из них.

Пример с решением. Для обслуживания международного семинара необходимо собрать группу переводчиков. Сведения о кандидатах представлены в таблице.

Переводчик	Языки	Стоимость услуг (руб. в день)
1	Немецкий, испанский	14 000
2	Английский, немецкий	12 000
3	Английский	4000
4	Английский, французский	12 000
5	Французский	6000
6	Испанский	8000

Пользуясь таблицей, соберите хотя бы одну группу, в которой переводчики вместе владеют четырьмя иностранными языками: английским, немецким, французским и испанским, а суммарная стоимость их услуг не превышает 24 000 рублей в день. В ответе для собранной группы укажите номера переводчиков без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Решение. Для решения задачи достаточно выполнить несложный перебор. Требованию задачи удовлетворяют, например, переводчики 1, 3, 5.

Ответ: 135.

Задание 13

Тип задания по КТ. Стереометрическая задача на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей, объемов).

Характеристика задания. Несложное задание по стереометрии на применение основных формул, связанных с вычислением площадей поверхностей или объемов многогранников (пирамид и призм) или тел вращения (цилиндров, конусов, шаров), в том числе вписанных или описанных около других многогранников или тел вращения.

Комментарий. Для решения задачи достаточно знать формулы площадей поверхности и объемов пирамиды, призмы, цилиндра, конуса и шара.

Пример с решением. В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 64 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если ее перелить во второй цилиндрический сосуд, диаметр которого в 4 раза больше диаметра первого? Ответ выразите в сантиметрах

Решение. Поскольку диаметр основания второго цилиндра в 4 раза больше диаметра основания первого, то и радиус основания второго цилиндра в 4 раза больше радиуса основания первого. Поэтому площадь основания второго цилиндра будет в 16 раз больше площади основания первого. Поскольку объем цилиндра равен произведению площади основания на высоту и этот объем не менялся, уровень жидкости во втором сосуде будет в 16 раз ниже уровня жидкости в первом и составит $\frac{64}{16} = 4$ см.

Ответ: 4.

Задание 14

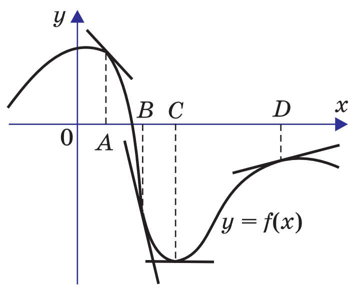
Тип задания по КТ. Задание на выполнение действий с функциями и производными функций, исследование функций.

Характеристика задания. Ставшая традиционной для ЕГЭ по математике задача на чтение графика функции для ответа на вопрос о каком-то из свойств производной этой функции либо на чтение графика производной функции для ответа на вопрос о каком-то из свойств самой функции.

Комментарий. Для решения задачи достаточно знать, что значение производной функции в данной точке равно тангенсу угла, который касательная к графику, проведенная в этой точке, образует с положительным направлением оси абсцисс. Кроме того, нужно знать, что в каждой точке интервала возрастания дифференцируемой на этом интервале функции ее производная положительна; в каждой точке интервала убывания дифференцируемой на этом интервале функции ее производная отрицательна; в каждой точке экстремума производная либо равна нулю, либо не существует («угол» на графике функции). Обратно, если дан график производной функции, то на тех интервалах, где он расположен выше оси абсцисс (то есть производная положительна), функция возрастает; на тех интервалах, где он расположен ниже оси абсцисс (то есть производная отрицательна), функция убывает; общие точки графика производной и оси абсцисс (то есть точки, в которых производная равна нулю) либо являются точками максимума, если график производной пересекает ось абсцисс «сверху вниз» (то есть производная меняет знак с плюса на минус: возрастание функции сменяется убыванием), либо являются точками минимума, если график производной пересекает ось абсцисс «снизу вверх» (то есть производная меняет знак с минуса на плюс: убывание функции сменяется возрастанием), либо не являются точками экстремума (график производной не пересекает ось абсцисс, а лишь касается ее; в этом случае не происходит смены знака производной и характер монотонности функции не меняется).

Пример с решением. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, к которому проведены касательные в четырех точках.

Ниже указаны значения производной в данных точках. Пользуясь графиком, поставьте в соответствие каждой точке значение производной.



Точка	Значение производной
A	1) 0
B	2) –1,2
C	3) 0,35
D	4) –4,56

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

A	*B*	*C*	*D*

Решение. Значение производной функции в данной точке равно тангенсу угла, который касательная к графику, проведенная в этой точке, образует с положительным направлением оси абсцисс. Ясно, что рисунок не позволяет в явном виде вычислить значения тангенсов для трех точек из четырех данных. Поэтому для решения задачи требуется провести определенный анализ имеющихся данных. Если касательная параллельна оси абсцисс, это значение равно нулю. Следовательно, точке *C* соответствует значение 1 из правого столбца таблицы. Поскольку при параллельном переносе одной из двух прямых угол между этими прямыми не меняется, для определения знака производной удобно мысленно провести прямую, параллельную касательной, через начало координат. Если эта прямая расположена в первой и третьей четвертях, то угол, образуемый ею (а значит, и касательной) с положительным направлением оси абсцисс, будет острым (его тангенс положителен, следовательно, положительно и значение производной в точке касания). Этому случаю отвечает касательная, проходящая через точку D, следовательно, точке D соответствует значение 3 из правого столбца таблицы. Если эта прямая расположена во второй и четвертой четвертях, то угол, образуемый ею (а значит, и касательной) с положительным направлением оси абсцисс, будет тупым (его тангенс отрицателен, следовательно, отрицательно и значение производной в точке касания). Этому случаю отвечают касательные, проходящие через точки A и B, при этом очевидно, что касательной, проходящей через точку A, отвечает больший по величине тупой угол, поэтому ему соответствует большее по величине значение тангенса. Следовательно, точке A соответствует значение 2 из правого столбца таблицы, а точке B — значение 4 из правого столбца таблицы.

Ответ: 2413.

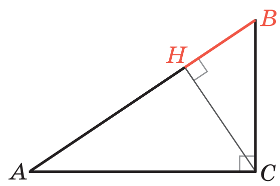
Задание 15

Тип задания по КТ. Планиметрическая задача на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей); моделирование реальных ситуаций на языке геометрии, исследование построенных моделей с использованием геометрических понятий и теорем, аппарата алгебры; практическая задача, связанная с нахождением геометрических величин.

Характеристика задания. Несложная планиметрическая задача, в том числе по готовому чертежу.

Комментарий. Для решения задачи достаточно знать основные формулы и теоремы планиметрии.

Пример с решением. В треугольнике ABC угол ACB равен $90°$, $\sin B = \frac{5}{13}$, $BC = 26$. Отрезок CH — высота треугольника ABC. Найдите длину отрезка BH.



Решение. Поскольку $BH = BC \cdot \cos B$, для решения задачи нужно найти $\cos B$. Для этого можно использовать основное тригонометрическое тождество:

$$\cos B = \sqrt{1-\sin^2 B} = \sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2} = \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13}.$$

Следовательно,

$$BH = BC \cdot \cos B = 26 \cdot \frac{12}{13} = 24.$$

Ответ: 24.

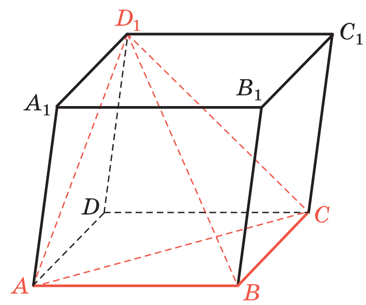
Задание 16

Тип задания по КТ. Стереометрическая задача на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей, объемов).

Характеристика задания. Задача на вычисление элементов, площадей поверхностей или объемов многогранников или тел вращения.

Комментарий. Для решения задачи достаточно знать свойства правильных пирамид и призм, формулы площадей поверхности и объемов пирамиды, призмы, цилиндра, конуса и шара.

Пример с решением. Объем параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 45. Найдите объем пирамиды D_1ABC (см. рис.).



Решение. Высоты пирамиды и призмы, проведенные из вершины D_1, совпадают, а площадь основания пирамиды вдвое меньше площади основания призмы. Пусть V_1 и V_2 — объемы пирамиды и призмы соответственно, h — их общая высота. Тогда

$$V_1 = \frac{1}{3} h \cdot S_{ABC} = \frac{1}{6} h \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{6} V_2 = \frac{1}{6} \cdot 45 = 7{,}5.$$

Ответ: 7,5.

Задание 17

Тип задания по КТ. Задание на решение уравнений или неравенств.

Характеристика задания. Несложное рациональное, показательное и логарифмическое неравенство, их системы.

Комментарий. Для решения задачи достаточно уметь решать линейные и квадратные неравенства, а также простейшие дробно-рациональные, показательные и логарифмические неравенства.

Пример с решением. Каждому из четырех неравенств слева соответствует одно из решений, изображенных на координатной прямой справа. Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

Неравенство

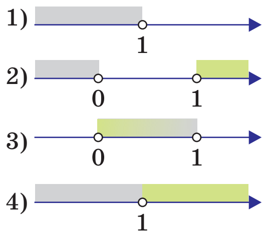
А) $2x(x-1)<0$

Б) $\dfrac{x-1}{3}<0$

В) $4(x-1)^2>0$

Г) $5x(x-1)>0$

Решение



В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б	В	Г

Решение. Решением неравенства А является промежуток (0; 1); решением неравенства Б — промежуток $(-\infty; 1)$; неравенство В выполняется при всех значениях переменной, кроме 1; решение неравенства Г — объединение промежутков $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.

Ответ: 3142.

Задание 18

Тип задания по КТ. Задание на построение и исследование простейших математических моделей.

Характеристика задания. Задание, проверяющее умение проводить доказательные рассуждения при решении задач, оценивать логическую правильность рассуждений, распознавать логически некорректные рассуждения.

Комментарий. Для решения задачи достаточно проанализировать предложенные утверждения и сделать правильные выводы на их основании.

Пример с решением. Известно, что Паша выше Даши, Маша выше Глаши, а Саша ниже и Даши, и Маши. Выберите утверждения, которые следуют из приведенных данных.

1) Паша самый высокий из всех.
2) Даша и Маша одного роста.
3) Саша ниже Глаши.
4) Паша выше Саша.

В ответе укажите номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Решение. Из того, что Паша выше Даши, а Саша ниже Даши, следует, что Паша выше Саши, то есть утверждение 4. Данные утверждения не позволяют сравнить, в частности, рост Паши и Маши, Даши и Маши, Саши и Глаши. Поэтому ни одно из трех первых утверждений не следует из приведенных данных.

Ответ: 4.

Задание 19

Тип задания по КТ. Задание на выполнение вычислений и преобразований.

Характеристика задания. Задача на вычисление значения числового или буквенного выражения, нахождение чисел, удовлетворяющих определенным условиям.

Комментарий. Для решения задачи достаточно уметь выполнять действия с числами, знать свойства делимости, определение и простейшие свойства степеней, корней, логарифмов, синуса, косинуса, тангенса.

Пример с решением. Приведите пример трехзначного числа, сумма цифр которого равна 19, а сумма квадратов цифр делится на 3, но не делится на 9.

Решение. Остаток от деления квадрата натурального числа на 3 равен либо 0 (если число делится на 3), либо 1 (если число не делится на 3). Поэтому сумма квадратов трех натуральных чисел делится на 3, только если каждое из этих чисел делится на 3 (но тогда сумма их квадратов делится на 9, что противоречит условию) либо если ни одно из этих чисел не делится на 3. Попробуем подобрать три натуральных числа, меньших 10, ни одно из которых не делится на 3 и сумма которых равна 19, начав с наибольшего из возможных, 8. Тогда следующим по убыванию будет 7, и, значит, последнее число — это 4. Проверкой легко убедиться, что сумма квадратов найденных чисел (она равна 129) на 9 не делится. Ответом может быть любое трехзначное число, составленное из цифр 8, 7, 4, например, 874.

Ответ: 874.

Задание 20

Тип задания по КТ. Задание на построение и исследование простейших математических моделей.

Характеристика задания. Задача, проверяющая умение моделировать реальные ситуации на языке алгебры, составлять уравнения и неравенства по условию задачи; исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры.

Комментарий. Для решения задачи достаточно правильно интерпретировать условие задачи и не делать ошибок в вычислениях.

Пример с решением. Первого числа каждого нечетного месяца, начиная с января, Витя клал на свой беспроцентный банковский счет 30 000 рублей, а первого числа каждого четного месяца, начиная с февраля, снимал 15 000 рублей. Первого числа какого по счету месяца на счету Вити оказалось ровно 90 000 рублей?

Решение. Из условия задачи следует, что первого числа каждого нечетного месяца, начиная с марта, сумма на счету Вити увеличивалась на 15 000 рублей по сравнению с предыдущим, нечетным месяцем. Поэтому с 30 000 до 90 000 рублей она вырастет за 4 следующих после января нечетных месяца, то есть первого сентября.

Ответ: 9.

МЕТОДОБЪЕДИНЕНИЕ / ЭКЗАМЕНЫ / ЕГЭ

ТЕМА НОМЕРА: ЕГЭ НА РИФАХ РЕФОРМ

О. ДМИТРИЕВ,
dmitrievoleg@yandex.ru,
г. Саратов

ОШИБКИ ДЕЛАТЬ ЛЕГКО, ТРУДНЕЕ НА НИХ УЧИТЬСЯ

ооо

Так беспомощно грудь трепетала,
Но шаги мои были легки.
И я правой рукою писала
ЕГЭ для левой руки.

Показалось, что много вопросов,
А я знала – их меньше «ни»!
Но сказал мне дежурный просто
На экзамене: «Не проси!

Пусть разбудит тебя унылый,
Переменчивый, мрачный рок».
Я ответила: «Милый, милый –
Хорошо, я сдаю листок!»

Это тесты последней встречи.
Знаний свет погас в голове.
Так пускай он горит, как свечи,
Этот самый левый ЕГЭ.

13.05.12

Не знаешь, что делать, – ошибайся.

Прошел очередной сезон ЕГЭ. Как всегда, по математике он был наполнен экспериментами по формату экзамена: добавилось задание В15, изменилось задание С4. А так как и в грядущем году нас ждут очередные преобразования формата (возможное разделение на базисный и профильный ЕГЭ по математике), то хотелось бы проанализировать ошибки и учеников, и составителей вариантов, чтобы учесть их при подготовке к экзамену. Кроме анализа варианта основной волны (для Центральной России) этого года, мы для сравнения будем вспоминать и задания прошлых лет. Поскольку эксперты могут читать только решения части С, то и анализировать будем эту часть. Заметим, что приступало к ее решению примерно две трети участников экзамена.

Начнем традиционно с задания С1.

С1. а) Решите уравнение $2\sqrt{3}\cos^2\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)-\sin 2x=0$ или $2\sqrt{3}\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)+\sin 2x=0$.

б) Найдите корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2};\,3\pi\right]$.

Пошагово решим параллельно оба примера, комментируя типичные ошибки.

Первый шаг — применение формул приведения:

$$2\sqrt{3}\cos^2\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)-\sin 2x=0 \Leftrightarrow 2\sqrt{3}\sin^2 x-\sin 2x=0;$$

$$2\sqrt{3}\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)+\sin 2x=0 \Leftrightarrow 2\sqrt{3}(-\cos x)^2+\sin 2x=0.$$

Типичная ошибка учеников — путаница в формулах приведения (либо в названии функции, либо в знаке).

Второй шаг — возведение минус единицы в квадрат:

$$2\sqrt{3}(-\cos x)^2+\sin 2x=0 \Leftrightarrow 2\sqrt{3}\cos^2 x+\sin 2x=0.$$

Еще одна типичная ошибка учеников: при возведении в квадрат остается знак минус, то есть его забывают возводить в квадрат. Важна психологическая подоплека этой ошибки, так как при умножении двух отрицательных чисел практически все выполняют умножение минуса на минус правильно. Она заключается в том, что опускаются скобки при выполнении первого шага (применение формулы приведения). Вообще, очень часто более простые случаи применения общих алгоритмов вызывают большие трудности, так как не ассоциируются у учеников с этими общими алгоритмами.

К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru

Но здесь надо отметить и методическую ошибку составителей. Дело в том, что варианты получаются сильно неравноценными. В одном случае, как мы видим, при правильном первом шаге ученик всегда может столкнуться с ошибкой при возведении минуса в квадрат, а в другом — никогда.

Третий шаг — применение формулы синуса двойного угла:

$$2\sqrt{3}\sin^2 x - \sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{3}\sin^2 x - 2\sin x\cos x = 0;$$

$$2\sqrt{3}\cos^2 x + \sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{3}\cos^2 x + 2\sin x\cos x = 0.$$

Типичные ошибки этого шага — забывают вторую степень у первого слагаемого (эта ошибка невнимательности или спешки), иногда забывают коэффициент 2 в аргументе второго слагаемого. Очень редко ошибаются в самой формуле.

Четвертый шаг — применение алгоритма решения однородного уравнения:

$$2\sqrt{3}\sin^2 x - 2\sin x\cos x = 0 \mid : \cos^2 x \Rightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\sqrt{3}\mathrm{tg}^2 x - 2\mathrm{tg}\, x = 0;$$
$$2\sqrt{3}\cos^2 x + 2\sin x\cos x = 0 \mid : \cos^2 x \Rightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\sqrt{3} + 2\mathrm{tg}\, x = 0.$$

Очередная типичная ошибка учеников — без анализа условия выписывается ограничение $\cos x \neq 0$. То есть не выполняется проверка случая, когда $\cos x = 0$, соответственно, возникает потеря корней во втором варианте.

Отсюда возникает методическая ошибка составителей, так как только в половине работ типичная ошибка приводит к 0 баллов. В другой половине, согласно рекомендациям по оцениванию для экспертов (методические указания при подготовке экспертов на сайте ФИПИ), деление на косинус не является грубой ошибкой, если не приводит к потере корней.

Естественно, здесь есть и другой путь решения — разложение на множители.

Но даже и в этом случае ориентированные на шаблон ученики автоматически пишут ограничение (из другого способа), что $\cos x \neq 0$. Вновь работает психологический фактор: частный вырожденный случай однородного уравнения решается труднее общего, где можно действовать по шаблону, совсем не задумываясь о математической сути задачи.

Другой тип ошибки — сокращение на общий множитель, что также ведет к потере корней. Эта ошибка связана с укоренившейся привычкой учеников сокращать обе части уравнения на общий числовой множитель и непониманием различия между числом и выражением, содержащим переменную.

Пятый шаг — решение квадратного уравнения:

$$2\sqrt{3}\mathrm{tg}^2 x - 2\mathrm{tg}\, x = 0 \Leftrightarrow \mathrm{tg}\, x\left(\sqrt{3}\mathrm{tg}\, x - 1\right) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{tg}\, x = 0,\ \mathrm{tg}\, x = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Ошибки на этом шаге опять связаны с неполным квадратным уравнением, которое по общим формулам решать ученикам тяжело, так как труднее определять коэффициенты уравнения. Те, кто решал методом разложения на множители, не ошибались.

Шестой шаг — решение простейших тригонометрических уравнений. Здесь ошибки связаны с незнанием табличных значений тангенса (котангенса).

Седьмой шаг — отбор корней.

При использовании тригонометрического круга возникали ошибки в правильном наименовании углов. При последовательных вычислениях при разных значениях n — арифметические ошибки в дробях. При аналитическом подходе с помощью неравенств — ошибки в определении целых решений неравенств.

Вспомним задание С1-2012 (с 2013 г. трудно сравнивать, так как была утечка вариантов и, соответственно, достаточно массовое списывание, что, спустя год, чиновники все-таки признали).

С1. Решите уравнение $\cos 2x + \sin^2 x = 0{,}25$ и укажите корни из промежутка $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$.

Можно отметить, что там было всего четыре логических шага вместо нынешних семи: применение формулы косинуса двойного угла, решение квадратного уравнения, простейшего тригонометрического и отбор корней. Следовательно, задание 2014 года стало объективно сложнее. Это нашло отражение и в статистике (по Саратовской области): доля ненулевых результатов упала с 21,94% (2012) до 14,99% (2014).

Переходим к заданию С2.

С2. В треугольной пирамиде $MABC$ основанием является правильный треугольник ABC, ребро MB перпендикулярно плоскости основания, стороны основания равны 3, а ребро MA равно 6. На ребре AC находится точка D, на ребре AB находится точка E, а на ребре AM — точка L. Известно, что $AD = AL = 2$ и $BE = 1$. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точки E, D и L.

Наиболее типичным для учеников был способ решения, основанный на вычислении длин всех сторон треугольника, полученного в сечении, и использовании формулы Герона. Обсудим его основные этапы.

Первый шаг — определение вида сечения.

Практически все правильно определили форму сечения — треугольник.

Типичная ошибка: выдавая желаемое за действительное, многие считали этот треугольник равносторонним или прямоугольным (так как в условии есть перпендикулярность ребра основанию пирамиды) либо равнобедренным (неверно указывая равные стороны или верно, но без доказательства).

Второй шаг — нахождение сторон сечения.

На этом шаге требовалось хотя бы в одном случае использовать теорему косинусов. А для этого надо уметь вычислять косинус нужного угла (с помощью прямоугольного треугольника или теоремы косинусов). Отсюда и ошибки — вычислительные или в формулах.

Третий шаг — вычисление площади по формуле Герона.

Так как хотя бы одна из сторон треугольника имела длину, выраженную через квадратный корень, то под корнем в формуле получались иррациональные выражения. Увидеть в этой записи формулу разности квадратов удавалось далеко не всем, поэтому прямое раскрытие скобок почти неизбежно приводило к вычислительной ошибке.

В результате у многих была потеря 1 балла (вычислительная ошибка) и большая потеря времени на экзамене. Статистика неумолима: на полный балл задание выполнили 209 выпускников (1,8%), а на неполный 1 балл — 134 (1,2%).

Таким образом, налицо очередная методическая ошибка составителей: не ориентируясь на массовый способ решения, они сильно усложнили вычислительную часть задачи, приблизив ее по уровню трудности к С4 — это для нее характерно широкое использование вычислительных теорем планиметрии.

Сравнение с С2 2012 года здесь не совсем корректно, так как там был вопрос другого типа: найти угол между плоскостями. Аналитическое решение этой задачи позволяло избегать ловушек, связанных с пониманием геометрической сути, хотя объем вычислений был тоже внушителен. Статистика уравнивает эти задачи: доля ненулевых результатов 2,65% (2012 год) и 3% (2014 год).

Переходим к заданию С3.

С3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 36^{x-\frac{1}{2}} - 7\cdot 6^{x-1} + 1 \ge 0, \\ x\cdot \log_4\left(5-3x-x^2\right) \ge 0. \end{cases}$$

Рассмотрим первое неравенство.

Первый шаг — замена переменной.

При замене $t = 6^{x-1}$ получили неравенство $6t^2 - 7t + 1 \ge 0$, а при замене $t = 6^{x-\frac{1}{2}}$ получили неравенство $t^2 - \frac{7}{\sqrt{6}}t + 1 \ge 0$. Типичная ошибка — неверное вычисление коэффициентов, так как многие привыкли, что при замене в простых случаях коэффициенты не меняются.

Второй шаг — решение неравенства:

$$6t^2 - 7t + 1 \ge 0,\ D = 49 - 24 = 25,\ \left[\begin{array}{l} t \le \frac{1}{6} \\ t \ge 1. \end{array}\right.$$

Основные ошибки вычислительные, связанные с невнимательностью.

Третий шаг — решение простейших показательных неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} 6^{x-1} \le \frac{1}{6} \\ 6^{x-1} \ge 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le 0 \\ x \ge 1. \end{array}\right.$$

Так как основание показательной функции больше единицы, то ошибок практически не возникало.

Решим второе неравенство. Сначала стандартным методом.

$$x\cdot\log_4(5-3x-x^2) \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 0, \\ \log_4\left(5-3x-x^2\right) \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \le 0, \\ \log_4\left(5-3x-x^2\right) \le 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 0, \\ 5-3x-x^2 \ge 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x \le 0, \\ 5-3x-x^2 > 0, \\ 5-3x-x^2 \le 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 0, \\ -4 \le x \le 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x \le 0, \\ \frac{-3-\sqrt{29}}{2} < x < \frac{-3+\sqrt{29}}{2}, \\ \left[\begin{array}{l} x \le -4 \\ x \ge 1 \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \le x \le 1 \\ \frac{-3-\sqrt{29}}{2} < x \le -4. \end{array}\right.$$

Типичные ошибки первого шага — потеря второго случая или переход к строгим неравенствам. Ошибки второго шага — потеря ОДЗ или добавление в ограничения лишних данных (например, $x > 0$). Ошибки третьего шага — путаница с расположением ветвей параболы и, как следствие, неверное решение квадратных неравенств. Ошибки четвертого шага — неверное определение взаиморасположения корней и потери (или приобретения) точек при пересечении множеств. Некоторые выпускники использовали метод декомпозиции (замены множителей). В этом случае основной ошибкой являлась либо ошибка в формуле перехода, либо потеря ОДЗ.

В итоге второе неравенство решило гораздо меньше учеников, чем первое. Слово статистике: 3 или 2 балла получили 504 (4,4%) выпускника, а 1 балл — 1507 (13%).

Трудности третьего этапа решения системы были связаны только с потерями изолированных точек.

Здесь уровень сложности задания сопоставим с уровнем 2012 года, хотя замена в первом неравенстве немного сложнее. Но статистика показывает резкий рост ненулевых результатов: 5,3% (2012) и 17,4% (2014). Это можно объяснить тремя факторами. Во-первых, стабильный уровень сложности и типичности задания привели к организации эффективной подготовки высокомотивированных учеников. Во-вторых, наличие устойчивых алгоритмов решения подобных задач облегчило усвоение этой темы сильными учениками. В-третьих, первое неравенство (тоже с показательной функцией) в 2012 году сводилось к дробно-рациональному уравнению, которое на порядок сложнее квадратного.

Переходим к заданию С4.

С4. В остроугольном треугольнике ABC провели высоту BH. Из точки H на стороны AB и BC опустили перпендикуляры HK и HM соответственно.

а) Докажите, что треугольник MBK подобен треугольнику ABC.

б) Найдите отношение площади треугольника MBK к площади четырехугольника $AKMC$, если $BH = 2$, а радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 4.

Сначала обсудим схему решения пункта «а».

Более популярным был способ, основанный на подобии прямоугольных треугольников:

$$\Delta BHM \sim \Delta BHC \Rightarrow \frac{BM}{BH} = \frac{BH}{BC}; \qquad (1)$$

$$\Delta BHK \sim \Delta BHA \Rightarrow \frac{BK}{BH} = \frac{BH}{BA}. \qquad (2)$$

Из (1), (2) следует, что

$$\frac{BM}{BK} = \frac{BA}{BC} \Rightarrow \Delta BMK \sim \Delta BAC.$$

Или, что то же самое, на свойстве прямоугольного треугольника: катет есть среднее геометрическое гипотенузы и проекции этого катета на гипотенузу.

Вторым по популярности стал способ, основанный на описанной окружности, который является более олимпиадным и, значит, более трудным.

$$\angle HMB + \angle HMK = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow H, K, B, M \in \omega \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \angle KMB = \angle KHB = \angle BAH \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \Delta BMK \sim \Delta BAC.$$

Типичные ошибки учеников при использовании метода подобия: неправильно указаны соответствующие стороны подобных треугольников, свойство биссектрисы угла треугольника (деление стороны в известном отношении) приписано высоте треугольника, рассмотрение частных случаев (равнобедренного или равностороннего треугольников).

Метод описанной окружности применяли наиболее подготовленные ученики, поэтому ошибок они не делали.

Решение пункта «б» сильно зависело от выбора способа решения пункта «а». Применившим подобие очень трудно было связать между собой данные в пункте «б», так как для этого надо было вводить дополнительный параметр — угол какого-то треугольника. Поэтому часто они просто не решали или не оформляли пункт «б». Использующие окружность быстрее выходили на применение теоремы синусов и доводили задачу до конца. Ведь отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия, а он, очевидно, равен отношению радиусов описанных окружностей.

К сожалению, все равно у некоторых появлялись вычислительные ошибки. Эти выводы подтверждает статистика: решивших полностью на 3 балла — 32 (0,3%) выпускника, а частично, на 2 или 1 балл, — 120 (1%).

