МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ №9 (767)

ИЗДАЕТСЯ С 1992 г.

mat.1september.ru

Тема номера
Необычный урок

Открытый урок
Арифметическая прогрессия Пушкина с. 17

Мастерская
Познать формулу цветка с. 40

Наш проект
Конкурс «Математический потенциал». Тур 2 с. 44

электронная версия журнала
дополнительные материалы
в Личном кабинете
на сайте
www.1september.ru

издательский дом
1september.ru
Первое сентября
сентябрь 2015

МАТЕМАТИКА Подписка на сайте www.1september.ru или по каталогу «Почта России»: 79073 (бумажная версия); 12717 (CD-версия)

В НОМЕРЕ

МЕТОДОБЪЕДИНЕНИЕ / МЕТОДИЧЕСКИЙ СЕМИНАР

4 Лабораторные работы с физическим содержанием
Г. Аджемян

8 Учение с увлечением — залог успеха
Е. Еркина

НА УРОКЕ / ПРОВЕРКА ЗНАНИЙ

12 «Математический бой» как форма контроля
А. Виноградова

14 Общественный смотр знаний по математике
В. Мороз

НА УРОКЕ / ОТКРЫТЫЙ УРОК

17 Арифметическая прогрессия Пушкина
С. Луконина

21 Разновозрастный урок как форма итогового повторения
И. Буйлова, С. Новикова

МЕТОДОБЪЕДИНЕНИЕ / НАШ ПРОЕКТ: «РАЗБОР УРОКА»

26 Тема урока: «Приближенные значения чисел. Округление чисел»
Е. Бакум

МЕТОДОБЪЕДИНЕНИЕ / ПРАКТИКУМ

35 О квадратных уравнениях
Г. Левитас

37 Квадратные уравнения с «квадратным» дискриминантом
В. Дроздов

38 Задачи про турниры
А. Шевкин

В КОМПЬЮТЕРНОМ КЛАССЕ / МАСТЕРСКАЯ

40 Познать формулу цветка
А. Азевич

ПОСЛЕ УРОКА / НАШ ПРОЕКТ

44 Конкурс «Математический потенциал». Тур 2. «Оформляем кабинет математики»

ПОСЛЕ УРОКА / ОЛИМПИАДЫ, КОНКУРСЫ, ТУРНИРЫ

46 XXIV Межрегиональная олимпиада по криптографии и математике
С. Рамоданов

ПОВЫШЕНИЕ КВАЛИФИКАЦИИ / ЛЕКТОРИЙ

54 Решаем неравенства. Часть 2. Продолжение
С. Шестаков

62 Точку в пространстве можно закодировать одним числом!
Д. Златопольский,

ПОСЛЕ УРОКА / В КЛАДОВОЙ ГОЛОВОЛОМОК

63 Арифметика на кубиках
Н. Авилов

В КАБИНЕТЕ МАТЕМАТИКИ / НА СТЕНД

64 Музей науки

К материалам, обозначенным этим символом, есть дополнительные материалы в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru

УВАЖАЕМЫЕ ЧИТАТЕЛИ!

Все подписчики журнала имеют возможность получать электронную версию, которая не только является полной копией бумажной, но и включает дополнительные электронные материалы для практической работы.

Для получения электронной версии:

1. Откройте Личный кабинет на портале «Первое сентября» (www.1september.ru).
2. В разделе «Газеты и журналы/Получение» выберите свой журнал и кликните на кнопку «Я – подписчик бумажной версии».
3. Появится форма, посредством которой вы сможете отправить нам копию подписной квитанции. После этого в течение одного рабочего дня будет активирована электронная подписка на весь период действия бумажной.

МАТЕМАТИКА. ПЕРВОЕ СЕНТЯБРЯ

Методический журнал для учителей математики

Издается с 1992 г. Выходит один раз в месяц

РЕДАКЦИЯ:

Главный редактор: Л. Рослова
Отв. секретарь: Т. Черкавская
Редакторы: П. Камаев, О. Макарова, И. Коган
Дизайн макета: И. Лукьянов. Дизайн обложки: Э. Лурье
Корректор: Л. Громова. Верстка: Л. Кукушкина

Распространяется по подписке

Цена свободная
Тираж 22 000 экз.

Тел. редакции: **(499) 249-3460**
E-mail: **mat@1september.ru**
Сайт: **mat.1september.ru**

ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ДОМ «ПЕРВОЕ СЕНТЯБРЯ»

Главный редактор: Артем Соловейчик (генеральный директор)
Коммерческая деятельность: Константин Шмарковский (финансовый директор)
Развитие, IT и координация проектов: Сергей Островский (исполнительный директор)
Реклама, конференции и техническое обеспечение Издательского дома: Павел Кузнецов
Производство: Станислав Савельев
Административно-хозяйственное обеспечение: Андрей Ушков
Педагогический университет: Валерия Арсланьян (ректор)

ЖУРНАЛЫ ИЗДАТЕЛЬСКОГО ДОМА:
Английский язык – Е. Богданова,
Библиотека в школе – О. Громова,
Биология – Н. Иванова,
География – А. Митрофанов, и.о.
Дошкольное образование – Д. Тюттерин,
Здоровье детей – Н. Сёмина,
Информатика – С. Островский,
Искусство – О. Волкова,
История – А. Савельев,
Классное руководство и воспитание школьников –М. Битянова,
Литература – С. Волков,
Математика – Л. Рослова,
Начальная школа – М. Соловейчик,
Немецкий язык – М. Бузоева,
ОБЖ – А. Митрофанов,
Русский язык – Л. Гончар,
Спорт в школе – О. Леонтьева,
Технология – А. Митрофанов,
Управление школой – Е. Рачевский,
Физика – Н. Козлова,
Французский язык – Г. Чесновицкая,
Химия – О. Блохина,
Школа для родителей – Л. Печатникова,
Школьный психолог – М. Чибисова.

Иллюстрации: фотобанк Shutterstock

На с. 1 и с. 64 — коллажи из иллюстраций, взятых с сайтов: http://digitool-b.lib.ucl.ac.uk, https://commons.wikimedia.org, http://www.academia.edu, http://www.hordern.com, https://sites.google.com/site/babbagedifferenceengine/Babbage_DE1_timbs.jpg, http://blog.sciencemuseum.org.uk, http://i.kinja-img.com, http://galleryhip.com/charles-babbage.html

УЧРЕДИТЕЛЬ: ООО «ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ДОМ «ПЕРВОЕ СЕНТЯБРЯ»

Зарегистрировано ПИ №ФС77-58424 от 25.06.14 в Роскомнадзоре

Подписано в печать: по графику 27.05.15, фактически 27.05.15 Заказ №

Отпечатано в ОАО «Первая Образцовая типография» филиал «Чеховский печатный двор» ул. Полиграфистов, д. 1, Московская область, г. Чехов, 142300; Сайт: www.chpd.ru; E-mail: sales@chpk.ru; факс: 8(496)726-54-10, 8(495)988-63-76

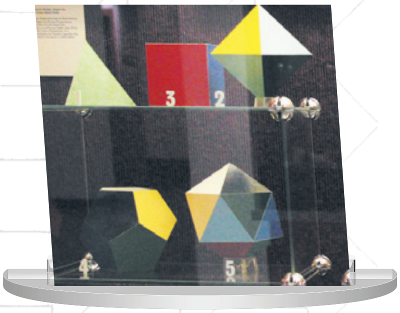
АДРЕС РЕДАКЦИИ И ИЗДАТЕЛЯ:
ул. Киевская, д. 24, Москва, 121165
Телефон/ факс: **(499) 249-3138**
Отдел рекламы: **(499) 249-9870**
Сайт: 1september.ru
facebook.com/School.of.Digital.Age

ИЗДАТЕЛЬСКАЯ ПОДПИСКА:
Телефон: **(499) 249-4758**

ПОДПИСНЫЕ ИНДЕКСЫ:
Почта России: бумажная версия – **79073**; CD-версия – **12717**

О НОВОМ ТУРЕ НАШЕГО КОНКУРСА

Л. РОСЛОВА



Ровно год назад мы провели первый тур конкурса «Математический потенциал», который организовали силами редакции журнала. Обычно во всех математических конкурсах решают задачи. Поэтому мы долго думали о том, какой должна быть изюминка нашего конкурса, и решили, что надо предложить ученикам какую-нибудь математическую деятельность, напрямую с решением задач не связанную. Первый тур был посвящен Мартину Гарднеру, его 100-летнему юбилею, поэтому задания были из разделов занимательной математики: паркеты, фокусы, танграмы.

Вы хотите знать, что будет в этом году? Мы остановили свой выбор на проекте под названием «Оформляем кабинет математики», по сути же речь идет о создании в отдельно взятом кабинете миниатюрного музея математики. Используя актуальную лексику — наномузей математики.

Идею подсказал мне Музей науки в Лондоне, в котором есть достаточно большой раздел, посвященный математике. Несмотря на всю пафосность музея, экспонаты, хранящиеся за стеклом, в большинстве своем выполнены из картона, дерева, шариков для настольного тенниса и прочих доступных материалов. Почти ничего невозможного, ну разве что стеклянная посуда «а-ля бутылка Клейна». Причем некоторые из этих экспонатов почти не отличаются от того, что традиционно можно увидеть в кабинете математики. Например, модели звездчатых многогранников. Другое дело, что каждый экспонат, как принято в музее, сопровождается табличкой с названием, прочими важными атрибутами и описанием соответствующей ему математической проблемы.

Вот и родилась идея предложить вам организовать в кабинете что-то подобное. Пусть это будет обычный шкаф с полками (стеллаж, как в библиотеке, или просто отдельные книжные полки), на которых и разместятся экспонаты. Чтобы были они выполнены руками учащихся (кстати, с указанием авторов). Чтобы ученики младших классов могли подойти и изучить содержимое полок, прочитать, рассмотреть, задать вопрос автору-изготовителю.

Кстати, из экспонатов музея можно будет организовывать выставки. Скажем, те замечательные работы, что участвовали в прошлом туре конкурса, так и хочется сдать в музей, чтобы там их поместили в рамки и развесили на стенах.

В общем, мы предложим четыре задания (для четырех этапов), при этом если у вас возникнут свои идеи о том, чем можно пополнить такой музей, и вы поделитесь ими с нами, то мы с удовольствием напечатаем об этом на страницах журнала. Дерзайте!

Г. АДЖЕМЯН,
adzemyan@home-edu.ru,
г. Москва

ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ С ФИЗИЧЕСКИМ СОДЕРЖАНИЕМ

■ Среди задач, решаемых в курсе математики 5–6-го класса, имеются задачи, связанные с понятиями «длина», «расстояние», «скорость», «время», «единицы массы», «объем» и др. Такие задачи можно назвать задачами с физическим содержанием.

Задачи с физическим содержанием в зависимости от того, с какими понятиями связаны, могут выполнять различные функции — мотивировать, формировать новые знания, умения и т.п. Они могут способствовать формированию всех видов универсальных учебных действий учащихся, если на уроке правильно выбрана форма организации учебной деятельности.

На уроках математики в 5–6-х классах особое место занимает мотивация учащихся, их побуждение к учебно-познавательной деятельности, формирование стремления узнать больше. Важно искать пути того, как повысить эту мотивацию, как активизировать учебное сотрудничество учащихся.

Для решения данной проблемы на уроках математики в 5–6-х классах изучение некоторых тем можно провести в виде лабораторных работ на 15–20 минут. Форма организации занятий — групповая (одна и та же работа выполняется бригадами по 2–4 человека). Такая форма организации совместной деятельности учащихся диктуется возрастными особенностями младшего подростка, так как ведущей деятельностью школьника подросткового возраста является *интимно-личное общение со сверстниками*, основным содержанием которого выступает установление и поддержание отношений с другим человеком. Впоследствии это будет способствовать тому, что учащиеся начнут группироваться по общим интересам, в учебном сотрудничестве решать подставленные задачи, формировать дополнительную мотивацию к обучению.

Лабораторных работ на уроках математики не должно быть много, из-за нехватки времени на выполнение учебной программы, но они должны иметь место для закрепления изучаемого материала при совместной деятельности учащихся.

Лабораторные работы проводятся с целью:

– формировать начальные практические умения и навыки обращения с различными приборами, установками и т.п.;

– приобретать исследовательские умения (наблюдать, сравнивать, анализировать, устанавливать зависимости, делать выводы и обобщения, самостоятельно вести исследование, оформлять результаты);

– формировать все виды универсальных учебных действий;

К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru (Таблицы).

– обобщать, систематизировать, углублять и закреплять полученные теоретические знания по конкретным темам курса математики и т.п.

Лабораторные работы по математике с физическим содержанием учащиеся выполняют под руководством учителя в соответствии с содержанием изучаемого материала. В чем отличие лабораторных работ от заданий практического содержания?

Принципиальная разница между двумя формами практической деятельности учащихся в процессе обучения, лабораторными и практическими работами, заключается в том, что лабораторные работы носят обучающий характер, а практические — контролирующий.

Ведущей дидактической целью лабораторных работ является экспериментальное подтверждение и проверка существенных теоретических положений (законов, закономерностей), поэтому по содержанию они должны быть направлены:

– на экспериментальную проверку формул;

– установление и подтверждение закономерностей;

– наблюдение хода явлений, процессов;

– ознакомление с методами проведения экспериментов;

– установление свойств веществ, их качественных и количественных характеристик и др.

Экспериментальное подтверждение теоретических положений и формирование учебных и практических умений составляет важную часть теоретической и практической подготовки учащихся к изучению курса физики и будет особенно эффективно, если начнется с 5–6-го класса.

При проведении лабораторных работ учащиеся пользуются инструкциями, в которых представлены:

цель работы;

оборудование;

продолжительность выполнения работы;

подготовительные вопросы (проверка знаний обучающихся — их теоретической готовности к выполнению задания);

порядок выполнения работы;

таблицы;

выводы;

контрольные вопросы.

Объем заданий для лабораторной работы должен быть спланирован так, чтобы за отведенное время они могли быть качественно выполнены большинством учащихся. Количество часов, отводимых на лабораторные работы, фиксируется в тематических планах примерных и рабочих учебных программ.

Необходимыми структурными элементами лабораторной работы, помимо самостоятельной деятельности учащихся, являются инструктаж, проводимый учителем, и организация обсуждения итогов выполнения лабораторной работы.

Для экономии времени на уроке выполнение и проверку лабораторных работ можно провести с применением компьютерных технологий. При этом ученики работают в парах. На каждом столе имеется необходимое оборудование и компьютер с загруженным файлом лабораторной работы. Каждая пара открывает файл в любом текстовом редакторе и приступает к работе. Договариваясь между собой, ученики работают по очереди, выполняют необходимые измерения и заполняют таблицу. После выполнения задание в электронном виде отправляется учителю. Работы проверяются на экране и оцениваются на уроке.

После выполнения работы начинается фронтальная проверка. Одна работа на выбор появляется на экране, и авторы с рабочего места учителя проводят не только обсуждение достигнутых результатов, но и обсуждают успехи друг друга, общение между собой. Такие работы и выступления очень нравятся учащимся. У них повышается самооценка, взаимоуважение и взаимоподдержка друг друга. В конце занятия несколько минут отводится для подведения итогов, проводится подробный анализ лабораторной работы: сравнение и обсуждение полученных результатов; анализируются типичные ошибки.

При оценивании лабораторных работ нужно учитывать, насколько верно учащиеся:

ответили на подготовительные вопросы;

соблюдали ли порядок работы;

как выполнили измерения, вычисления, заполнили таблицу, сделали вывод, ответили на контрольные вопросы.