Так как задание С4 в этом году было скомпоновано по-другому, чем прежние многовариантные задачи, то сравнивать не с чем. Умение доказывать сложные геометрические факты в школе, очевидно, не развито, что показывают и результаты всевозможных олимпиад, где геометрию решают хуже алгебры. Поэтому задача С4 явно не упростилась. Но небольшое увеличение процента решивших на ненулевой балл статистика замечает: с 0,35% (2012) до 1,3% (2014). Это связано с выделением из задачи более легкого пункта «а», что позволяло участникам экзамена добиться локального успеха.

Наконец-то мы добрались до задания С5!

С5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение
$$(|x+2|+|x-a|)^2 - 5(|x+2|+|x-a|) + 3a(5-3a) = 0$$
имеет ровно два решения.

Обсудим схему решения этой задачи.

Первый шаг — замена переменной:
$$t = |x+2| + |x-a|.$$

Во-первых, без нее задача просто не решается, так как нет альтернативного графического или иного метода. Во-вторых, идея замены хотя и популярна в математике, но всегда требует творческого подхода. В-третьих, в этом году, по моим наблюдениям, многие ученики потратили слишком много времени на С2, С3, С4 и легкие пункты С6 и поэтому просто не успели хорошенько подумать над С5, чтобы увидеть нужную замену.

Но и сделавших замену поджидали новые подводные камни. Полученное квадратное уравнение содержало параметр в коэффициентах:
$$t^2 - 5t + 3a(5-3a) = 0 \Leftrightarrow t = 3a,\ t = 5 - 3a.$$

Решавшие его через дискриминант ошибались в формулах и вычислениях, решавшие через теорему Виета — в знаках. В результате даже те, кто сделал замену, не получили даже 1 балла!

Второй шаг решения как раз предполагал графическое или аналитическое исследование двух полученных уравнений с модулем:

$$|x+2|+|x-a|=3a, \quad |x+2|+|x-a|=5-3a.$$

Сначала изучается общий случай, когда $a \neq -2$ (чтобы не совпадали слагаемые в левой части уравнения) и $a \neq \frac{5}{6}$ (чтобы не совпадали сами уравнения). Тогда первое уравнение имеет пустое множество решений при

$$|a+2| > 3a \Leftrightarrow a < 1,$$

бесконечное множество решений при

$$|a+2| = 3a \Leftrightarrow a = 1$$

и ровно два решения при

$$|a+2| < 3a \Leftrightarrow a > 1.$$

Аналогично, второе уравнение имеет пустое множество решений при

$$|a+2| > 5-3a \Leftrightarrow a > 0{,}75,$$

бесконечное множество решений при

$$|a+2| = 5-3a \Leftrightarrow a = 0{,}75$$

и ровно два решения при

$$|a+2| < 5-3a \Leftrightarrow a < 0{,}75.$$

Затем проверяем оставшиеся значения параметра. Таким образом, исходное уравнение имеет ровно два решения: при $a < 0{,}75$ и при $a > 1$.

Здесь возникали типичные ошибки при раскрытии знаков модуля, проявлялось неумение строить соответствующие графики и потеря вырожденных случаев. Такого рода ошибки были присущи школьникам и в прошлые годы.

В связи с очень малым числом решавших С5 трудно выделить еще какие-либо типичные ошибки. То, что идея замены оказалась роковой, подтверждает статистика: доля набравших ненулевое число баллов снизилась с 1,61% (2012) до 0,6% (2014). Как и то, что замена мало помогает: на 1 балл решил 61 (0,52%) выпускник, а на 2, 3 или 4 балла — 10 (0,08%) выпускников.

Переходим к олимпиадному заданию С6.

С6. На сайте проводится опрос, кого из футболистов посетители сайта считают лучшим по итогам сезона. Каждый посетитель голосует за одного футболиста. На сайте отображается рейтинг каждого футболиста — доля голосов, отданных за него, в процентах, округленная до целого числа. Например, числа 9,3, 10,5 и 12,7 округляются до 9, 11 и 13 соответственно.

а) Всего проголосовало 11 посетителей сайта. Мог ли рейтинг некоторого футболиста быть равным 38?

б) Пусть посетители сайта отдавали голоса за одного из трех футболистов. Могло ли быть так, что все три футболиста получили разное число голосов, но их рейтинги одинаковы?

в) На сайте отображалось, что рейтинг некоторого футболиста равен 5. Это число не изменилось и после того, как Вася отдал свой голос за этого футболиста. При каком наименьшем числе отданных за всех футболистов голосов, включая Васин голос, такое возможно?

Общей тенденцией этого года стало возросшее число школьников, приступивших к решению С6. Это объясняется тем, что пункты «а» и «б» не требуют сложных выкладок, а только умения рассуждать и экспериментировать с числами.

Рассмотрим методы решения пункта «а».

Первый метод предполагает сразу построение математической модели, которая потом понадобится нам в пункте «в». А именно, пусть за некоторого футболиста проголосовало x посетителей сайта. Тогда для вычисления рейтинга надо сначала подсчитать величину $\frac{x}{11}\cdot 100$ — точную долю голосов, отданных за него. Чтобы после округления получилось 38, эта величина должна находиться в пределах:

$$37{,}5 \le \frac{x}{11}\cdot 100 < 38{,}5 \Leftrightarrow 4{,}125 \le x < 4{,}235.$$

Отсюда видно, что натурального значения для числа посетителей x нет.

Типичной ошибкой при этом способе решения являлось неправильное определение границ исследуемой величины (например, $37{,}5 \le \frac{x}{11}\cdot 100 < 38{,}0$, $37{,}5 \le \frac{x}{11}\cdot 100 < 38{,}4$ или $38{,}0 \le \frac{x}{11}\cdot 100 < 38{,}5$).

Второй метод решения пункта «а», чаще используемый школьниками, неявно основан на свойстве монотонности линейной функции, так как формула $\frac{x}{11}\cdot 100$ задает именно такую функцию. Конечно, об этом никто из решающих задачу не упоминал, ведь в школе, с одной стороны, не акцентируют внимания на общих свойствах функций, с другой стороны, сильные ученики почти всегда пользуются свойством монотонности, не оговаривая его явно. Кроме того, в этом методе используется еще одно очевидное свойство — дискретности, так как переменная x принимает только целые значения.

В этом случае решение выглядело примерно так.

Подставляя различные значения переменной x, находим рейтинги футболиста и убеждаемся, что мы проскакиваем мимо числа 38:

$$x = 4 \Rightarrow \frac{400}{11} = 36,(36) \approx 36;$$

$$x = 5 \Rightarrow \frac{500}{11} = 45,(45) \approx 45.$$

Типичными ошибками при этом способе были: вычисление только одного рейтинга (либо меньшего, либо большего заданного); вычисление одного из двух нужных рейтингов с вычислительной ошибкой или ошибкой округления.

Теперь рассмотрим пункт «б». Здесь необходимо было построить пример. Это построение разбивалось на три логических шага.

Первый шаг — догадаться, что в результате получатся следующие рейтинги: 33; 33; 33. Это удалось многим, но баллы за это не ставились.

Второй шаг — догадаться, что рейтинги получаются из различных исходных значений долей поданных голосов. Например, 33,2...; 33,3...; 33,4... или 33,23; 33,34; 33,43. Это тоже еще не являлось решением, так как не было явно указано, сколько посетителей голосовало всего и за каждого футболиста в отдельности.

Третий шаг — подобрать числа, реализующие наборы второго шага. Например: за первого футболиста проголосовало 3323 посетителя, за второго — 3334, за третьего — 3343, всего 10 000 посетителей. Здесь ошибка заключалась в том, что сумма первых трех чисел не равнялась указанному общему количеству посетителей. Встречалась в работах и другая ошибка: при проверочном вычислении экспертами получались рейтинги, не совпадающие с числами, указанными учеником в решении. Важно отметить, что школьники плохо понимают, что значит построить пример, и вместо четко описанной модели выдают только эвристические идеи по ее созданию.

Переходим к обсуждению самого трудного пункта, «в». Дадим сначала решение.

Первый этап — построение модели. Пусть посетителей было всего n человек, а проголосовавших за данного футболиста — x человек. Тогда после появления Васи всего стало $n + 1$ человек, а проголосовавших за данного футболиста — $x + 1$ человек. Получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} 4,5 \le \dfrac{100x}{n} < 5,5, \\ 4,5 \le \dfrac{100(x+1)}{n+1} < 5,5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4,5n \le 100x, & (1) \\ 100x < 5,5n, & (2) \\ 4,5n - 95,5 \le 100x, & (3) \\ 100x < 5,5n - 94,5. & (4) \end{cases}$$

Второй этап — использование свойства транзитивности неравенств. Из неравенств (1) и (4) получаем:

$$4,5n < 5,5n - 94,5 \Leftrightarrow 94,5 < n \Rightarrow n \ge 95. \qquad (5)$$

Опять — чем очевиднее свойство, тем труднее его правильно использовать.

Третий этап — метод последовательных подстановок полученных оценок в неравенства и получение новых оценок. Подставим неравенство (5) в (1):

$$\frac{4,5 \cdot 95}{100} \le x \Leftrightarrow 4,275 \le x \Rightarrow 5 \le x. \qquad (6)$$

Далее подставляем неравенство (6) в (4):

$$\frac{100 \cdot 5 + 94,5}{5,5} < n \Leftrightarrow 108\frac{1}{11} < n \Rightarrow 109 \le n. \qquad (7)$$

Теперь снова подставляем (7) в (1):

$$\frac{4,5 \cdot 109}{100} \le x \Leftrightarrow 4,905 \le x \Rightarrow 5 \le x. \qquad (8)$$

Так как неравенство (8) совпадает с (6), то процесс подстановок останавливается. Наименьшие значения переменных и дают пример, который желательно проверить: всего (с Васей) 110 посетителей и 6 (вместе с Васей) проголосовало за данного футболиста.

Поскольку многие решали пункт «а» вторым способом, то основной ошибкой в пункте «в» было неверное составление первоначальной модели — исходной системы неравенств. Многие решали методом прикидки, понимая, что вклад одного голоса в рейтинг должен быть менее 1%. На этом пути можно нащупать пример, но доказать его минимальность невозможно. Статистика безжалостна: если на 1 или 2 балла задание выполнили 784 выпускника (6,79%), то на 3 или 4 балла всего 10 выпускников (0,08%). Но заметно преодоление психологического барьера — все больше выпускников стало получать ненулевые баллы за С6: 1,44% (2012) и 6,87% (2014). Кроме того, можно отметить стремление составителей сделать пункт «а» задачи С6 доступным для понимания умеющим логически мыслить школьникам и соответствующим олимпиадным заданиям 5–7-х классов.

Подводя общие итоги ЕГЭ-2014, можно отметить низкую вычислительную и геометрическую культуру учеников и их стремление использовать только стандартные методы решения задач. Любое отличие заданий от задач предыдущих лет или от разбираемых в классе приводит к серьезным трудностям в построении новых логических цепочек. Поэтому и введение в планируемый профильный экзамен новой текстовой задачи, требующей построения нетривиальной математической модели, принесет только усложнение варианта, что приведет к дальнейшему снижению результатов. А если все время ошибаться, то учиться на ошибках становится все труднее.

А. ПРОКОФЬЕВ,
aaprokof@yandex.ru
г. Москва
А. КОРЯНОВ,
г. Брянск

ооо

Не жалею, не зову, не плачу,
Всё пройдет, как сканер теста лист.
И каким-то вузом перехвачен,
Я не буду больше лицеист.

Ты теперь не так уж будешь биться,
Мозг, задетый кирпичом наук,
Я сумел сегодня отъЕГЭиться,
И теперь мне даже чёрт не друг.

Дух удачи! ты все реже, реже
Бланки помогаешь заполнять.
И всё то что не учил я прежде
Невозможно в шпорах передать!

Я теперь скупее стал в желаньях,
Сорок баллов хватит мне вполне.
Но ЕГЭ кишат, словно пираньи,
Не дают покоиться на дне.

Все мы, все мы в этом мире тленны,
Тихо бланки в классе шелестят…
Будет просто необыкновенно,
Если наберу я шестьдесят

18.05.12

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ЧИСЕЛ В ЗАДАЧАХ С6 ЕГЭ

В статье на иллюстративном материале демонстрируются приемы решения задач уровня С6 на последовательности чисел. С 2010 года вариант ЕГЭ по математике содержит задания С6, которые близки к олимпиадным задачам. В задачах этого уровня выделим часто встречающийся алгебраический объект — последовательность чисел. Характерной особенностью олимпиадных задач является как исследование свойств данного объекта (например, формула суммы членов арифметической прогрессии), так и сочетание объекта с олимпиадными идеями (например, делимость целых чисел).

Количество членов последовательности

Отдельную группу образуют задачи, в которых требуется ответить на вопрос о существовании в указанных границах заданного числа членов прогрессии, удовлетворяющих определенным условиям.

Пример 1. (*МИОО, 2011*) Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 720 и а) пять; б) четыре; в) три из них образуют геометрическую прогрессию?

Решение. Разложим число 720 на простые множители:

$$720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5.$$

а) Пусть $720 = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4 \cdot n_5$, где n_1, n_2, n_3, n_4, n_5 — различные натуральные числа, образующие в указанном порядке геометрическую прогрессию, и q — знаменатель этой прогрессии. Тогда

$$n_2 = n_1 \cdot q, \qquad n_3 = n_1 \cdot q^2, \qquad n_4 = n_1 \cdot q^3, \qquad n_5 = n_1 \cdot q^4.$$

Перемножив числа, получим: $n_1^5 \cdot q^{10} = 720$.

Заметим, что q — рациональное число (иначе число $n_2 = n_1 \cdot q$ не будет натуральным). Пусть $q = \frac{k}{m}$, где числа k, $m \in N$ и взаимно просты. Тогда из равенства $n_1^5 \cdot \frac{k^{10}}{m^{10}} = 720$ следует, что число $\frac{n_1^5}{m^{10}}$ — пятая степень натурального числа $a = \frac{n_1}{m^2}$, а число 720 делится на a^5 и k^{10}. Хотя бы одно из этих чисел отлично от единицы. Но разложение числа 720 не содержит множителей степени больше 4. Противоречие.

б) Аналогично предыдущему пункту покажите, что нельзя привести пример, удовлетворяющий условию задачи.

в) Условию задачи удовлетворяют числа 1, 2, 4, 9, 10, из которых три первых образуют геометрическую прогрессию.

Ответ: а) нет; б) нет; в) да.

К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru (Задачи для самостоятельной работы, ответы и указания.)

Пример 2. (*Пробный ЕГЭ-2012*) Числа от 1 до 10 записаны в строчку в некотором порядке. Всегда ли можно вычеркнуть несколько чисел так, чтобы осталось:

а) три числа в порядке возрастания или в порядке убывания;

б) пять чисел в порядке возрастания или в порядке убывания;

в) четыре числа в порядке возрастания или в порядке убывания?

Решение. а) Да, всегда. Если 1 и 10 стоят не подряд, то они вместе с любым числом между ними дают нужную тройку. Если 1 и 10 стоят подряд, то либо перед ними, либо после них есть пара чисел, записанных в порядке возрастания или убывания. Добавляя к этой паре чисел либо 1, либо 10, получим требуемое.

б) Если числа стоят, например, в порядке 7, 6, 8, 4, 10, 1, 2, 5, 3, 9, то выбрать нельзя. Действительно, если выбирать возрастающую последовательность, то длина наибольшей последовательности равна 4: (1, 2, 5, 9); (1, 2, 3, 9). Аналогично для убывающей последовательности имеем: (7, 6, 4, 1); (7, 6, 4, 2); (7, 6, 4, 3).

в) Да, всегда. Запишем над каждым числом пару чисел $(a; b)$, где a — длина наибольшей возрастающей последовательности, начинающейся с этого числа, b — длина наибольшей убывающей последовательности. Например,

$$\overset{(6;\,3)}{5},\ \overset{(5;\,3)}{6},\ \overset{(5;\,1)}{1},\ \overset{(4;\,3)}{7},\ \overset{(3;\,3)}{8},\ \overset{(3;\,2)}{3},\ \overset{(3;\,1)}{2},\ \overset{(2;\,2)}{9},\ \overset{(1;\,2)}{10},\ \overset{(1;\,1)}{4}.$$

Все пары $(a; b)$ различны. Действительно, для любых чисел n и m $(n < m)$ всегда имеем $a_n > a_m$, а в случае $n > m$ имеем $b_n > b_m$.

Теперь допустим, что пары чисел $(a; b)$ состоят только из чисел 1, 2 и 3: (1; 1), (1; 2), (1; 3), (2; 1), (2; 2), (2; 3), (3; 1), (3; 2), (3; 3). Таких пар всего 9, а чисел — 10, поэтому в каких-то парах попадутся числа не меньше четырех.

Ответ: а) да; б) нет; в) да.

Суммирование членов последовательности

В данном пункте рассматриваются задачи на суммирование целых чисел, обладающих некоторым общим свойством. Как правило, в таких задачах требуется либо получить формулу для нахождения искомой суммы, либо провести оценку ее значений (например, найти ее наименьшее или наибольшее значения).

Пример 3. (*ЕГЭ-2010*) Даны две последовательности чисел: 6, 7, 8, 9, 10 и 14, 15, … , 20. Перед каждым числом случайно ставят знак «+» или «–», после чего каждое число из первой последовательности складывается с каждым числом из второй. Найдите наибольшее и наименьшее по модулю значения таких сумм.

Решение. Очевидно, что наибольшая по модулю сумма получается в случае, если все знаки одинаковые (например, «+»). Посчитаем полученную сумму. Каждое число из первой последовательность прибавляется к семи числам из второй, то есть встречается в сумме 7 раз. Каждое число из второй последовательности прибавляется к пяти числам из первой, то есть встречается в сумме 5 раз. Получаем:

$$S = 7\cdot(6+7+8+9+10) + \\ + 5\cdot(14+15+16+17+18+19+20) = \\ = 7\cdot 40 + 5\cdot 119 = 875.$$

Теперь вычислим минимальную по модулю сумму. В первом наборе — два нечетных числа, каждое из которых встречается в сумме 7 раз, а во втором наборе три нечетных числа, каждое из которых встречается в сумме 5 раз. Получаем, что в сумме $2\cdot 7 + 3\cdot 5 = 29$ нечетных чисел. Число 29 также является нечетным. Сумма нечетного числа нечетных чисел — число нечетное. Получается, что сумма S — всегда нечетное число. Наименьшее по модулю нечетное число — это 1. Меньше по модулю сумма быть не может. Заметим, что если расставить знаки следующим образом: перед числами 6, 8, 10, 16, 18, 20 — знак «+», а перед остальными – знак «–», то $S = 1$. Тем самым доказано, что сумма не может быть меньше 1 по модулю и приведен пример, когда она равняется единице по модулю. Следовательно, минимальное по модулю значение суммы равно 1.

Ответ: 875 и 1.

Пример 4. (*ЕГЭ-2012*) Число S таково, что для любого представления S в виде суммы положительных слагаемых, каждое из которых не превосходит 1, эти слагаемые можно разделить на две группы так, что каждое слагаемое попадает только в одну группу и сумма слагаемых в каждой группе не превосходит 19.

а) Может ли число S быть равным 38?

б) Может ли число S быть больше 37,05?

в) Найдите максимальное возможное значение S.

Решение. а) Рассмотрим разбиение числа 38 на 39 слагаемых, равных $\frac{38}{39}$. При разделении этих слагаемых на две группы в одной из них окажется не менее 20 чисел, сумма которых равна

$$20\cdot\frac{38}{39} = \frac{760}{39} = 19\frac{19}{39} > 19.$$

Значит, S не может быть равным 38.

б) Поскольку S является суммой двух чисел, не больших 19, получаем: $S \le 38$.

Пусть $37{,}05 < S \le 38$. Рассмотрим разбиение числа S на 39 слагаемых, равных $\frac{S}{39} \le \frac{38}{39} < 1$. При разделении этих слагаемых на две группы в одной из них окажется не менее 20 чисел, сумма которых равна

$$20 \cdot \frac{S}{39} > 20 \cdot \frac{37{,}05}{39} = 19.$$

Значит, S не может быть больше 37,05.

в) Докажем, что число $S = 37{,}05$ удовлетворяет условию задачи.

Рассмотрим произвольное представление $S = 37{,}05$ в виде суммы положительных слагаемых, не превосходящих 1:

$$S = x_1 + x_2 + \ldots + x_n.$$

Можно считать, что слагаемые упорядочены по убыванию:

$$x_1 \ge x_2 \ge \ldots \ge x_{n-1} \ge x_n.$$

Первую группу составим из k наибольших слагаемых так, чтобы

$$S_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_k \le 19 < x_1 + x_2 + \ldots + x_k + x_{k+1} = S_1 + x_{k+1}.$$

Вторую группу составим из оставшихся слагаемых.

Пусть $S_1 < 18{,}05 = 37{,}05 - 19$. В этом случае

$$0{,}95 < 19 - S_1 < x_{k+1} \le x_k \le \ldots \le x_1$$

и

$$0{,}95k < x_1 + \ldots + x_k = S_1 < 18{,}05.$$

Поэтому $k < 19$, $k \le 18$ и

$$S_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_k \le 18.$$

Тогда

$$1 \le 19 - S_1 < x_{k+1} \le 1.$$

Полученное противоречие доказывает, что $S_1 \ge 18{,}05$. Поэтому сумма слагаемых во второй группе

$$S_2 = x_{k+1} + x_{k+2} + \ldots + x_n = 37{,}05 - S_1 \le 19.$$

Таким образом, число $S = 37{,}05$ удовлетворяет условию задачи. В предыдущем пункте было показано, что ни одно из чисел $S > 37{,}05$ не удовлетворяет условию задачи, значит, максимальное возможное значение S — это 37,05.

Ответ: а) нет; б) нет; в) 37,05.

Пример 5. (*ЕГЭ-2012*) Натуральные числа от 1 до 12 разбивают на четыре группы, в каждой из которых есть по крайней мере два числа. Для каждой группы находят сумму чисел этой группы. Для каждой пары групп находят модуль разности найденных сумм и полученные 6 чисел складывают.

а) Может ли в результате получиться 0?

б) Может ли в результате получиться 1?

в) Каково наименьшее возможное значение полученного результата?

Решение. Обозначим суммы чисел в группах S_1, S_2, S_3, S_4, а указанную в условии сумму модулей их попарных разностей через A. Можно считать, что $S_1 \le S_2 \le S_3 \le S_4$.

а) Чтобы число A равнялось 0, необходимо, чтобы каждая из разностей $S_i - S_j$ $(i > j)$ равнялась 0, то есть $S_1 = S_2 = S_3 = S_4$. Сумма всех двенадцати чисел:

$$1 + 2 + \ldots + 11 + 12 = \frac{13 \cdot 12}{2} = 78.$$

С другой стороны, она равна $S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 4S_1$, но 78 не делится на 4. Значит, $A \ne 0$.

б) Чтобы число A равнялось 1, необходимо, чтобы все, кроме одной, разности $S_i - S_j$ равнялись 0. Значит, $S_1 < S_4$, но в этом случае каждая из сумм S_2, S_3 не равна хотя бы одной из сумм S_1, S_4, поэтому хотя бы три разности $S_i - S_j$ не равны 0 и число A не меньше 3. Значит, $A \ne 1$.

в) Выразим число A через S_1, S_2, S_3, S_4:

$$A = (S_2 - S_1) + (S_3 - S_1) + (S_4 - S_1) + (S_3 - S_2) + (S_4 - S_2) + (S_4 - S_3) = 3(S_4 - S_3) + 4(S_3 - S_2) + 3(S_2 - S_1).$$

В предыдущих пунктах было показано, что $A \ge 3$. Если $A = 3$, то

$$S_1 = S_2 = S_3 = S_4 - 1$$

или

$$S_2 = S_3 = S_4 = S_1 + 1.$$

В этом случае сумма всех двенадцати чисел равна $4S_1 + 1$ или $4S_4 - 1$, то есть нечетна, что неверно.

Число A равно 4 для следующего разбиения чисел на группы:

$$\{12; 7\}, \{11; 6; 2\}, \{10; 5; 4; 1\}, \{9; 8; 3\}.$$

Ответ: а) нет; б) нет; в) 4.

Делимость и остатки

Очень часто при решении задач с целыми числами используются соображения делимости (деление без остатка, деление с остатком). Иногда удобно использовать разбиение множества целых чисел на классы. Например, к числам вида $3k$, $3k + 1$ и $3k + 2$ относятся соответственно числа, делящиеся на 3, имеющие при делении на 3 остаток 1 и имеющие остаток 2.

Пример 6. По окончании конкурса бальных танцев, в котором участвовали 7 мальчиков и 8 девочек, каждый (каждая) назвал (назвала) количество своих партнерш (партнеров): 3, 3, 3, 3, 3, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6. Не ошибся ли кто-нибудь из них?

Решение. Сумма всех чисел равна 74, тогда каждая из сумм чисел, названных мальчиками и девочками в отдельности, должна быть 37. Но сумму 37 нельзя набрать из данных чисел, так как все числа, кроме 5, делятся на 3, при этом при делении числа 5 на 3 получаем остаток 2, а при делении числа 37 на 3 получаем остаток 1.

Ответ: ошибся.

Пример 7. (*Пробный ЕГЭ-2012, СПб.*) На доске написано число 7. Раз в минуту Вася дописывает на доску одно число: либо вдвое большее какого-то из чисел на доске, либо равное сумме каких-то двух чисел, написанных на доске. (Таким образом, через одну минуту на доске появится второе число, через две — третье и т.д.)

а) Может ли в какой-то момент на доске оказаться число 2012?

б) Может ли в какой-то момент сумма всех чисел равняться 63?

в) Через какое наименьшее время на доске может появиться число 784?

Решение. а) Заметим, что каждое число на доске будет делиться на 7. Действительно, в первую минуту Вася запишет удвоенное число, то есть 14. Первое число 7 и второе число 14 делятся на 7, поэтому при удвоении или сложении чисел будут получаться числа, которые делятся на 7. Так как число 2012 не делится на 7, то оно не может появиться на доске.

б) Да, может. Например, 7, 14, 14, 14, 14 (в условии не сказано, что одно число нельзя удваивать несколько раз).

в) Так как все числа делятся на 7, то упростим задачу, разделив все числа: с первого числа 7 до последнего числа 784. Количество операций, произведенных Васей, при этом не изменится, поэтому достаточно, начав с 1, получить число 112 за наименьшее количество операций.

Покажем, что за 7 минут число 112 невозможно получить. Если использовать одну операцию удвоения, то можно получить наибольшее число, и за 6 минут из выписанных чисел 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 получится наибольшее число 64. На седьмой минуте ни одна из операций (удвоение или сложение) не приводит к числу 112. Допустим, что в течение первых семи минут Вася использовал один раз операцию сложения (на любой минуте). Тогда наибольшее число, которое можно получить, равно $64 + 32 = 96$, что меньше 112.

Приведем пример, как получить число 112 за 8 минут: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 96, 112 $(96 + 16 = 112)$.

Ответ: а) нет; б) да; в) 8 минут.

Пример 8. (*Пробный ЕГЭ-2012*) На листе бумаги написаны в строчку 13 единиц.

а) Докажите, что между этими единицами можно расставить знаки сложения, умножения и скобки так, что после выполнения действий получится число, делящееся на 108.

б) Докажите, что если единицы, стоящие на четных местах, заменить семерками, все равно между числами полученного набора можно расставить знаки сложения, умножения и скобки так, что после выполнения действий получится число, делящееся на 108.

в) Докажите, что между любыми 13 натуральными числами можно расставить знаки сложения, умножения и скобки так, что после выполнения действий получится число, делящееся на 108.

Решение. Заметим, что $108 = 3\cdot3\cdot3\cdot2\cdot2$. Тогда для пунктов «а» и «б» приведем примеры.

а) Например,

$$(1+1+1)\cdot(1+1+1)\cdot(1+1+1)\cdot(1+1+1+1) = 108.$$

б) Например,

$$(1+7+1)\cdot(7+1+7)\cdot(1+7+1)\cdot(7+1+7+1) = 108\cdot180.$$

в) Любой набор из 13 натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{13}$ можно разбить на три группы из трех чисел и две группы из двух чисел, заключив их в скобки и поставив между скобками знаки умножения:

$$(a_1a_2a_3)\cdot(a_4a_5a_6)\cdot(a_7a_8a_9)\cdot(a_{10}a_{11})\cdot(a_{12}a_{13}).$$

Покажем, что между любыми двумя натуральными числами можно поставить знак сложения или умножения так, что результат будет делиться на 2.

Если одно из двух чисел четное, то поставим между ними знак умножения. Результат будет делиться на 2.

Если оба числа нечетные, то поставим между ними знак сложения. Результат будет делиться на 2.

Покажем, что между любыми тремя натуральными числами можно расставить знаки сложения, умножения и скобки так, что результат будет делиться на 3.

Если одно из трех чисел делится на 3, то поставим между числами знаки умножения. Результат будет делиться на 3.

Предположим, что все эти числа не делятся на 3.

Если у каких-то двух подряд идущих чисел остатки от деления на 3 различны (один равен 1, другой равен 2), то поставим между ними знак сложения, заключим эту пару в скобки и поставим знак умножения между этими скобками и оставшимся из трех чисел. Сумма двух чисел в скобках делится на 3, поэтому произведение этой суммы на оставшееся число также будет делиться на 3.

Если у каждой пары подряд идущих чисел остатки от деления на 3 одинаковы, то у всех трех чисел одинаковые остатки от деления на 3. Поставим между этими числами знаки сложения. Результат будет делиться на 3.

Таким образом, расставив в трех группах из трех чисел заданные знаки так, что результат делится на 3, а в двух группах из двух чисел так, что результат делится на 2, получим, что результат выполнения всех операций будет делиться на $3\cdot3\cdot3\cdot2\cdot2=108$.

Ответ: а) например, $(1+1+1)\cdot(1+1+1)\times$ $\times(1+1+1)\cdot(1+1+1+1)$;

б) например, $(1+7+1)\cdot(7+1+7)\times$ $\times(1+7+1)\cdot(7+1+7+1)$.

Десятичная запись натурального числа

Рассмотрим задачи, в условии которых упоминаются цифры натурального числа, то есть используется его десятичная форма записи.

Пример 9. (*Пробный ЕГЭ-2014, ФИПИ*) В ряд выписаны квадраты всех натуральных чисел, начиная с 1. Каждое число заменили суммой его цифр. С полученной последовательностью поступили так же, и действовали так до тех пор, пока не получилась последовательность однозначных чисел.

а) Найдите шестнадцатое число получившейся последовательности.

б) Найдите сумму первых 739 чисел получившейся последовательности.

в) Сумма m идущих подряд чисел получившейся последовательности равна 4196. Чему может равняться m?

Решение. а) Любое натуральное число n и сумма всех цифр его десятичной записи $S(n)$ при делении на число 9 дают одинаковые остатки. Значит, из первых девяти квадратов натуральных чисел получаем последовательность цифровых корней 1, 4, 9, 7, 7, 9, 4, 1, 9 (покажите самостоятельно), то есть последовательность остатков при делении на 9. Числа k^2 и $(k+9)^2 =$ $= k^2 + 9(2k+9)$ имеют одинаковые остатки при делении на 9, поэтому каждые следующие девять квадратов натуральных чисел имеют такую же последовательность остатков, или цифровых корней. Теперь легко посчитать, что на шестнадцатом месте стоит число 4.

б) Сумма первых девяти чисел получившейся последовательности равна 51. Так как $739 = 82\cdot9 + 1$, то искомая сумма равна $82\cdot51+1=4183$.

в) Так как $4196 = 82\cdot51 + 14$, а $14 = 7 + 7$ или $14 = 1 + 4 + 9$, то число $m = 82\cdot9 + 2 = 740$ или $m=82\cdot9+3=741$.

Ответ: а) 4; б) 4183; в) 740 или 741.

Пример 10. (*МИОО, 2011*) Гидролог вводит в компьютер измерения температуры забортной воды. Температура измеряется с точностью до одной десятой градуса. За время наблюдений температура была выше 10 °С, но ниже 17 °С. Всего гидролог ввел 32 измерения, но из-за усталости, качки судна и плохой клавиатуры один раз вместо десятичной запятой он нажал клавишу «0», а другой раз вообще не ввел знак запятой при записи десятичной дроби.

После упорядочивания данных получился ряд из 32 чисел, начинающийся числами 12,2; 12,8; ...

Если из полученного ряда удалить два первых числа, среднее арифметическое оставшихся равно 68,8. Если удалить два последних, то среднее арифметическое оставшихся равно 13,7.

Определите, в каких числах и какие ошибки допустил гидролог.

Решение. Пусть ряд записан так: 12,2; 12,8; x_3; x_4; ...; x_{30}; a; b. В результате упорядочивания два числа с ошибками, a и b, оказались последними. Тогда

$$\frac{x_3+x_4+\ldots+x_{30}+a+b}{30}-\frac{12,2+12,8+x_3+x_4+\ldots+x_{30}}{30}=$$
$$=\frac{a+b}{30}-\frac{12,2+12,8}{30}=\frac{a+b-25}{30}.$$

С другой стороны, разность данных средних арифметических чисел равна $68{,}8 - 13{,}7 = 55{,}1$. Получаем уравнение $\frac{a+b-25}{30}=55{,}1$. Отсюда $a + b = 1678$. Запишем числа a и b в десятичной форме: $a=\overline{1mn}$ и $b=\overline{1k0l}$. Если $n + l = 8$, то $m + 0 = 7$. Значит, $a \geq 170$, что противоречит условию задачи (все измерения ниже 17 °С).

Пусть $n + l = 18$, тогда $n = l = 9$, $m = 6$ и $k = 5$. Итак, получаем числа $a = 169$ и $b = 1509$.

Ответ: гидролог ошибся в числе 16,9, пропустив запятую, и в числе 15,9, поставив вместо запятой нуль.

Уравнения в целых числах

Формулы общего члена, суммы n первых членов арифметической или геометрической прогрессии, характеристические свойства прогрессий являются источником для составления задач, для решения которых необходимо исследовать уравнение или систему уравнений в целых числах.

Пример 11. (*МИОО, 2010*) Последние члены двух конечных арифметических прогрессий: $a_1 = 5$, $a_2 = 8$, ..., a_N и $b_1 = 3$, $b_2 = 10$, ..., b_M, совпадают, а сумма всех совпадающих (взятых по одному разу) членов этих прогрессий равна 1590. Найдите число членов в каждой прогрессии.

Решение. Используя формулу общего члена, получим уравнение

$$5 + 3(n-1) = 3 + 7(m-1),$$

где $n = 1, ..., N$; $m = 1, ..., M$. Отсюда

$$3n + 6 = 7m.$$

Левая часть последнего уравнения делится на 3. Тогда правая часть делится на 3 при $m = 3k$.

Имеем: $3n + 6 = 21k$, или $n = 7k - 2$. Отсюда получаем, что общие члены двух прогрессий сами образуют арифметическую прогрессию с общим членом вида $21l - 4$, где $l = 1, \ldots, L$.

Используя условие задачи, получаем уравнение

$$\frac{17+21l-4}{2}\cdot l=1590,\quad 21l^2+13l-3180=0,$$

положительный корень которого $l = 12$. Значит,

$$n = 7l - 2 = 82,\ m = 3l = 36.$$

Ответ: $N = 82$, $M = 36$.

Пример 12. (*«Ломоносов-2010»*) Числа 128 и 250 являются членами геометрической прогрессии. Найдите все натуральные числа, которые могут встретиться в этой прогрессии.

Решение. Заметим, что $128 = 2^7$ и $250 = 2\cdot 5^3$. Знаменатель прогрессии $q \neq 1$, так как $128 \neq 250$. Пусть $N \in \boldsymbol{N}$ —искомое число

Исключим знаменатель q из двух равенств:

$$\begin{cases}250=2\cdot 5^3=2^7\cdot q^n,\\ N=2^7\cdot q^m,\end{cases}\quad m, n\in \boldsymbol{Z},\ n\neq 0;$$

$$\begin{cases}q^n=\dfrac{5^3}{2^6},\\ q^m=\dfrac{N}{2^7}.\end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases}q^{m\cdot n}=\left(\dfrac{5^3}{2^6}\right)^m,\\ q^{m\cdot n}=\left(\dfrac{N}{2^7}\right)^n,\end{cases}\quad \left(\frac{N}{2^7}\right)^n=\left(\frac{5^3}{2^6}\right)^m,$$

$$N^n = 2^{7n-6m}\cdot 5^{3m},\quad N=2^{\frac{7n-6m}{n}}\cdot 5^{\frac{3m}{n}}.$$

Пусть

$$\frac{7n-6m}{n}=x,\quad \frac{3m}{n}=y.$$

Тогда

$$\begin{cases}7n-6m=xn,\\ 3m=yn,\end{cases}\quad x, y\in \boldsymbol{Z},\ x\geq 0,\ y\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}xn=7n-6m,\\ 2yn=6m\end{cases}\Leftrightarrow\ y=\frac{7-x}{2}.$$

Отсюда следует, что x должно быть целым и нечетным, $x \leq 7$. Рассматривая значения 1, 3, 5, 7 для x, получим значения 250, 200, 160, 128 для N соответственно.

Ответ: 128, 160, 200, 250.

Пример 13. (*ЕГЭ-2011*) Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 13 раз больше, либо в 13 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 6075.

а) Может ли последовательность состоять из двух членов?

б) Может ли последовательность состоять из трех членов?

в) Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?

Решение. а) Предположим, что в последовательности два члена. Тогда она имеет вид: a, $13a$ (или наоборот: $13a$, a). По условию: $a + 13a = 14a = 6075$. Это невозможно, так как в равенстве слева стоит четное число, а справа — нечетное. Следовательно, последовательность не может состоять из двух членов.

б) Предположим, что в последовательности три члена. Тогда она может иметь вид: a, $13a$, $169a$, или a, $13a$, a, или $169a$, $13a$, a, или $13a$, a, $13a$. Проверим выполнение хотя бы одного из равенств:

$$a + 13a + 169a = 183a = 6075, \qquad (1)$$
$$a + 13a + a = 15a = 6075, \qquad (2)$$
$$169a + 13a + a = 183a = 6075, \qquad (3)$$
$$13a + a + 13a = 27a = 6075. \qquad (4)$$

Равенства (2) и (4) возможны. Например, из (2) получаем $a=\dfrac{6075}{15}=405$; последовательность чисел, удовлетворяющих условию задачи:

405, 5265, 405.

в) Заметим, что чисел в последовательности будет тем больше, чем меньше сами числа. Поэтому надо использовать числа 1 и 13, чередуя их.

Первый вариант: 1, 13, 1, 13, ... В этой последовательности должно быть нечетное число членов. Иначе она состоит из идущих друг за другом пар (1; 13), сумма в каждой паре равна 14. Тогда сумма всех членов последовательности будет делиться на 14, а число 6075 — нет.

Если же последовательность оканчивается единицей и содержит n пар (1; 13), то из равенства $6075 = 14\cdot n + 1$ получаем: $n=\dfrac{6074}{14}=433\dfrac{6}{7}$ — число нецелое.

Второй вариант: 13, 1, 13, 1, ... Учитывая предыдущие рассуждения, получаем, что после 433 пар (13; 1) мы сможем завершить последовательность числом 13.

Получаем пример последовательности, содержащей 433 пары чисел (13; 1) и еще число 13 (то есть 13, 1; 13, 1; ... ; 13), в которой содержится 867 членов.

Покажем, что большего числа членов быть не может. Предположим обратное: наша последовательность a_1, a_2, a_3, a_4, ... содержит не менее 868 членов. Разобьем их последовательно на пары: $(a_1;\ a_2)$, $(a_3,\ a_4)$, ... Сумма чисел в каждой паре больше или равна 14, а самих пар не менее 434. В этом случае для суммы S всех членов будет справедливо неравенство $S \geq 14 \cdot 434 = 6076$, что противоречит условию.

Следовательно, в последовательности может быть самое большее 867 членов.

Ответ: а) нет; б) да; в) 867.

Натуральная степень числа

В этом разделе рассмотрим задачи, связанные только с квадратами чисел. *Полным квадратом* называют выражение с переменной (или натуральное число), которое можно представить в виде квадрата другого выражения (или в виде квадрата другого натурального числа). Иногда полный квадрат называют *точным квадратом*.

Пример 14. (*МИОО, 2013*) Возрастающая конечная арифметическая прогрессия состоит из различных целых неотрицательных чисел. Математик вычислил разность между квадратом суммы всех членов прогрессии и суммой их квадратов. Затем математик добавил к этой прогрессии следующий ее член и снова вычислил такую же разность.

а) Приведите пример такой прогрессии, если во второй раз разность оказалась на 48 больше, чем в первый раз.

б) Во второй раз разность оказалась на 1440 больше, чем в первый раз. Могла ли прогрессия сначала состоять из 12 членов?

в) Во второй раз разность оказалась на 1440 больше, чем в первый раз. Какое наибольшее количество членов могло быть в прогрессии сначала?

Решение. а) Поиск решения задачи начинаем с исследования простейших примеров прогрессии вида $\{0;\ 1\}$ и $\{1;\ 2\}$ или $\{0;\ 1;\ 2\}$ и $\{1;\ 2;\ 3\}$. На каком-то этапе получаем пример: 1, 2, 3. Разность квадрата суммы и суммы квадратов этих чисел равна

$$(1 + 2 + 3)^2 - (1^2 + 2^2 + 3^2) = 36 - 14 = 22.$$

Если добавить число 4, то разность этих чисел будет равна

$$(1 + 2 + 3 + 4)^2 - (1^1 + 2^2 + 3^2 + 4^2) = 100 - 30 = 70,$$

что ровно на 48 больше, чем было в первом случае.

б) Обозначим члены прогрессии a_1, a_2, ..., a_n. Тогда разность, вычисленная в первый раз, равна

$$\left(a_1 + a_2 + \ldots + a_n\right)^2 - \left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right) =$$
$$= 2a_n(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}) + 2a_{n-1}(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-2}) +$$
$$+ \ldots + 2a_3(a_1 + a_2) + \ldots + 2a_2a_1.$$

После добавления члена a_{n+1} вычисленная во второй раз разность отличается от первой следующим слагаемым:

$$2a_{n+1}\left(a_1 + a_2 + \ldots + a_n\right) = 2\left(a_1 + nd\right)\cdot\frac{2a_1 + (n-1)d}{2}\cdot n =$$
$$= (a_1 + nd)(2a_1 + (n - 1)d)n,$$

где d — разность прогрессии.

Из условия следует, что $a_1 \geq 0$, $d \geq 1$, поэтому

$$(a_1 + nd)(2a_1 + (n - 1)d)n \geq n^2(n - 1).$$

Получаем неравенство

$$n^2(n - 1) \leq 1440.$$

Это неравенство выполняется при натуральных значениях $n < 12$, так как для возрастающей функции $f(x) = x^2(x - 1)$ на множестве $[1; +\infty)$ имеем: $f(12) > 1440$ и $f(11) < 1440$. Значит, 12 членов в начальной прогрессии быть не может.

в) Из равенства

$$(a_1 + nd)(2a_1 + (n - 1)d)n = 1440$$

следует, что n является делителем числа $1440 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5$. Рассмотрим последовательно делители, меньшие 12.

При $n = 10$ получаем:

$$(a_1 + 10d)(2a_1 + 9d) = 144.$$

Если $d \geq 2$, то левая часть не меньше $20 \cdot 18 > 144$. Следовательно, $d = 1$. Получаем уравнение $2a_1^2 + 29a_1 - 54 = 0$, которое не имеет целых корней. Значит, n не может равняться 10.

При $n = 9$ получаем:

$$(a_1 + 9d)(a_1 + 4d) = 80.$$

Если $d \geq 2$, то левая часть не меньше $18 \cdot 8 > 80$. Следовательно, $d = 1$. Получаем уравнение $a_1^2 + 13a_1 - 44 = 0$, которое также не имеет целых корней, а значит, n не может равняться 9.

При $n = 8$ получаем:

$$(a_1 + 8d)(2a_1 + 7d) = 180.$$

Если $d \geq 2$, то левая часть не меньше $56d^2$, а $56d^2 \geq 56 \cdot 4 = 224 > 180$.

Следовательно, $d = 1$. Получаем уравнение

$$2a_1^2 + 23a_1 - 124 = 0,$$

которое имеет корни 4 и $-15{,}5$. Условию задачи удовлетворяет натуральный корень 4.

Значит, прогрессия из восьми чисел, 4, 5, 6, ..., 11, удовлетворяет условию задачи.

Ответ: а) 1, 2, 3; б) нет; в) 8.

Пример 15. Пусть S — сумма квадратов k последовательных натуральных чисел. Может ли S оказаться квадратом целого числа, если:

а) $k = 3$; б) $k = 5$;
в) $k = 7$; г) $k = 9$?

Решение. Пусть имеется $2n + 1$ последовательных натуральных чисел и число $a - n$ — наименьшее из них. Вычислим их сумму:

$$S_{2n+1} = (a - n)^2 + (a - n + 1)^2 + \ldots + (a + n)^2 =$$
$$= (2n + 1) \cdot a^2 + 2(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2).$$

Получаем:

$$S_3 = 3a^2 + 2, \qquad S_5 = 5a^2 + 10,$$
$$S_7 = 7a^2 + 28, \qquad S_9 = 9a^2 + 60.$$

а) Так как квадрат целого числа при делении на 3 может иметь остаток, равный 0 или 1, то $S_3 = 3a^2 + 2$ не может быть квадратом.

б) $S_5 = 5(a^2 + 2)$ не может быть квадратом, так как целое число вида $a^2 + 2$ не делится на 5.

Докажем это. Рассмотрим числа вида

$$a = 5m,\ a = 5m + 1,\ a = 5m + 2,$$
$$a = 5m + 3,\ a = 5m + 4,\ m \in \boldsymbol{Z}.$$

Тогда число $a^2 + 2$ будет соответственно равно
$$25m^2 + 2,\quad 25m^2 + 10m + 3,\quad 25m^2 + 20m + 6,$$
$$25m^2 + 30m + 11,\ 25m^2 + 40m + 18.$$

Ни одно из полученных выражений не делится нацело на 5.

Аналогично проводится доказательство в пунктах «в» и «г».

Ответ: а) нет; б) нет; в) нет; г) нет.

Пример 16. (*ЕГЭ-2012*). В ряд выписаны числа: $1^2, 2^2, \ldots, (N-1)^2, N^2$. Между ними произвольным образом расставляют знаки «+» и «–» и находят получившуюся сумму. Может ли такая сумма равняться:

а) 4, если $N = 12$; б) 0, если $N = 69$;
в) 0, если $N = 64$; г) 5, если $N = 90$?

Решение. а) Например,
$$1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2 + 5^2 - 6^2 - 7^2 + 8^2 - 9^2 + 10^2 + 11^2 - 12^2 = 4.$$

б) Среди выписанных 69 чисел — 34 четных и 35 нечетных. Поэтому любая сумма, которую можно получить, будет нечетной и не может равняться 0.

в) Заметим, что
$$(a + 3)^2 - (a + 2)^2 - (a + 1)^2 + a^2 = 4.$$
Значит, между 8 квадратами последовательных натуральных чисел можно расставить знаки так, что полученная сумма будет равняться 0:
$$(a + 7)^2 - (a + 6)^2 - (a + 5)^2 + (a + 4)^2 - (a + 3)^2 + (a + 2)^2 + (a + 1)^2 - a^2 = 0.$$

При $N = 64$ можно разбить все данные числа на группы, по 8 чисел в каждой, так, что сумма чисел в каждой группе равна 0, а значит, и сумма всех чисел равна 0.

г) Как и в предыдущем пункте, расставим знаки между 88 числами $3^2, 4^2, \ldots, 89^2, 90^2$ таким образом, чтобы их сумма равнялась 0. Перед числом 2^2 поставим знак «+». При такой расстановке знаков сумма равна $1^2 + 2^2 + 0 = 5$.

Ответ: а) да; б) нет; в) да; г) да.

Неравенства и оценки

Следует обратить внимание на то, что в задачах, в которых требуется провести оценку или указать наибольшее (наименьшее) значение некоторой величины, требуется привести пример, указывающий, что найденная в условиях данной задачи оценка достижима. Под *оценкой* мы понимаем неравенство, ограничивающее значение величины сверху или снизу.

Пример 17. Пусть $\{a_n\}$ — арифметическая прогрессия с разностью 1. Известно, что сумма S_{2008} — наименьшая среди всех сумм S_n. Какие значения может принимать первый член прогрессии?

Решение. Так как $S_n = S_{n-1} + a_n$, то S_{2008} является наименьшей тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} a_{2008} < 0, \\ a_{2009} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + 2007 < 0, \\ a_1 + 2008 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -2008 < a_1 < -2007.$$

Ответ: (–2008; –2007).

Пример 18. (*ЕГЭ-2011*) Бесконечная арифметическая прогрессия, состоящая из различных натуральных чисел, первый член которой меньше 15, не содержит ни одного числа вида $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$, $n \in \boldsymbol{N}$. Какое наименьшее значение может принимать сумма со второго по пятнадцатый член этой прогрессии?

Решение. Пусть a_1 и d — первый член и разность данной прогрессии соответственно. Так как рассматриваемая прогрессия состоит из различных натуральных чисел, то a_1 и d — натуральные числа.

Выпишем последовательность чисел, представимых в виде $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$. Получим: 1, 3, 6, 10, 15, ...

Заметим, что a_1 может принимать одно из следующих значений: 2, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 13 или 14. Легко показать, что для каждого из этих значений a_1 разность прогрессии не может принимать значения 1 или 2, так как на каком-то шаге получаются числа вида $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$.

Пусть $d \geq 3$. Сумма со второго по пятнадцатый член этой прогрессии равна
$$S_{2,\ldots,15} = \frac{2(a_1 + d) + 13d}{2}\cdot 14 = 14a_1 + 105d.$$

Получим нижнюю оценку для суммы при $a_1 = 2$ и $d = 3$:
$$S_{2,\ldots,15} \geq 14\cdot 2 + 105\cdot 3 = 343.$$

Проверим, что прогрессия 2, 5, 8, 11, ... не содержит чисел вида $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$, $n \in \boldsymbol{N}$. Возьмем произвольный k-й член последовательности $a_k = 2 + (k-1)\cdot 3 = 3k - 1$ и проверим возможность выполнения равенства $3k - 1 = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$. Получаем уравнение $n^2 + n - (6k - 2) = 0$.

Его дискриминант равен $24k - 7$. Это число не может являться квадратом целого числа, поскольку при делении на 3 оно дает остаток 2, а квадраты целых чисел могут давать остатки при делении на 3, равные 0 или 1 (проверьте это!).

Таким образом, прогрессия 2, 5, 8, ... удовлетворяет условию задачи. Поскольку для нее

$S_{2,\,...,\,15} = 343$, то 343 — наименьшее значение величины $S_{2,\,...,\,15}$.

Ответ: 343.

Пример 19. (*ЕГЭ-2013*). Даны n различных натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию ($n \geq 3$).

а) Может ли сумма всех данных чисел быть равной 18?

б) Каково наибольшее значение n, если сумма всех данных чисел меньше 800?

в) Найдите все возможные значения n, если сумма всех данных чисел равна 111.

Решение. а) Например, числа 5, 6, 7 составляют арифметическую прогрессию, а их сумма равна 18.

б) Без ограничения общности можно считать, что числа составляют возрастающую арифметическую прогрессию с первым членом a и разностью d. Для суммы ее членов верно неравенство

$$\frac{2a+d(n-1)}{2}\cdot n \geq \frac{2+(n-1)}{2}\cdot n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Тогда $\frac{n(n+1)}{2} < 800$, откуда $n \leq 39$. Для арифметической прогрессии 1, 2, ..., 39 ее сумма $780 < 800$. Значит, наибольшее значение n равно 39.

в) По условию задачи

$$\frac{2a+d(n-1)}{2}\cdot n = 111,$$

$$(2a + d(n - 1))n = 222 = 2\cdot 3\cdot 37.$$

Если $n \geq 37$, то

$$(2a + d(n - 1))n > 36\cdot 37 > 222,$$

следовательно, $n < 37$. Получаем возможные значения $n = 3$ или $n = 6$

Приведем примеры прогрессий из трех и шести членов с суммой, равной 111:

36, 37, 38 и 16, 17, 18, 19, 20, 21.

Ответ: а) да, например, 5, 6, 7; б) 39; в) 3; 6.

Наборы чисел

Рассмотрим задачи, в которых некоторое множество чисел косвенно задает последовательность чисел.

Пример 20. (*ЕГЭ-2011*) Набор состоит из тридцати трех натуральных чисел, среди которых есть числа 3, 4 и 5. Среднее арифметическое любых двадцати семи чисел этого набора меньше 2.

а) Может ли такой набор содержать ровно тринадцать единиц?

б) Может ли такой набор содержать менее тринадцати единиц?

в) Докажите, что в любом таком наборе есть несколько чисел, сумма которых равна 28.

Решение. а) Да, может. Например, сумма любых двадцати семи чисел из набора 5, 4, 3, $\underbrace{2, \ldots, 2}_{17}$, $\underbrace{1, \ldots, 1}_{13}$ не больше

$$5 + 4 + 3 + 2\cdot 17 + 7 = 53$$

и их среднее арифметическое меньше 2.

б) Нет, не может. Выпишем все числа слева направо в порядке убывания и рассмотрим первые 27 чисел, считая слева. Их сумма S меньше 54. Пусть количество единиц среди них равно x. Тогда

$$53 \geq S \geq x + 2(24 - x) + 3 + 4 + 5.$$

Отсюда получаем $x \geq 7$, то есть среди выбранных 27 чисел всегда есть семь единиц. Каждое из оставшихся шести чисел равно 1, поэтому во всем наборе есть как минимум тринадцать единиц.

в) Используя тринадцать единиц и числа 3, 4, 5, можно составить все суммы от 1 до 25.

Если среди оставшихся семнадцати чисел есть число от 3 до 27, то его можно добавить и получить в сумме 28.

Если среди оставшихся семнадцати чисел нет чисел от 3 до 27, то каждое из них или равно 1, или равно 2, или больше 27. Так как сумма этих семнадцати чисел не больше 53, то только одно из чисел может быть больше 27. Значит, в этом случае как минимум шестнадцать чисел равны 1 или 2. Используя их и тринадцать единиц, всегда можно получить сумму, равную 28.

Ответ: а) да; б) нет.

Пример 21. (*ЕГЭ-2012*) По окружности расставляют 48 ненулевых целых чисел с общей суммой 20. При этом любые два стоящих рядом числа должны отличаться не более чем на 7 и среди любых четырех подряд идущих чисел должно быть хотя бы одно положительное.

а) Среди таких 48 чисел найдите наибольшее возможное количество положительных.

б) Среди таких 48 чисел найдите наименьшее возможное количество положительных.

Решение. а) Поскольку в условии задачи сказано, что числа отличаются не более чем на 7, то соседнее с положительным числом не может быть меньше, чем (–6). Одно или два таких, не стоящих рядом, отрицательных числа не могут обеспечить сумму, равную 20, даже в случае, если остальные числа равны 1.

Вариант, когда имеется только два отрицательных числа, стоящих рядом, не подходит, так как их сумма будет больше (–12) и обеспечить сумму, равную 20, не удастся.

Покажем, что возможен вариант с тремя отрицательными числами. Условию задачи удовлетворяет следующий набор чисел: стоящие рядом три отрицательных числа в указанном порядке: -6, -13, -6, а остальные числа равны 1. Сумма всех чисел равна $-6-13-6+45=20$ и среди любых четырех подряд идущих чисел присутствует хотя бы одно положительное.

Наибольшее число положительных чисел равно 45.

б) Заметим, что менее 12 положительных чисел не может быть (так как среди любых четырех подряд идущих чисел присутствует хотя бы одно положительное). Покажем, что существуют наборы, содержащие 12 положительных чисел, удовлетворяющих условию задачи. Если возьмем 12 наборов вида -1, $-1{,}5$, -1, то сумма всех чисел будет равна 24. Поэтому, например, достаточно уменьшить одно положительное число на 4 или четыре положительных числа на 1.

Ответ: а) 45; б) 12.

Пример 22. (*ЕГЭ-2014*) На окружности некоторым образом расставили натуральные числа от 1 до 21 (каждое число поставлено по одному разу). Затем для каждой пары соседних чисел нашли разность большего и меньшего.

а) Могли ли все полученные разности быть не меньше 11?

б) Могли ли все полученные разности быть не меньше 10?

в) Помимо полученных разностей, для каждой пары чисел, стоящих через одно, нашли разность большего и меньшего. Для какого наибольшего целого числа k можно так расставить числа, чтобы все разности были не меньше k?