Работы оцениваются по пятибалльной шкале без неудовлетворительных оценок.

Следует признать, что в настоящее время лабораторным работам (в особенности по математике) не уделяется достаточного внимания, их значимость недооценивается. На это есть много причин: проблемы организации такой формы работы, наличие оборудования, мотивация учителя, нехватка количества часов и т.п.

Но никак нельзя недооценивать необходимость создания таких условий, когда ученик, работая самостоятельно или в группе, приобретает новые знания или закрепляет изученный материал в тесной связи с реальной жизненной практикой, когда эти знания являются продуктом работы ученика с изучаемым материалом. Приведем примеры лабораторных работ, предлагаемых учащимся 5–6-х классов при изучении тем: «Единицы величин», «Единицы массы», «Шкалы», «Объем прямоугольного параллелепипеда».

Лабораторная работа № 1. «Единицы длины. Измерение длины пружины»

Цель работы: определение изменения длины пружины при подвешивании разных грузиков.

Оборудование: пружина, разные грузики, линейка длиной 30 см, мерная лента с дюймовой разметкой.

Продолжительность работы: 15 минут.

Подготовительные вопросы

1. Что такое длина?
2. Как обозначается длина?
3. В каких единицах измеряется длина?
4. Выразите в мм:

а) 1 км; б) 1м;
в) 1 дм; г) 1 см.

Ход работы

Теоретическая часть

1. Измерьте линейкой длину пружины.

За длину пружины принимается расстояние между ее начальным и конечным положением.

Нерастянутая пружина	Растянутая пружина
начало  конец	 начало конец

а) В положении без грузика.

б) После подвешивания грузика.

2. Переведите полученный результат из миллиметров в дюймы.

3. Проверьте полученный результат мерной дюймовой лентой.

Практическая часть

1. Заполните таблицу:

Масса груза, г	Начальное положение пружины, мм	Конечное положение пружины с грузиком, мм	Показание изменений пружины, мм	Показание изменений пружины, дюйм
$m_1 = 50$ г				
$m_2 = 100$ г				
$m_3 = 200$ г				

2. Сделайте вывод: ________________________.

Контрольные вопросы

1. Сколько сантиметров в одном дюйме?______.
2. Сколько дюймов в одном сантиметре?_______.
3. Что значит изменение длины пружины на 10 см? Сколько это дюймов? ______________.

Лабораторная работа № 2. «Единицы массы»

Цель работы: измерение массы тел из разных материалов, имеющих одинаковые размеры.

Оборудование: весы электронные, несколько тел, имеющих одинаковые размеры (деревянный, металлический, пластмассовый кубики).

Продолжительность работы: 15 минут.

Подготовительные вопросы

1. В каких единицах измеряют массу тела?
2. Каким прибором измеряют массу тела?
3. Выразите в граммах:

а) 5 кг;
б) 3 кг 45 г;
в) 4 ц 74 кг.

Ход работы

Теоретическая часть

1. Рассмотрите предметы, массы которых будете измерять.

2. Ознакомьтесь с правилами взвешивания:

а) перед взвешиванием убедитесь, что на экране весов цифра 0;

б) взвешиваемое тело положите на электронные весы и зафиксируйте результат;

г) заполните таблицу.

Практическая часть

1. Заполните таблицу:

Название тела	Масса тела (г) на электронных весах	Масса тела, кг	Масса тела, ц	Масса тела, т
Кубик деревянный				
Кубик металлический				
Кубик пластмассовый				

2. Сделайте вывод: ____.

Контрольные вопросы

1. Как измерить массу тела? ______________________________.

2. Тело из какого вещества имеет меньшую массу? ____.

3. Тело из какого вещества имеет большую массу? ____.

Лабораторная работа № 3. «Шкалы. Цена деления мензурки»

Цель работы: определение цены деления различных мензурок.

Подсказка: найти на мензурках величину мелкого деления.

Оборудование: три мензурки разного размера мелких делений, разного диаметра, высоты. На всех нанесены штрихи по-разному: на первой мензурке между 1 мл и 2 мл — 10 мелких делений, на второй — пять делений, а на третьей — два деления.

Продолжительность работы: 15 минут.

Подготовительные вопросы

1. Из чего состоит шкала измерительного прибора?
2. Что называют делением шкалы?
3. Приведите примеры шкал измерительных приборов.

Ход работы

Теоретическая часть

1. Ознакомьтесь с мензурками разного предназначения.
2. Определите цену деления шкалы каждой мензурки.

Практическая часть

1. Заполните таблицу:

№ п/п	Название прибора	Количество делений между 1 мл и 2 мл	Цена деления
1			
2			
3			

2. Сделайте вывод: ____.

Контрольные вопросы

1. Зачем нужно определять цену деления измерительного прибора? ____.
2. Шкала измерительного прибора состоит из числовых значений: 0, 100, 200, 300, 400, 500 — между двумя соседними числовыми значениями пять делений. Найдите цену деления шкалы прибора. ____.

Лабораторная работа № 4. «Измерение объема прямоугольного параллелепипеда»

Цель работы: вычисление объема прямоугольного параллелепипеда с помощью мензурки и линейки.

Оборудование: металлический прямоугольный параллелепипед с ниткой, сосуд с водой, мензурка, линейка.

Продолжительность работы: 15минут.

Подготовительные вопросы

1. Какую фигуру называют прямоугольным параллелепипедом?
2. По какой формуле вычисляют объем прямоугольного параллелепипеда?
3. В каких единицах измеряется объем?

Ход работы

I. Теоретическая часть

Для измерения объема прямоугольного параллелепипеда выполните следующие шаги:

а) налейте в мензурку столько воды, чтобы можно было полностью погрузить в нее прямоугольный параллелепипед;

б) зафиксируйте объем воды в мензурке (V_1) по положению зеркала воды на уровне определенного значения шкалы;

в) опустите прямоугольный параллелепипед в воду, удерживая его за нитку, и снова зафиксируйте объем жидкости (V_2) по положению зеркала воды на уровне определенного значения шкалы;

г) разность объемов жидкости и покажет объем тела ($V = V_2 - V_1$);

д) проверьте полученный результат, вычислив объем прямоугольного параллелепипеда по формуле $V = abc$. Длину, ширину и высоту прямоугольного параллелепипеда измерьте с помощью линейки.

Практическая часть

1. Результаты измерений занести в таблицу:

Название тела	Начальный объем, V_1, см^3	Конечный объем, V_2, см^3	Разность объемов, V, см^3	Объем тела, см^3

2. Измерения прямоугольного параллелепипеда:

длина a — ...; ширина b — ...; высота c — ...

3. Сделайте вывод: ______________________.

Контрольные вопросы

1. Что называют кубом? ________________.
2. Как вычислить объем куба? ____________.

Е. ЕРКИНА,
shkola.12@mail.ru,
г. Бологое, Тверская обл.
Фото предоставлены автором

УЧЕНИЕ С УВЛЕЧЕНИЕМ — ЗАЛОГ УСПЕХА

Учителя знают, что при изучении любого предмета важна не только усидчивость и внимательность, желание трудиться и получать знания, но и интерес к нему. Без «симпатии к изучаемому» сложно заставить себя учить и приобретать навыки. Поэтому важно искать возможность заинтересовать учащихся или хотя бы «подогревать» их интерес всеми возможными способами.

В конце первой четверти я провела обобщающий урок математики. Проведение этого урока потребовало предварительной подготовки, в которой принимали участие все ученики, выполняя следующие задания:

1. Используя формулы для нахождения периметра и площади прямоугольника, найдите периметр и площадь своей комнаты.
2. Составьте (с помощью родителей) числовое и буквенное выражения для расчета квартплаты.
3. Придумайте задачу с жизненной ситуацией и решите ее с помощью уравнения.
4. Составьте кроссворд, используя изученные математические термины и понятия.

Задания по нахождению периметра и площади своей комнаты и составление задачи и ее решение с помощью уравнения были обязательными для всех. А вот составление числового и буквенного выражений расчета квартплаты и составление кроссворда были необязательными.

Все задачи с практическим содержанием оказались очень интересными.

Из задач на нахождение периметра и площади я отобрала задачи, где периметры оказались равными, а площади неравными (придумывать размеры комнат не пришлось). Важно было, чтобы потом на уроке учащиеся заметили, что при одинаковых периметрах площадь комнаты тем больше, чем больше ее форма приближается к квадрату.

Самым сложным оказалось задание на составление расчета квартплаты. Во-первых, задание выполнили не все, во-вторых, большинство учащихся составили только числовое выражение, и лишь несколько учащихся составили буквенное выражение.

Наибольший интерес вызвало задание на составление кроссворда. Они получились интересными и содержательными. К обобщающему уроку был составлен сводный кроссворд, где использовались вопросы из кроссвордов, составленных учащимися.

В этом учебном году мне посчастливилось учить пятиклассников, чьи родители были моими учениками. Это выяснилось случайно, когда я стала использовать творческие работы своих бывших учеников: четверостишия, загадки, стихи, рисунки, кроссворды. Вы поймете, почему я пишу об этом, познакомившись с этим уроком.

Ход урока

I. Тестирование

Каждый ученик получил карточку с вопросами, в которой надо было отметить правильный ответ.

Вариант 1

Закончите предложение в заданиях 1—4.

1. Решить уравнение — значит, найти...
   А. Корни или убедиться, что их нет
   Б. Сумму
   В. Корни
2. В уравнении $121 - x = 34$ неизвестно...
   А. Вычитаемое
   Б. Уменьшаемое
   В. Разность
3. Корнем уравнения называется значение, подставленное вместо буквы, при котором из уравнения получается...
   А. Верное буквенное равенство
   Б. Верное числовое равенство
   В. Верное выражение
4. Вычитаемым в уравнении $134 - x = 26$ является число...
   А. 26 Б. 134 В. x
5. Из данных записей выберите буквенное выражение.
   А. $(19 - 6) + a$
   Б. $36 : 12 - x$
   В. $x + 9 = 28$

Вариант 2

1. Из данных записей выберите числовое выражение.
   А. $(19 - 6) + a$
   Б. $36 : 12 + 7$
   В. $x + 9 = 28$
2. Из данных записей выберите уравнение.
   А. $x + 5 = 24$
   Б. $x - 11 = 6$
   В. $4 \cdot 7 - 3 = 25$

Закончите предложение в заданиях 3—5.

3. Уменьшаемым в уравнении $x - 25 = 144$ является число...
   А. 144 Б. x В. 25
4. Равенство, содержащее букву, значение которой нужно найти, называется...
   А. Буквенным выражением
   Б. Числовым выражением
   В. Уравнением
5. В уравнении $x - 28 = 35$ неизвестно...
   А. Вычитаемое
   Б. Уменьшаемое
   В. Разность

Для проверки рядом сидящие учащиеся меняются работами и сверяют ответы с правильными, которые спроецированы на экран.

II. Устный счет

Задания проецируются на экран.

Вариант 1. Найдите значение выражения:
а) $800\,000 + 3000 + 10 + 7$;
б) $(186 + 39) + 14$;
в) $169 - (64 + 69)$.

Вариант 2. Найдите значение выражения:
а) $1\,000\,000 + 60\,000 + 200 + 6$;
б) $(265 + 138) - 65$;
в) $378 - (78 + 140)$

Для проверки рядом сидящие учащиеся меняются работами и сверяют ответы с правильными, **которые спроецированы на экран.**

Дополнительные вопросы. Сформулируйте свойства сложения, правило вычитания числа из суммы и суммы из числа.

Перед третьим этапом — чтение стихотворения «Математика» Надежды Масляковой (мамы одной из учениц).

Как построить новый дом.
Сколько будет окон в нем,
Сколько нужно кирпичей,
Сколько досок и людей?
В этом нам она поможет.
Вычесть или перемножить!
Математика одна
Нам всегда во всем нужна.
С детства нам она знакома,
С самых, самых малых лет.
Нам она нужна, как мама,
Ведь другой такой же нет!

III. Повторение числовых и буквенных выражений

Вопрос. Какое выражение называют числовым, а какое буквенным? (*Слайды*)

Числовое выражение — это выражение, которое составлено из чисел, знаков математических действий и скобок.

367 р. 86 к. + 39 р. 71 к. +
66 р. 79 к. + 28 р. 32 к. + 70 р. 23 к. +
+ 202 р. 16 к. + 5р. 05 к. —
квартплата

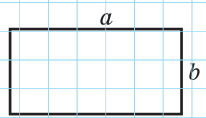
Буквенные выражения — это выражения, составленные из чисел, букв, знаков математических действий и скобок.

10 р. 19 к. · S + 86 р. 46 к. · a +
+ 1 р. 10 к. · S + 1 р. 85 к. · S +
+ 14 р. 16 к. · b + 23 р. 41 к. · $(a + b)$ +
+ 5 р. 60 к. · S + 14 к. · S —
квартплата

Записи на слайдах по расчету квартплаты поясняют те учащиеся, которые хорошо понимают, о чем идет речь в составленном ими выражении.

Обсуждаем результаты вычисления периметра и площади комнат учеников. Выясняем, что при одинаковых периметрах площади комнат могут быть различными. Ученики приходят к выводу, что большую площадь в таких случаях имеют квадратные комнаты.

Длина комнаты a см, ширина b см.
Что означает выражение:



ab
$a + b$
$2(a + b)$
$2a + 2b$

IV. Решение задач

с жизненной ситуацией, составленных учащимися. Каждый из учеников выбирает понравившуюся задачу и решает ее. Проверку осуществляют авторы этих задач.

Примеры задач

1. Мама шила костюм для моего выступления. Она купила 140 см ткани. Часть ткани она израсходовала на косынку, столько же на юбку и 60 см на блузку. Сколько ткани пошло на юбку?

2. 18 учеников добираются до своих школ на школьном автобусе. У школы № 1 вышло несколько учеников, а у школы № 11 вышло на 3 человека меньше, остальные 5 учеников поехали в школу № 12. Сколько учеников в автобусе ехало в школу № 11?

3. Мама купила брату набор карандашей, а мне набор ручек, который стоил дороже карандашей на 6 руб. Всего она потратила на покупку 62 руб. Сколько стоил набор ручек, а сколько набор карандашей?

4. Таблетки от кашля дешевле микстуры на 85 руб. На оба лекарства от кашля было потрачено 113 руб. Сколько стоит микстура?

5. В книжном шкафу есть книги из собраний сочинений разных авторов, их больше, чем учебников, на 68, а вместе с учебниками их 92. Сколько учебников в шкафу?

6. Младшая сестра любит конфеты, упаковка которых на 12 руб. дешевле, чем плитка шоколада, который люблю я, и на 3 руб. дороже пачки печенья, которое любит брат. Все сладости стоят 108 руб. Сколько стоят конфеты?

7. Школьная форма: юбка, блузка, безрукавка. Безрукавка дороже юбки на 80 руб., а блузка дешевле юбки на 30 руб. Вся покупка стоит 1470 руб. Сколько стоит безрукавка?

8. Утром в школу я еду на электричке, а из школы домой на автобусе. Стоимость проезда в электричке дешевле стоимости проезда в автобусе на 8 руб. Стоимость проезда до школы и обратно 20 руб. Сколько стоит проезд на электричке?

9. Моему брату-грудничку мама купила несколько подгузников, а бабушка подарила на 5 больше. Мама использовала 1 и осталось 10. Сколько подгузников подарила бабушка?

10. Наша школьная библиотека купила новые учебники по математике для пятых классов. Все ученики 5 «А» класса получили новый учебник, это на 2 учебника больше, чем в 5 «Б» классе, и столько же, сколько в 5 «В» классе. Еще два

Все задачи хороши, выбирай на вкус!