Решение. а) При любой расстановке разность числа 11 и любого соседнего с ним числа меньше 11. Значит, всегда найдется хотя бы две разности, меньшие 11.

б) Например, для расстановки 1, 12, 2, 13, 3, 14, 4, 15, 5, 16, 6, 17, 7, 18, 8, 19, 9, 20, 10, 21, 11 все разности не меньше 10.

в) Оценим значение k. Рассмотрим числа от 1 до 7. Если какие-то два из них стоят рядом или через одно, то найдется разность, меньшая 7. Иначе они стоят через два, поскольку всего чисел 21. В этом случае число 8 стоит рядом или через одно с каким-то числом от 2 до 7 и найдется разность, меньшая 7.

Таким образом, всегда найдется разность, меньшая 7. Все разности могут быть не меньше 6. Например, для расстановки 1, 8, 15, 2, 9, 16, 3, 10, 17, 4, 11, 18, 5, 12, 19, 6, 13, 20, 7, 14, 21 все разности не меньше 6.

Ответ: а) нет; б) да; в) 6.

Пример 23. (*ЕГЭ-2013*) Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если какое-то число n, выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n, а остальные числа, равные n, стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 19, 20, 22?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 7, 9, 11, 14, 16, 18, 20, 21, 23, 25, 27, 30, 32, 34, 41.

Решение. а) Например, числа 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 дают требуемый набор, записанный на доске.

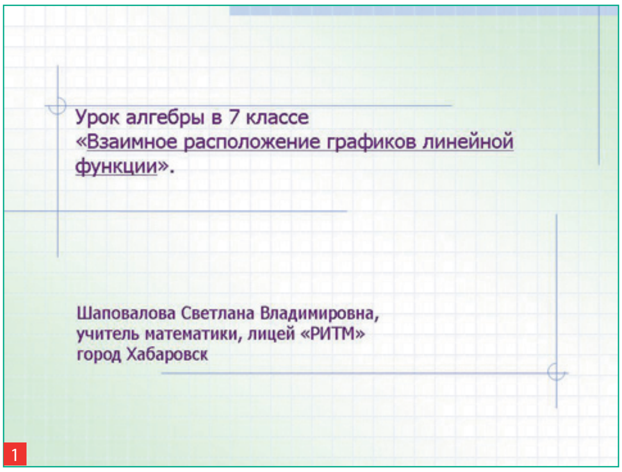
б) Так как задуманные числа натуральные, то наименьшее число в наборе — это наименьшее из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Среди записанных на доске чисел должно быть число, равное сумме всех задуманных чисел без наименьшего, то есть $22-1=21$. Но этого числа нет в наборе, поэтому примера таких задуманных чисел, для которого на доске будет выписан набор из условия задачи, не существует.

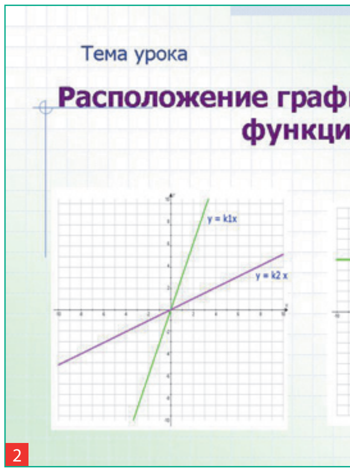
в) Наименьшее из задуманных чисел — число 7, а наибольшее число 41 в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Количество задуманных чисел не превосходит целой части $\left[\frac{41}{7}\right]=5$. Числа 9 и 11 меньше, чем сумма двух чисел 7, поэтому они являются задуманными числами. Значит, сумма оставшихся задуманных чисел равна $41-7-9-11=14$. Так как наименьшее задуманное число равно 7, оставшиеся задуманные числа — это 7 и 7 или 14. Для задуманных чисел 7, 7, 7, 9, 11 и 7, 9, 11, 14 на доске будет записан набор, данный в условии.

Ответ: а) 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1; б) нет; в) 7, 7, 7, 9, 11 или 7, 9, 11, 14.

Литература

1. *Ященко И.В., Шестаков С.А., Трепалин А.С., Захаров П.И.* Подготовка к ЕГЭ по математике. Новая демонстрационная версия 2014 года. — М.: МЦНМО, 2014. 2. *Высоцкий И.Р., Захаров П.И., Панферов В.С., Посицельский С.Е., Семенов А.В., Семенов А.Л., Семенова М.А., Сергеев И.Н., Смирнов В.А., Шестаков С.А., Шноль Д.Э., Ященко И.В.* ЕГЭ 2013. Математика. 30 вариантов типовых тестовых заданий и 800 заданий части 2 (С) / под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. — М.: Экзамен, 2013. — (Серия «ЕГЭ. Типовые тестовые задания»).





Сегодня в рубрике «Разбор урока» мы обсуждаем урок в 7-м классе. Урок проводит учитель математики Светлана Владимировна ШАПОВАЛОВА, г. Хабаровск. Урок обсуждают: главный редактор журнала «Математика» Лариса Олеговна РОСЛОВА, редакторы — Петр Михайлович КАМАЕВ и Ольга Васильевна МАКАРОВА, ведущий научный сотрудник. ИСМО РАО Светлана Станиславовна МИНАЕВА

7 класс

ТЕМА УРОКА: «ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ГРАФИКОВ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИЙ»

Тип урока: открытие новых знаний.

Цель урока: исследовать и сделать выводы о взаимном расположении графиков линейных функций (минимум — при сравнении коэффициентов *k*, максимум — при сравнении коэффициентов *k* и *b*).

Оборудование и средства обучения: графические калькуляторы «Casio» (у каждого ученика); интерактивная доска, мультимедийный проектор, компьютер; компьютерная программа fsEmulator; презентация «Взаимное расположение графиков линейных функций»; раздаточный материал (памятка для работы с калькулятором, опорный конспект).

Ход урока

Вводная часть

Задание 1. Ответьте на вопросы. (*Слайд* 3)

– Какие из перечисленных функций являются линейными:

а) $y = 2 - 5x$; б) $y = 3x$; в) $y = \frac{x}{2} + 1$;

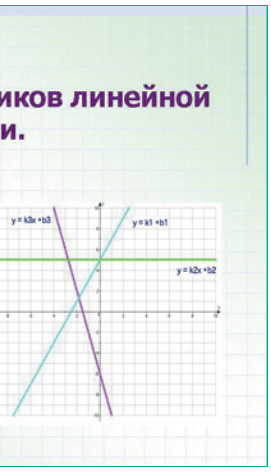
г) $y = \frac{2}{x} + 1$; д) $y = x^2$; е) $y = 5$; ж) $x = 5$?

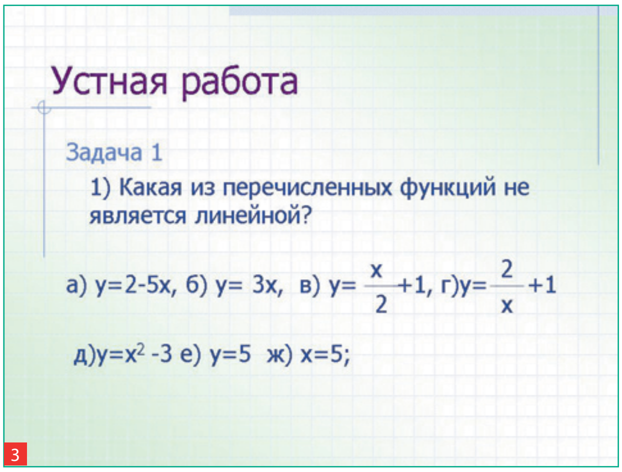
– Почему функция под буквой «ж» не является линейной?

– Что является графиком линейной функции?

– Сколько точек необходимо для построения графика линейной функции?

К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru





Задание 2. Ответьте на вопросы. (*Слайд* 4)

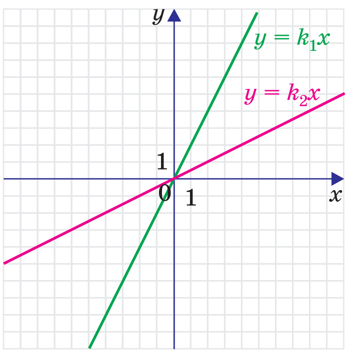
– Какая функция называется прямой пропорциональностью?

– Можно ли утверждать, что прямая пропорциональность является частным случаем линейной функции?

– Что является графиком прямой пропорциональности?

– Сколько точек, кроме начала координат, необходимо задать для построения графика прямой пропорциональности?

– Используя графики, изображенные на рисунке, сравните k_1и k_2.



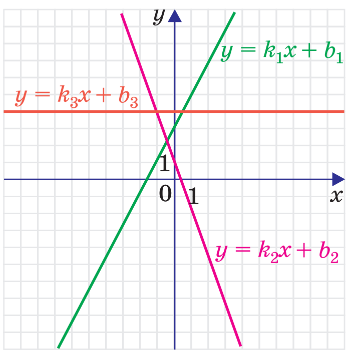
Задание 3. Выполните задания. (*Слайд* 5)

а) Определите знак коэффициента k для каждого графика.

б) Сравните k_1 и k_2.

в) Сравните k_1 и k_3.

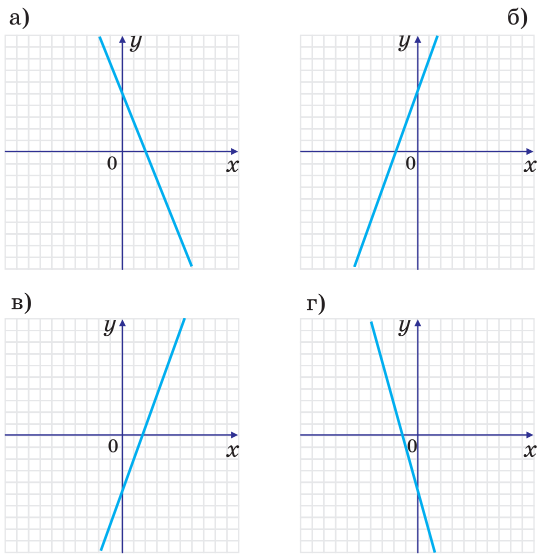
г) Сравните k_2 и k_3.



При выполнении задания учащиеся затрудняются сравнить коэффициенты k для прямых, не проходящих через начало координат.

Первая трудность, возникающая у учащихся: как расположение графика линейной функции на координатной плоскости зависит от коэффициента k.

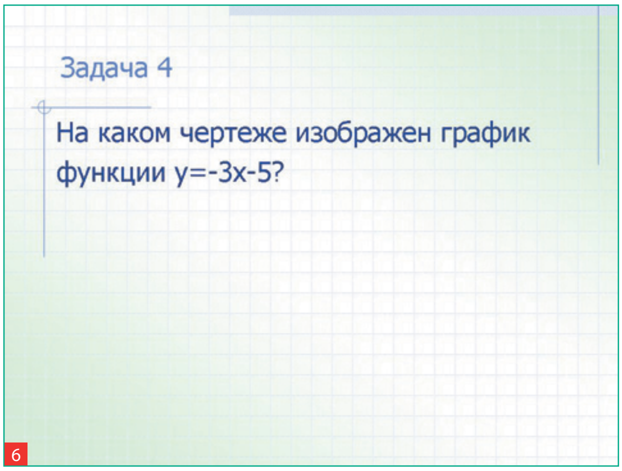
Задание 4. На каком рисунке изображен график функции $y = -3x - 5$. (*Слайды* 6 *и* 7)

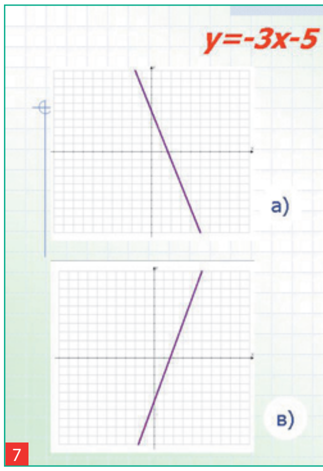


Вторая трудность, возникающая у учащихся: какая существует связь между значением b и ординатой точки пересечения прямой с осью ординат.

Задание 5. Расположите значения k_1, k_2, k_3 в порядке возрастания. (*Слайд* 8)

Третья трудность, возникающая у учащихся: как сравнивать угловые коэффициенты прямых, если прямые не являются графиками прямой пропорциональности. Если учащиеся затрудняются ответить на этот вопрос, то в ходе урока предусмотрено возвращение к этим задачам после работы в группах.





Формулируем проблемы. (*Слайд* 9)

• Выяснить, при каких значениях коэффициента k графики линейных функций параллельны, а при каких пересекаются.

• Выяснить, существует ли связь между значением b и координатами точек пересечения графика с осями координат.

Итак, проблемы намечены, сформулированы. Уточняем тему урока: «Расположение графиков линейной функции относительно друг друга и относительно осей координат».

Теперь необходимо решить возникшие проблемы.

Основная часть

(работа с калькулятором)

Для решения поставленных проблем класс разбивается на три группы, каждый ученик получает калькулятор и задания для исследования взаимного расположения графиков линейных функций. (*Слайды* 10 *и* 12)

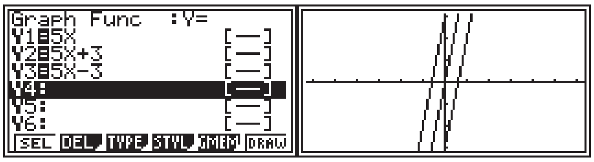
1-я группа. Постройте графики функций:

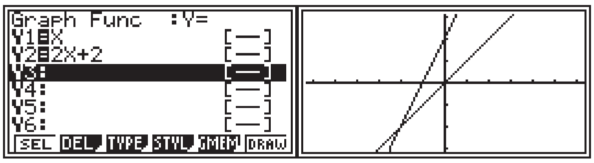
а) $y = 5x$, $y = 5x + 3$, $y = 5x - 3$;

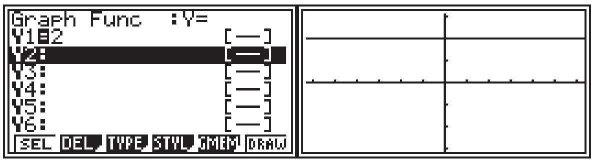
б) $y = x$, $y = 2x + 2$;

в) $y = 2$.

Комментарии к выполнению задания. Войдем в режим GRAPH и введем данные в калькулятор.







2-я группа. Постройте графики функций:

а) $y = -2x$, $y = -2x - 2$, $y = -2x + 1$;

б) $y = 4x + 1$, $y = -3x$;

в) $y = 2$.

3-я группа. Постройте графики функций:

а) $y = -x + 2$, $y = 4x + 1$;

б) $y = 6x$, $y = 6x - 3$, $y = 6x + 2$;

в) $y = -1$.

Каждый учащийся должен построить графики на графическом калькуляторе «Casio» и попытаться сформулировать выводы о взаимном расположении графиков при различных значениях коэффициентов k и b. Для работы на калькуляторе каждый ученик получает памятку. Предполагается, что учащиеся знакомы с основными функциями калькулятора. (*Слайд* 11)

Обобщающая часть

О результатах работы каждой группы рассказывает представитель группы; выполненные задания проецируются на доску и сравниваются с верным решением. Представители групп формулируют выводы, которые получили участники каждой группы в ходе выполнения задания. (*Слайды* 13–15)

Вместе учащиеся делают выводы:

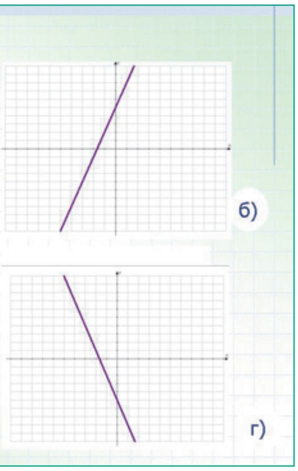
– Если коэффициенты k_1 и k_2 равны, то графики линейных функций параллельны.

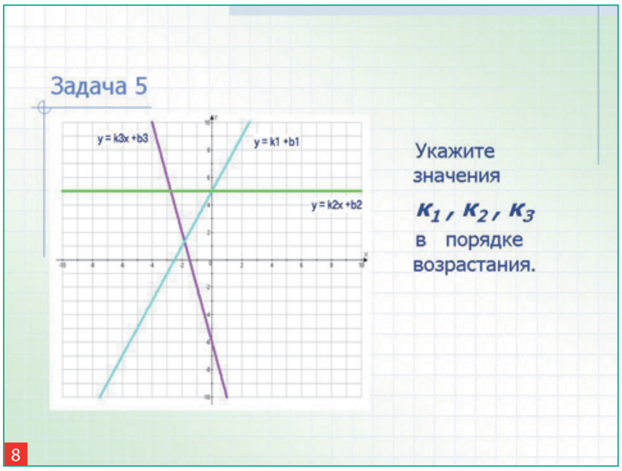
– Если коэффициенты k_1 и k_2 различны, то графики линейных функций пересекаются.

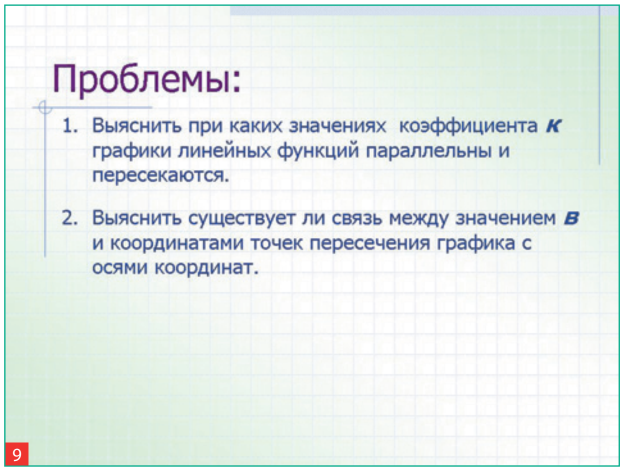
– Если $k = 0$, то график линейной функции параллелен оси x.

Задание всему классу (*Слайд* 16)

а) Постройте с помощью калькулятора графики функций $y = 0{,}5x - 2$ и $y = -2 + 0{,}5x$.







б) С помощью клавиши STYL выберите разные стили изображения графиков.

Учащиеся делают *вывод*.

Если и коэффициенты k и коэффициенты b двух функций одинаковы, то прямые совпадают.

Учащимся предлагается записать выводы, полученные в ходе работы, в тетрадь. (*Слайд* 17)

Выводы:

– Если коэффициенты k, и коэффициенты b равны, то прямые совпадают.

– Если коэффициенты k равны, а коэффициенты b различны, то прямые параллельны.

– Если коэффициенты k различны, то прямые пересекаются.

– Если $k > 0$, то угол наклона к положительному направлению оси x острый, если $k < 0$, то угол — тупой.

– Если $k = 0$, то прямая параллельна оси x.

– Коэффициент b равен ординате точки пересечения графика с осью y.

Заключительная часть

1. Контроль усвоенного материала. Задание выполняется каждым учеником на отдельном листе; для проверки соседи по парте обмениваются листами.

Проверка полученных результатов осуществляется с помощью презентации. (*Слайд* 18)

Учащиеся оценивают свою работу в группе.

2. Предлагается вывод урока в виде стихотворения в стиле рэп.

Среди многих функций
Есть одна нужнейшая,
Важная, старейшая.
Зовем ее линейная.
Графиком ее
Является прямая,
Строгая, красивая,
Бесконечная такая.
Если k_1 *равно* k_2,
Прямые параллельны тогда.
А если при этом и b_1 *равно* b_2,
То прямые совпадут тогда.
При k_1, *не равном* k_2,
Прямые пересекаются всегда,
А если при этом b_1 *равно* b_2,
Точка пересечения известна нам тогда.

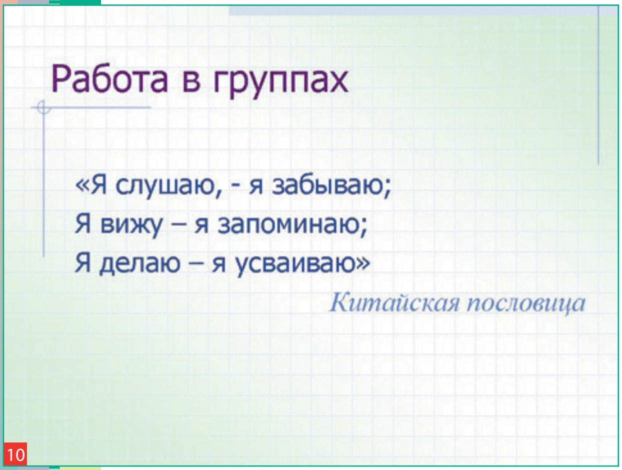
Комментарии учителя по домашнему заданию (*Слайд* 19)

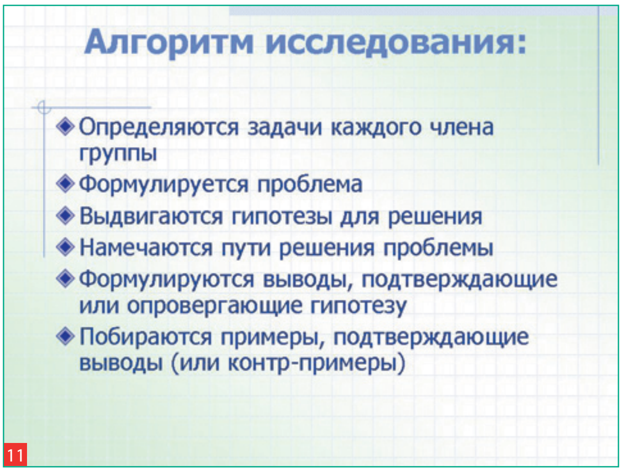
а) Исследовать взаимное расположение графиков линейных функций, угловые коэффициенты которых — взаимно обратные числа, взятые с противоположными знаками.

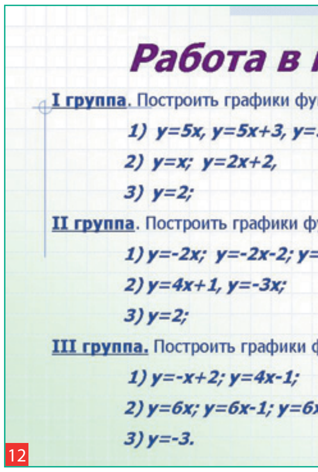
б) Заполнить карточку «Опорный конспект» о расположении графиков линейной функции относительно друг друга и относительно осей координат.

Обсуждение урока

Л.Р. Урок окончен. Поблагодарим за него учителя и приступим к обсуждению. Почему мы выбрали именно этот урок для нашей беседы? Сначала он привлек внимание чисто внешним атрибутом — использованием графических калькуляторов. А затем и тем, что учитель использовал достаточно редкую для математики возможность организовать небольшое учебное исследование, позволив учащимся вполне самостоятельно открыть новые для них знания. Сама попытка приобщения учащихся к такому виду деятельности заслуживает одобрения. Здесь нет канонов, практически нет готовых образцов, которые учитель мог бы взять за основу для своего урока. И неважно, какое техническое средство используется — калькулятор или компьютер,







важно, как поставить задачу, как подвести учащихся к ее решению. Все это требует от учителя смелости и недюжинных организаторских способностей. Один из вариантов разработки урока анализа взаимного расположения графиков линейных функций мы и предлагаем обсудить нашим читателям.

Помогает нам разобраться в его достоинствах Светлана Станиславовна Минаева, которая много работала с графическими и научными калькуляторами фирмы «Casio», знает их досконально. Ее статьи по этой теме читатели журнала, возможно, помнят. Тех же, кто не знаком с ними, отсылаем к электронному приложению.

С.М. Как мне кажется, нашему вниманию представлен сценарий первого из двух уроков, рекомендуемых планированием для завершения изучения линейной функции. Рассматривается вопрос о взаимном расположении графиков линейной функции в координатной плоскости. В сценарии явно просматривается заботливое отношение учителя к формированию у учащихся умения перейти от формулы, задающей линейную функцию, к графику и обратно, умения наблюдать и использовать подмеченные факты для формулирования выводов. Итог предусмотренной групповой работы — это формулировка условия пересечения (параллельности) прямых.

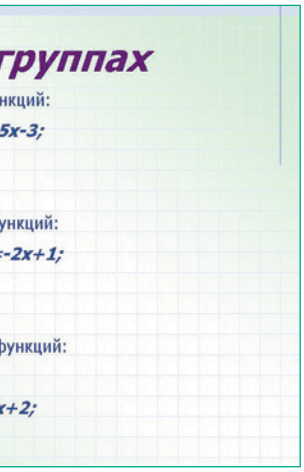
Л.Р. Я бы отметила продуманную систему заданий — от повторения необходимых сведений к постановке проблемы. Это позволяет зафиксировать все, что известно и понятно, и переходить к новым ситуациям. Так, график прямой пропорциональности учащимся понятен: все прямые проходят через начало координат и различаются «крутизной». А если есть еще коэффициент b? Если графики не проходят через начало координат? Вот и встает вопрос об их взаимном расположении.

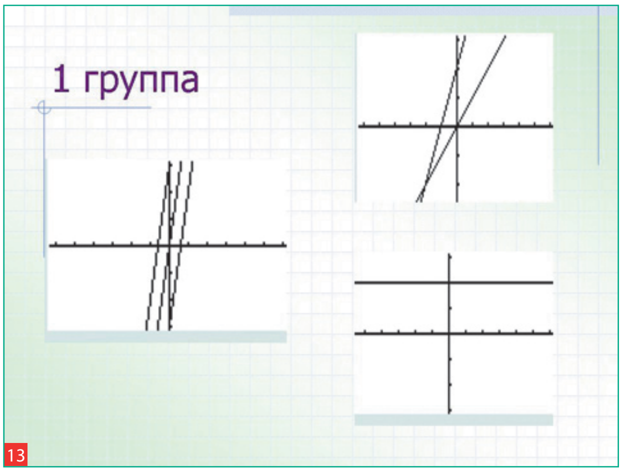
С.М. Замечу, что, конечно, в сценарии многое «остается за кадром». Так, не сказано явно, введено ли понятие углового коэффициента прямой, хотя мы видим, что в выводах (перед заключительной частью) характеризуется угол наклона.

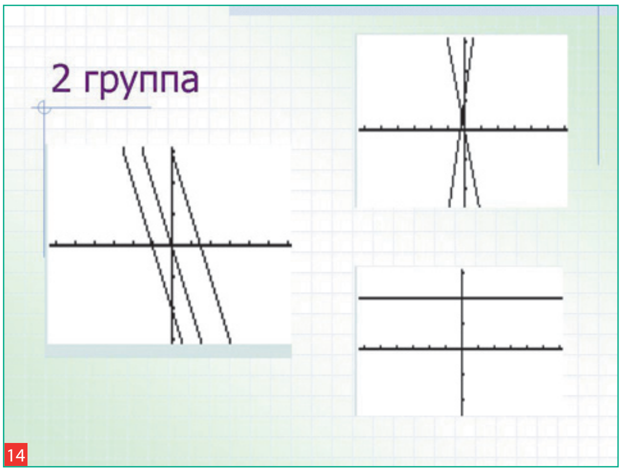
Л.Р. Честно говоря, из хода урока я не поняла, откуда взялся этот вывод. Я бы здесь отметила одно свое ощущение, связанное с понятием углового коэффициента прямой. Мне показалось, что учащиеся не чувствуют себя свободно и уверенно, когда речь заходит о знаке коэффициента. Мы не видели предыдущего урока, но, возможно, следовало и там дать учащимся возможность «поиграть» с калькулятором, постепенно изменяя коэффициент от некоторого достаточно большого положительного значения до нуля, а затем до большого (по модулю) отрицательного значения. Чтобы они «поймали» переход из одной пары координатных четвертей в другую. Чтобы положение «в гору» сменилось на положение «с горы». Это придало бы им уверенности. Сейчас же создается впечатление, что темп освоения нового материала может оказаться слишком высоким для некоторых учащихся.

П.К. Я добавлю, что и темп урока высок. Вообще говоря, впечатления от урока самые позитивные, хочется особо отметить его красочность, высокий темп, соответствие нашим представлениям о современном уроке (актуализация знаний, постановка эксперимента с помощью калькулятора и первичное закрепление). Хотя мне всегда кажется, что использование презентации провоцирует высокий темп урока.