Стихи мам

учебника выдано учителям, а всего был куплен 81 учебник. Сколько учебников получил наш 5 «Б» класс?

11. У моего брата есть коллекция марок. После того, как он отдал младшей сестре 15 марок, у него осталось 53 марки. Сколько марок было у брата?

12. Мой друг ходил на рыбалку и поймал несколько рыб. Коту он отдал 5 рыб. У него осталось 11 рыб. Сколько рыб поймал мой друг?

13. У бабушки на двух грядках выросло 80 головок чеснока. Сколько головок чеснока выросло на второй грядке, если на первой выросло больше на 10 головок, чем на второй?

V. Разгадывание кроссворда

Каждый ученик записывает ответы на вопросы, а затем сверяет с правильными ответами, которые проецируются на экран.

Вопросы.

1. Результат сложения. **2.** Группы по три цифры в каждой при записи многозначного числа. **3.** Удобная расфасовка яиц для продажи. **4.** Есть у горы и у треугольника. **5.** Компонент суммы. **6.** В математике — это..., а в Москве она Красная. **7.** Результат вычитания. **8.** Его прибавляют, вычитают, умножают и делят. **9.** Деления линейки. **10.** Точка на координатном луче, соответствующая числу.

					с	у	м	м	а			
					к	л	а	с	с	ы		
			д	е	с	я	т	к	и			
						в	е	р	ш	и	н	а
	с	л	а	г	а	е	м	о	е			
			п	л	о	щ	а	д	ь			
	р	а	з	н	о	с	т	ь				
						ч	и	с	л	о		
						ш	к	а	л	а		
к	о	о	р	д	и	н	а	т	а			

Перед уроком был оформлен стенд с кроссвордами, среди них был кроссворд одного из пап моих нынешних учеников.

На протяжении всего урока заполнялся оценочный лист («+» — правильный и полный ответ, «+/–» — частично правильный или неполный ответ, «–» — неверный ответ).

В конце урока оценочный лист сдается для выставлении отметки.

Дата ____		Ф.И. ____________		Класс 5 ____	
Тест	Устный счет	Выражения	Решение задачи	Кроссворд	Ответы
1	а)				
2	б)				
3	в)				
4					
5					

Подводится итог урока; в заключение слушаем еще одно стихотворение о математике, написанное мамой Иры Петровой.

Ты серьезна, как Мадонна,
И как маятник точна.
Суть глубин твоих бездонных
Вот познать бы до конца!
Можешь быть порою хитрой,
Непонятной для меня,
Утомительной, капризной,
Только лживой никогда!
И за это, ты ведь знаешь,
Уважаю я тебя:
Чтобы в жизни ни случилось,
Не изменишь никогда!
Ведь какой бы беспорядок
Был повсюду и везде,
Если б ты, моя подружка,
Не царила на земле!

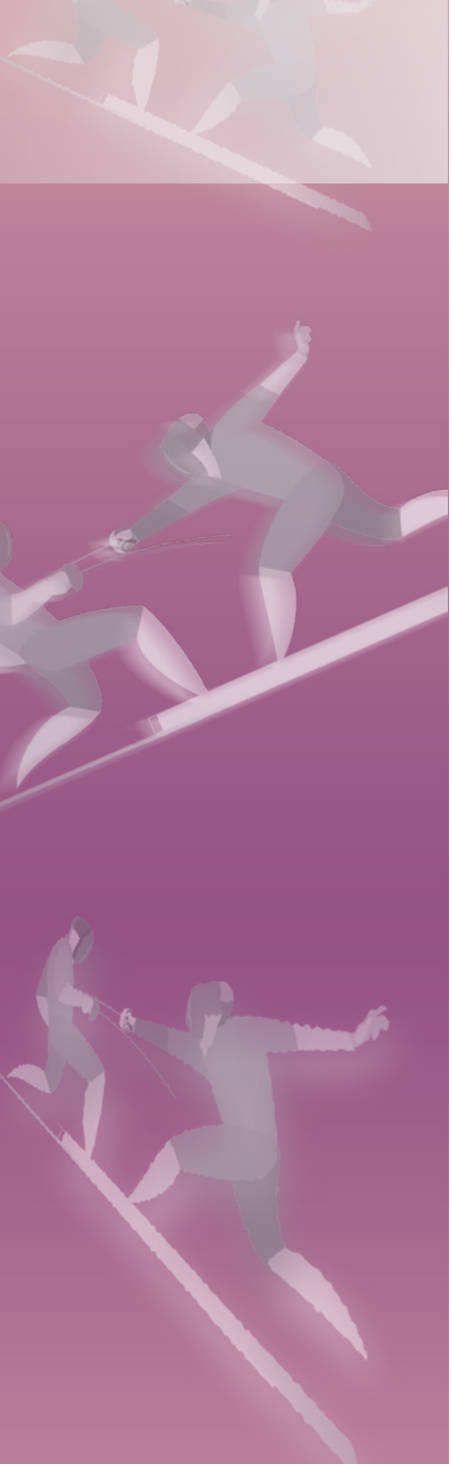
Мне до кроссворда папы — расти и расти!

Ух, ты! Какая интересная задача!

6 класс

А. ВИНОГРАДОВА,
anuscka78@mail.ru,
пос. Нахабино, Московская обл.

«МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ» КАК ФОРМА КОНТРОЛЯ



Одним из эффективных путей развития у школьников интереса к предмету является организация их игровой деятельности. В играх различные знания и новые сведения ученик получает непроизвольно. Поэтому часто то, что на уроке казалось трудным, даже непостижимым, во время игры легко усваивается. Здесь интерес и удовольствие — важные психологические показатели игры. В процессе игр учащиеся приобретают самые различные знания о предметах и явлениях окружающего мира. Игра развивает детскую наблюдательность и способность определять свойства предметов, выявлять их существенные признаки. Таким образом, игры оказывают большое влияние на умственное развитие учащихся, совершенствуя их мышление, внимание, творческое воображение.

Назначение дидактических игр — развитие познавательных интересов у школьников, обобщение знаний, приобретаемых на уроках. Характерным для каждой дидактической игры является, с одной стороны, решение различных дидактических задач. С другой стороны, неотъемлемым элементом дидактической игры является игровое действие. Внимание ученика направлено именно на него, а уже в процессе игры он незаметно для себя выполняет обучающую задачу. Не всегда победителями игры становятся хорошо успевающие учащиеся. Часто терпение и настойчивость проявляют в игре те, у кого этого не хватает для систематического приготовления уроков.

Однако надо помнить, что дидактические игры хороши в системе с другими формами обучения, использование которых должно привести учащихся к самостоятельному приобретению знаний.

Проблема усвоения теоретического материала актуальна на любой ступени обучения, в том числе и в основной школе. Доказать учащимся, что без знания правил, законов, теорем обучение математике не может быть успешным, — задача не из легких. Включение в урок игровых моментов делает процесс обучения более интересным и занимательным, создает у детей бодрое рабочее настроение, облегчает преодоление трудностей в усвоении учебного материала. Предлагаю тематическую разработку **игры «Математический бой»** по теме **«Делимость чисел»**.

К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru (Перечень вопросов по темам: «Сложение и вычитание дробей», «Умножение и деление дробей», «Отношения и пропорции», «Рациональные числа», «Решение уравнений», «Координаты на плоскости».)

Математический бой по теме «Делимость чисел»

Цель игры: обобщить знания по теме «Делимость чисел», повысить уровень усвоения теоретического материала по данной теме.

Условия игры: Игра проводится среди учащихся одного класса, который делится на команды. В зависимости от преследуемых целей команды могут быть составлены учителем или сформированы учениками. На первом уроке новой темы учитель раздает базовый лист контроля. В нем перечислены основные понятия, правила, теоремы, которые обязан знать каждый. Перечень вопросов к математическому бою формируется на основании базового листа контроля. Их содержание подбирается таким образом, чтобы обязательные результаты обучения были представлены максимально полно. Задания состоят из двух частей: обязательной и дополнительной. В первую часть входят вопросы минимального уровня, дополнительная часть — это вопросы общего и продвинутого уровней (отмечены звездочкой). Чтобы учащиеся умели формулировать вопросы, последние задания в рамках предложенной темы они могут заранее подготовить.

Ход игры

Учитель знакомит класс со схемой игры. В ней представлена очередность вопросов команде-сопернице. В данной игре схема рассчитана на 3 команды (I, II и III).

Схема математического боя

I – II, III – I, II – I, I – III, III – II, II –III,
II – I, I – III, III – II, II –III, III – I, I – II.

Каждой команде выдается перечень вопросов, а также схема игры. На экране появляется игровое поле. Команды поочередно задают друг другу вопросы согласно схеме игры, предварительно выбирая ученика из команды-соперницы, которому данный вопрос будет задан. Каждый ученик отвечает не более одного раза. Команда, задающая вопрос, оценивает правильность ответа. Если ответ неверный, то задающая вопрос команда сама на него отвечает. За каждый правильный ответ команда получает один балл. Побеждает команда, набравшая наибольшее количество баллов.

Участники команды заинтересованы в знаниях каждого ее члена, так как любой вопрос может быть задан любому ученику, поэтому команды формируются задолго до самой игры. В ходе подготовки к игре учащиеся контролируют друг друга, тем самым повторяя теоретический материал данной темы, и дидактическую цель данной игры можно считать достигнутой.

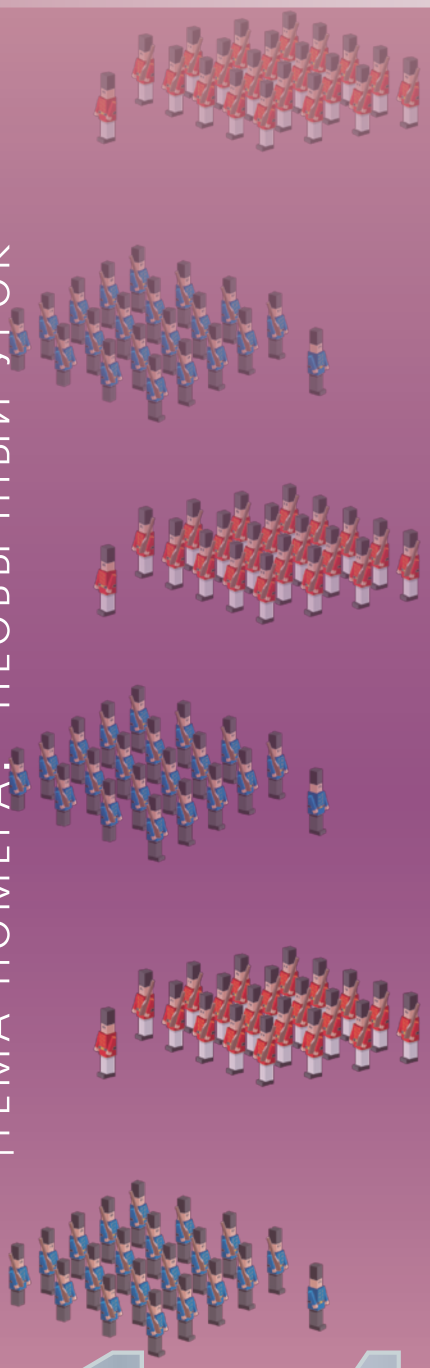
Вопросы

1. Какое число называется делителем данного натурального числа? **2.** Какое число называется кратным данному натуральному числу? **3.** Какое число является делителем любого натурального числа? **4.** Какое число и кратно n, и является делителем n? **5.** Как по записи натурального числа определить, делится оно без остатка на 10 или нет? **6.** Как по записи натурального числа узнать, делится оно без остатка на 5 или не делится? **7.** Как по записи натурального числа узнать, делится оно без остатка на 2 или нет? **8.** Как по записи натурального числа узнать, делится оно без остатка на 9 или нет? **9.** Как по записи натурального числа узнать, делится оно без остатка на 3 или нет? **10.** Какие натуральные числа называются простыми? **11.** Какие натуральные числа называются составными? **12.** Какое число ни простое, ни составное. Почему? **13.*** Как по записи натурального числа определить, делится оно без остатка на 11 или нет? **14.*** Как по записи натурального числа определить, делится оно без остатка на 8 или нет? **15.*** Как по записи натурального числа определить, делится оно без остатка на 4 или нет? **16.** Чем могут отличаться два разложения одного и того же числа на простые множители? **17.*** Какие методы «отсеивания» простых чисел от составных вы знаете? **18.** Какое число называется наибольшим общим делителем нескольких натуральных чисел? **19.** Как найти наибольший общий делитель нескольких чисел? **20.** Какие два числа называются взаимно простыми? **21.** Какое число называется наименьшим общим кратным нескольких натуральных чисел? **22.** Как найти наименьшее общее кратное нескольких чисел? **23.*** Какие числа называют числами-близнецами? **24.*** Какие числа называют дружественными? **25.*** Какое число в математике называется совершенным? **26.** Какие числа называются четными? **27.** Какие числа называются нечетными? **28.** Какое число имеет бесконечное множество делителей?

Знание заранее объема требований того, чему должны научиться, какие формы работы и проверки знаний могут быть использованы учителем, а также наличие одинаковых шансов и возможностей для получения более высокой оценки повышает математическую культуру учащихся, активизирует мотив достижения успеха.

В. МОРОЗ,
moroz-v-p@yandex.ru,
Тюменская обл., ХМАО-Югра

ОБЩЕСТВЕННЫЙ СМОТР ЗНАНИЙ ПО МАТЕМАТИКЕ



Общественный смотр знаний является одной из форм проверки знаний учащихся по определенному (обычно достаточно большому) разделу программы, систематизации и обобщения изученного материала. Готовясь к смотру знаний, учащиеся лучше вникают в изученную тему, в их сознании выстраивается общая картина того, что они выучили, ребята постигают основные идеи всех рассмотренных вопросов.

Вся атмосфера подготовки и проведения смотров знаний показывает, что такая форма контроля является прогрессивной и при умелом ее использовании дает положительный результат на различных возрастных уровнях. Процесс подготовки к смотру знаний заставляет учащихся пересмотреть свое отношение к самоподготовке, осознать, что систематическая работа над собой есть залог успеха в познании.

Психологический эффект этой работы переоценить трудно: решается самая главная задача — повышение активности и результативности мыслительной деятельности учащихся.

Уже на первых уроках изучения темы учащимся сообщается о проведении смотра знаний, «маленького экзамена». В кабинете вывешиваются вопросы, по которым ребята начинают постепенно готовиться.

Задача таких уроков — подвести итог знаний по теме. Обычно он проводится последним в теме, после самостоятельных, проверочных, творческих и контрольных работ.

Смотр знаний — это демонстрация, показ знаний, умений и навыков по изученной теме в присутствии большого количества гостей: родителей, администрации школы, учителей, старшеклассников-помощников, учащихся параллельных классов.

В проведении смотра знаний мне помогают мои старшеклассники, предварительно сдавшие зачет по этой теме. Они разбиваются на комиссии по приему различных разделов темы, например:

– теория;
– задачи на построение;
– вычислительные задачи;
– тестирование;
– дополнительное задание;
– итоговая комиссия.

К ним присоединяются учителя-предметники.

В классной комнате каждой комиссии отведено отдельное, обозначенное табличкой место, где они и принимают у ребят свой раздел, выставляя оценки в маршрутные листы учащихся.

В маршрутных листах указаны все виды заданий, которые необходимо сдать ученику, предварительно подготовившись на своем ра-

К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru
(Смотр знаний по теме «Тождества сокращенного умножения».)

бочем месте, которое соответственно оборудовано: вопросы к смотру знаний, карточки с заданиями, бумага и геометрические инструменты.

Путешествуя по классу, учащиеся защищают свои решения в комиссиях.

После прохождения всех комиссий ученики принимаются за дополнительное задание повышенной трудности, которое оценивается отдельно.

Итоговая комиссия по выставленным в маршрутном листе оценкам выставляет итоговую отметку, которая идет в журнал.

Обычно два ученика-добровольца готовятся у доски и отвечают в конце урока для всей аудитории.

Смотр знаний требует много времени, и лучше проводить его на спаренных уроках.

В конце смотра каждая комиссия отмечает лучшие ответы по своему разделу. Учащимся сообщаются оценки и лучшим вручаются призы (это могут быть самодельные значки типа «Молодец», «Отлично», «Хорошо», математические закладки, справочные таблицы, изготовленные старшеклассниками).

Что дает смотр знаний учащимся?

1. «Перелопачивается» весь материал по теме (и теория, и практика).

2. Ребята учатся общаться с посторонними людьми (ведь к своему учителю они привыкли).

3. Учатся защищать, обосновывать свои решения, что им очень пригодится в будущем.

4. Развиваются память, речь.

5. Старшеклассники-помощники повторяют материал двухлетней давности.

6. С психологической точки зрения преодолевается барьер стеснительности.

Смотр знаний по геометрии. Тема: «Четырехугольники»

Учебник: *Погорелов А.В.* Геометрия, 7–11.

Вопросы к смотру знаний

1. Определение четырехугольника, его элементы, выпуклый четырехугольник.

2. Определение и свойства параллелограмма. Знать доказательства теорем 6.1–6.3.

3. Определение и свойства прямоугольника. Знать доказательство теоремы 6.4.

4. Определение и свойства ромба. Знать доказательство теоремы 6.5.

5. Определение квадрата и его свойства.

6. Сформулировать теорему Фалеса (теорема 6.6) и рассказать, как с ее помощью можно разделить отрезок на несколько равных частей.

7. Определение трапеции, равнобокой трапеции. Свойства равнобокой трапеции.

8. Определение и свойства средней линии трапеции. Уметь доказывать теорему 6.8.

I этап. Геометрическая разминка

Учитель, показывая модели четырехугольников, сделанных учащимися, задает вопросы.

1. Дайте определение четырехугольника.

2. Сформулируйте определение и свойства параллелограмма, прямоугольника, ромба.

3. Перечислите признаки параллелограмма, прямоугольника, ромба.

II этап. Тестирование (*15 мин.*)

Вариант 1

1. Определите, верно ли каждое из следующих утверждений, и запишите в таблице ответов под ним «да» или «нет».

А. Четырехугольник является параллелограммом, если сумма любых двух его углов равна 180°.

Б. Четырехугольник является параллелограммом, если две противолежащие стороны его равны.

В. Четырехугольник является параллелограммом, если его противолежащие стороны параллельны.

Г. Четырехугольник является параллелограммом, если его диагонали перпендикулярны.

Ответ:

А	Б	В	Г

2. Укажите **неверное** утверждение среди следующих.

А. Диагонали прямоугольника равны.

Б. Диагонали прямоугольника делятся точкой пересечения пополам.

В. Диагонали прямоугольника перпендикулярны.

Г. Диагональ делит прямоугольник на два равных треугольника.

Ответ: ____________

3. Установите и укажите в ответе какими свойствами обладает параллелограмм, а какими ромб.

А. Противолежащие стороны равны.

Б. Диагонали точкой пересечения делятся пополам.

В. Диагонали равны.

Г. Диагонали перпендикулярны.

Д. Диагонали являются биссектрисами его углов.

Е. Противолежащие углы равны.

Ответ:

параллелограмм	ромб

4. Одна сторона прямоугольника равна 6,2 см, а другая сторона больше ее на 2,6 см. Чему равен периметр прямоугольника?

А. 8,8 см. **Б.** 15 см. **В.** 19,2 см. **Г.** 30 см.

5. Полупериметр прямоугольника равен 42 см, а одна из сторон равна 12 см. Чему равна другая сторона прямоугольника?

А. 15 см. **В.** 30 см.
Б. 21 см. **Г.** 36 см.

6. Расстояния от точки пересечения диагоналей ромба до его вершин равны 8 см и 6 см. Какова длина каждой диагонали?

А. 4 см и 3 см. **В.** 12 см и 9 см.
Б. 8 см и 6 см. **Г.** 16 см и 12 см.

7. Сумма двух углов параллелограмма равна 260°. Найдите углы параллелограмма.

А. 40°, 40°, 140°, 140°.
Б. 50°, 50°, 130°, 130°.
В. 65°, 65°, 115°, 115°.
Г. 80°, 80°, 100°, 100°.

8. В прямоугольнике $ABCD$ биссектриса угла A делит сторону BC на отрезки $BK = 7$ см и $KC = 9$ см. Найдите периметр прямоугольника.

А. 32 см. **В.** 48 см.
Б. 46 см. **Г.** 50 см.

Задания 2, 4–8 оцениваются по одному баллу. Задание 1 и каждое из заданий задания 3 оценивается: 2 баллами, если нет ни одной ошибки; 1 баллом при наличии 1 ошибки; если ошибок более одной, то выставляется 0 баллов.

Критерии оценивания:
11–12 баллов — отметка «5»;
9–10 баллов — отметка «4»;
6–8 баллов — отметка «3»;
менее 6 баллов — отметка «2».

III этап. Индивидуальная работа с заданиями на карточках

Учащиеся разбиваются следующим образом: два человека работают у доски по специальной карточке, остальные получают карточки с заданиями в 6 вариантах и по мере готовности защищают свои решения в соответствующих комиссиях. Таким образом организован непрерывный процесс: одни, сдав теорию и доказав теорему, принимаются за решение задач, а другие наоборот.

Карточка для работающих у доски

1. В равнобокой трапеции диагональ образует с основанием угол 30°. Найдите углы трапеции, если известно, что меньшее основание трапеции равно его боковой стороне.

2. На плоскости отмечены три последовательные вершины параллелограмма. Постройте его четвертую вершину. Найдите два различных способа решения этой задачи.

3. Докажите теорему по своему усмотрению.

Карточки для работающих на местах

В–1

1. Углы при основании трапеции равны 46° и 72°. Найдите остальные углы трапеции.

2. Начертите произвольный отрезок BC и разделите его на 5 равных частей.

3. Докажите теорему 6.3 (о сторонах и углах параллелограмма).

В–2

1. Концы отрезка, расположенного по одну сторону от прямой, удалены от нее на расстояние 6 см и 10 см. На каком расстоянии от прямой находится середина этого отрезка?

2. Начертите три отрезка разной длины и постройте параллелограмм, диагональ которого равна самому длинному отрезку, а стороны равны двум другим отрезкам. Найдите два различных способа решения этой задачи.

3. Докажите теорему 6.1 (о диагоналях четырехугольника).

В–3

1. Вычислите углы параллелограмма, если его углы, прилежащие к одной стороне, относятся как 2 : 3.

2. Начертите два произвольных отрезка и постройте ромб с диагоналями, равными этим отрезкам. Найдите два различных способа решения этой задачи.

3. Докажите теорему 6.4 (о диагоналях прямоугольника).

Дополнительные задания

1. Диагональ BD трапеции $ABCD$ перпендикулярна боковой стороне AB, $BC = BD$, $\angle A = 50°$. Найдите остальные углы трапеции.

2. Через вершину D равнобокой трапеции $ABCD$ проведена прямая, параллельная стороне BC и пересекающая основание AB в точке E. Докажите, что треугольник ADE равнобедренный.

3. Докажите, что у равнобокой трапеции углы при основании равны.

4. Докажите, что у равнобокой трапеции диагонали равны.

5. Докажите, что середины сторон равнобокой трапеции являются вершинами ромба.

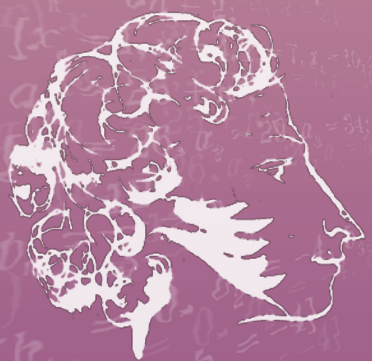
6. Даны три вершины параллелограмма $MPDE$. Постройте четвертую вершину E. Найдите два различных способа ее построения.

Ученики, работавшие у доски, получают слово в конце урока.

IV этап. Подведение итогов. Награждение

С. ЛУКОНИНА,
lukoninasveta@yandex.ru,
г. Казань

АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ ПУШКИНА



Данный урок является интегрированным уроком математики и литературы, рассчитан на учащихся 9-го класса. Учащиеся нередко математику воспринимают как некое нагромождение чисел, формул и расчетов. Такое восприятие не способствует созданию положительной мотивации для усвоения предмета. Я хочу показать эту наука совсем с другой стороны, показать ее неотъемлемую связь с тем, что мы называем прекрасным, показать, как математика связана со многими творениями рук человеческих.

Ход урока

Учитель. Ребята, какой сейчас у вас урок по расписанию?

(*Математика.*)

А говорить на этом уроке мы будем о литературе, а если конкретно, то о поэзии. И в конце урока вы мне скажете, какая связь между этими предметами. Как вы думаете, что хочет выразить автор в своих стихах?

(*Настроение, чувства.*)

Правильно, автор лирического произведения стремится к выражению чувств, своего отношения к природе, родине, к другому человеку, к самому себе. Сейчас я прочитаю вам строчки, а вы подумайте: это стихи или нет?

1. *Сердечным «ты» пустое «вы»*
   Она заменила, обмолвясь,
   И мечты все счастливые
   Возбудила в душе влюбленной.
2. *Одинокий парус белеет*
   В тумане моря голубом. —
   Что́ он ищет в далекой стране?
   Что́ он кинул в родном краю?

(*Это проза.*)

Да, это проза. Получилось так, что я изменила порядок слов, — и что-то пропало. А как должны звучать стихи?

(*Музыкально, ритмично.*)

А ритм и пропал. Верните ритм и прочитайте эти строчки. Со словом «ритм» мы часто встречаемся в жизни. Например, где?

(*В танце, музыке, ритмична смена времен года, дня и ночи.*)

Ритм — это свойство всемирного бытия. Много ритмичного в работе человеческого организма: работа сердца, дыхание. В окружающем мире есть ритмы, которые поэт берет, перенимает: стук колес поезда, ритм часов. Например, у Пушкина есть «Стихи, сочиненные ночью во время бессонницы»:

Мне не спится, нет огня;
Всюду мрак и сон докучный.
Ход часов лишь однозвучный
Раздается близ меня.

А вот другой поэт тоже передает тиканье часов. Булат Окуджава. «Часики»:

А часики тикают, тикают, тикают,
Тикают ночи и дни,
И тихую, тихую, тихую, тихую
Жизнь мне пророчат они.

Замечено, что дети сочиняют свои первые стихи в таком ритме: та-та та-та та-та. Откуда это? Какой ритм они постоянно ощущают?

(*Биение сердца.*)

А ритм — это сердце поэзии. А когда сердце бьется чаще?

(*Когда человек возбужден, когда счастлив.*)

А когда медленнее?

(*Когда грустен, задумчив.*)

Также и в стихах. Давайте прочитаем два стихотворения. Первое стихотворение — Павло Тычины «Вечер»:

На цыпочках
Подкрался вечер:
Зажег звезду,
И постелил туманы,
И, палец приложив к губам,
Прилег.

Второе стихотворение — Корнея Чуковского «Мойдодыр»:

Утюги за сапогами,
Сапоги за пирогами,
Пироги за утюгами,
Кочерга за кушаком —
Все вертится,
И кружится,
И несется кувырком.

Какие ваши ощущения?

(*В первом случае грустно, а во втором — весело.*)

Ритм — это повторяемость одинаковых знаков. А чем создается ритм? Давайте постучим:

Бу́ря мгло́ю не́бо кро́ет,
Ви́хри сне́жные крутя́;
То́, как зве́рь, она́ заво́ет,
То́ запла́чет, ка́к дитя́...

И запишем:

! - ! - ! - ! -
! - ! - ! - !
! - ! - ! - ! -
! - ! - ! - !

Зимою в школу он бежит,
А летом в комнате лежит,
Но только осень настает,
Меня он за руку берет.

И запишем:

- ! - ! - ! - !
- ! - ! - ! - !
- ! - ! - ! - !
- ! - ! - ! - !

Итак, ритм создается чередованием ударных и безударных слогов. А сравните две схемы, чем они отличаются? Что общего?

(*В первом случае ударение падает на первый слог, а во втором — на второй слог.*)

Вы на уроке литературы по моей просьбе вспоминали стихотворные размеры. Какие размеры мы получили?

(*В первом стихотворении хорей, во втором — ямб.*)

Вспомним, как определять размеры стихов.

(*Карточки у каждого учащегося, далее работа с карточками.*)

Стихотворение	Стихотворный размер
Мороз и солнце, день чудесный Еще ты дремлешь, друг прелестный. *А.С. Пушкин*	Ямб 2, 4, 6, 8...
Елка плакала сначала От домашнего тепла. Утром плакать перестала, Задышала, ожила. *С.Я. Маршак*	Хорей 1, 3, 5, 7...
Мне не спится, нет огня; Всюду мрак и сон докучный. Ход часов лишь однозвучный Раздается близ меня. *А.С. Пушкин*	Хорей
Сухой тростник он срезал И скважину продул, Один конец зажал он, В другой конец подул... *М.Ю. Лермонтов*	Ямб
Когда идешь тропинкою, Куда ни глянь, в полях Белеют чудо-шарики На стройных стебельках. *В.А. Рождественский*	Ямб

Какая особенность у размера ямб?

(*Ямб — это двухсложный стихотворный размер с ударением на четных слогах: 2, 4, 6, 8...*)

Какая особенность у стихотворного размера хорей?

(*Хорей — это двухсложный стихотворный размер с ударением на нечетных слогах: 1, 3, 5, 7...*)

Внимательно посмотрите на эти две последовательности и найдите закономерность в них.

(*Соседние числа в последовательностях отличаются друг от друга на одно и то же число, на два.*)

Наши последовательности называются ***арифметическими прогрессиями***.

Итак, открываем тетради и записываем тему: «Арифметическая прогрессия».

Теперь давайте попробуем сформулировать определение арифметической прогрессии.

(*Арифметической прогрессией называется последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, сложенному с одним и тем же числом.*)

Введем обозначения:

(a_n) — арифметическая прогрессия;

a_1 — первый член арифметической прогрессии;

a_n — n-й член арифметической прогрессии;

d — разность арифметической прогрессии, то есть разность между любым членом арифметической прогрессии, начиная со второго, и предыдущим членом.

Задание 1. Найдите члены арифметической прогрессии, обозначенные буквами:

а) $-6; -4; -2; a_4; a_5; \ldots;$ $[a_4 = 0,\ a_5 = 2]$

б) $14; a_2; 20; a_4; \ldots;$ $[a_2 = 17,\ a_4 = 23]$

в) $a_1; a_2; -3{,}4; -1{,}4; \ldots$ $[a_1 = -7{,}4,\ a_2 = -5{,}4]$

Задание 2. Назовите предыдущий и последующий члены для данного члена прогрессии.

а) a_8; $[a_7, a_9]$

б) f_{33}; $[f_{32}, f_{34}]$

в) b_{126}; $[b_{125}, b_{127}]$

г) a_k; $[a_{k-1}, a_{k+1}]$

д) a_{2k}; $[a_{2k-1}, a_{2k+1}]$

е) a_{2n+3}. $[a_{2n+2}, a_{2n+4}]$

Теперь вернемся к нашим получившимся прогрессиям.