О.М. Не могу с вами согласиться. Презентация является визуальным дополнением к уроку. И в данном случае учитель расположил на каждом слайде именно ту ключевую информацию, которая необходима только на конкретном этапе урока. Мне понравилось, что автор не использует лишних элементов оформления, то есть презентация не содержит «украшательств», и ученикам ничего не мешает воспринимать нужную информацию. Чего нельзя сказать об использовании ненужной анимации: на некоторых слайдах можно увидеть неравномерное появление текста







задания. Я бы не рекомендовала в данном случае использовать анимацию, она может отвлечь учеников и не позволит сконцентрироваться на условии.

Л.Р. Да, высокий темп может быть опасен, ведь и среди сильных учащихся есть те, кто в силу своих психофизиологических особенностей не может работать в темпе. А что уж говорить о среднем ученике? Да еще если что-то отвлекает. Но в этом и есть мастерство учителя: сделать так, чтобы на уроке каждый шел своим темпом, но при этом со всем классом. В данном случае урок проводится в лицейском классе, что предполагает хороший уровень математической подготовки учащихся.

П.К. Давайте вернемся к этапу актуализации знаний. Когда на уроке звучит много устных вопросов, обычно учитель заслушивает ответы двух-трех учеников и переходит к следующему вопросу, а хочется же, чтобы ответ дал каждый ученик, хочется обсудить возникающие ошибки. Что можно посоветовать? Ответы на многие вопросы здесь альтернативны: да / нет; больше нуля / меньше нуля. Альтернативные вопросы легко проверять с помощью приема «Да-нет»: ответ «Да» — поднимается правая рука, ответ «Нет» — левая рука; аналогично и для «Больше-меньше». Если ответ есть некоторое число, то его легко показать на пальцах одной руки (для устной работы надо подбирать такие небольшие значения).

Л.Р. Согласна, такие приемы позволяют видеть ответ и каждого ученика, и класса в целом, а значит, быстро внести коррективы в урок.

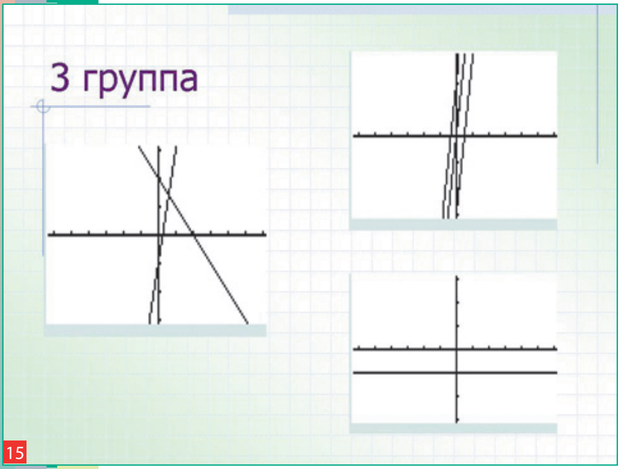
П.К. Кстати, задание 1 я бы предложил переформулировать: «Какие формулы не задают линейную функцию?» И далее спросить: «Почему формула под буквой «ж» не является линейной функцией?»

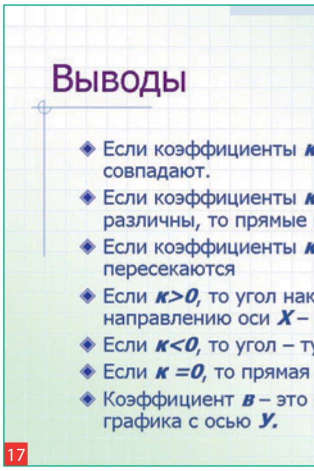
Л.Р. Поддерживаю. В контексте изучения функций этот вопрос мне кажется лишним. Хорошо бы обсудить эту ситуацию, дав примеры нефункциональных зависимостей и показав их графики. А здесь это выглядит формальным моментом и утяжеляет восприятие и так не самой простой темы курса 7-го класса. Но давайте обратимся к следующему этапу урока.

С.М. Учитель планирует урок таким образом, чтобы совокупность рассматриваемых на уроке графиков позволила учащимся увидеть и установить некоторые закономерности в аналитическом и графическом представлении линейной функции. Это действительно возможно при использовании электронного помощника, который устранит технические трудности в изображении многочисленных графиков, а учитель сможет направить внимание учащихся на содержательный смысл изучаемого вопроса. Работа с графическим калькулятором органично встроена в урок: выводы, которые сделают представители каждой из групп учащихся, станут основой для формулировки новых теоретических фактов.

Л.Р. У меня здесь только одно дополнение. Мне не хватает большей свободы учащихся: они отрабатывают заданные им функции и не проверяют найденную закономерность на своих примерах. А вдруг учитель каким-то там специальным образом подобрал примеры? Вдруг подвох? Всегда надо проверять. Мы же хотим критичность мышления воспитывать.

С.М. И это легко осуществимо с помощью графического калькулятора. Графический калькулятор становится активным участником процесса формирования знаний и умений учащихся, обеспечивая большую наглядность излагаемого материала. Он обладает значительным демонстрационным потенциалом, так как все осуществляемые на нем действия могут быть спроецированы на большой экран. При изучении данной темы я в своей работе использую еще одну возможность подобных калькуляторов — построение динамических графиков. Такие тематические рисунки, как, например, рису-





нок 38 из учебника «Алгебра, 7» под редакцией С.А. Теляковского, возникают на глазах учеников в динамическом режиме. На экране с помощью эмулятора графического калькулятора появляются одна за другой несколько прямых, заданных формулами вида $y = kx + b$, с различными значениями k, но с одним и тем же значением b. Динамический рисунок вызывает восхищение у ребят и помогает учителю «извлечь» из его обсуждения содержательный факт.

Л.Р. Но это же означает, что можно вывести на экран картинку с каждого калькулятора. Все это чрезвычайно важно для тем, где просто необходима визуализация.

О.М. Мы снова заговорили о визуализации, поэтому хочу повернуть наше обсуждение к собственно презентации. Еще раз хочу сказать, что оформлена она строго, без излишеств, при ее составлении учитель учитывал возрастные особенности учащихся.

Презентация выполнена на базе шаблона оформления слайдов, предлагаемого программой PowerPoint. Цвет фона и «палитра» цветовых оттенков для текста созданы с учетом правил цветового дизайна, так что цветовая гамма не отвлекает и позволяет сконцентрироваться на тексте слайда. Используется стандартный шрифт «Tahoma»; размер шрифта для заголовка и основного текста автором выбраны оптимально.

Но, выбрав макет, необходимо его соблюдать. Что я имею в виду: если пролистать слайды 4–6, можно увидеть, как «прыгают» заголовки этих слайдов. Создается неприятное визуальное впечатление.

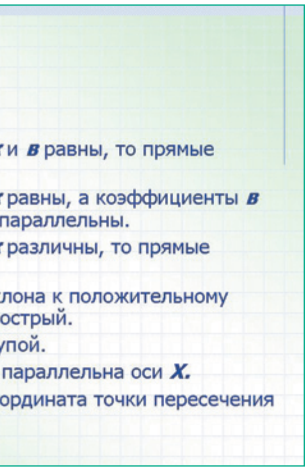
Про изображения. Изображения, используемые учителем в презентации, органично дополняют текстовую информацию. Цвет их не контрастирует с общим стилевым оформлением слайдов. Однако при этом в оформлении изображений нет единообразия: вокруг рисунков можно увидеть темный фон, где-то он больше, где-то меньше. Убрать его можно, аккуратно обрезав рисунок в любом графическом редакторе.

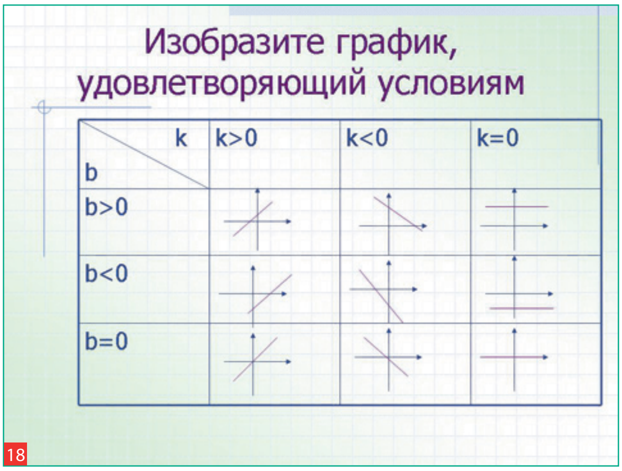
Нет единообразия и в записи формул (см. слайды 2, 4, 6, 8, 9 и 17). Коэффициенты k и b принято писать строчными латинскими буквами и выделять курсивом. У автора же мы видим, что на рисунках одни буквы, а в сопровождающем тексте другие.

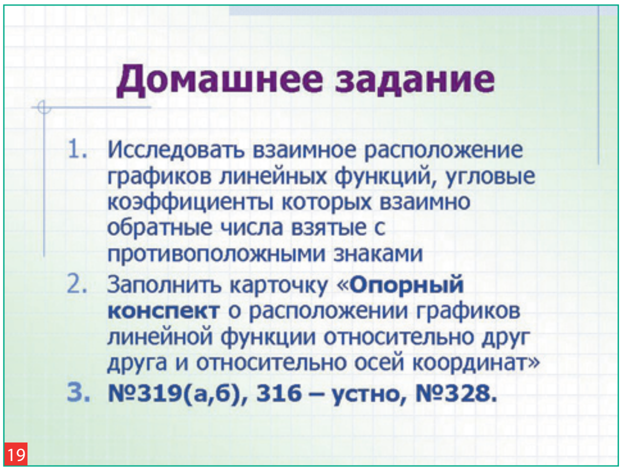
Л.Р. Говоря об единообразии, я бы обратила внимание читателей на знаки препинания в формулировках заданий. Думаю, что здесь образцом должны быть наши учебники. В издательствах учебной литературы принято относиться к формулировке задания как к предложению русского языка, а следовательно, пользоваться соответствующими правилами: разделять пункты «а», «б», «в» и т.д. точкой с запятой, внутри пункта начинать со строчной буквы, в конце вопросительного предложения ставить вопросительный знак. Но допустим и такой вариант: если знак вопроса ставится до пунктов «а», «б», «в», как на слайде 3, то дальше разделительные знаки препинания можно не ставить. Кроме того, есть же возможность распределить формулы в аккуратные столбики так, чтобы они хорошо читались. Если же каждый пункт является отдельным предложением, как на слайде 4, то начинать его надо с прописной буквы. Но в любом случае, внутри одной презентации должно соблюдаться единообразие применяемых правил. Думаю, это справедливо, ведь мы требуем от наших учеников аккуратности в записях.

О.М. Также хочу обратить внимание на написание нижних индексов в записи формул (слайды 2, 4, 6 и 8).

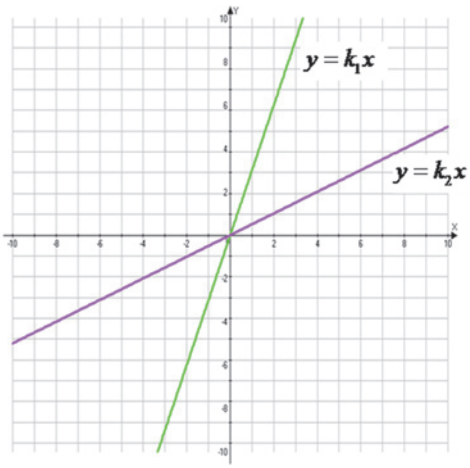
Это можно исправить в любом графическом редакторе. Я же хочу предложить самый простой способ. Его сможет применить любой учитель, знакомый с основными правилами работы в PowerPoint. На исправляемую формулу на изображении (например, слайд 2, левый рисунок) нужно наложить прямоугольник белого цвета. Цвет контура дол-







жен совпадать с цветом заливки прямоугольника, а размер подберите сами так, чтобы прямоугольник «прикрывал» формулу. Затем во встроенном редакторе формул или, например, в MathType-6 наберите новую формулу (если формул несколько, то каждую формулу в отдельном окне редактора формул) и наложите ее на соответствующий прямоугольник. Чтобы объекты не «разъехались» при демонстрации презентации, их нужно сгруппировать. Для этого выделите нужные объекты (изображение, прямоугольники и формулы) с помощью мыши и объедините, применив команду *Группировать*. На рисунке показан конечный результат.



И еще очень важный момент. В презентации, к сожалению, допущены опечатки, поэтому очень важно не забывать проверять созданные слайды еще и еще раз на наличие ошибок и опечаток.

Л.Р. Переходим к заключительному этапу. Здесь мне понравилось задание для контроля: ученик должен сам сконструировать пример, соответствующий заданным условиям. Здорово! Если ученик смог это сделать, то это является полной гарантией усвоения всего того, что происходило на уроке. И проверка не отсрочена, а осуществляется тут же, на уроке. Ученик уходит с урока с пониманием своих достижений и существующих проблем.

П.К. Меня заключительный этап не вдохновил. Нет работы с учебником, а в учебнике под редакцией Теляковского есть много разнообразных упражнений на закрепление этой темы. Итог урока в виде стихотворения?! Конечно, рифмованные строки лучше запоминаются, но рифмы-то нет. Быть может, здесь уместнее составить синквейн? И в качестве домашнего задания учитель предлагает заполнить карточку с опорным конспектом, которую не приводит, а жаль.

Л.Р. Так, может, и не дает? Значит, каждый ученик составит свой опорный конспект. В этом же и есть суть задания, а не в том, чтобы заучивать наизусть конспекты, составленные учителем. Только составляя свой конспект, ученик приведет в порядок в своей голове все, что узнал на уроке.

С.М. У меня тоже есть дополнение по домашнему заданию. Первым номером учитель предлагает «исследовать взаимное расположение графиков линейных функций, угловые коэффициенты которых — взаимно обратные числа, взятые с противоположными знаками». Эта задача превосходит уровень обязательных программных требований, однако в комментарии к домашнему заданию отсутствуют рекомендации учителя к такой самостоятельной работе. Предполагаю, что это исследование методически целесообразно провести на уроке по такой схеме: в ходе практической работы (эксперимента) подмечается закономерность, она формулируется словами и обязательно записывается в символической форме, затем новый факт применяется в ходе решения задач.

Л.Р. Что ж, мы уже говорили, что многое остается за кадром. Мы не можем ответить на все вопросы. Но мы задаем их, чтобы побудить читателя задуматься над ними, сопоставить со своим опытом, своими методическими подходами. В чем-то утвердиться, что-то попробовать изменить. Это наша цель. И спасибо еще раз учителю за интересный урок, побудивший нас к весьма содержательному обсуждению.

ЭКСПРЕСС-МЕТОД РЕШЕНИЯ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Г. ГИЛЬМИЕВА,
г. Казань

Алгоритм решения квадратных уравнений общеизвестен. Иногда немало времени уходит на их решение. Потребность в быстром решении квадратных уравнений обусловлена, например, тем, что время, отводимое на сдачу ГИА или ЕГЭ, ограничено. Анализ учебной литературы и интернет-источников показал, что самыми популярными способами решения квадратных уравнений «в уме» являются теорема, обратная теореме Виета, и использование свойств коэффициентов (метод коэффициентов).

А возможны ли другие способы решения уравнений?

Решая квадратные уравнения с помощью формулы корней, в некоторых из них можно заметить совпадения. Запишем несколько таких уравнений и их корни:

1. $2x^2 + 7x + 3 = 0.$ $\left[-\frac{1}{2}; -3\right]$
2. $4x^2 - 63x - 16 = 0.$ $\left[-\frac{1}{4}; 16\right]$
3. $7x^2 - 13x - 2 = 0.$ $\left[-\frac{1}{7}; 2\right]$
4. $5x^2 + 31x + 6 = 0.$ $\left[-\frac{1}{5}; -6\right]$
5. $-7x^2 - 83x + 12 = 0.$ $\left[\frac{1}{7}; -12\right]$
6. $10x^2 - 111x + 11 = 0.$ $\left[\frac{1}{10}; 11\right]$
7. $12x^2 - 61x + 5 = 0.$ $\left[\frac{1}{12}; 5\right]$
8. $13x^2 + 64x - 5 = 0.$ $\left[\frac{1}{13}; -5\right]$
9. $-15x^2 + 164x + 11 = 0.$ $\left[-\frac{1}{15}; 11\right]$
10. $9x^2 - 91x + 10 = 0.$ $\left[\frac{1}{9}; 10\right]$

В примерах можно заметить некоторые интересные особенности. В уравнениях (1—5) коэффициенты связаны условием $ac + 1 = b$ и корни, видимо, находятся по формуле $x_1 = -\frac{1}{a}$, $x_2 = -c$.

В уравнениях (6—10) можно заметить, что $ac + 1 = -b$ и, по всей видимости, корни находятся по формуле $x_1 = \frac{1}{a}$, $x_2 = c$.

Попытаемся вывести наше предположение.

Рассмотрим уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0. \qquad (1)$$

Умножим обе части уравнения на a и выполним замену $ax = y$:

$$(ax)^2 + b(ax) + ac = 0,$$
$$y^2 + by + ac = 0.$$

Применим метод коэффициентов.

Если $1 + b + ac = 0$, или $ac + 1 = -b$, то $y_1 = 1$, $y_2 = \frac{ac}{1} = ac.$

Значит, $x_1 = \frac{y_1}{a} = \frac{1}{a}$, $x_2 = \frac{y_2}{a} = \frac{ac}{a} = c.$

Если $1 + ac = b$, то $y_1 = -1$, $y_2 = \frac{-ac}{1} = -ac.$

Значит, $x_1 = \frac{y_1}{a} = \frac{-1}{a}$, $x_2 = \frac{y_2}{a} = \frac{-ac}{a} = -c.$

Получаем:

1) если в уравнении (1) выполняется условие $ac + 1 = -b$, то $x_1 = \frac{1}{a}$, $x_2 = c;$

2) если в уравнении (1) выполняется условие $ac + 1 = b$, то $x_1 = -\frac{1}{a}$, $x_2 = -c.$

Преимущество этого способа перед общим алгоритмом решения уравнений очевидно. Например, в девятом уравнении дискриминантом является достаточно большое число и на нахождение корней уравнения ушло бы немало времени. А если воспользоваться выведенным правилом, то можно быстро сосчитать значения корней. В самом деле, в уравнении

$$-15x^2 + 164x + 11 = 0,$$
$$a = -15,\ b = 164,\ c = 11;$$
$$D = b^2 - 4ac = 164^2 - 4(-15)\cdot 11 = 27\,556 = 166^2;$$
$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-164 + 166}{2\cdot(-15)} = -\frac{1}{15};$$
$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-164 - 166}{2\cdot(-15)} = 11.$$

А теперь найдем корни по новому правилу:

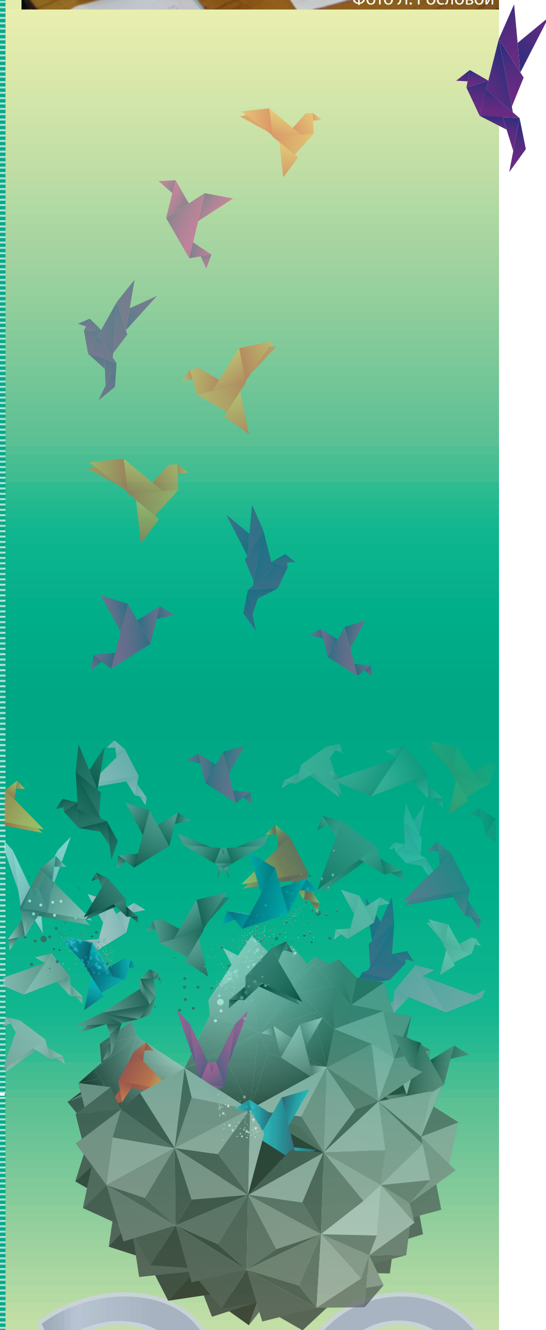
$ac + 1 = -b$, тогда $x_1 = \frac{1}{a}$, $x_2 = c$; $x_1 = -\frac{1}{15}$, $x_2 = 11$.

Проверенная опытом
Качественная
Доступная
Какая литература нужна современному учителю?
Актуальная
По образовательным стандартам
КАЧЕСТВЕННАЯ ПОМОЩЬ ШКОЛЕ
РАБОЧИЕ ПРОГРАММЫ
ПРОМЕЖУТОЧНАЯ АТТЕСТАЦИЯ
ФГОС
КОНТРОЛЬНО-ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ МАТЕРИАЛЫ
СБОРНИКИ ЗАДАНИЙ И РАБОЧИЕ ТЕТРАДИ
МАСТЕРСКАЯ учителя математики
ИЗДАТЕЛЬСТВО Вако
www.vaco.ru


Фото Л. Рословой

XI ОЛИМПИАДА ПО ГЕОМЕТРИИ им. И.Ф. ШАРЫГИНА

ЗАОЧНЫЙ ТУР



Для кого предназначена олимпиада

В олимпиаде могут участвовать школьники последних четырех классов средней школы. В списке задач, приведенном ниже, после порядкового номера каждой задачи указано, учащимся каких классов российской школы (на момент проведения олимпиады) она предназначена. В тех странах, где количество классов в школе другое, ученики последнего класса решают задачи 11-го класса, ученики предпоследнего класса — задачи 10-го класса и т.д. Можно решать задачи и для более старших классов (решенные задачи для более младших классов при подведении итогов не учитываются).

Оценивание

Полное решение любой задачи или любого ее пункта, если задача имеет пункты, оценивается в 7 баллов. Неполное решение, в зависимости от степени продвижения, оценивается от 1 до 6 баллов. При отсутствии заметного продвижения ставится 0 баллов. Результатом участника является сумма баллов по всем задачам.

Как и куда выслать работу

Решения задач на русском или английском языке должны быть представлены в электронной форме не позднее 1 апреля 2015 года. Для этого нужно зайти на сайт http://geom.informatics.msk.ru и следовать приведенным там инструкциям.

Внимание! Решение каждой задачи должно содержаться в отдельном файле формата pdf, doc или jpg. Желательно выполнять работу на компьютере или сканировать, а не фотографировать. *В последних двух случаях необходимо убедиться, что файл хорошо читается*. При возникновении технических проблем с загрузкой работы обращайтесь по адресу geomolymp@mccme.ru.

Допускается также присылка решений по электронной почте на адрес geompapers@yandex.ru. В этом случае работа все равно будет загружена на сервер. Чтобы не усложнять процесс, рекомендуем авторам работ сделать это самим. Если все же работа послана по электронной почте, то необходимо соблюдать следующие правила.

1. *Каждую работу следует посылать отдельным письмом с уведомлением о прочтении.*

2. *Если работа содержится в нескольких файлах, следует присылать их в виде архива.*

3. *В теме письма нужно написать «Олимпиада Шарыгина» и указать фамилию и имя участника, а в тексте должны содержаться следующие сведения об участнике:*

К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru (Требования к участию в олимпиаде, условия задач)

– Фамилия, имя, отчество;

– e-mail, телефон, полный почтовый адрес с индексом;

– класс, в котором сейчас учится школьник;

– количество классов при школьном обучении;

– номер и адрес школы;

– ФИО учителей математики и/или руководителей кружка.

При невозможности представить работу в электронной форме сообщите об этом в оргкомитет, вопрос будет решен индивидуально.

Как оформлять решение

Решение каждой задачи начинайте с новой страницы: сначала надо переписать условие, затем записать решение, причем старайтесь писать подробно, приводя основные рассуждения и выкладки, делая отчетливые чертежи достаточного размера. *Если в задаче требуется дать ответ на некоторый вопрос (например, найти значение какой-нибудь величины), то этот ответ следует привести перед решением.* Пишите аккуратно, ведь вы же заинтересованы в том, чтобы вашу работу можно было понять и справедливо оценить!

Если вы пользуетесь в решении каким-то фактом из школьного учебника, можно просто на это сослаться (чтобы было понятно, какую именно теорему вы имеете в виду). Если же вам необходим факт, не встречающийся в школьном курсе, его обязательно надо доказать (или сообщить, из какого источника он взят).

Можно (хотя и необязательно) указать в работе, какие задачи вам понравились. Нам будет интересно узнать ваше мнение.

Результаты

Победители заочного тура — учащиеся 8–10-х классов будут приглашены на финальный тур, который состоится летом 2015 года под Москвой. Победители заочного тура — выпускники школ получат грамоты оргкомитета олимпиады. Списки победителей будут опубликованы на сайте www.geometry.ru не позднее 1 июня 2015 г. Свои результаты вы сможете узнать в это же время по адресу geomolymp@mccme.ru.

Условия задач

1. (*8-й класс*) Таня вырезала из бумаги выпуклый многоугольник и несколько раз его согнула так, что получился двухслойный четырехугольник. Мог ли вырезанный многоугольник быть семиугольником?

2. (*8-й класс*) В треугольнике ABC O — центр описанной окружности, H — ортоцентр. Через середину OH параллельно BC проведена прямая, пересекающая стороны AB и AC в точках D и E. Оказалось, что O — центр вписанной окружности треугольника ADE. Найдите углы треугольника ABC.

3. (*8-й класс*) На стороне AD квадрата $ABCD$ во внутреннюю сторону построен тупоугольный равнобедренный треугольник AED. Вокруг него описана окружность и проведен ее диаметр AF, на стороне CD выбрана точка G так, что $CG = DF$. Докажите, что угол BGE меньше половины угла AED.

4. (*8-й класс*) В параллелограмме $ABCD$ провели трисектрисы углов A и B. Трисектрисы, ближние к стороне AB, пересекаются в точке O. Обозначим пересечение трисектрисы AO со второй трисектрисой угла B через A_1, а пересечение трисектрисы BO со второй трисектрисой угла A через B_1. Пусть M — середина отрезка A_1B_1. Проведем прямую MO, которая пересекает сторону AB в точке N. Докажите, что треугольник A_1B_1N равносторонний.

5. (*8–9-е классы*) Дан треугольник ABC. Две окружности, проходящие через вершину A, касаются стороны BC в точках B и C соответственно. Пусть D — вторая точка пересечения этих окружностей (A лежит ближе к BC, чем D). Известно, что $BC = 2BD$. Докажите, что $\angle DAB = 2\angle ADB$.

6. (*8–9-е классы*) В остроугольном треугольнике ABC AA', BB' и CC' — высоты. Точки C_a, C_b симметричны C' относительно AA' и BB'. Аналогично определены точки A_b, A_c, B_c, B_a. Докажите, что прямые A_bB_a, B_cC_b и C_aA_c параллельны.

7. (*8–9-е классы*) Высоты AA_1, CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке H. H_A — точка, симметричная H относительно A. H_AC_1 пересекает прямую BC в точке C'; аналогично определяется точка A'. Докажите, что $A'C' \parallel AC$.

8. (*8–9-е классы*) В равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD диагонали AC и BD перпендикулярны. Из точки D опущен перпендикуляр DE на сторону AB, а из точки C — перпендикуляр CF на прямую DE. Докажите, что угол DBF равен половине угла FCD.

9. (*8–9-е классы*) Дан остроугольный треугольник ABC. Постройте на сторонах BC, CA, AB точки A', B', C' так, чтобы выполнялись следующие условия:

– $A'B' \parallel AB$;

– $C'C$ — биссектриса угла $A'C'B'$;

– $A'C' + B'C' = AB$.

10. (*8–9-е классы*) Диагонали выпуклого четырехугольника делят его на четыре подобных треугольника. Докажите, что в него можно вписать окружность.