Задание 3. Найдите a_3 и a_5.

а) $a_1 = 2,\ d = 2$;

б) $a_1 = 1,\ d = 2$.

Можем мы найти, например, шестой элемент этих прогрессий?

[а) $a_6 = 12$; б) $a_6 = 11$]

Как найти a_{100}?

Используя определение арифметической прогрессии, найдем формулу n-го члена арифметической прогрессии.

$a_2 = a_1 + d;$

$a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d;$

$a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d;$

$a_n = a_1 + d(n - 1).$

Вернемся к нашим примерам и найдем a_{100}.

а) $a_{100} = a_1 + 99d = 2 + 99 \cdot 2 = 200;$

б) $a_{100} = a_1 + 99d = 1 + 99 \cdot 2 = 199.$

С помощью этой формулы мы можем найти любой член арифметической прогрессии.

Задание 4. Пусть дана последовательность чисел: 3; 6; 9; x; 15; 18; ... Определите, является ли данная последовательность арифметической прогрессией. Если да, то найдите x тремя способами.

Способ I. $a_4 = a_1 + 3d = 3 + 3 \cdot 3 = 12.$

Способ II. $d = 3,\ 9 + 3 = 12.$

Способ III. $\frac{9+15}{2} = \frac{24}{2} = 12.$

Третий способ нахождения a_n называется характеристическим свойством арифметической прогрессии:

$$a_n = \frac{a_{n+1} - a_{n-1}}{2}$$

Задание 5. Является ли заданная последовательность арифметической прогрессией и почему?

а) $-1; -1; -1; \ldots;$

[*да*: $a_1 = -1,\ d = 0$]

б) $0; 5; 10; 15; 25; 31; \ldots;$

[*нет*: $25 - 15 \neq 31 - 25$]

в) $-3; -1; 1; 3; \ldots;$

[*да*: $b_1 = -3,\ d = 2$]

г) $x_n = 3n - 2;$

[$x_1 = 1, x_2 = 4, x_3 = 7, x_4 = 10, d = 3$; *да*: $d = x_{n+1} - x_1 = 3$]

д) $a_n = 25 + n^2;$

[$a_1 = 26,\ a_2 = 29,\ a_3 = 34$; *нет*: $29 - 26 \neq 34 - 29$]

е) $b_n = \frac{12}{3} - 4n.$

[$b_1 = 0,\ b_2 = -4,\ b_3 = -8,\ b_4 = -12,\ d = -4$; *да*: $d = b_{n+1} - b_n = -4$]

Задание 6. Выразите через первый член арифметической прогрессии и разность:

а) a_8; $[a_8 = a_1 + 7d]$

б) f_{33}; $[f_{33} = f_1 + 32d]$

в) b_{126}; $[b_{126} = b_1 + 125d]$

г) a_k; $[a_k = a_1 + d(k - 1)]$

д) a_{2k}; $[a_{2k} = a_1 + d(2k - 1)]$

е) a_{2n+3}. $[a_{2n+3} = a_1 + d(2n + 2)]$

Задание 7. Найдите:

а) a_5, если $a_1 = 4$ и $d = 7$;

$[a_5 = a_1 + 4d = 4 + 4 \cdot 7 = 32]$

б) a_{12}, если $a_{11} = 20$ и $a_{13} = 30$;

$\left[a_{12} = \frac{a_{11} + a_{13}}{2} = \frac{20 + 30}{2} = 25\right]$

в) a_1, если $a_{10} = 126$ и $d = 4$;

[$a_{10} = a_1 + 9d$, откуда $a_1 = 126 - 9 \cdot 4 = 90$]

г) d, если $a_{25} = 84,\ a_1 = 12$.

[$a_{25} = a_1 + 24d$, откуда $d = \frac{84 - 12}{24} = 3$]

Задание 8. Даны две арифметические прогрессии:

а) 2; 5; 8; 11; 14; ... и б) 8; 3; –2; –8; –13; ...

Найдите d и выявите закономерность.

[а) $d = 3$, $3 > 0$ — возрастающая арифметическая прогрессия; б) $d = -5$, $-5 < 0$ — убывающая арифметическая прогрессия].

Задание 9. Определите монотонность арифметической прогрессии.

а) $a_n = 4n - 1$;

[$a_1 = 3$, $a_2 = 7$, $d = 4$, $4 > 0$ — возрастающая арифметическая прогрессия]

б) $b_n = 4 - 5n$.

[$b_1 = -1$, $b_2 = -6$, $d = -5$, $-5 < 0$ – убывающая арифметическая прогрессия]

Задание на дом

1. Выучить правила и формулы по теме «Арифметическая прогрессия».
2. № 349, 354, 355, 359, 363 (г–е).

Учитель. В начале урока я попросила вас найти связь между математикой и литературой. Кто хочет ответить на поставленный вопрос.

(*Математика и литература неразрывны между собой. Математика есть в литературе, как и литература в математике, что подчеркивает гармонию нашего мира.*)

Что вы понимаете под словом «литература»? (*Поэзия, проза и т.д.*)

Конечно, называть литературой обыденную речь, записанную на бумаге, недопустимо и даже кощунственно. Но что поднимает литературу над каждодневными монологами и диалогами? Разумеется, законы формы. Законы формы вообще отличают искусство от неискусства — симфонию от какофонии, архитектурный шедевр от заурядной постройки, литературное произведение от информационного сообщения. Но форма — это порядок, а порядок — это математика. Значит, чем строже литература следует законам формы, тем ярче в ней проявляются законы математики. Я думаю, что вы это учтете, если захотите стать великими поэтами или писателями.

Литература

1. Алгебра: учеб. для 9 кл. общеобр. учреждений / Ю.Н. Макарычев и др. — М.: Просвещение. 2. *Волошинов А.В.* Математика и искусство. — М.: Просвещение, 1992. 3. *Сухаревская Е.Ю.* Технология интегрированного урока // Учитель, 2003.

КАК СТАТЬ АВТОРОМ ЖУРНАЛА «МАТЕМАТИКА»?

Сделать это несложно: надо лишь написать статью и прислать ее в редакцию журнала. И еще одно условие — она должна быть интересна и полезна вашим коллегам.

Требования к оформлению статьи таковы:

Материал должен быть напечатан на компьютере или на пишущей машинке.

Рисунки должны быть четкими, аккуратными, выполненными на белой нелинованной или клетчатой бумаге с помощью чертежных инструментов. Если вы хорошо владеете компьютером, можете воспользоваться для этого программой Corel Draw.

Рисунки надо пронумеровать, нумерация должна соответствовать их нумерации в тексте.

Фотографии должны быть цветными. Формат фотографий, отпечатанных на бумаге, не менее 10 × 15 см. Размер цифровых фотографий не менее 800 × 600 пикселей, формат JPG, качество, используемое при сохранении JPG-файлов, высокое (high).

Прислать статью можно по почте или по электронной почте. Всю необходимую для этого информацию вы найдете на странице 2 журнала.

Для получения сертификата о наличии печатной работы необходимо заполнить карточку автора.

Фамилия		
Имя		
Отчество		
Дата рождения		
Место рождения		
Адрес проживания		
Индекс	город	
Улица		
Дом	корпус	квартира
Телефон		
Информация о профессиональной деятельности		
Должность		
Место работы (полное официальное наименование образовательной организации)		
Стаж работы		

И. БУЙЛОВА, С. НОВИКОВА,
г. Череповец, Вологодская обл.

РАЗНОВОЗРАСТНЫЙ УРОК КАК ФОРМА ИТОГОВОГО ПОВТОРЕНИЯ

Планируя организацию итогового повторения, мы обратили внимание, что в 9-х и 11-х классах ряд тем совпадают: текстовые задачи, прогрессии, графическое решение уравнений и неравенств. В связи с этим появилась идея проведения разновозрастного урока в рамках итогового повторения. Разновозрастный урок характеризуется особым эмоциональным состоянием учащихся. Девятиклассники испытывают гордость, выполняя задания уровня 11-го класса. Ученики 11-го класса понимают необходимость подтвердить свой статус старших по возрасту и доказать, что они знают больше девятиклассников, и готовы выступить в качестве консультантов. Особенности психологии учеников 9-го и 11-го классов (стремление к лидерству, к общению) способствуют повышению их активности, работоспособности.

Опыт показывает, что повторение материала крупными блоками дает возможность значительно увеличить объем рассматриваемого материала при снижении нагрузки на ученика. Снижению утомляемости служит смена видов деятельности, использование задач различной тематики, применение прямых и обратных задач. Данные уроки служат систематизации и совершенствованию знаний учеников выпускных классов.

На уроках рассматриваются задачи различных типов по уровню сложности, по методам решения, по способам оформления.

Применяются различные методы и формы работы: устные и письменные, коллективные, индивидуальные, в парах.

Используются разные формы контроля знаний учащихся: самоконтроль, взаимоконтроль, фронтальный контроль.

Часть текстов заданий, образцов решения и оформления предъявляется с помощью проектора, это приводит к увеличению доли информации, представленной в визуальной форме, снятию проблем технического характера и выдвижению на первый план сути изучаемого вопроса.

Благодаря новизне ситуации, связанной с присутствием учеников другой возрастной группы, применению технологии УДЕ, практической направленности урока, использованию современных информационных технологий ученики не испытывают перегрузки, активны, работают творчески, демонстрируют свои знания и опыт.

К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru (Уроки по темам «Прогрессия» и «Решение задач на движение, работу, покупку».)

Тема урока: «Решение текстовых задач на проценты»

Цели урока:

– систематизация знаний учащихся выпускных классов по решению сюжетных задач на проценты;

– развитие навыков само- и взаимоконтроля;

– развитие коммуникативных способностей, умения работать в новой обстановке;

– формирование умения работать с современной компьютерной техникой.

Оборудование урока: ноутбук, экран, проектор; зеленые листы с задачами для работы на уроке; розовые листы с задачами для самостоятельной работы; синие листы с задачами для домашней работы.

Ход урока

Устная работа

(*Текст заданий проецируется на экран.*)

1. Найдите: а) $\frac{1}{5}$ от 40; б) $\frac{5}{8}$ от 72.

2. Найдите число, если:

а) $\frac{1}{5}$ его равна 40; б) $\frac{5}{8}$ его равны 75.

3. Представьте в виде десятичной дроби:

а) 70%; б) 7%; в) 21,35%.

4. Найдите 20% от 70.

5. Найдите число, если 20% его равны 70.

6. Найдите:

а) какую часть число 40 составляет от числа 120;

б) сколько процентов число 25 составляет от числа 125.

Учитель. Обобщим то, что мы повторили. Запишите в тетради *выводы*, к которым пришли при выполнении предложенных заданий.

1. Чтобы найти число a, составляющее n% от числа b, надо...

2. Чтобы найти число b, если n% от него равны a, надо...

3. Чтоб найти, сколько процентов составляет число a от числа b, надо...

Самостоятельная работа

Учитель. К каждому заданию даются четыре варианта ответа. В бланке ответов поставьте крестик под буквой, которой соответствует правильный ответ.

(*Тексты заданий* 4 *и* 5 *проецируются через проектор.*)

1. На распродаже цены в магазине были снижены на 30%. Некоторый товар до снижения цены стоил x рублей. Четыре ученика написали четыре различных выражения для вычисления новой цены товара. Одно из них неверное. Какое?

А. $x - 0{,}3x$ Б. $0{,}7x$ В. $x - \frac{x}{3}$ Г. $x - \frac{3x}{10}$

2. Летом рюкзак стоил 880 рублей. Осенью цена на рюкзаки снизилась на 25%, а зимой еще на 25%. Сколько рублей заплатит покупатель, если купит рюкзак зимой?

А. 830 Б. 660 В. 495 Г. 165.

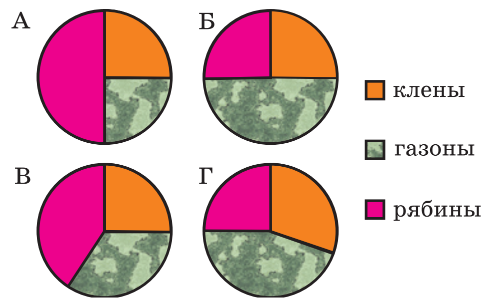
3. В мебельном магазине старые цены заменены новыми. Примерно на сколько процентов снижены цены при распродаже мебели?

Цена	старая	новая
Шкаф	3999 руб.	3000 руб.
Кровать	1205 руб.	900 руб.
Стол	1000 руб.	752 руб.

А. ≈ на 30% Б. ≈ на 20%

В. ≈ на 25% Г. Определить нельзя

4. При озеленении территории парка 25% его площади отвели под посадку кленов, 50% оставшейся площади — под посадку рябин, остальную — под газоны. На какой из диаграмм правильно показано распределение посадок?



(*Учащиеся отвечают на вопросы и заполняют бланк ответов; форма произвольная*)

Задачи на скидки при покупке товаров

(*Ученики в тетрадях решают задачи по вариантам: ВI — № 1, 3; ВII — № 2, 4.*)

1. В ТЦ «Рассвет» покупатель набрал продуктов на 1200 руб. У него имеется карточка на 3%-ю скидку. Во сколько рублей обойдется его покупка?

2. Предновогодняя скидка в магазине «TV-плюс» была 20%. При покупке телевизора покупатель заплатил 24 000 руб. Какова была цена телевизора до новогодней распродажи?

3. В магазине МБТ действуют накопительные скидки. При покупке стиральной машины стоимостью 12 000 руб. обладатель дисконтной карты заплатил 11 760 руб. Каков процент скидки?

4. Костюм состоит из пиджака и брюк. Стоит он 4500 руб. Пиджак отдельно стоит 2700 руб. Сколько процентов от стоимости костюма составляет стоимость брюк?

Ответы: **1.** 1164 руб. **2.** 30 000 руб. **3.** 2%. **4.** 40%.

(*Для проверки заслушиваем ответы трех человек с каждого варианта. При разнице в ответах или при отсутствии хотя бы одного ответа задача разбирается устно.*)

Проверка домашнего задания

(*Решение задач проецируется на экран.*)

1. (*Задача была задана на дом ученикам и 9-го, и 11-го класса.*) Латунь — сплав меди и цинка. Кусок латуни содержит цинка на 80 кг меньше, чем меди. Этот кусок латуни сплавили со 120 кг меди и получили латунь, в которой 75% меди. Определите массу первоначального куска латуни. [3]

(*Ученики BI и BII обмениваются тетрадями, проверяют правильность решения и ставят отметку. Образец решения проецируется на экран.*)

Учитель. Поднимите руки, кто увидел неправильный ответ. Поднимите руки, кто увидел интересное, необычное решение. В чем эта необычность?

Задачи на растворы и сплавы

1. Смешали 400 г воды и 100 г поваренной соли. Какова концентрация соли в растворе?

(*Решение с места комментирует ученик 9-го класса.*)

2. К 400 г 9%-го раствора уксусной кислоты добавили 200 г воды. Сколько процентов уксуса содержится в новом растворе?

(*Решение с места комментирует ученик 11-го класса.*)

3. (*У доски решает ученик 11-го класса.*) К 500 г 5%-го раствора соли добавили 25 г этой же соли. Определите концентрацию полученного раствора соли (ответ округлите до целых).

4. (*У доски решает ученик 9-го класса.*) Имеется 500 г латуни, в которой содержится 40% меди. Сколько граммов цинка нужно добавить в расплав, чтобы получилась латунь с 20%-м содержанием меди?

5. (*У доски решает ученик 11-го класса.*) Имеется 500 г сплава, в котором 40% олова. Сколько граммов олова нужно добавить в расплав, чтобы в новом сплаве содержалось 60% олова?

Ответы: **1.** 20%. **2.** 6%. **3.** ≈10%. **4.** 500 г цинка. **5.** 250 г олова.

Продолжение проверки домашнего задания (обмен опытом)

2. (*Задача была в домашней работе только у 9-х классов.*) При смешивании 40%-го раствора соли с 10%-м раствором получили 800 г раствора с концентрацией соли 21,25%. Сколько граммов каждого раствора было для этого взято? [1]

Ответ: 300 г одного и 500 г другого. *Указание.* Метод решения — составление системы уравнений.

3. (*Задача была в домашней работе только у одиннадцатиклассников.*) При покупке ребенку новых лыж с ботинками родителям пришлось заплатить на 35% больше, чем два года назад, причем лыжи подорожали с тех пор на 20%, а ботинки на 70%. Сколько процентов от стоимости лыж с ботинками составляла стоимость лыж два года назад? [3]

Ответ: 70%. *Указание.* Метод решения — составление уравнения с двумя переменными.

(*Решение задачи в нескольких вариантах оформления проецируется на экран.*)

Самостоятельное решение задач по образцу

1. (*9-й класс*) При покупке ребенку нового спортивного костюма, состоящего из куртки и брюк, родителям пришлось заплатить на 30% больше, чем два года назад, причем брюки подорожали с тех пор на 15%, а куртка на 65%. Сколько процентов от стоимости костюма составляла два года назад стоимость куртки?

Ответ: 30%.

2. (*11-й класс*) Имеется два слитка сплава серебра и олова. Процентное содержание серебра в первом слитке 20%, а во втором слитке 5%. При смешении расплавов этих слитков получили 500 г расплава с 12,35%-м содержанием серебра. Сколько граммов каждого сплава было взято?

Ответ: 245 г первого и 255 г второго.

(*Решать задачи можно по выбору: задачу, аналогичную домашней; задачу, аналогичную задаче другого класса; обе задачи.*)

Домашнее задание

Для 9-го класса

1. На базе отдыха после проведения санитарной обработки количество мух уменьшилось на 40%, а количество комаров на 20%. В целом количество насекомых уменьшилось на 25%. Сколько процентов от общего числа насекомых составляли до санитарной обработки комары? [2]

2. Из ведра в бочку перелили сначала половину имевшейся в нем воды, затем 1 л и наконец 20% остатка. В итоге количество воды в бочке увеличилось на 10%. Сколько воды было в ведре, если в бочке первоначально было 38 л воды? [1]

Для 11-го класса

1. Имеется три слитка латуни. Масса первого слитка равна 5 кг, масса второго равна 3 кг и каждый из них содержит 30% меди. Если первый слиток сплавить с третьим, то получится слиток, содержащий 56% меди. Если второй слиток сплавить с третьим, то получится слиток, содержащий 60% меди. Каким будет процентное содержание меди в сплаве из трех слитков? [1]

2. Из сосуда, доверху наполненного 88%-м раствором кислоты, отлили 2,5 л жидкости и долили 2,5 л 60%-го раствора этой же кислоты. После этого в сосуде получился 80%-й раствор кислоты. Найдите вместимость сосуда в литрах. [2]

журнал

Математика – Первое сентября

1-е полугодие 2016 года

ПОДПИСКА

на сайте www.1september.ru и в почтовых отделениях РФ

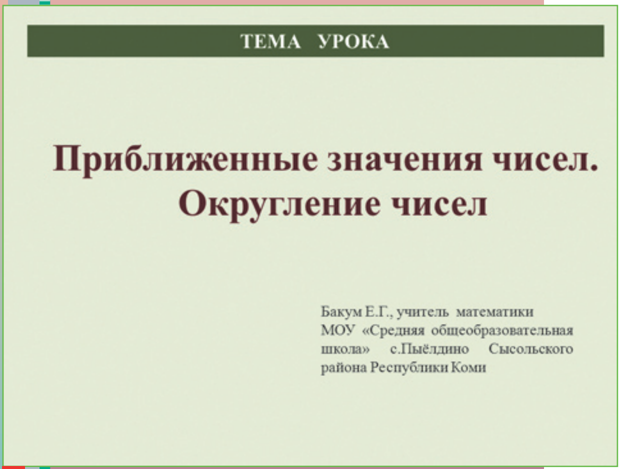
Индекс	Название издания	Периодичн. в полугодие	1 месяц: Каталожная цена (руб.)	1 месяц: Подписная цена (руб.)	6 месяцев: Каталожная цена (руб.)	6 месяцев: Подписная цена (руб.)
Название блока в разделе «Журналы»	**ПЕРВОЕ СЕНТЯБРЯ. ЖУРНАЛЫ ИЗДАТЕЛЬСКОГО ДОМА** (499)249-31-38					
79073	**Математика – Первое сентября. Бумажная версия** *В июне не выходит. Подписка на июнь не принимается* *(-) 160 г 64 стр.*	5	440.00		2200.00	
12717	**Математика – Первое сентября. Электронная версия на CD (полная копия бумажной версии)** *В июне не выходит. Подписка на июнь не принимается* *(-) 75 г*	5	160.00		800.00	
сайт 1september.ru	**Математика – Первое сентября. Электронная версия**	5	–		–	500.00

Подписку принимают во всех отделениях связи Российской Федерации, а также на сайте www.1september.ru

При подключении школы к проекту «Школа цифрового века» (см. digital.1september.ru) каждый учитель получает доступ ко всем журналам Издательского дома «Первое сентября». Стоимость подключения школы на год – 6 тыс. рублей независимо от количества учителей

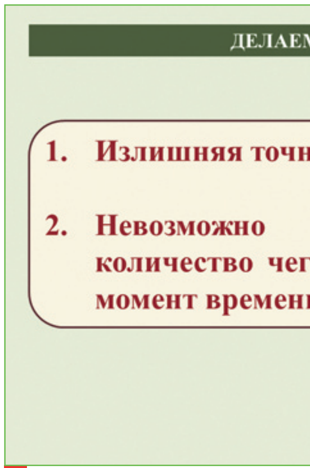
При оформлении подписки на сайте оплата производится по квитанции в отделении банка или электронными платежами on-line

VISA MasterCard QIWI WebMoney



3

4



5

Фрагменты резентации публикуются в авторской редакции

Сегодня в рубрике «Разбор урока» мы обсуждаем урок в 5-м классе. Урок проводит учитель математики Елена Григорьевна БАКУМ, с. Пыёлдино, Республика Коми. Урок обсуждают: главный редактор журнала «Математика» Лариса Олеговна РОСЛОВА, редакторы – Петр Михайлович КАМАЕВ, Ольга Васильевна МАКАРОВА и главный редактор журнала «Школьный психолог» Марина Юрьевна ЧИБИСОВА

5 класс

ТЕМА УРОКА: «ПРИБЛИЖЕННОЕ ЗНАЧЕНИЕ ЧИСЕЛ. ОКРУГЛЕНИЕ ЧИСЕЛ»

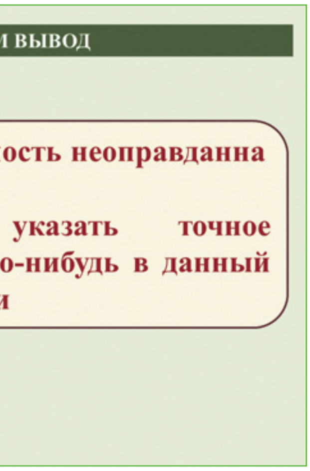
Цели урока:
– содействовать формированию понятия «приближенное значение числа»;
– научить округлять числа, находить приближенные значения с недостатком и с избытком.

Планируемые результаты

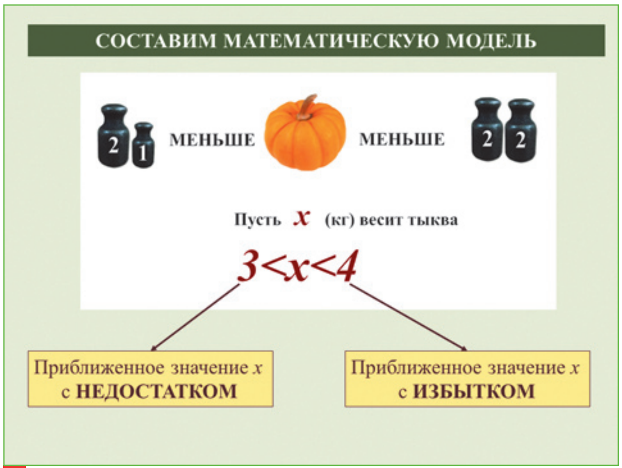
Предметные:
– составить алгоритм округления натуральных чисел и десятичных дробей, научиться применять его;
– усвоить понятия «округление», «приближенное значение числа с недостатком», «приближенное значение числа с избытком»;
– находить приближение чисел с недостатком и с избытком;
– проводить вычисление, округление и оценку (прикидку) результатов в повседневной жизни.

Метапредметные:
– познавательные: осуществлять сравнение и классификацию по заданным критериям; строить рассуждение в форме связанных простых суждений об объекте;
– регулятивные: ставить учебную задачу на основе соотнесения того, что уже известно и усвоено, и того, что еще неизвестно; составлять план последовательности действий; работать по алгоритму; сличать последовательность и результат своих действий с эталоном;
– коммуникативные: находить в тексте информацию, необходимую для решения задачи; устно и письменно выражать свои мысли, идеи.

К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru (Авторская презентация, варианты заданий экспериментов, бланки экспериментов)



6



7

Личностные:
– аргументировать собственное мнение;
– уметь слушать других, пытаться принять другую точку зрения, быть готовым изменить свою;
– иметь навыки самоконтроля и самоанализа.

Решаемые учебные проблемы. • Как округлять числа? • Всегда ли можно округлять числа? • Где в жизни применяется округление дробей?
В чем особенность округления десятичных дробей?

Основные понятия, изучаемые на уроке. Округление; округление числа до какого-либо разряда; приближенные значения числа с недостатком и с избытком; алгоритм округления чисел.

Вид используемых на уроке средств ИКТ: интерактивное задание, мультимедийная презентация, изображение, интерактивные дидактические материалы.

Методическое назначение средств ИКТ: обучающее, информационно-поисковое, демонстрационное, тренажер для отработки умений и навыков, повторение или закрепление пройденного материала).

Аппаратное и программное обеспечение: компьютер учителя, мультимедийный проектор, интерактивная доска, компьютер ученика (5 шт.).

Цифровые образовательные ресурсы: • http://files.school-collection.edu.ru/dlrstore/cf2e579c-0355-4e9e-8de5-432e3b44598b/SnusmumrikBookNatur.swf (1) • http://files.school-collection.edu.ru/dlrstore/cf2e579c-0355-4e9e-8de5-432e3b44598b/SnusmumrikBookCombo.swf (2) • http://files.school-collection.edu.ru/dlrstore/4405006d-80dd-4f42-b530-3e2f985cd21f/%5BM56_5-08%5D_%5BQS_08-CR-04%5D.html (3)

Ход урока

I. Вхождение в тему урока и создание условий для осознанного восприятия нового материала (6 мин.)

Организовать и целенаправить познавательную деятельность учащихся. Учитель задает вопросы, которые приводят к постановке темы и цели урока. 1

1. Какова численность населения нашей страны на сегодняшний день? Можно ли назвать точное число?

[Нет, указать точное количество людей на данный момент времени невозможно: каждую минуту кто-то рождается, кто-то умирает, кто-то уезжает, кто-то приезжает.]

2. За матчем наблюдает 50 132 человека. Нужна ли такая точность? 2

[Не нужна, поэтому комментатор вполне может сказать, что на матче присутствует около 50 000 зрителей.]

Учитель. В таких случаях речь идет о приближенном значении числа. Замену точного значения величины близким к ней «круглым числом» в математике называют ***округлением***.

Запишите тему урока: «Приближенные значения чисел. Округление чисел». 3

Давайте подумаем, можно ли говорить о приближенном значении числа в следующих случаях. 4

– Стыковка космических кораблей.

[Стыковочный узел на космическом корабле изготовляют с точностью до миллиметра.]

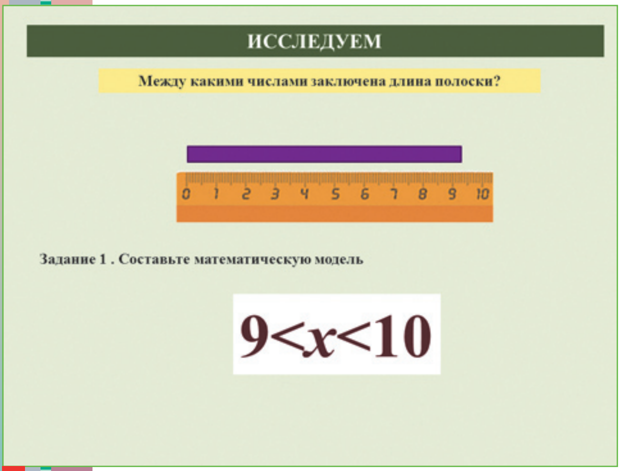
– Изготовление таблеток.

[При взвешивании лекарства нельзя даже до грамма округлять.]

– Сколько лет назад жили динозавры?

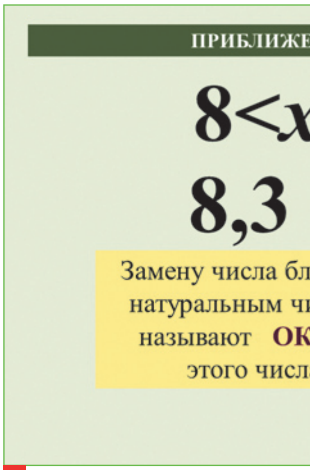
– Сколько граммов пшеницы собрали с поля?

[Никто не считает собранный урожай в граммах.]



8

9



10

Делаем *выводы*: излишняя точность может быть неоправданной; невозможно указать точное количество чего-нибудь в данный момент времени. [5]

II. Организация и самоорганизация учащихся в ходе дальнейшего усвоения материала. Организация обратной связи (7 мин.)

3. Продолжим нашу работу. Исследуем вес тыквы. [6]

– На одной чаше гиря 3 кг. Оцените вес тыквы.

– Поставим гирю 4 кг. Оцените вес тыквы.

Составим математическую модель. Пусть x кг весит тыква, тогда $3 < x < 4$. Число 3 называют приближенным значением x с недостатком, а число 4 — приближенным значением с избытком. [7]

4. Исследуем, между какими «круглыми числами» заключена длина полоски. Составьте математическую модель. [8]

5. Между какими «круглыми» числами заключен курсор? К какому целому числу он расположен ближе? [9]

Ученики устно отвечают на вопросы и проговаривают:

– Курсор стоит на отметке 8,3.

– Число 8,3 находится ближе к целому числу 8. Значит, 8,3 приближенно равно 8.

Составим математическую модель: $8 < x < 9$. Число 8 получилось при округлении числа 8,3 до целых. Записывают это так: $8{,}3 \approx 8$. А замену числа ближайшим к нему натуральным числом или нулем называют *округлением* этого числа до целых. Запишите это правило. [10]

– Вы знаете, кто такой Гюнтер? Знакомимся с исторической справкой. [11]

III. Составление алгоритма (15 мин.)

Класс разбивается на четыре группы, каждая знакомится с правилом округления чисел по своему тексту. [12]

1-я группа. Работает с учебником, с. 199.

2-я группа. Работает с ЦОР: округление натуральных чисел.

3-я группа. Работает с ЦОР: округление десятичных дробей.