11. (*8–10-е классы*) Пусть H — ортоцентр остроугольного треугольника ABC. Серединный перпендикуляр к отрезку BH пересекает стороны BA, BC в точках A_0, C_0 соответственно. Докажите, что периметр треугольника A_0OC_0 (O — центр описанной окружности треугольника ABC) равен AC.

12. (*8–11-е классы*) Сколько (максимум) кругов можно расположить на плоскости так, чтобы любые два из них пересекались, а никакие три — нет?

13. (*9–10-е классы*) В треугольнике ABC проведены высоты BH_2 и CH_3. Точка M — середина отрезка H_2H_3. Прямая AM пересекает отрезок H_2H_1 в точке K. Докажите, что точка K принадлежит средней линии треугольника ABC, проведенной параллельно AC.

14. (*9–11-е классы*) Дан неравнобедренный остроугольный треугольник ABC. Точки A_1, A_2 симметричны основаниям внутренней и внешней биссектрис угла A относительно середины стороны BC. На отрезке A_1A_2 как на диаметре построена окружность α. Аналогично определяются окружности β и γ. Докажите, что эти три окружности пересекаются в двух точках.

15. (*9–11-е классы*) Длины сторон треугольника ABC не превышают 1. Докажите, что $p(1-2Rr)$ не превышает 1, где p — полупериметр, R и r — радиусы описанной и вписанной окружностей треугольника ABC.

16. (*9–11-е классы*) Выпуклый четырехугольник разрезан диагоналями на четыре треугольника. Восстановите четырехугольник по центрам описанных окружностей двух соседних треугольников и центрам вписанных окружностей двух противоположных треугольников.

17. (*10–11-е классы*) Дан треугольник ABC, O — центр описанной окружности. Проекции точек D и X на стороны треугольника лежат на прямых l и L, причем $l \parallel XO$. Докажите, что прямая L образует равные углы с диагоналями четырехугольника $ABCD$.

18. (*10–11-е классы*) В окружность вписан шестиугольник $ABCDEF$. K, L, M, N — точки пересечения пар прямых AB и CD, AC и BD, AF и DE, AE и DF. Докажите, что если три из этих точек лежат на одной прямой, то и четвертая точка лежит на этой прямой.

19. (*10–11-е классы*) Пусть L — основание внутренней биссектрисы угла A треугольника ABC, а K — внешней. Пусть P — точка пересечения касательных к описанной окружности в точках B и C. Перпендикуляр в точке L к BC пересекает AP в точке Q. Докажите, что Q лежит на средней линии треугольника LKP.

20. (*10–11-е классы*) Даны окружность и лежащий внутри нее эллипс с фокусом C. Найдите геометрическое место центров описанных окружностей треугольников ABC, где AB — хорда окружности, касающаяся эллипса.

21. (*10–11-е классы*) Пусть четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность ω с центром O. Пусть M_1 и M_2 — середины отрезков AB и CD соответственно. Пусть Ω — окружность, описанная около треугольника OM_1M_2. Пусть X_1 и X_2 — точки пересечения ω и Ω, а Y_1 и Y_2 — вторые точки пересечения окружностей, описанных около треугольников CDM_1 и ABM_2, с Ω соответственно. Докажите, что $X_1X_2 \parallel Y_1Y_2$.

22. (*10–11-е классы*) Грани икосаэдра окрасили в 5 цветов так, что две грани, окрашенные в один цвет, не имеют общих точек, даже вершин. Докажите, что для любой точки внутри икосаэдра сумма расстояний от нее до красных граней равна сумме расстояний до синих граней.

23. (*11-й класс*) Дан тетраэдр $ABCD$. В грани ABC и ABD вписаны окружности с центрами O_1, O_2, касающиеся ребра AB в точках T_1, T_2. Плоскость π_{AB} проходит через середину отрезка T_1T_2 и перпендикулярна O_1O_2. Аналогично определяются плоскости π_{AC}, π_{BC}, π_{AD}, π_{BD}, π_{CD}. Докажите, что все эти шесть плоскостей проходят через одну точку.

24. (*11-й класс*) В тетраэдр $ABCD$ вписана сфера с центром O, касающаяся его граней в точках A_1, B_1, C_1 и D_1.

а) Пусть P_a такая точка, что симметричные ей относительно прямых OB, OC и OD точки лежат в плоскости BCD. Точки P_b, P_c и P_d определяются аналогично. Докажите, что прямые A_1P_a, B_1P_b, C_1P_c и D_1P_d пересекаются в некоторой точке P.

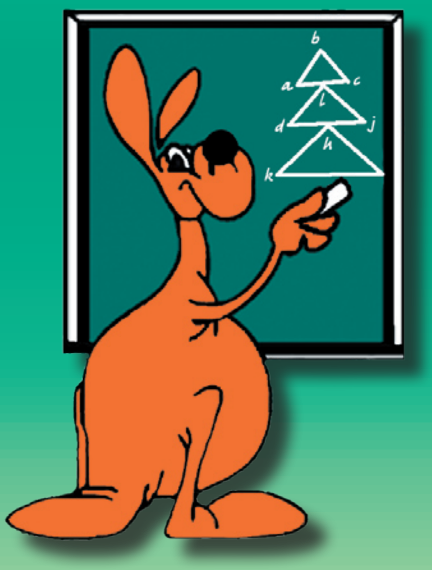
б) Пусть I — центр сферы, вписанной в тетраэдр $A_1B_1C_1D_1$; A_2 — точка пересечения прямой A_1I с плоскостью $B_1C_1D_1$; B_2, C_2, D_2 определены аналогично. Докажите, что P лежит внутри тетраэдра $A_2B_2C_2D_2$.

В связи с получением нового свидетельства о регистрации средства массовой информации (ПИ №ФС77-58424 от 25 июня 2014 г.) просим при ссылке на публикации нашего журнала указывать название следующим образом: «Математика. Первое сентября».

Иванов И.И. Уроки математики // Математика. Первое сентября. 2015. № 1. С. 4.

Н. ЖАРКОВСКАЯ,
zharkovskaja@gmail.com,
г. Санкт-Петербург

«КЕНГУРУ»-2014
САМЫЕ ОБСУЖДАЕМЫЕ ЗАДАЧИ



20 марта практически во всех регионах России прошел международный математический конкурс-игра «Кенгуру». Мы, следуя многолетней традиции, рассмотрим сегодня наиболее яркие задачи этого конкурса. Напомним, что задания конкурса разбиваются на три категории сложности: простые задачи, оцениваемые в 3 балла, более сложные задачи, на 4 балла, и достаточно трудные, нестандартные задачи, оцениваемые в 5 баллов. В скобках мы указываем возрастную категорию, в которой предлагалась задача, ее номер в варианте и процент верных ответов к ней, выбранных участниками каждой параллели.

Начнем с заданий для второклассников (начиная с прошлого года для них разрабатывается отдельный вариант). Пожалуй, наиболее заметные обсуждения среди этих задач вызвали две следующие.

Задача 1. (*2-й класс, № 20, 39%*) Дети во дворе разделились на две равные команды. Оказалось, что в каждой команде девочек столько же, сколько мальчиков. После игры несколько ребят ушли домой, и во дворе осталось 5 девочек и 4 мальчика. Сколько детей могло уйти домой?

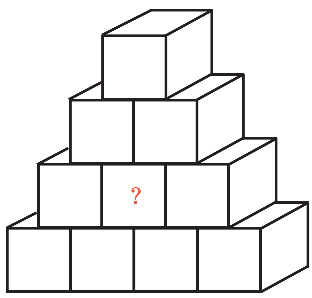
(А) 2 (Б) 3 (В) 4 (Г) 5 (Д) 6

Заметим, что 16% участников выбрали ответ Г, не заметив, что на 2 должно делиться не только общее число ребят, но отдельно число мальчиков и число девочек.

Задача 2. (*2-й класс, № 24, 19%*) У малыша Феди есть 10 кубиков: 4 красных, 3 синих, 2 зеленых и 1 желтый. Он сложил из них домик, показанный на рисунке, так, что никакие два кубика одного цвета не соприкасаются. Какого цвета отмеченный кубик?

(А) красный (Б) синий (В) зеленый (Г) желтый

(Д) невозможно определить



Больше всего у Феди красных кубиков, и их надо расставить так, чтобы они не касались друг друга. Но если мы удалим центральный кубик, то оставшаяся фигура будет состоять из трех троек попарно касающихся кубиков. Ясно, что в каждой из этих троек

К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru

можно разместить не больше одного красного кубика, значит, четвертый можно поставить только в центр (остальные красные кубики после этого можно ставить только по углам конструкции). Для размещения остальных шести кубиков есть разные варианты. Отметим, что 29% участников предпочли ответ Д.

Среди легких задач для 3–4-х классов, наверное, стоит отметить две следующие.

Задача 3. (*3–4-е классы, № 4, 46%, 57%*) Во сколько раз 10 метров больше 1 мм?

(А) 100 000 (Б) 10 000
(В) 1000 (Г) 100 (Д) 10

Задача 4. (*3–4-е классы, № 5, 43%, 51%*) Аня хочет вставить цифру 3 в число 2014 так, чтобы получившееся пятизначное число было как можно меньше. Где она должна написать цифру 3?

(А) перед цифрой 2
(Б) между цифрами 2 и 0
(В) между цифрами 0 и 1
(Г) между цифрами 1 и 4
(Д) после цифры 4

Обе задачи относятся к чисто базовому учебному материалу и даны почти что в «школьных» формулировках, тем не менее результаты по ним выглядят довольно скромно. При этом в задаче 3 примерно четверть участников сделали выбор в пользу ответа В, а в задаче 4 почти треть участников остановились на ответе Д.

Из более сложных задач для этих параллелей отметим следующие.

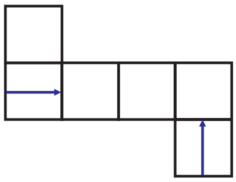
Задача 5. (*3–4-е классы, № 13, 24%, 27%*) Алиса заметила, что два месяца подряд 20-е число приходилось на четверг. Каким днем недели будет 20-е число в следующем за ними месяце?

(А) понедельник (Б) вторник
(В) среда (Г) пятница
(Д) воскресенье

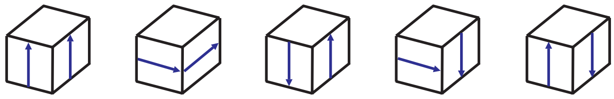
Чтобы решить эту задачу, надо заметить, что эти два месяца — февраль и март невисокосного года (только в этом случае могут совпасть дни недели, приходящиеся на одно и то же число). А поскольку в марте 31 день, то в этом месяце сверх четырех полных недель есть еще 3 дня ($31 = 7 \cdot 4 + 3$), следовательно, в апреле на те числа, на которые в марте приходились четверги, придутся воскресенья.

Примерно половина участников обеих параллелей выбрали ответ Г, который ничем, кроме привязки к слову «следующий», объяснить нельзя.

Задача 6. (*3–4-е классы, № 24, 19%, 21%*) Какой кубик получится из данной развертки?



Если мы начнем складывать кубик так, чтобы самая правая грань горизонтального «пояска» развертки смотрела на нас, то нижняя стрелочка окажется на «дне» кубика и будет направлена к нам, а левая стрелочка попадет на правую вертикальную грань и будет направлена от нас. Такое расположение стрелочек соответствует рисунку Д.

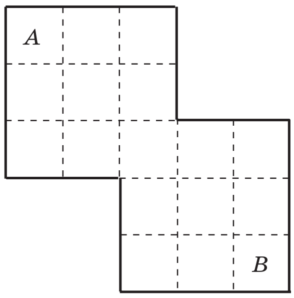


(А) (Б) (В) (Г) (Д)

Более 40% участников выбрали ответ Г. Скорее всего, это вызвано тем, что на развертке стрелочки расположены перпендикулярно друг другу, как и на рисунке Г.

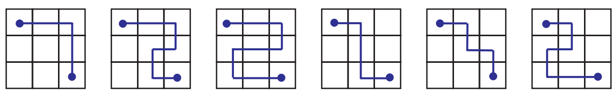
Самой трудной в этом варианте стала, как и ожидалось, последняя задача.

Задача 7. (*3–4-е классы, № 26, 9%, 10%*) На рисунке изображен план дома Кенги. Любые две соседние комнаты соединены дверью. Кенга хочет пройти из комнаты A в комнату B, не проходя ни через какую комнату более одного раза. Сколькими способами Кенга сможет это сделать?



(А) 24 (Б) 36 (В) 81 (Г) 144 (Д) 288

Прежде всего заметим, что любой путь проходит через центральную комнату. Поэтому любой путь Кенги представляет собой соединение двух путей, идущих из левой верхней клетки в правую нижнюю клетку квадрата 3×3. Подсчитаем, количество таких путей. Для этого предположим, что первый ход Кенга сделала направо от начальной комнаты. Таких путей всего 6:



Путей, начинающихся ходом вниз, столько же — они симметричны уже рассмотренным относительно диагонали квадрата. Таким образом, всего в квадрате 3×3 существует 12 путей из левой верхней клетки в правую нижнюю. Любой из этих путей можно соединить с любым другим во второй части домика, поэтому всего получается $12 \cdot 12 = 144$ пути.

Следующая задача для 5–6-х классов неожиданно оказалась наиболее трудной среди тех, что оценивались в 3 балла.

Задача 8. (*5–6-е классы, № 2, 18%, 22%*) Арина разбирает мамины бусы. Она хочет снять 5 темных бусин. Какое наименьшее количество белых бусин ей потребуется снять для этого?

(А) 2 (Б) 3 (В) 4 (Г) 5 (Д) 6

Чтобы решить эту задачу, достаточно заметить, что, сняв подряд 3 бусины с левого конца нитки и 5 — с правого, мы получим 3 белых бусины и 5 темных. Тем не менее примерно 60% участников обеих параллелей выбрали ответ В, который получается, если снимать бусины только с левого края нитки.

Следующая задача этого варианта, к сожалению, показывает, что более 20% участников не знают, как правильно писать слово «периметр» (даже бессмысленный ответ Г тоже набрал свои 2% голосов).

Задача 9. (*5–6-е классы, № 3, 77%, 80%*) Какое слово написано верно?

(А) перимитр (Б) пириметр
(В) периметор (Г) приметр (Д) периметр

Следующая задача этого варианта оказалась самой сложной среди тех, что оценивались в 4 балла.

Задача 10. (*5–6-е классы, № 17, 11%, 13%*) В 12:00 Петя пошел в соседнюю деревню. Вместе с ним в том же направлении выбежал пес Шарик. Добежав до соседней деревни в 14:30, Шарик повернул обратно и встретил Петю в 15:30. Во сколько раз скорость Шарика больше скорости Пети?

(А) $\frac{4}{3}$ (Б) $\frac{3}{2}$ (В) 2 (Г) $\frac{5}{2}$ (Д) $\frac{7}{3}$

Заметим, что на путь до соседней деревни Шарик потратил 2 часа 30 минут, а на обратную дорогу (до встречи с Петей) он потратил ровно час. Это значит, что его обратный путь составляет $1:2,5=\frac{2}{5}$ от всего расстояния между деревнями и за время от начала прогулки пес пробежал $1\frac{2}{5}=\frac{7}{5}$ расстояния между деревнями, а Петя за то же время прошел только $\frac{3}{5}$ этого расстояния. Таким образом, отношение их скоростей равно $\frac{7}{3}$.

Самым популярным оказался симпатичный, но ни на чем не основанный ответ В: его выбрали примерно треть участников.

Среди задач, оцениваемых в 5 баллов, наиболее сложными в этом варианте оказались следующие две.

Задача 11. (*5–6-е классы, № 28, 16%, 16%*) На острове живет 25 человек: рыцари, которые всегда говорят правду, лжецы, которые всегда лгут, и хитрецы, каждый из которых через раз отвечает на вопросы то правду, то ложь. Каждому жителю острова было задано подряд три вопроса: «Вы рыцарь?», «Вы хитрец?», «Вы лжец?». Ответ «Да» на первый вопрос дали 17 человек, на второй — 12, на третий — 8. Сколько хитрецов на острове?

(А) 4 (Б) 5 (В) 8 (Г) 16
(Д) невозможно определить

Рассмотрим ответы представителей всех «племен»: рыцари ответят «Да» на первый вопрос и «Нет» на все остальные; лжецы ответят «Да» на первые два вопроса и «Нет» на третий. Наконец, хитрецы разобьются на два лагеря: те, кто сначала говорит правду, потом лжет, а потом снова отвечает правду, скажут «Нет» на все три вопроса, те же, кто сначала лжет, потом говорит правду, потом снова лжет, ответят «Да» на все три вопроса. Таким образом, на первый вопрос «Нет» ответили только хитрецы первого типа, следовательно, их ровно $25 - 17 = 8$. На третий вопрос «Да» ответили только хитрецы второго типа, значит, их тоже 8. Таким образом, всего на острове $8 + 8 = 16$ хитрецов.

Наиболее популярным ответом оказался В, его выбрали около 30% участников. По всей видимости, они учли только одну из категорий хитрецов.

Задача 12. (*5–6-е классы, № 29, 15%, 15%*) На какое из чисел А–Д могут различаться суммы цифр двух последовательных целых чисел?

(А) 2011 (Б) 2012
(В) 2013 (Г) 2014 (Д) 2015

Рассмотрим два последовательных числа. Если первое число не оканчивается на 9, то сумма цифр следующего числа будет на 1 больше предыдущего.

Теперь рассмотрим число, которое оканчивается ровно на k девяток. Ясно, что следующее за ним число оканчивается ровно на k нулей, а его $(k+1)$-я справа цифра на 1 больше, чем цифра на этом же месте у первого числа. Легко понять, что при таком переходе сумма цифр уменьшилась на $9k-1$. Это рассуждение показывает, что при переходе от числа N к числу $N+1$ сумма цифр может изменяться только на 1 или на число, дающее остаток 8 при делении на 9. Среди предложенных ответов этому условию удовлетворяет только число $2015 = 9 \cdot 223 + 8$. Такую разность между суммами цифр мы получим, если выберем, например, $N = 999...999$ (всего 224 девятки), а $N + 1 = 10000...0000$ (всего 224 нуля).

Заметим, что около трети участников выбрали ответ Г, наверное, из чисто эстетических соображений.

Разбор заданий для 7–8-х классов начнем со следующей задачи.

Задача 13. (*7–8-е классы, № 2, 7%, 8%*) Марина разбирает бабушкины бусы. Она хочет снять ровно 5 темных бусин. Какое наибольшее количество белых бусин она сможет снять при этом?

(А) 4 (Б) 5 (В) 6 (Г) 7 (Д) 8

Заметим, что, сняв 6 бусин с левого конца нитки и 7 бусин с правого конца, мы получим 8 белых бусин (и 5 темных). Простой перебор показывает, что больше белых бусин при таких условиях снять нельзя.

Эта задача неожиданно оказалась самой трудной в варианте: примерно 65% участников выбрали ответ В. Похоже, они не заметили слова «сможет» и заменили его на «придется».

Следующая задача показывает, что ситуация со словом «параллелограмм» еще хуже, чем со словом «периметр».

Задача 14. (*7–8-е классы, № 3, 67%, 76%*) Какое слово написано правильно?

(А) параллеллограмм (Б) пароллелограмм
(В) параллелограм (Г) паралелаграмм
(Д) параллелограмм

Среди неверных ответов самым популярным оказался В (его выбрали 12% участников обеих параллелей).

Среди задач, оцениваемых в 4 балла, в этих параллелях наиболее трудными оказались две следующие.

Задача 15. (*7–8-е классы, № 19, 11%, 12%*) Если среднее арифметическое двух положительных чисел на 30% меньше большего из этих чисел, то оно больше меньшего из них на

(А) 75% (Б) 70%
(В) 30% (Г) 25% (Д) 20%

Обозначим данные положительные числа a и b (будем считать, что $b > a$). Согласно условию верно равенство $\frac{a+b}{2} = 0,7b$, из которого следует, что $a = 0,4b$ или $b = 2,5a$. Таким образом, $\frac{a+b}{2} = \frac{a+2,5a}{2} = 1,75a$, но это означает, что среднее арифметическое данных нам чисел на 75% больше меньшего из этих чисел.

Конечно, проценты, и все, что с ними связано, — тема традиционно непростая. Примерно треть голосов собрал провокационный ответ Б и еще примерно четверть — ответ В.

Задача 16. (*7–8-е классы, № 20, 9%, 10%*) Из нескольких одинаковых кубиков Вася сложил большой куб и покрасил его грани. Оказалось, что число кубиков с одной покрашенной гранью равно числу кубиков, у которых покрашенных граней нет. Сколько маленьких кубиков использовал Вася?

(А) 27 (Б) 64 (В) 125 (Г) 216 (Д) 512

Пусть N — это количество маленьких кубиков, образующих ребро большого куба. На каждой грани большого куба ровно одну покрашенную грань имеют кубики, не лежащие на «каемке» этой грани, они образуют «слой» из $(N-2)\times(N-2)$ кубиков. Таких слоев у нас шесть, следовательно, всего кубиков с одной покрашенной гранью $6 \times (N-2) \times (N-2)$. С другой стороны, кубики совсем без покрашенных граней находятся внутри большого куба и сами образуют кубик с ребром $N-2$, следовательно, $N-2=6$ и $N=8$. Итак, Вася использовал $8^3 = 512$ маленьких кубиков.

Конечно, задача эта не очень простая и многие участники просто пытались угадать ответ, при этом самым популярным оказался ответ Б, его выбрал каждый третий участник обеих параллелей.

Среди задач, оцениваемых в 5 баллов, в этом варианте самые оживленные обсуждения вызвали следующие две.

Задача 17. (*7–8-е классы, № 26, 27%, 26%*) При умножении натурального числа на 2 сумма цифр не может

(А) остаться прежней
(Б) уменьшиться в два раза
(В) уменьшиться в 4 раза
(Г) уменьшиться в 5 раз
(Д) все события А–Г возможны

Покажем, что все описанные ситуации возможны. Для начала заметим, что если цифра меньше чем 5, то при удвоении числа ее вклад в новую сумму цифр удваивается, вклад цифры 5 уменьшается на 4, цифры 6 — уменьшается на 3, цифры 7 — уменьшается на 2, цифры 8 — уменьшается на 1, а вклад цифры 9 не меняется. Отсюда сразу следует, что числа 9, 6 и 5 служат примерами для случаев А, Б и Г соответственно.

Труднее придумать пример числа, сумма цифр которого при умножении на 2 уменьшается ровно в 4 раза. Это можно делать разными способами: понятно, что следует брать цифру 5 (она сильнее всего уменьшает сумму цифр удвоенного числа) и какую-то другую цифру, которая увеличивает или сохраняет свой вклад при удвоении.

Например, если в исходном числе a пятерок и b единиц (и больше ничего), то в удвоенном числе сумма цифр будет равна $a + 2b$. Попробуем подобрать числа a и b так, чтобы число $5a + b$ было в четыре раза больше числа $a + 2b$. Это значит, что $5a + b = 4(a + 2b)$, или $a = 7b$. Например, при $a = 7$ и $b = 1$ мы получаем число, удовлетворяющее условиям: сумма цифр числа 15 555 555 при удвоении уменьшается ровно в 4 раза.

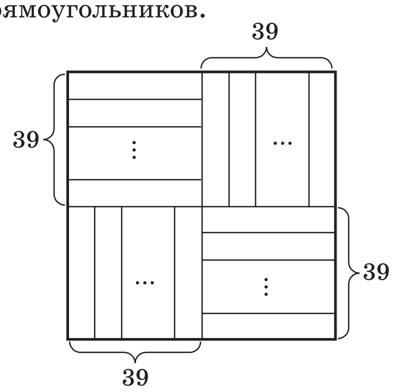
Задача 18. (*7–8-е классы, № 30, 16%, 15%*) Квадрат разрезали на прямоугольники так, что любая прямая, параллельная одной из сторон квадрата и не содержащая сторон прямоугольников, пересекает ровно 40 прямоугольников. На какое наименьшее число прямоугольников мог быть разрезан квадрат?

(А) 80 (Б) 156 (В) 160 (Г) 1600 (Д) 3200

Назовем все прямые, содержащие стороны прямоугольников, на которые разрезан квадрат, «плохими». Рассмотрим горизонтальную прямую, которая лежит выше любой плохой прямой, но ниже верхней стороны квадрата. Она пересекает 40 прямоугольников. Ясно, что это просто прямоугольники, верхняя сторона которых прилежит к стороне квадрата. Теперь рассмотрим горизонтальную прямую, которая располагается ниже всякой плохой прямой. Она тоже пересечет 40 прямоугольников. Заметим, что это 80 разных прямоугольников.

Для прямоугольников, которые пересекаются одной и той же прямой, это очевидно, а если бы нашелся прямоугольник, который пересекают обе рассмотренные прямые, то обе его горизонтальные стороны должны были бы лежать на сторонах квадрата. Но тогда вертикальная прямая, пересекающая его, не пересекала бы никаких других прямоугольников, что противоречит условию. Итак, мы доказали, что есть хотя бы 80 прямоугольников.

Аналогично можно рассмотреть две вертикальные прямые — одну левее всех плохих прямых, другую правее. Они тоже в совокупности пересекают 80 прямоугольников. Однако 4 из них (угловые) мы уже учли, когда подсчитывали прямоугольники, которые пересекаются горизонтальными прямыми. Итак, мы доказали, что прямоугольников должно быть не менее чем 156. На рисунке изображен пример с таким количеством прямоугольников.



Среди простых задач для 9–10-х классов отметим следующую задачу.

Задача 19. (*9–10-е классы, № 4, 37%, 49%*) Сколько цифр содержит десятичная запись числа $\sqrt[7]{20^{14}}$?

(А) 2 (Б) 3 (В) 4 (Г) 7 (Д) 10

Для решения этой задачи достаточно заметить, что $\sqrt[7]{20^{14}} = 20^2 = 400$. Конечно, статистика наводит на грустные размышления: владение простейшей техникой алгебраических преобразований у наших старшеклассников явно не на высоте. А данные по неверным ответам показывают, что как минимум половина участников не решает задачу, а просто пытается угадать ответ.

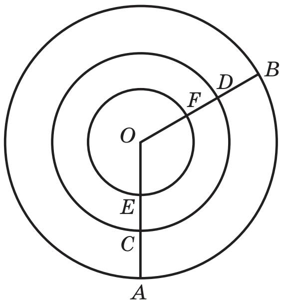
Среди задач, оцениваемых в 4 балла, отметим следующие.

Задача 20. (*9–10-е классы, № 11, 22%, 27%*) На глобусе нарисовали 10 параллелей (окружностей) и 10 меридианов (полуокружностей). На сколько частей они делят поверхность глобуса?

(А) 20 (Б) 21 (В) 100 (Г) 110 (Д) 121

Для решения этой задачи достаточно заметить, что 10 меридианов делят глобус на 10 «долек», а 10 параллелей делят каждую из этих долек на 11 частей. Всего получаем 110 частей. Эта задача содержит классическую «ловушку»: 10 точек делят отрезок не на 10, а на 11 частей. В эту ловушку попались примерно 40% участников обеих параллелей, которые выбрали ответ В.

Задача 21. (*9–10-е классы, № 13, 24%, 28%*) На рисунке изображены три концентрические окружности с центром O. Угол AOB равен 120°. Какой из следующих путей самый короткий?



(А) $\cup AB$ (Б) $AC + \cup CD + DB$
(В) $AE + \cup EF + FB$ (Г) $AO + OB$
(Д) невозможно определить

Заметим, что все предложенные ответы, кроме Г, содержат дуги с центральным углом в 120°, но длина такой дуги равна третьей части от длины окружности. А поскольку длина окружности равна $2\pi R$, где R — радиус окружности, длина этой дуги больше удвоенного радиуса окружности (так как π больше 3). Таким образом, каждая из этих дуг длиннее, чем сумма двух радиусов, проведенных к концам этой дуги, следовательно, самый короткий путь — это сумма радиусов AO и OB.

Около 30% участников обеих параллелей выбрали ответ А, скорее всего, они просто прикинули «на глазок» и решили, что одна дуга короче суммы двух отрезков.

Среди задач, оцениваемых в 5 баллов, отметим следующие, которые активно обсуждались участниками конкурса.

Задача 22. (*9–10-е классы, № 22, 25%, 27%*) На олимпиаде было предложено 10 задач. Председатель жюри сообщил, что не каждый участник не решил не более трех задач. Что это означает?

(А) каждый участник решил не более трех задач
(Б) каждый участник решил менее семи задач
(В) кто-то из участников решил не более трех задач
(Г) кто-то из участников решил менее семи задач
(Д) никто из участников не решил более семи задач

Слова «не решил не более трех задач» означают «решил не менее семи задач» (всего задач было 10). Слова «не каждый участник сделал что-то» означают: что хоть один этого не сделал. Итого, эта фраза означает: кто-то из участников решил менее семи задач.

Как и предполагалось, гораздо популярнее верного был ответ В: его выбрали 38% участников из обеих параллелей.

Задача 23. (*9–10-е классы, № 28, 22%, 23%*) Все натуральные числа, полученные из числа 1234567 перестановкой цифр, включая это число, выписали в возрастающем порядке. Каким числом заканчивается первая половина этого списка?

(А) 3765421 (Б) 4123567
(В) 4352617 (Г) 4376512 (Д) 4376521

Заметим, что в списке находится 7! чисел, поэтому его первая половина содержит ровно

$$\frac{1}{2}\cdot 7! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot \frac{1}{2} = 6!\cdot 3{,}5 \text{ чисел.}$$

У первых 6! чисел нашего списка на первом месте стоит 1 (остальные 6 цифр переставляются всеми возможными способами), у следующих 6! чисел на первом месте стоит 2, у следующих 6! чисел — 3. Следовательно, первая цифра искомого числа равна 4, и теперь нам надо найти, где заканчивается первая половина списка чисел, начинающихся с 4. В этой половине $\frac{1}{2}\cdot 6! = 3\cdot 5!$ чисел,из них первые 5! начинаются с 41, следующие — с 42, следующие — с 43. Последним в этой половине будет самое большое из чисел, начинающихся с 43, то есть 4376521.

В завершение нашего обзора напомним, что полный вариант всех заданий и ответы к ним можно найти на сайте www.mathkang.ru, там же можно заказать брошюру с заданиями, их решениями и подробными статистическими данными о конкурсе. Кроме того, в гостевой книге сайта можно высказать свое мнение о задачах и о конкурсе в целом: наш оргкомитет очень заинтересован в различных формах обратной связи.

ФОТО НА КОНКУРС

А кое-кто не хочет думать сам…

Автор: Н.В. Шапошникова,
учитель математики гимназии № 7,
г. Махачкала,
Республика Дагестан


Фото Л. Розловой

ооо

Я сразу вынул из конверта
Штрих-код к своим грядущим баллам;
Я расчертил крестами лето,
В тест вылив знаний Ниагару.

В квадратиках простого бланка
Прочёл я зовы пяти вузов,
А вы смогли бы также гладко
Избавиться от знаний груза?

18.05.12

X ЗАОЧНЫЙ КОНКУРС УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

Что требуется от участников конкурса? Обычные учительские навыки — умение решать задачи и находить ошибки в решениях. О результатах заочного конкурса 2014 года читайте в электронном приложении.

Что дает участие в конкурсе? Победители и призеры конкурса, как и в предыдущие годы, награждаются дипломами журнала «Математика» и учебно-методической литературой по математике. Участники, не ставшие победителями или призерами, но показавшие достойные результаты, получат сертификаты участников.

Кроме того, победители и призеры конкурса, которые в следующем учебном году будут иметь учебную нагрузку не менее 9 часов в неделю, будут традиционно приглашены к участию в XII очном конкурсе, который пройдет в Москве в сентябре 2015 года.

Что нужно делать? Вам предлагается выполнить девять заданий, разбитых на три блока: математический (задания № 1–5), методический (задания № 6–8) и аналитический (задание 9).

Работы (не ксерокопированные и не сканированные) с пометкой «На конкурс» следует выслать по адресу: редакция журнала «Математика. Первое сентября»,, ул. Киевская, д. 24, Москва, 121165.

Срок отправки работ — до 20 апреля 2015 года (по почтовому штемпелю).

Вместе с работой необходимо выслать заполненный бланк заявки.

К участию допускаются и коллективные работы (в составе коллектива авторов — не более трех человек).

Всем участникам конкурса будет обеспечена анонимность участия и объективность проверки.

Приглашаем вас к участию в конкурсе и желаем успеха!

I. Решите задачи

1. Какую часть сотрудников фирмы надо уволить, чтобы при уменьшении фонда заработной платы на 20% повысить среднюю зарплату оставшихся сотрудников на 20%?

2. На плоскости отметили 8 точек. Каждую пару точек соединили отрезком и к каждому такому отрезку построили серединный перпендикуляр. Могло ли оказаться так, что на каждом построенном перпендикуляре лежат ровно две отмеченные точки?

3. Известно, что при любых целых значениях x выражение $ax^3 + bx^2 + cx$ принимает целые значения. Докажите, что $6a$ — целое число.

4. В шахматном турнире участвуют 2014 игроков. В каждом туре они произвольным образом разбиваются на пары так, чтобы

К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru (Условия и решения заданий конкурса).

шахматисты в каждой паре ранее в этом турнире между собой не играли. Турнир заканчивается, когда такое разбиение провести невозможно. Какое наибольшее количество туров можно гарантированно провести в таком турнире?

5. В равнобедренном треугольнике ABC проведена окружность с центром C, касающаяся основания AB, которая пересекает боковые стороны в точках A' и B'. В образовавшейся трапеции $AA'B'B$ проведен отрезок DE, параллельный ее основаниям и разбивающий ее на две подобные трапеции. Сравните длину DE и длину дуги окружности, лежащей внутри трапеции.

II. Методический блок

В предложенных текстах (№ 6–8) могут содержаться математические ошибки (как в условиях «задач», так и в «ответах» и «решениях»). Если некорректно условие «задачи», то объясните, почему это так. Если неверно только «решение», то укажите все ошибки и приведите верное решение.

6. «Задача». При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x, \\ x^2 + y^2 + a^2 = 2x + 2ay \end{cases}$$

имеет ровно одно решение?

«Ответ»: при $a = 0{,}25$.

«Решение». Подставив значение $x^2 - 2x$ из первого уравнения во второе, получим: $y^2 + a^2 - 2ay + y = 0$. Рассмотрим это уравнение как квадратное относительно y, тогда

$$y^2 + y(1 - 2a) + a^2 = 0.$$

Для того, чтобы решение было единственным, потребуем равенства нулю дискриминанта:

$$D = 1 - 4a + 4a^2 - 4a^2 = 1 - 4a = 0,$$

откуда $a = 0{,}25$.

7. «Задача». Сколькими способами можно выбрать из полной колоды (52 карты) 10 карт так, чтобы среди них был хотя бы один туз?

«Ответ»: $4C_{51}^9$.

«Решение». Поскольку требуется туз, то сначала выберем его, это можно сделать четырьмя способами. Затем достаточно выбрать произвольные 9 карт из 51. Количество способов, которыми это можно сделать, равно C_{51}^9. Так как оба выбора происходят независимо, то искомое количество способов равно $4C_{51}^9$.

8. «Задача». Даны три окружности, α, β и γ. Никакие две из этих окружностей не лежат в одной плоскости, но каждые две из них имеют ровно две общие точки. Докажите, что все три окружности принадлежат одной сфере.

«Решение». Пусть окружности α и β пересекаются в точках P и Q. Докажем, что существует сфера, на которой лежат обе окружности. Действительно, каждая окружность однозначно задается тремя точками, то есть окружность α задается точками, A, P и Q, а окружность β — точками B, P и Q. Значит, пара окружностей задается четырьмя точками, A, B, P и Q, а через любые четыре точки пространства можно провести сферу. Третья окружность γ имеет с этой сферой четыре общие точки (две — с α, и две — с β), поэтому γ принадлежит сфере.

III. Аналитический блок

9. При изучении темы «Арифметический квадратный корень» рассматриваются два тождества:

1) $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$; 2) $\sqrt{x^2} = |x|$.

1. Запишите все известные вам аналогичные пары тождеств из других разделов школьного курса.
2. Что общего у всех пар тождеств такого вида?
3. Чем принципиально различаются два тождества в каждой паре и в связи с чем возникает это различие?
4. Какие общие свойства функций используются при доказательстве тождества 2 и ему аналогичных тождеств в других парах?

Заявка участника конкурса

Форма участия (нужное подчеркнуть): индивидуальная / коллективная		
Фамилия		
Имя		
Отчество		
Домашний адрес		Индекс
Телефон		
e-mail		
Место работы		
Должность		
Недельная нагрузка в 2014/2015 учебном году		

РЕШАЕМ НЕРАВЕНСТВА

С. ШЕСТАКОВ,
isser@yandex.ru
г. Москва

ооо

Ах, ЕГЭ ты моё, ах, ЕГЭ!
Потому, что учился я, что ли,
Я узнал очень многое в школе,
Чтоб пробелы заполнить в тебе.
Ах, ЕГЭ ты моё, ах, ЕГЭ.

Потому, что учился я, что ли,
Что учебник открыл много раз,
Сколько б трюков ЕГЭ ни припас,
Он знакомым мне будет до боли.
Потому, что учился я, что ли.

Я узнал очень многое в школе:
Теоремы, слова, падежи,
Даты, карты, устойчивость лжи;
Изучил и законы, и роли.
Я узнал очень многое в школе.

Про объём разных знаний во мне
По ответам моим догадайся.
Поскорее, ЕГЭ, получайся,
Расскажи в своих баллах стране
Про объём разных знаний во мне.

Ах, ЕГЭ ты моё, ах, ЕГЭ!
На экзамен ты чем-то похоже,
Только он объективней и строже,
И скучает, возможно, по мне...
Ах, ЕГЭ ты моё, ах, ЕГЭ.

20.05.12

Этой статьей открывается цикл публикаций, посвященных неравенствам и методам их решения. Цикл состоит из двух частей. В первой части приводятся основные сведения о неравенствах и методах их решения, общие для всех неравенств — вне зависимости от их принадлежности к той или иной функционально-алгебраической линии школьного курса математики. Во второй части изложенные методы применяются к решению неравенств каждой из таких линий, при этом рассматриваются как простейшие для каждой линии неравенства, так и довольно трудные, что позволяет учащимся 9–11-х классов подготовиться к экзамену по математике любого уровня сложности. Эта структура позволит использовать материалы цикла как при подготовке и проведении обобщающего повторения, так и во время уроков и факультативов. Большое число примеров и упражнений с ответами, а также диагностических работ (во второй части цикла) позволит учителю при необходимости индивидуализировать обучение или повторение и существенно пополнить методическую копилку.

Основные понятия и факты

В школьном курсе математики можно выделить шесть следующих основных числовых и функционально-алгебраических линий (в порядке их появления в учебниках), в соответствии с которыми и структурирована основная часть статей этого цикла:

- целые числа, степени с натуральным показателем, целые алгебраические выражения (многочлены), целые рациональные функции;
- дроби, степени с целым отрицательным показателем, алгебраические дроби, дробно-рациональные функции;
- корни, степени с дробным показателем, иррациональные алгебраические выражения, иррациональные функции;
- тригонометрические выражения, тригонометрические функции;
- степени с действительным показателем, показательные выражения, показательная функция;
- логарифмы, логарифмические выражения, логарифмическая функция.

Чтобы классификацию сделать однозначной и облегчить поиск нужных задач, условимся, что хронология изучения темы является ключевым признаком классификации, то есть если, например, в некотором уравнении или неравенстве переменная содержится и под знаком корня, и под знаком логарифма, то будем считать его логарифмическим, а не иррациональным, поскольку логарифмы изучаются позже корней.

Тем самым любое уравнение или неравенство школьного курса математики можно однозначно отнести к одному из следующих типов в соответствии с перечисленными функционально-алгебраическими линиями: целое рациональное (слово «рациональное» в дальнейшем для экономии места будем опускать), дробно-рациональное, иррациональное, тригонометрическое, показательное, логарифмическое. Прежде чем переходить к изложению общих методов решения неравенств, напомним основные понятия, определения и факты, связанные с неравенствами и уравнениями (решение уравнений часто является составной частью решения неравенств).

Значение любого алгебраического выражения $f(x)$ при любом допустимом значении переменной x либо положительно (в этом случае пишут $f(x) > 0$), либо отрицательно (в этом случае пишут $f(x) < 0$), либо равно нулю (в этом случае пишут $f(x) = 0$). Любая математическая формула является некоторым утверждением, предложением, написанным на математическом языке. Утверждения $f(x) > 0$ (читается: $f(x)$ больше нуля), $f(x) < 0$ (читается: $f(x)$ меньше нуля), $f(x) \geq 0$ (читается: $f(x)$ больше или равно нулю или $f(x)$ не меньше нуля) и $f(x) \leq 0$ (читается: $f(x)$ меньше или равно нулю или $f(x)$ не больше нуля) называют неравенствами с одной переменной, а утверждение $f(x) = 0$ (читается: $f(x)$ равно нулю) — уравнением с одной переменной. Неравенства $f(x) > 0$ и $f(x) < 0$ называются *строгими*, а неравенства $f(x) \geq 0$ и $f(x) \leq 0$ — *нестрогими*. Заметим, что правая часть неравенства (уравнения) может быть отличной от нуля. В этом случае строгое неравенство записывается в виде $f(x) > g(x)$ или $f(x) < g(x)$, нестрогое неравенство — в виде $f(x) \geq g(x)$ или $f(x) \leq g(x)$, а уравнение — в виде $f(x) = g(x)$.

Число называется *решением* неравенства (*корнем* уравнения), если при его подстановке вместо переменной в данное неравенство (уравнение) получается верное числовое неравенство (равенство).

Решить неравенство (*уравнение*) — значит найти множество всех его решений (корней).

Поэтому в ответе предпочтительней указывать именно множества чисел, используя для записи нескольких непересекающихся множеств знак объединения «$\cup$» либо просто точку с запятой. В этом смысле использование в качестве ответа, например, записи $x > 1$ менее удачно по сравнению с записью $(1; +\infty)$, поскольку $x > 1$ является неравенством, а $(1; +\infty)$ — множеством его решений.

Если неравенство (уравнение) не имеет ни одного решения (корня), то множество его решений (корней) не содержит ни одного элемента (такое множество называется пустым). Подобные ситуации время от времени встречаются — в том числе и на экзаменах, к ним надо быть готовым. В таких случаях для записи ответа используют символ пустого множества «$\varnothing$» либо просто пишут «Решений нет». Ответ в форме «$x \in \varnothing$» является математически не вполне грамотным, поскольку пустое множество, по определению, не содержит ни одного элемента. Для записи конечных числовых множеств используют фигурные скобки «$\{\,\}$», в которых через точку с запятой (не через запятую — чтобы исключить путаницу, поскольку запятой отделяются дробные части десятичных дробей) записывают числа (обычно в порядке возрастания), являющиеся решениями неравенства (корнями уравнения).

Важной частью общей математической культуры, необходимой для решения неравенств, является умение делать логический перебор, проводить доказательные рассуждения, отвечать на вопросы о знаках и числе решений неравенства даже в тех случаях, когда решать неравенство не требуется или найти решение не представляется возможным. Развитию и тренировке навыков логического перебора, умения анализировать условие и делать обоснованные умозаключения и выводы, находить стратегию решения посвящена значительная часть упражнений этой вводной статьи.

Пример 1. Сеня сказал, что написанное на доске неравенство имеет менее 11 целочисленных решений, а Веня — что менее 12. Учитель ответил, что прав только один из них. Сколько целочисленных решений имеет это неравенство?

Решение. Если утверждение Сени истинно и неравенство имеет менее 11 целочисленных решений, то и утверждение Вени истинно, что противоречит условию истинности только одного из утверждений. Значит, утверждение Сени ложно, а утверждение Вени истинно, то есть неравенство имеет не менее 11, но менее 12 целочисленных решений. Единственное целое число, отвечающее такому требованию, это 11.

Ответ: 11.

Пример 2. Неравенство $\dfrac{59}{\sqrt{4x^2+7}} > \dfrac{47}{\sqrt{5x^2+9}}$:

1) не имеет решений;
2) справедливо при всех $x \neq 0$;
3) справедливо при любом действительном x;
4) справедливо только при $x = 0$.

Указать номера истинных утверждений.

Решение. Числитель дроби в левой части неравенства больше числителя дроби в правой части неравенства, а знаменатель меньше знаменателя в правой части при любом значении переменной. Поэтому дробь в левой части неравенства больше дроби в правой его части. Следовательно, истинно утверждение 3.

Ответ: 3.

Пример 3. Указать номера тех неравенств, которые не имеют отрицательных решений:

1) $(x+2)^2(7x^{18}-9x^5-5)\ge 0$;
2) $2x^2-7x+6<0$;
3) $2+7x^8-18x^{17}<0$;
4) $x^2-56\,789x-98\,765\le 0$;
5) $x^2-7777x+77\,777<0$.

Решение. Рассмотрим последовательно каждое из пяти данных неравенств. Число $x=-2$ является, очевидно, решением неравенства 1. Следовательно, это неравенство имеет по крайней мере одно отрицательное решение. Квадратное неравенство 2 легко решить стандартным способом; его решением является промежуток (1,5; 2). Следовательно, это неравенство не имеет отрицательных решений. Неравенство 3 едва ли возможно решить школьными методами, но ответ на вопрос задачи этого и не требует. Действительно, если предположить, что какое-то отрицательное число является решением этого неравенства, получим противоречие: ведь при любом отрицательном значении переменной левая часть неравенства заведомо принимает только положительные значения. Следовательно, это неравенство не имеет отрицательных решений. Решить квадратное неравенство 4, разумеется, можно, но это потребует несоразмерных ему арифметических подвигов. Поскольку находить решения вовсе не обязательно, попробуем порассуждать. Графиком квадратичной функции $y=x^2-56\,789x-98\,765$ является парабола, ветви которой направлены вверх. Так как $y(0)=-98\,765<0$, этот график пересекает ось абсцисс в двух точках, расположенных по разные стороны от начала координат, и при любом значении переменной, заключенном между ними, лежит ниже оси абсцисс. Следовательно, неравенство 4 имеет отрицательные решения. Этот же результат можно было получить, используя формулы Виета. Воспользуемся ими для ответа на вопрос о существовании отрицательных решений у неравенства 5. Если дискриминант квадратного трехчлена в левой части неравенства 5 неположителен, то оно не имеет решений (в том числе и отрицательных). Если дискриминант положителен, то решением неравенства является интервал, концы которого — корни квадратного трехчлена $x^2-7777x+77\,777$. Из формул Виета следует, что оба корня этого трехчлена (если они существуют) положительны, поскольку их произведение и сумма положительны. Поэтому и при положительном дискриминанте левой части неравенство 5 не имеет отрицательных решений. Заметим, и в случае неравенства 2 можно было использовать рассуждения, аналогичные предыдущим.

Ответ: 2; 3; 5.

Навыки, полученные при решении подобных задач, помогут находить оптимальные пути решения, рассматривать меньшее число случаев, анализировать полученные ответы на возможные ошибки и т.п.

Если нужно найти все значения переменной, каждое из которых является как решением неравенства $f(x)>0$ (уравнения $f(x)=0$), так и решением неравенства $g(x)>0$ (уравнения $g(x)=0$), то говорят, что задана *система неравенств* $f(x)>0$ и $g(x)>0$ (*система уравнений* $f(x)=0$ и $g(x)=0$), а записывают и систему неравенств, и систему уравнений с помощью фигурной скобки: $\begin{cases}f(x)>0,\\ g(x)>0\end{cases}$ — система неравенств, $\begin{cases}f(x)=0,\\ g(x)=0\end{cases}$ — система уравнений. Знаки неравенств системы могут быть любыми из четырех возможных, правые части неравенств (уравнений) системы могут быть отличны от нуля, система может состоять из трех и более неравенств (уравнений), содержать наряду с неравенствами и уравнения (такие системы иногда называют *смешанными*).

Решить систему неравенств (уравнений) — значит найти множество ее решений.

В большинстве случаев (но не всегда!) для этого ищут множество решений каждого из неравенств системы, а затем — пересечение (общую часть) полученных множеств. Что касается систем уравнений с одной переменной, здесь часто можно обойтись без решения всех уравнений системы, решив только одно — наиболее простое — из ее уравнений и выполнив проверку найденных корней путем их подстановки в остальные уравнения системы. Разумеется, это касается только систем уравнений с одной переменной; для систем уравнений с двумя и более переменными такой прием «не работает».

Пример 4. Система неравенств

$$\begin{cases}x\ge -789,\\ 789x^{73}+89x^{72}+9<0:\end{cases}$$

1) не имеет решений;
2) не имеет положительных решений;
3) не имеет отрицательных решений;
4) имеет и отрицательные, и положительные решения;
5) выполняется при любом действительном x.

Указать номера истинных утверждений.

Решение. Понятно, что решение второго неравенства данной системы едва ли возможно. Попробуем доказать или опровергнуть данные утверждения, подобрав, где необходимо, соответствующие примеры. Ясно, что, например, $x = -1$ является решением каждого из неравенств системы. Поэтому утверждения 1 и 3 ложны. Далее, при любом положительном значении переменной левая часть второго неравенства системы положительна. Поэтому это неравенство не имеет положительных решений. Следовательно, и вся система не имеет положительных решений. Значит, утверждения 4 и 5 ложны, а утверждение 2 истинно.

Ответ: 2.

Пример 5. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} x^2 + \left(x^2 - 5\right)\left(x^2 - 4\right) \le 4, \\ x^{27} + 2x^{26} + 7x + 13 \le 0. \end{cases}$$

Решение. О втором неравенстве данной системы можно сказать только одно: оно не имеет ни одного неотрицательного решения, поскольку при любом неотрицательном значении переменной его левая часть положительна. Поэтому решениями второго неравенства системы могут быть только отрицательные числа. Решим первое неравенство, перенеся 4 в левую часть и выполнив разложение на множители:

$$x^2 - 4 + (x^2 - 5)(x^2 - 4) \le 0,$$

откуда

$$(x^2 - 4)(x^2 - 5 + 1) \le 0, \ (x^2 - 4)^2 \le 0.$$

Если $x^2 - 4 \ne 0$, то $(x^2 - 4)^2 > 0$ и первое неравенство не имеет решений. Значит, $x^2 - 4 = 0$, откуда $x = \pm 2$. Таким образом, первое неравенство данной системы имеет ровно два решения. Поскольку никакое положительное число не может быть решением второго неравенства системы, то ее единственным возможным решением является $x = -2$. При $x = -2$ левая часть второго неравенства системы принимает вид

$$(-2)^{27} + 2(-2)^{26} + 7(-2) + 13 =$$
$$= -2^{27} + 2^{27} - 14 + 13 = -1.$$

Значит, $x = -2$ является решением и второго неравенства системы.

Ответ: -2.

Замечание. В некоторых пособиях, издаваемых подготовительными отделениями университетов и других вузов (но не только), можно встретить записи вида $\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) = 0, \\ x \in [a;\ b], \end{cases}$ то есть записи, в которых наряду с уравнениями и неравенствами в систему включаются и другие утверждения (в приведенном примере: $x \in [a;\ b]$). С формальной точки зрения такую запись именно в пособиях для средней школы следует признать не вполне удачной: ведь ни в одном из учебников не вводится понятие системы утверждений или высказываний, и, несмотря на то, что интуитивно понятно, какой смысл вкладывается в подобные записи, их лучше избегать, заменяя утверждения вида $x \in [a;\ b]$ неравенствами (в данном случае, неравенством $a \le x \le b$).

Если нужно найти все значения переменной, каждое из которых является или решением неравенства $f(x) > 0$ (уравнения $f(x) = 0$), или решением неравенства $g(x) > 0$ (уравнения $g(x) = 0$), то говорят, что задана *совокупность неравенств* (*совокупность уравнений*), а записывают и совокупность неравенств, и совокупность уравнений с помощью квадратной скобки: $\left[\begin{array}{l} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{array}\right.$ — совокупность неравенств, $\left[\begin{array}{l} f(x) = 0 \\ g(x) = 0 \end{array}\right.$ — совокупность уравнений. Знаки неравенств совокупности могут быть любыми из четырех возможных, правые части неравенств (уравнений) совокупности могут быть отличны от нуля, совокупность может состоять из трех и более неравенств (уравнений), содержать наряду с неравенствами и уравнения.

Решить совокупность неравенств (уравнений) — значит найти множество решений каждого из неравенств (уравнений) совокупности, а затем найти объединение полученных множеств. Итак, совсем коротко: система — пересечение, совокупность — объединение. Поэтому, например, высказывание $x \in [a;\ b]$ можно заменить системой неравенств $\begin{cases} x \ge a, \\ x \le b, \end{cases}$ а высказывание $x \in (-\infty;\ a] \cup [b;\ +\infty)$ можно заменить совокупностью неравенств $\left[\begin{array}{l} x \le a \\ x \ge b. \end{array}\right.$

При каждом допустимом значении переменной значение любого алгебраического выражения является числом, поэтому далее для краткости и экономии места будем иногда — если это не противоречит смыслу предложения — вместо словосочетания «значение выражения $g(x)$» использовать словосочетание «число $g(x)$». Например, при любом допустимом значении переменной из двух чисел $f(x) - 5$ и $f(x) - 8$ меньшим, очевидно, является число $f(x) - 8$. Произведение двух чисел отрицательно в том и только том случае, если это числа разных знаков, то есть меньшее из этих чисел отрицательно, а большее — положительно. Поэтому неравенство

$(f(x)-5)(f(x)-8)<0$ можно заменить системой неравенств $\begin{cases} f(x)-8<0, \\ f(x)-5>0. \end{cases}$ Произведение двух чисел положительно в том и только том случае, если это числа одного знака, то есть если меньшее из этих чисел положительно (тогда и большее число — положительно) или большее из этих чисел отрицательно (тогда и меньшее число — отрицательно). Поэтому неравенство $(f(x) - 5)(f(x) - 8) > 0$ можно заменить совокупностью неравенств

$$\left[\begin{array}{l} f(x)-8>0 \\ f(x)-5<0. \end{array}\right.$$

Разумеется, такие замены возможны только при допустимых значениях переменной.

Определение 1. Областью допустимых значений (ОДЗ) уравнения или неравенства будем называть множество всех значений переменной, при каждом из которых определены (имеют смысл) все алгебраические выражения в каждой из двух частей уравнения или неравенства. Областью допустимых значений (ОДЗ) системы уравнений или неравенств будем называть пересечение областей допустимых значений каждого из уравнений или неравенств системы, то есть множество всех значений переменной, при каждом из которых определены (имеют смысл) все алгебраические выражения в каждой из двух частей каждого уравнения или неравенства системы.

Из шести основных типов алгебраических выражений школьного курса несколько требуют ограничений на переменную. Эти ограничения и определяют ОДЗ уравнения, неравенства, системы или совокупности.

Таблица 1

Выражение	**Ограничение**
Алгебраическая дробь $\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$	$g(x)\neq 0$
Иррациональное алгебраическое $\sqrt[2n]{f(x)}$	$f(x)\geq 0$
Степень с дробным показателем $(f(x))^{\frac{m}{n}}$	$f(x)\geq 0$ при $\dfrac{m}{n}>0$, $f(x)>0$ при $\dfrac{m}{n}<0$
Тригонометрическое: $\operatorname{tg} f(x)$, $\operatorname{ctg} f(x)$, $\arcsin f(x)$ и $\arccos f(x)$	$\cos f(x)\neq 0$, $\sin f(x)\neq 0$, $\lvert f(x)\rvert\leq 1$
Логарифмическое $\log_{g(x)} f(x)$	$\begin{cases} f(x)>0, \\ g(x)>0, \\ g(x)\neq 1 \end{cases}$

В некоторых задачах именно исследование ОДЗ дает ключ к решению, и без такого исследования решить задачу попросту невозможно.

Пример 6. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} 13^{x-6}+\ln^2(x-7)\geq 13, \\ 7+\sqrt{13-x}\geq 7^{x-12}. \end{cases}$$

Решение. Поскольку $\ln^2(x-7)$ определен при $x>7$, а $\sqrt{13-x}$ — при $x\leq 13$, ОДЗ данной системы неравенств — промежуток $(7;\ 13]$. Если $x>7$, то $13^{x-6}>13$, а $\ln^2(x-7)\geq 0$. Поэтому $13^{x-6}+\ln^2(x-7)>13$ и первое неравенство данной системы выполнено при любом $x>7$. Если $x\leq 13$, то $\sqrt{13-x}\geq 0$, $7+\sqrt{13-x}\geq 7$, а $7^{x-12}\leq 7$. Поэтому второе неравенство данной системы выполнено при любом $x\leq 13$. Таким образом, именно ОДЗ данной системы неравенств является ее решением.