4-я группа. Работает с текстом: http://math-prosto.ru/?page=pages/rounding/rounding1.php.

Записывают результат округления после знака «≈». Этот знак читается как «приближенно равно». При округлении натурального числа до какого-нибудь разряда надо воспользоваться ***правилами округления***.

1. Подчеркнуть цифру разряда, до которого надо округлить число.

2. Отделить все цифры, стоящие справа от этого разряда, вертикальной чертой.

3. Если справа от подчеркнутой цифры стоят цифры 0, 1, 2, 3 или 4, то все цифры, которые отделены справа, заменяются нулями, а цифра разряда, до которой округляли, остается без изменений.

Если справа от подчеркнутой цифры стоят цифры 5, 6, 7, 8 или 9, то все цифры, которые отделены справа, заменяются нулями, а к цифре разряда, до которой округляли, прибавляется 1.

Поясним на примере. Округлим 57 861 до тысяч. Выполним первые два пункта из правил округления.

$5\underline{7}\,|\,861$

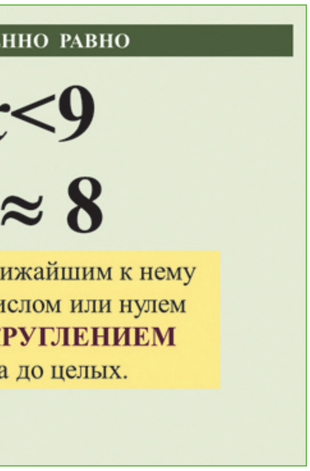
цифра округляемого разряда (тысячи) — первая заменяемая на ноль цифра

После подчеркнутой цифры стоит цифра 8, значит, к цифре разряда тысяч (у нас это 7) прибавим 1, а все цифры, отделенные вертикальной чертой, заменим нулями:

$$5\overset{+1}{\underline{7}}\,|\,861 \approx 58\,000$$

После того, как учащиеся прочли свои тексты, учитель вместе с ними составляет алгоритм округления чисел и выдает его каждому ученику, распечатанным на карточке. [13]

Рассматривается пример с объяснением. [14]



13

15

Далее пять учащихся за компьютерами решают задания ЦОР: (2) и (1) — задания с автоматизированной проверкой ответа (дифференцируемый практикум).

Остальные учащиеся решают № 1274 (а, б — 2 числа), № 1273 из учебника, используя алгоритм и проговаривая каждый его шаг.

6. Восстановите запись (устно). Аргументируйте ответы. [15]

а) 345*265 ≈ 345 300; б) 237,2*1 ≈ 237,280;
в) 12,*29 ≈ 12,500; г) 1* 236 ≈ 10 000;
д) 6*,56 ≈ 70,00.

После этого учащиеся выполняют задание (3).

7. Выразите в километрах и округлите до десятых:

а) высота пика Победы 7439 м — ...;
б) высота Эльбруса 5602 м — ...[16]

8. Решаем задание ЕГЭ B1. В пачке 500 листов бумаги формата А4. За неделю в офисе расходуется 800 листов. Какое наименьшее количество пачек бумаги нужно купить в офис на 9 недель? [17]

IV. Проверка полученных результатов. Коррекция (12 мин.)

Задания 9–11 выполняются в парах. [17]

Ответ запишите в виде двойного неравенства.

1. Распределите, кто выполняет задание «а», а кто «б».
2. Выполните их.
3. Проверьте друг у друга, верно ли выполнено задание.
4. Исправьте ошибки, если они допущены.
5. Поставьте отметку: «5» — нет ошибок; «4» — 1 ошибка; «3» — 2 ошибки.

Контроль за выполнением заданий ученики осуществляют с помощью слайда. [18]

9. Округлите число до десятых:

а) 8,174; б) 4,1046.

10. Округлите число до сотен:

а) 58 307; б) 48 276.

11. Укажите два последовательных натуральных числа, между которыми заключено число:

а) 6,8; б) 4,2.

V. Рефлексия

Задание на дом. Возьмите номер какой-нибудь газеты и выпишите примеры употребления округления чисел (около, примерно, приближенно). [20]

Ответьте на вопросы, с. 199 учебника.

Выучите алгоритм округления чисел.

Решите № 1297 (а, б — 1, 2 числа); № 1298 (2 числа).

Лист самооценки ученика ([19])

Какие умения сформировались на уроке	Понял все, могу помочь другому	Понял все, могу применить при решении задач, но иногда сомневаюсь	Не все понял, хотелось бы получить консультацию, помощь	Ничего не понял, требуется повторное объяснение
Знаю понятие приближенного значения				
Умею вычислять приближенное значение числа с недостатком и с избытком				
Умею строить математическую модель				
Умею строить логическую цепочку рассуждений				
Знаю алгоритм округления чисел				
Умею применять алгоритм при решении задач				

Л.Р. Добрый день, уважаемые коллеги! Сегодня мы обсуждаем урок, относящийся к курсу математики 5–6-х классов. Не впервые мы оказываемся в этом звене, и надо сказать, что не случайно. В определенном смысле, это ключевые годы для всего процесса изучения математики — именно они определяют, какими будут все последующие годы обучения математике в школе. Какие отношения с математикой сложатся у ученика к 7-му классу, такими и будут они на протяжении последующих пяти лет. Эти два года совпадают с важнейшим этапом формирования понятия числа, и именно в эти два года многие ученики теряют интерес к математике, что в немалой степени связано с растущей личной неуспешностью.

П.К. Именно этим урок нас и привлек. Учитель имеет перед собой центральную задачу курса — задачу развития понятия числа — и помнит о мотивации к изучению новой темы. Здесь важно, чтó учитель объясняет учащимся, зачем и почему нам нужны приближенные значения, в каких ситуациях с ними можно столкнуться. Он мотивирует учащихся к тому, чтобы они задумались над различными ситуациями и о том, о точном или приближенном значении в них идет речь. Хочется еще больше примеров из жизни!

Л.Р. Да, и чтобы привели свои примеры. Хотя надо отметить, что вопрос этот непростой, есть над чем задуматься. Например, в каких ситуациях точное значение возможно, но не нужно, а в каких ситуациях точного значения не может быть в принципе. Но это и дает основу для интереса: ведь сколько раз ребята слышали те или иные числа и величины по радио и телевидению, читали где-то, но пока не задумывались об их «точности» или «неточности». Открывать новое в повседневном любопытно в любом возрасте.

М.Ч. Как психолог, хочу отметить, что с точки зрения мотивации урок является удачным. Посмотрим на начало урока: проблемное вступление и практические, понятные ученикам примеры повышают интерес к теме. Однако ко второму слайду (пример с болельщиками) хотелось бы, как к первому, тоже поставить проблемный вопрос^ «Нужно ли репортеру точно знать, сколько человек там было?», а не предлагать сразу готовый ответ. Также мотивации способствует домашнее задание: необходимость найти примеры приближенных значений, с одной стороны, оно продолжает начатую на уроке работу по формированию регулятивных УУД (нужно не просто решить задание из учебника, а выполнить целый ряд действий: подобрать газету, прочитать, отобрать примеры и т.д.), с другой — развивает идею практической важности изучаемой темы.

П.К. Коли мы начали говорить о мотивации, давайте обсудим целевой блок нашего сегодняшнего урока.

М.Ч. Бытует мнение, что метапредметные компетенции обязательно означают «межпредметный» урок, то есть надо непременно внести какое-то дополнительное содержание, чтобы урок формировал метапредметные результаты. Данный урок наглядно опровергает эту точку зрения и показывает, что метапредметные компетенции можно успешно формировать, не привлекая для этого посторонней информации. Хочется отметить то, как учитель целенаправленно работает над уже упомянутыми регулятивными УУД (хотя в целях урока они отнесены к личностным, это именно метапредметные компетенции): дети сами формулируют правило, последовательно осваивают алгоритм, причем сначала вместе с учителем; проверяют сначала друг друга, затем сами себя. Надо иметь в виду, что ребенку проще увидеть ошибку в работе одноклассника, чем в своей собственной. Важно отметить, что большую роль в формировании регулятивных УУД играет позиция педагога: он не просто контролирует работу, а создает условия для развития самоорганизации. Здесь учитель выступает скорее как организатор, причем после того, как он совместно с детьми разобрал правило и примеры работы с ним, его участие становится все меньше и меньше.

Л.Р. Хочу упредить наши возможные критические высказывания. Надо помнить, что мы только начинаем что-то понимать про метапредметные умения, раньше этим больше занимались психологи, а не учителя математики. Здесь много нюансов. Поэтому возможны различные неточности или точки зрения. Главное, чтобы совместными усилиями мы научились все эти очень полезные навыки формировать.

П.К. Мне кажется, что в разделе метапредметных результатов пункт первый, в котором речь идет о познавательных умениях (осуществлять сравнение и классификацию по заданным критериям; строить рассуждение в форме связи простых суждений об объекте), можно опустить.

Л.Р. Я соглашусь с вами в части сравнения и классификации. Эти умения заявлены как результаты, а на самом деле они выступают инструментами, используемыми для достижения других целей. Что касается умения строить рассуждения, то, мне кажется, оно может выступать здесь в качестве формируемого результата, ведь мы знаем, что учащиеся не очень-то любят обосновывать свои суждения, отвечать аргументированно, и не умеют этого делать, следовательно, этому нужно учить буквально на каждом уроке, используя любой удобный момент.

П.К. И от второго метапредметного результата я бы оставил лишь вторую половину. Детей учили составлять план последовательности действий, работать по алгоритму, сличать свой способ действий с эталоном.

Л.Р. А здесь хочу возразить. Я считаю умение ставить себе задачу, соотнося то, что уже известно, и то, что ново и пока не известно, не менее важным. Ведь именно благодаря этому умению человек и способен развиваться во взрослой жизни: только если он обучен воспринимать возникшую перед ним новую ситуацию как задачу, которую надо решить — узнать, научиться, придумать и т.п. В противном случае, он обречен жить только на том «багаже», который усвоил «по школьной программе». По известным алгоритмам. В современном мире на первое место выходит не знание само по себе, а умение узнать; поскольку информация устаревает быстрее, чем доходит до нас, это умение особенно актуально.

Умения же составлять план или работать по алгоритму имеют безусловную самостоятельную ценность, и хочу подчеркнуть, что учить овладению этими навыками надо специально. Не надо думать, что достаточно добиться от ученика усвоения нескольких алгоритмов, чтобы считать сформированным умение работать по алгоритму. Кто-то из ребят обязательно самостоятельно выйдет на уровень обобщения, но для большинства это снова будет спонтанное, неосознанное овладение умением, чреватое ошибками.

И еще один момент в связи с метапредметными результатами я бы отметила. Я не поняла, почему умение находить в тексте информацию, необходимую для решения задачи, отнесено к коммуникативным. Я понимаю, если бы речь шла о ситуации, в которой надо было бы идти в библиотеку или «лезть» в Интернет, изучать различные источники, выискивая информацию и сличая формулировки из разных источников. На уроке учащиеся работали в группах, организуя коммуникацию внутри группы. Это верно. А информация была дана по группам, хотя и по различным источникам, но в готовом виде — в виде правила. Поэтому я бы здесь говорила о смысловом чтении, об умении работать с информацией.

М.Ч. Вы упомянули о групповой работе, и я бы отметила, что она здесь выглядит уместной и хорошо организованной: дети на основании разных источников формулируют одно и то же правило. Если используется эта форма работы, необходимо дать какое-то резюме: либо представителям групп нужно дать возможность высказаться, либо проверить результаты выполненного ими задания. В данном случае не совсем понятно, как именно происходит обсуждение итогов групповой работы; хотелось бы увидеть эту часть более подробно прописанной: что учитель спрашивает, как обобщает ответы детей. И я бы «навыки самоконтроля и самоанализа» перечислила среди метапредметных регулятивных результатов.

П.К. Пока мы не углубились в сам урок, выскажу одно соображение, связанное с описанием урока. Я, честно говоря, не понимаю, зачем автор перечисляет решаемые учебные проблемы и основные понятия (они есть в планируемых результатах), виды и методическое назначение средств ИКТ. Похоже, это дань вышестоящим «проверяльщикам», а для меня, как для учителя, они излишни и не помогают пониманию задач, поставленных в целях урока.

Л.Р. Да, единой формы для представления конспекта урока в письменном виде не существует. Где-то есть, видимо, местные или региональные образцы. Однако данный формат показался мне вполне разумным. Это своего рода паспорт урока. Если бы я выбирала урок из некоторого банка, мне не пришлось бы читать весь урок, достаточно было прочесть информацию из паспорта, чтобы понять, подходит он для моих целей или не подходит. В банке слова из этих разделов могли бы стать ключом для поиска, ведь банк — это структура, внутри которой организован поиск. Я думаю, что такие банки учителя могут создавать сами, для начала — внутри одной школы. Надеюсь, что когда-нибудь и наш фестиваль «Открытый урок» станет таким банком.

П.К. Ну это о будущем, давайте же вернемся к уроку. В нем есть несколько моментов, которые мне понравились. Например, в презентации повторяется задача, данная в учебнике. Считаю, что это правильно, ведь учащиеся получают хорошую опору для выполнения домашней работы. Если забудут алгоритм, то быстро смогут восстановить его в памяти. Но вот уход от учебника к иным образовательным ресурсам не совсем понятен.

Л.Р. Вам жалко затраченного на это времени? Но это и есть элемент формирования метапредметных навыков. Существует много разных источников информации, формулировки в них могут использоваться различные. Как с этим быть? Надо учить работать с текстовой информацией — учить сравнивать, выделять главное, переформулировать и т.д. Тогда ребята не будут бояться новых текстов, как это происходит сейчас. Вы же знаете один из выводов международного исследования TIMSS, которое проводится уже на протяжении 20 лет: наши учащиеся «пугаются» текстов, пропускают задания, в которых есть текстовая информация.

П.К. Одно замечание о языке, речи. Смотрите, какой симпатичный слайд с тыквой и как сухо и официально сформулировано задание: «Составим математическую модель»! Давайте поставим букву x на тыкву и попросим ребят перевести рисунок на язык математики.

Л.Р. Полностью согласна с вами. Мне кажется, употребление всуе понятия «математическая модель» не только не полезно для формирования математической культуры учащихся, но и вредно. К идее математического моделирования человечество шло тысячелетиями, через создание математического аппарата и математического языка, через применение математики к описанию различных явлений природы и общества. Современный мир держится на математическом моделировании, но ребенок столь юного возраста и с отсутствующим алгебраическим аппаратом не то что оценить — понять не может величие самой идеи и масштаб открытия великих ученых прошлого. Жалко, что мы удивительную идею низводим до ежедневных упражнений. Но сейчас почему-то стало модным говорить «составим математическую модель» вместо «составим уравнение» или, как в данном случае, «составим двойное неравенство».

П.К. Возникает вопрос: чем будем в 9-м классе удивлять?

Л.Р. И это серьезный вопрос. Но я хочу вернуться к тыкве еще раз и отметить одну важную методическую деталь. Хочу обратить внимание, что автор, как отметил Петр Михайлович, довольно строго следует учебнику, при этом она идет дальше — она дополняет его презентацией с анимацией, «оживляющей» картинку из учебника. Очень разумный подход. Не могу не похвалить.

Однако мы как-то начали с моментов, которые вызвали у нас несогласие или сомнение, и не сказали ничего о том, чем нам урок понравился. Я бы отметила его насыщенность разнообразными видами деятельности, собственно, о некоторых из них мы уже высказались. Настало время обратить внимание на использование интернет-ресурсов: здесь работа и с теорией, и с тренажером, и индивидуально, и в группе, и фронтально. Однозначно, на уроке не было скучно.