Ответ: $(7;\ 13]$.

Пример 7. Решить неравенство

$$x^2+\sqrt{x^2-81}\leq 81+\sqrt{x^2-81}.$$

Решение. Левая и правая части неравенства определены при условии неотрицательности подкоренного выражения, то есть при $x^2-81\geq 0$, откуда $x^2\geq 81$. При допустимых значениях переменной неравенство приводится к виду $x^2\leq 81$. Приходим к системе $\begin{cases} x^2\geq 81, \\ x^2\leq 81, \end{cases}$ откуда $x^2=81$ и $x=\pm 9$.

Ответ: ± 9.

Замечание. Как видно из рассмотренного примера, в некоторых случаях можно обойтись без формального решения неравенств, задающих ОДЗ. Как правило, это применимо к задачам, в которых ОДЗ нужна преимущественно для отбора корней уравнения или — в некоторых случаях — решений неравенства.

В варианте ЕГЭ по математике за верное решение системы двух неравенств часто дается три первичных балла: по баллу за правильное решение каждого из неравенств системы и третий балл — за правильно найденное решение всей системы. Однако существуют системы неравенств, для которых нельзя решить одно из неравенств системы (или даже нельзя найти множество решений ни одного из неравенств системы), а множество решений всей системы найти, тем не менее, удается.

Определение 2. Если каждое решение первого неравенства является и решением второго, то второе неравенство называется *следствием* первого. Аналогично, если каждый корень первого уравнения является и корнем второго, то второе уравнение называется *следствием* первого.

Из этого определения вытекает, что множество корней данного уравнения содержится в множестве корней уравнения-следствия. Перейдя от данного уравнения к уравнению-следствию, найдя корни последнего и проверив, какие из них являются корнями данного (такая проверка осуществляется непосредственной подстановкой найденных корней в данное уравнение), можно найти все корни данного уравнения. Корни уравнения-следствия (решения неравенства-следствия), не являющиеся корнями данного уравнения (решениями данного неравенства), часто называют посторонними корнями (решениями). Таким образом, одним из методов решения уравнений является переход к уравнению-следствию, который при записи решения обозначается стрелкой «⇒». Переход к уравнению-следствию, как правило, связан с расширением ОДЗ, которое обычно происходит после какого-либо алгебраического преобразования: возведения в квадрат, освобождения от знаменателя, логарифма или модуля. Вместо непосредственной подстановки найденных корней в данное уравнение можно подставлять корни лишь в неравенства, невыполнение которых и приводит к появлению посторонних корней.

Таблица 2

Данное уравнение	**Уравнение-следствие**	**Проверяемые неравенства**
$\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$	$f(x)=0$	$g(x)\neq 0$
$\sqrt{f(x)}=g(x)$	$f(x)=(g(x))^2$	$g(x)\geq 0$ (неравенство $f(x)\geq 0$, задающее ОДЗ данного уравнения, проверять не нужно: оно выполняется для всех найденных значений переменной, поскольку при каждом из них $f(x)=g^2(x)$, а $g^2(x)\geq 0$)
$\log_{a(x)} f(x)=b$	$f(x)=(a(x))^b$	$a(x)>0$, $a(x)\neq 1$ (неравенство $f(x)>0$ проверять не нужно: оно следует из того, что $a(x)>0$, и, значит, $f(x)=(a(x))^b>0$)
$\lvert f(x)\rvert=g(x)$	$f(x)=\pm g(x)$	$g(x)\geq 0$

Для неравенств рекомендовать аналогичный метод решения (переход к неравенству-следствию), как правило, нельзя: число корней уравнения в большинстве случаев конечно (именно это позволяет выполнить проверку и отобрать корни данного уравнения из множества корней уравнения-следствия), число решений неравенства, как правило, бесконечно, и подобную проверку выполнить просто невозможно. Однако в некоторых случаях именно переход к неравенству-следствию помогает решить задачу. В таких случаях, как уже отмечалось, невозможно найти решение одного (а иногда и каждого) из неравенств системы, но решение всей системы найти, тем не менее, возможно, причем такую возможность дает именно переход к неравенству-следствию.

Пример 8. Решить систему неравенств

$$\begin{cases}\sqrt{x^{69}-3x^{67}-\sqrt{3}x+78}\leq 6x^2-9,\\ \sqrt{x^{69}-3x^{67}-\sqrt{3}x+78}\geq x^4.\end{cases}$$

Решение. Если $a\leq b$ и $a\geq c$, то $c\leq b$. В нашем случае

$$a=\sqrt{x^{69}-3x^{67}-\sqrt{3}x+78},\ b=6x^2-9,\ c=x^4.$$

Следовательно,

$$x^4\leq 6x^2-9,\ \ x^4-6x^2+9\leq 0,\ \ (x^2-3)^2\leq 0.$$

Если $x^2-3\neq 0$, то $(x^2-3)^2>0$. Поэтому полученное неравенство выполняется, только если $x^2=3$, откуда $x=\pm\sqrt{3}$. Таким образом, если данная система имеет решения, то этими решениями могут быть только числа из множества $\left\{-\sqrt{3};\ \sqrt{3}\right\}$. Остается выполнить проверку. Пусть $x=\sqrt{3}$. Тогда правая часть каждого из неравенств системы равна 9. Найдем значение подкоренного выражения:

$$\left(\sqrt{3}\right)^{69}-3\cdot\left(\sqrt{3}\right)^{67}-\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}+78=$$
$$=\left(\sqrt{3}\right)^{69}-\left(\sqrt{3}\right)^{69}-3+78=75.$$

Поскольку $\sqrt{75}<9$, первое неравенство системы выполнено, а второе — нет. Значит, $x=\sqrt{3}$ не является решением данной системы. Пусть $x=-\sqrt{3}$. Тогда правая часть каждого из неравенств системы равна 9. Найдем значение подкоренного выражения:

$$\left(-\sqrt{3}\right)^{69}-3\cdot\left(-\sqrt{3}\right)^{67}-\sqrt{3}\cdot\left(-\sqrt{3}\right)+78=$$
$$=-\left(\sqrt{3}\right)^{69}+\left(\sqrt{3}\right)^{69}+3+78=81.$$

Поскольку $\sqrt{81}=9$, оба неравенства системы выполнены. Значит, $x=-\sqrt{3}$ является решением данной системы.

Ответ: $\left\{-\sqrt{3}\right\}$.

Замечание. Почленное сложение двух неравенств возможно, только если это неравенства одного знака. При таком сложении получается неравенство, являющееся следствием данных неравенств. Аналогично, при почленном сложении двух уравнений получается уравнение, являющееся следствием данных. Поэтому решения неравенства (корни уравнения), полученного почленным сложением двух данных, должны быть проверены подстановкой в каждое из данных неравенств (уравнений) либо неравенство (уравнение), являющееся следствием данных, должно быть включено в данную систему.

Конечно, рассмотренную систему нельзя считать стандартной. При решении стандартных неравенств или их систем переход к неравенству-следствию не используется; здесь обычно применяют преобразования, которые не приводят к изменению множества решений данного неравенства или данной системы.

Определение 3. Два уравнения (неравенства) называются *равносильными*, если они имеют одно и то же множество решений (это множество, в частности, может быть пустым, то есть уравнения, не имеющие корней, или неравенства, не имеющие решений, равносильны).

Равносильными могут быть не только два уравнения, два неравенства, две совокупности или две системы. В определении равносильности речь идет лишь о множестве решений уравнения или неравенства. Поэтому неравенство может быть равносильно уравнению, совокупности или системе, и наоборот. Переход от данного уравнения (неравенства) к равносильному уравнению (неравенству), равносильной совокупности или равносильной ему системе называется *равносильным* и при записи решения обозначается двусторонней стрелкой «⇔». Такой переход не приводит ни к потере решений (корней), ни к приобретению посторонних решений (корней), и алгебраические преобразования, которые делают такой переход возможным, также называются *равносильными*. Метод равносильных преобразований не требует проверки найденных решений путем их подстановки в данное уравнение или неравенство и является одним из основных методов решения уравнений и неравенств. Для уравнений приведенная выше таблица 2 теперь будет выглядеть так:

Таблица 3

Данное уравнение	Равносильная система
$\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$	$\begin{cases} g(x)\neq 0, \\ f(x)=0 \end{cases}$
$\sqrt{f(x)}=g(x)$	$\begin{cases} g(x)\geq 0, \\ f(x)=\left(g(x)\right)^2 \end{cases}$
$\log_{a(x)} f(x)=b$	$\begin{cases} a(x)>0, \\ a(x)\neq 1, \\ f(x)=\left(a(x)\right)^b \end{cases}$
$\lvert f(x)\rvert=g(x)$	$\begin{cases} g(x)\geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} f(x)=g(x) \\ f(x)=-g(x) \end{array}\right. \end{cases}$

Замечание. Одной из наиболее распространенных ошибок при записи решений уравнений и неравенств является использование знаков следования и равносильности при переходе от уравнения (неравенства, системы) с одной переменной к уравнению (неравенству, системе) с другой переменной (как правило, после выполнения замены переменной). Приведем пример такого ошибочного использования:

«пусть $t=\sin x$, тогда $2\sin^2 x-3\sin x+1=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2t^2-3t+1=0$».

Ясно, что множества корней уравнений $2\sin^2 x-3\sin x+1=0$ и $2t^2-3t+1=0$ различны, поэтому эти уравнения не являются равносильными. Использование знака равносильности в данном случае может быть расценено экспертами, проверяющими вариант ЕГЭ, как математическая ошибка, связанная с незнанием или непониманием определения равносильности. Неправильным будет и использование знака следования: уравнение $2t^2-3t+1=0$ не является, очевидно, следствием уравнения $2\sin^2 x-3\sin x+1=0$, поскольку множество корней тригонометрического уравнения не содержится в множестве корней квадратного. К сожалению, в огромном потоке литературы для подготовки к экзаменам подобные ошибки встречаются сплошь и рядом — даже в тех из них, где приводится определение равносильности уравнений и неравенств. Едва ли это связано с недостаточной квалифицированностью авторов, скорее речь идет о некритическом подходе к употреблению подобной символики и подмене знаками равносильности и следствия таких слов и словосочетаний, как «тогда», «тогда и только тогда», «необходимо и достаточно», «следовательно», «поэтому» и им подобных.

Неравносильные преобразования уравнений и неравенств с одной переменной связаны в основном с сужением или расширением ОДЗ уравнения или неравенства. В случае сужения ОДЗ может произойти потеря решений (корней), в случае расширения ОДЗ — приобретение посторонних решений (корней). Поэтому при каждом преобразовании нужно внимательно следить за ОДЗ, не допуская сужения или расширения последней и руководствуясь следующими правилами.

1. Перенос числа или одночлена из одной части уравнения или неравенства в другую с изменением знака (плюс или минус) перед этим числом или одночленом на противоположный — равносильное преобразование.

2. Приведение подобных, не ведущее к изменению ОДЗ, — равносильное преобразование.

3. Умножение обеих частей неравенства на положительное число, а обеих частей уравнения на

любое отличное от нуля число — равносильное преобразование.

4. Умножение обеих частей неравенства на отрицательное число с изменением знака неравенства на противоположный — равносильное преобразование.

5. Возведение обеих частей уравнения или неравенства в квадрат при условии неотрицательности каждой из этих частей и допустимых значениях переменной — равносильное преобразование.

Например, если $g(x) \le 0$, то неравенство $\sqrt{f(x)} < g(x)$ не имеет решений в силу неотрицательности арифметического квадратного корня. Поэтому должно выполняться условие $g(x) > 0$. Но в этом случае обе части неравенства $\sqrt{f(x)} < g(x)$ неотрицательны и возведение в квадрат является равносильным преобразованием при допустимых значениях переменной. Таким образом,

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) \ge 0, \\ f(x) < g^2(x). \end{cases}$$

Аналогично, если $g(x) < 0$, то неравенство $|f(x)| \le g(x)$ не имеет корней в силу неотрицательности модуля. Поэтому должно выполняться неравенство $g(x) \ge 0$. Но в этом случае обе части неравенства $|f(x)| \le g(x)$ неотрицательны и возведение в квадрат является равносильным преобразованием при допустимых значениях переменной. Таким образом, учитывая, что квадрат числа и квадрат модуля этого числа равны, получаем следующее равносильное преобразование:

$$|f(x)| \le g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \ge 0, \\ f(x)^2 \le g^2(x). \end{cases}$$

Более подробно равносильные преобразования будут рассмотрены при изложении методов решения неравенств для каждой функционально-алгебраической линии школьного курса.

То, что приведение подобных не должно вести к изменению ОДЗ, также весьма существенно. Например, если просто привести подобные в неравенстве $x^2 + \sqrt{x+2} \ge 4 + \sqrt{x+2}$, будут получены посторонние решения. Последнее связано с расширением ОДЗ: неравенство $x^2 \ge 4$, в отличие от данного, не предполагает каких-либо ограничений на переменную, его решением является объединение промежутков $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$. Равносильное же преобразование будет таким:

$$x^2 + \sqrt{x+2} \ge 4 + \sqrt{x+2} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \ge 4, \\ x \ge -2. \end{cases}$$

С учетом второго неравенства системы получим правильный ответ: $\{-2\} \cup [2; +\infty)$.

Вообще, к изменению ОДЗ приводит не так много преобразований, поскольку основных алгебраических выражений, требующих ограничений на переменную, всего три: это алгебраические дроби, иррациональные выражения с корнями четной степени и логарифмические выражения (неравенства, содержащие тангенсы, котангенсы, арксинусы и арккосинусы, в школьном курсе практически не рассматриваются). При преобразованиях, связанных с «освобождением» от корней четной степени и логарифмов (то есть с рационализацией иррациональных и логарифмических уравнений и неравенств), обычно происходит расширение ОДЗ, поэтому применение таких преобразований должно сопровождаться обязательным выписыванием соответствующих ограничений (условие неотрицательности алгебраического выражения под знаком корня четной степени, условие положительности алгебраического выражения под знаком логарифма, условие положительности и неравенства единице алгебраического выражения в основании логарифма, условие неотрицательности обеих частей уравнения или неравенства при возведении их в квадрат).

Что касается алгебраических дробей, то их знаменатели лучше не трогать, используя при решении уравнений условие равенства дроби нулю (дробь равна нулю, если ее числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю и не теряет смысла). При решении неравенств, содержащих алгебраические дроби, грубой ошибкой является «избавление» от знаменателя: ведь его знак влияет на знак всей дроби, и условия неравенства знаменателя нулю в таких случаях недостаточно; в самом деле, знак дроби $\frac{a(x)}{b(x)}$ зависит не только от знака ее числителя, но и от знака ее знаменателя. Переход от неравенства $\frac{a(x)}{b(x)} > 0$ к неравенству $a(x) > 0$ (даже при условии $b(x) \ne 0$) означает умножение обеих частей неравенства $\frac{a(x)}{b(x)} > 0$ на $b(x)$ с сохранением знака неравенства. Но знак неравенства сохраняется только при условии $b(x) > 0$, случай же $b(x) < 0$ при таком преобразовании попросту игнорируется. Аналогично, грубой ошибкой является переход, например, от неравенства $\frac{a(x)}{b(x)} > 1$ к неравенству $a(x) > b(x)$, поскольку такое преобразование допустимо только при $b(x) > 0$, а случай $b(x) < 0$ при этом обычно даже не рассматривается, что приводит к потере решений. При решении дробно-рациональных неравенств обычно все алгебраические выражения переносятся в одну из частей неравенства и приводятся к общему знаменателю. Например, правильным началом решения неравенства $\frac{a(x)}{b(x)}>1$ является следующая цепочка равносильных преобразований:

$$\frac{a(x)}{b(x)}>1 \Leftrightarrow \frac{a(x)}{b(x)}-1>0 \Leftrightarrow \frac{a(x)-b(x)}{b(x)}>0.$$

Более подробно дробно-рациональные неравенства будут рассмотрены в соответствующей статье.

К сужению ОДЗ в основном приводят преобразования, связанные с недостаточно четко понятыми свойствами корней и логарифмов. Так, переход от корня из произведения $\sqrt{a(x)\cdot b(x)}$ к произведению корней может потребовать рассмотрения двух случаев, ведь подкоренное число $a(x)\cdot b(x)$ неотрицательно, если числа $a(x)$ и $b(x)$ оба неотрицательны либо оба неположительны. Поэтому

$$\sqrt{a(x)\cdot b(x)}=\sqrt{a(x)}\cdot\sqrt{b(x)}$$

лишь при $a(x) \ge 0$ и $b(x) \ge 0$, а при $a(x) < 0$ и $b(x) < 0$ получаем

$$\sqrt{a(x)\cdot b(x)}=\sqrt{-a(x)}\cdot\sqrt{-b(x)}.$$

Аналогично, переход от логарифма произведения к сумме логарифмов может также потребовать рассмотрения двух случаев:

$$\log_c(a(x)\cdot b(x)) = \log_c a(x) + \log_c b(x)$$

при условиях $a(x) > 0$ и $b(x) > 0$

и

$$\log_c(a(x)\cdot b(x)) = \log_c(-a(x)) + \log_c(-b(x))$$

при $a(x) < 0$ и $b(x) < 0$.

Уже из этих примеров ясно, что выполнение таких преобразований (подробней о них смотрите главы, посвященные иррациональным и логарифмическим неравенствам) требует внимательности, тщательности и аккуратности.

Наиболее общие методы решения неравенств с одной переменной, применимые к решению неравенств каждой из шести функционально-алгебраических линий школьного курса математики, будут рассмотрены в следующих статьях.

ФОТО НА КОНКУРС

Поздравляем победителя фотоконкурса «Лето – осень-2014»!

Им стала Т.В. Дейнес,
учитель математики средней школы № 5 г. Ишима
Иркутской области.

Победитель награждается книгой
Стивена Строгаца «Удовольствие от X.
Увлекательное путешествие в мир математики
от одного из лучших преподавателей в мире»
(издательство «Манн, Иванов и Фербер»)

Конкурс фотографий «Зима–весна-2015»

На конкурс принимаются фотографии, на которых запечатлены учителя математики и их ученики 5–11-х классов в учебном процессе, на занятиях кружка, олимпиадах, в летних математических школах и пр. К каждой фотографии необходимо приложить краткое описание изображенного на ней события (место, время, действующие лица).

Фотографии могут быть цветными или черно-белыми. Формат для фотографий, отпечатанных на фотобумаге, не менее 10 × 15 см. Цифровые фотографии могут быть присланы на электронном носителе или по электронной почте. Размер цифровых фотографий не менее 800 × 600 пикселей, формат — JPG, качество, используемое при сохранении JPG-файлов, — высокое (high).

Лучшие фотографии будут напечатаны в журнале, а победитель получит книгу, тематически связанную с математикой, с автографами сотрудников редакции.

ЕГЭ: НОВЫЙ ПОВОРОТ

Лаппо Л.Д., Попов М.А. **ЕГЭ-2015. Математика. Экзаменационные тесты. Базовый уровень. Практикум по выполнению типовых тестовых заданий ЕГЭ.** — М.: Экзамен, 2015. — 46 с.

ЕГЭ-2015. Математика. Базовый уровень. 10 вариантов типовых тестовых заданий / под ред. И.В. Ященко. — М.: Экзамен, 2015. — 56 с.

ЕГЭ-2015. Математика. Базовый уровень. Типовые тестовые задания / под ред. И.В. Ященко. — М.: Экзамен, 2015. — 95 с.

ЕГЭ-2015. Математика. Базовый уровень. 30 вариантов типовых тестовых заданий / под ред. И.В. Ященко. — М.: Экзамен, 2015. — 167 с.

Каждый год в ЕГЭ какое-нибудь новшество, какая-нибудь инновация: то увеличат число заданий в части В, то добавят задачу по теории вероятностей, а с 2015 года экзамен по математике станет двухуровневым. Экзамен базового уровня — для тех выпускников, кому математика не требуется для продолжения образования в вузе. Экзамен профильного уровня — для тех выпускников, которым математика потребуется для продолжения образования.

Идея разделения единого экзамена по математике на два уровня не нова, она возникла довольно давно. И вот — свершилось. И уже в сентябре появились и демоверсии единого экзамена для каждого уровня, и издательство «Экзамен» (название обязывает) выпустило целый ряд пособий для подготовки выпускников на основе новой официальной демонстрационной версии ЕГЭ.

Что за пособия предлагает издательство для подготовки к экзамену базового уровня?

Во-первых, это пособие авторов Л.Д. Лаппо и М.А. Попова. Здесь представлены 10 вариантов тестовых заданий базового уровня. Этого вполне достаточно для заключительной подготовки учащихся к экзамену, когда программа пройдена и нужно повторить с учащимися материал, вынесенный на экзамен.

Во-вторых, это пособия, созданные разработчиками ЕГЭ под редакцией И.В. Ященко, которые не могли не откликнуться на возникшие новые потребности. Два из этих пособий содержат по 10 вариантов тестовых заданий базового уровня, а третье — 30 вариантов. Обратите внимание, что третье пособие содержит все варианты, представленные в первых двух. Также будьте внимательны, выдавая работы учащимся: есть ошибки в чертежах. По всей видимости, разработчики были очень ограничены во времени, почему и появились эти досадные опечатки.

Во всех пособиях есть образцы новых бланков ЕГЭ-2015. Следует иметь в виду, что пособия готовились в печать летом, демоверсия утверждалась ближе к зиме. Поэтому возможны незначительные несоответствия в типах задач, вынесенных на экзамен, с теми заданиями, что представлены в данных пособиях, но это не мешает использовать их для подготовки учащихся к единому экзамену.

Желаем удачи вам и вашим ученикам!

МАТЕРИАЛ ДЛЯ ПРОВЕРКИ

Гаиашвили М.Я. **Самостоятельные и контрольные работы по математике. 5 класс.** — М.: ВАКО, 2014. — 80 с.

Пособие содержит самостоятельные и контрольные работы по математике для 5-го класса. Материал представлен в порядке изложения тем в учебнике Н.Я. Виленкина и др. (М.: Мнемозина), однако может быть использован и при работе по учебникам других авторов.

Количество работ в издании определяется местом конкретной темы в курсе математики и, соответственно, количеством часов, традиционно выделяемых на ее изучение. В пособие включено 39 самостоятельных и 14 контрольных работ для текущего и тематического контроля, в том числе итоговая контрольная работа по курсу математики 5-го класса. Ко всем самостоятельным и контрольным работам приведены ответы. Наибольшее внимание в работах уделено проверке сформированности вычислительных навыков и умения решать различные текстовые задачи. Наряду с этим в работы включено достаточное количество заданий с буквенными выражениями, уравнениями и др.

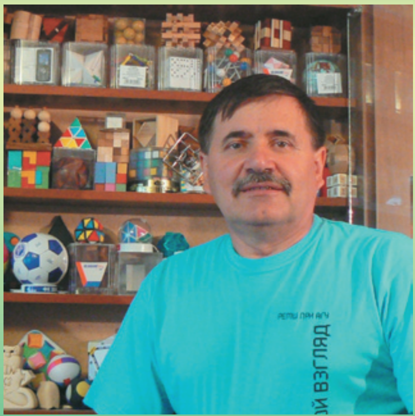
Каждая самостоятельная работа состоит из трех заданий, каждая контрольная — из пяти. В большинстве самостоятельных и контрольных работ в качестве последнего задания во всех вариантах предлагаются числовые ребусы, комбинаторные задачи, задания с несколькими вариантами ответа. Оценка таких заданий осуществляется по усмотрению учителя. Можно предлагать их как обязательные или ставить за них отдельную отметку. Важно, что выполнение подобных заданий не требует знаний, выходящих за рамки школьной программы.

Каждая работа представлена в четырех вариантах. При этом первые три имеют одинаковую сложность, а четвертый предназначен для школьников, имеющих способности и желание решать более трудные задачи. Задания четвертого варианта отличаются большей технической сложностью, наличием вариативности ответов, нестандартностью подходов.

Время выполнения самостоятельной работы составляет приблизительно 15–25 минут, контрольной работы — 40 минут.

Система оценивания традиционная, но из-за наличия в заданиях подпунктов можно по-разному подсчитывать итоговый балл. При проверке самостоятельной работы целесообразно ставить отметку «5» за три верно выполненных задания, отметку «4» — за два, отметку «3» — за одно верно выполненное задание при условии некоторых продвижений в решении еще одного. При проверке контрольной работы целесообразно ставить отметку «5» за пять верно выполненных заданий, отметку «4» — за четыре, отметку «3» — за три верно выполненных задания. Но решение принимает только учитель, преподающий предмет в данном классе, с учетом особенностей учащихся.

Н. АВИЛОВ,
avilow@rambler.ru,
ст. Егорлыкская, Ростовская обл.



Ведущий рубрики — Николай Иванович Авилов — на фоне своей коллекции головоломок

КАЛМЫЦКАЯ ГОЛОВОЛОМКА

На каникулах со школьниками побывал на экскурсии в Элисте — столице Республики Калмыкия.

С удовольствием посетили мы сувенирную лавку. С радостью обнаружил сувенир, на этикетке которого написано: «Древняя калмыцкая головоломка "Нярн шиндж"», что в переводе означает «тонкое расследование».

Головоломка представляет собой семь колец, связанных и переплетенных между собой короткими веревками, концы которых прикреплены к деревянному основанию. Между ними продет челнок, который запутан (кажется, что навсегда). Вот его-то как раз и надо освободить из плена веревок и колец.

Существуют варианты с числом колец от 4 до 12, что определяет уровень сложности головоломки и время ее решения: чем больше колец, тем дольше придется манипулировать с элементами головоломки (я купил себе головоломку с 7 кольцами). Должен сказать, что после того, как я понял секрет головоломки, моя «освободительская» деятельность длилась минут десять.

Экскурсовод рассказала, что в древние времена кольца головоломки делали из рогов крупного рогатого скота, роль веревки выполняли тонко нарезанные полоски кожи. Ведь Калмыкия — регион скотоводческий.

Изготавливает «Нярн шиндж» элистинский умелец, используя дерево и веревку, в качестве колец — готовые шторные кольца. На головоломку наносятся украшения в виде национального орнамента.

Головоломка, как я узнал, пользуется популярностью среди учащихся, а в школах Калмыкии проводятся соревнования. И надо отметить, что получается это у ребят ловко и быстро. Чуть более полутора минут понадобилось победителю соревнований, чтобы освободить челнок в головоломке с восьмью кольцами. Организаторы считают, что в будущем в республике, возможно, состоится чемпионат по «нярн шиндж». Краткий отчет об этих соревнованиях можно посмотреть здесь: http://vesti-kalmykia.ru/society/10948.html.

В головоломке «спрятано» много математики. Это нетрудно обнаружить, если подсчитать число элементарных шагов, необходимых для ее решения. Например, для освобождения челнока в головоломке с семью кольцами потребуется 64 хода.

Справедливости ради следует сказать, что существует аналогичная головоломка, у нас ее называют «меледа», на Западе — «китайскими кольцами». Отличаются они лишь конструктивными элементами и материалом изготовления. Но принцип их устройства и решения один.

К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru

Оксфорд

Посещение Оксфорда дает уникальную возможность окунуться в атмосферу одного из самых необычных литературных произведений — «Алисы в Стране чудес» Льюиса Кэрролла. У стен колледжа Крайст-Черч вы увидите зеленые лужайки с раскидистыми деревьями, под одним из которых и начались приключения героини самой математической из всех сказок. Пройдитесь по улице, по которой ходила ее прототип — Алиса Лидделл, загляните в магазинчик, где она покупала сладости. С пакетиком леденцов, мимо Бодлианской библиотеки и главных зданий Оксфордского университета, дойдите до музея естественных наук, где пред вами предстанет вымершая птица Додо, точнее, чучело последнего ее экземпляра. Ну и, конечно, совершите прогулку по самому колледжу, пытаясь представить себе уклад жизни самóго автора книги — преподавателя математики Чарльза До́джсона: квадраты лужаек, обрамленные жилыми помещениями и аудиториями, церковь, библиотека (правда, не забывайте, что колледж — не музей, а действующее учебное заведение). Самое интересное место — знаменитая столовая колледжа с портретами известных его преподавателей и выпускников, взирающих на вас со всех ее стен (среди них такие ученые, как Роберт Гук и Джон Локк, и 13 премьер-министров). А вот вам и задание: найдите среди них портрет Доджсона. Мне это удалось. Ну а молодое поколение будет приятно удивлено тем, что зал этот хорошо им знаком по фильмам про Гарри Поттера.

Л. Рослова