О.М. Ученики работают с электронными образовательными ресурсами с сайта Единой коллекции цифровых образовательных ресурсов (http://school-collection.edu.ru/). На слайде 16 вставлена ссылка на задание для проверки усвоения алгоритма округления чисел. Хочу обратить ваше внимание на то, как удачно автор подкрепила теоретическую информацию графической: в задании говорится о высоте Пика Победы и Эльбруса, и картинка подобрана соответствующая.

Л.Р. Да, казалось бы, пустяк, но очень милый и полезный. Ведь переключение зрительного восприятия с математической символики на красивое изображение великолепного объекта природы добавляет положительных эмоциональных впечатлений.

О.М. Также на уроке ученики работают с интерактивными тренажерами (слайд 22, 1-я и 2-я ссылки) по темам «Округление натуральных чисел» и «Округление десятичных дробей». Тренажеры имеют теоретическую часть и практическую. С теоретической частью в начале урока работают 2-я и 3-я группы. Во второй части урока пять учеников отрабатывают алгоритм округления чисел, выполняя тренировочную работу. Здесь ученик может выбрать самостоятельную работу или работу с пошаговой подсказкой, а также уровень заданий. Если ученик испытывает затруднения при решении, он может воспользоваться «Шпаргалкой», а при работе с тренажером поможет кнопка «Помощь». На странице с заданием указывается количество всего решенных примеров, решенных верно и неверно. Это позволяет ученику видеть результаты своей работы. Работа с интерактивными тренажерами обеспечивает возможность тренировки учеников в решении задач на округление чисел, способствует не только формированию вычислительных навыков, но и воспитанию привычки контролировать собственную деятельность. В общем, хочу похвалить этот ЦОР.

И еще хочу похвалить учителя за то, что она не забыла указать ссылки на используемые источники и интернет-ресурсы.

П.К. Мы заговорили про отработку алгоритма, и у меня здесь есть два замечания. Первое. Зачем дважды выделять последний сохраняемый разряд: сначала подчеркиванием, а затем проведением вертикальной черты? Достаточно провести вертикальную черту и подчеркнуть первую отбрасываемую цифру, так как от нее зависит изменение или сохранение предыдущей цифры.

Л.Р. Я соглашусь с тем, что надо подумать, нужно ли двойное выделение в принципе. Ведь когда мы ставим вертикальную черту, мы выделяем и тот разряд, что слева от нее, а именно он упомянут в задании как разряд, до которого надо округлить число, и тот разряд, что справа, а именно в нем стоящая цифра и будет определяющей для дальнейших действий. Я предлагаю ограничиться вертикальной чертой.

П.К. Возможно, вы и правы. Второе. То, что нули в дробной части числа можно не писать, не отражено в алгоритме, но, правда, отрабатывается в упражнениях.

Л.Р. Я думаю, это сделано для того, чтобы у детей был единый, универсальный алгоритм для округления и натуральных чисел, и десятичных дробей. Чтобы не плодить алгоритмы.

Кстати, я бы здесь хотела внести терминологическое уточнение. В тексте, с которым дети работают, правилом назван именно алгоритм: математическое правило не может содержать методических действий вроде подчеркиваний. А дальше учащиеся совместно с учителем преобразуют алгоритм, представленный вербально, в наглядную графическую форму — в блок-схему.

П.К. Кстати, тот факт, что, округляя, например, до десятых и получив при этом ноль в разряде десятых, мы его должны оставить, указывая тем самым на точность округления, на уроке не был озвучен, а жаль.

Л.Р. Ну, вы хотите обо всем на одном уроке! Да, это очень важный момент. Но я думаю, что для одного урока уже достаточно много информации. А это важная, но деталь, частный случай. Мне кажется, будет правильно поговорить об этом на следующем уроке.

П.К. Я бы отметил еще хороший подбор заданий для урока. Прекрасны задания на слайде 15; думаю, не было бы лишним продолжить эту линию, например, такими заданиями:

1) Число округлили до десятков и получили результат 1230. Какая цифра могла стоять в разряде единиц?

2) Число заменили приближенным значением, взяв его приближенное значение с избытком, и получили 1230. Каким могло быть это число?

Хороша и задача на слайде 17. Но зачем говорить, что это задание В1 ЕГЭ, предстоящего через шесть (!) лет. Считаю это не только бесполезным, но и вредным. Хотя, конечно, я понимаю, что к этому призывают органы управления образованием и администрация школы.

Л.Р. Добавлю, что и ЕГЭ к тому времени изменится с большой вероятностью.

Я тоже хочу отметить и сами задачи, и их «расстановку» по ходу урока. Например, поговорили в начале урока про приближение с избытком и недостатком — есть задача про это, не забыта. А ведь наверняка кто-то из ребят округлил здесь по правилу, вместо того чтобы взять приближение, ориентируясь на смысл ситуации. Вот такая небольшая ловушка, которая приучает ребят думать.

Ну и давайте про презентацию поговорим.

О.М. Презентация является опорным конспектом урока. Такой каркас в сочетании с целью и планом урока сильно облегчит работу не только учителю, но и ученику. Удачно подобрана цветовая гамма, не нарушен макет — расположение основных элементов жестко на своих местах. Слайды информативны, каждый факт подкреплен визуальным образом: такая информация гораздо лучше вспоминается и узнается. Несколько советов.

Посмотрите, слайд 3 лучше сделать титульным, ведь на нем указана не только тема урока, но и данные автора презентации.

Не советую использовать мелкий размер шрифта (слайды 6, 8, 19): такой текст трудно читать, нужно напрягать глаза, щуриться. А вот на слайдах 15, 17 и 21, наоборот, шрифт слишком крупный: использован размер шрифта в 40–50 пунктов — такой размер хорош для заголовка. Будьте внимательны!

Слайд 20 можно не использовать, так как лист самооценки есть у каждого ученика. Дублировать его в презентации не стоит: шрифт мелкий, важной информации, которую необходимо запомнить, слайд не несет.

И не допускайте небрежности в расстановке пробелов (например, слайды 7, 8, 10).

Еще раз хочу обратить ваше внимание на качество используемых в презентации изображений (слайды 4, 9). Взгляните, автор увеличил размеры фотографий, в результате картинка стала размытой, мелкие детали «расплываются». Исправить этот дефект очень трудно, практически невозможно — только если уменьшить размеры изображения. Поэтому остается лишь порекомендовать найти такую же или аналогичную по смыслу картинку более высокого качества.

М.Ч. Наше обсуждение подходит к концу, и я бы хотела похвалить завершающую часть урока, в частности, работу над самооценкой ученика. Единственно, я бы уточнила, что в листе самооценки не совсем понятны третья и четвертая строки, так как они содержат очень общие формулировки, например, не ясно, какая конкретно математическая модель имеется в виду. Может быть, имеет смысл их несколько уточнить.

Л.Р. Ну что же, на этом можно и закончить наше обсуждение. Спасибо всем, спасибо учителю, который придумал и провел урок. Урок был интересным, и надеюсь, что его обсуждение — полезным.

Г. ЛЕВИТАС,
gglevitas@gmail.com,
г. Москва

О КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЯХ

Квадратные уравнения — очень заметная и обсуждаемая тема школьного курса алгебры.

– Зачем она нужна? — спрашивают меня многие. — Кому в жизни приходится решить хоть одно квадратное уравнение? Кроме, конечно, каких-то узких специалистов. А учите вы им всех. И сколько времени!

Этот вопрос давний. А дело в том, что изучение квадратных уравнений дает возможность существенно развить логическую культуру ребенка — «ум в порядок привести», как говорил Ломоносов. Ведь при правильной постановке дела применяется следующий разветвленный алгоритм их решения («алгоритм А»).

1. Установите, является ли данное уравнение неполным. И если «да», то решаем его кратким способом:

а) если уравнение имеет вид $ax^2 = 0$, то ответ пишем сразу;

б) если уравнение имеет вид $ax^2 + c = 0$, то решаем его переносом свободного члена в правую часть;

в) если уравнение имеет вид $ax^2 + bx = 0$, то решаем его разложением на множители.

Если уравнение полное, то переходим к пункту 2.

2. Установите, не равна ли нулю сумма коэффициентов $a + b + c$. И если «да», то сразу пишем ответ $\left\{1; \frac{c}{a}\right\}$. Если же «нет», то переходим к пункту 3.

3. Установите, не равна ли нулю сумма $a - b + c$. И если «да», то сразу пишем ответ $\left\{-1; -\frac{c}{a}\right\}$. Если же нет, то переходим к пункту 4.

4. Попробуйте подобрать ответ по теореме Виета. Если получилось, то сразу пишем ответ. Если не получилось, то переходим к пункту 5.

5. Установите, является ли уравнение приведенным. Если «да», то воспользуемся формулой корней приведенного квадратного уравнения. Если же «нет», то переходим к пункту 6.

6. Установите, является ли коэффициент при x четным числом. Если «да», то воспользуемся формулой корней для четного второго коэффициента. Если «нет», то переходим к пункту 7.

7. Установите знак дискриминанта D:

а) если $D < 0$, то сразу пишем ответ $\varnothing$;

б) $D = 0$, то сразу пишем ответ $\left\{-\frac{b}{2a}\right\}$;

в) $D > 0$, то находим корни по общей формуле.

Замечу, что это совершенно необязательно. Можно просто решать квадратное уравнение по формуле $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ и сделать вывод, если корень не существует или равен 0. Эти случаи настолько редки, что, может, и не стоит всегда начинать с дискриминанта.

Применение этого алгоритма действительно оттачивает логику. И думается, что это одна из важных причин упорного сохранения квадратных уравнений в нашей многократно модифицируемой школьной программе. Есть и вторая причина: существование огромного числа задач по алгебре и другим дисциплинам, основанных на знании учащимися квадратных уравнений. Если эту тему удалить, то придется вычеркнуть из рассмотрения все эти задачи.

Однако традиционное преподавание темы в массовой школе не нацелено на использование алгоритма А. Оно сводится только к пунктам 1 и 7 этого алгоритма. Более того, поскольку изучение пункта 1 проходит быстро, а изучение пункта 7 занимает много времени, то находятся учащиеся, которые и уравнение $x^2 + 7x = 0$ решают по пункту 7. Все дело в том, что пункт 1 алгоритма А изучается не на уровне навыка, пункты 2 и 3 не изучаются вообще, пункты 4–6 изучаются уже тогда, когда ученики научились решать уравнение по пункту 7.

Поэтому мною разработана и успешно применяется описанная ниже процедура обучения, при которой ученики знакомятся с решением по алгоритму А постепенно. То есть общая формула для них становится средством, к которому они прибегают, только если нет более легких (ранее усвоенных!) способов решения.

Изучение материала начинается в 7-м классе, в начале учебного года, в теме «Линейные уравнения». Знакомя учеников с определением линейного уравнения, мы ставим перед ними задачу определить, какие из предъявленных уравнений являются линейными. И в качестве контрпримеров даем квадратные уравнения. Это удобно делать в форме математического диктанта. Вот текст диктанта, который я предлагаю дать на втором уроке изучения линейных уравнений.

Запишите уравнение Является ли оно линейным? Ответьте «да» или «нет» и решите его.

1. $3x^2 = 0$. **2.** $3x + 282 = 0$.
3. $x^2 - 9 = 0$. **4.** $x^2 + 4 = 0$.
5. $x^2 - 2x = 0$.

При анализе диктанта нужно подчеркнуть, что только решение линейного уравнения сводится к переносу в разные стороны членов, содержащих и не содержащих неизвестное, и последующему делению на коэффициент при неизвестном. А другие уравнения решаются по-другому:

– в уравнении 1 можно сразу выписать ответ (Как выписывать ответ, определяет учитель. Я разъясняю своим ученикам, что решить уравнение — значит найти множество его корней. Поэтому и ответы предлагаю записывать в виде множеств. Но в это время, в 7-м классе, на диктанте я принимаю верный по сути ответ, записанный в любой форме. Например: $x = 0$, или «нет решений», или «x — любое число» и т.д.);

– в уравнении 3 нужно перенести число вправо, а затем сообразить, чему равно значение неизвестного (корни еще не введены);

– в уравнении 4 нужно сразу увидеть, что левая часть всегда положительна (или перенести число вправо и понять, что решений нет);

– в уравнении 5 нужно вынести неизвестное за скобки и учесть, что либо первый, либо второй множитель равен нулю.

И только к одному типу уравнений — к линейным — относится изучаемый алгоритм.

Далее учитель формулирует алгоритм решения линейных уравнений в общем виде и говорит, что теперь мы будем решать линейные уравнения по этому алгоритму, но не будем забывать, как решаются и другие уравнения, вроде тех, что были в этом диктанте.

С этого момента на протяжении всего 7-го класса учитель предлагает детям то одно, то другое из квадратных уравнений упомянутых видов: $2x^2 = 98$, $3x^2 = 75x$, $x(x + 8) = 0$, $(2x - 4) \times$ $\times (x + 7) = 0$.

Учитель фиксирует в особом списке, когда тот или иной ученик трижды правильно решит уравнение того или иного вида, и постепенно исключает усвоенные виды из постоянного рассмотрения, заменяя их новыми заданиями.

Первым новым заданием будет такое: «Докажите, что число 1 является корнем уравнения $3x^2 + 8x - 11 = 0$, а число -1 является корнем уравнения $2x^2 + 3x + 1 = 0$». Его развитие: «При каком значении c уравнение $5x^2 + 3x + c = 0$ имеет корнем число 1? Число -1?»

Анализируя последние задания, мы подводим учащихся к выводу, что если сумма коэффициентов квадратного уравнения $a + b + c = 0$, то его корнем служит единица. А если сумма $a - b + c = 0$, то корнем является число -1. Теперь учащимся предлагается задание найти те квадратные уравнения, у которых одним из корней служит 1 или -1.

Так заканчивается работа над этим материалом в 7-м классе.

В заданиях следующего вида (начало 8-го класса) требуется разложить левую часть уравнения на множители. Это, например, $x^2 - 5x + 6 = 0$. Анализируя такие уравнения, мы приходим к обратной теореме Виета: если сумма чисел равна $-p$, а их произведение равно q, то эти числа — корни уравнения $x^2 + px + q = 0$. Замечу, что изо всех видов заданий этого опережающего курса данный вид требует наибольшего времени. В 8-м классе он и будет новым и последним видом и займет все первое полугодие.

Тему «Квадратные уравнения» в начале второго полугодия 8-го класса мы начинаем, имея богатый опыт их решения. Учитель дает определение квадратного уравнения и их видов (полные и неполные, приведенные и неприведенные). Вместе с учащимися устанавливаются общие правила решения неполных уравнений. Затем выводится формула корней приведенного квадратного уравнения. Сама эта формула и ее доказательство гораздо проще предлагаемых в учебниках, и можно потребовать ото всех учеников хорошего знания и этой формулы, и ее доказательства. Решение уравнений по этой формуле доводится до навыка. От учащихся требуется решать уравнение сплошной строкой. Например, уравнения:

а) $x^2 + 3x + 4 = 0$, б) $x^2 - 6x + 9 = 0$

в) $x^2 - 5x - 10 = 0$

решаются так:

а) $x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}=-1,5\pm\sqrt{2,25-4}$, $x\in\varnothing$;

б) $x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}=3\pm\sqrt{9-9}=3$;

в) $x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}=2,5\pm\sqrt{6,25+10}=2,5\pm\sqrt{16,25}$.

Затем доказывается прямая теорема Виета. Учитель настаивает на том, чтобы ученики всегда проверяли решение квадратного уравнения по этой теореме. И наконец вводится общая формула решения квадратного уравнения заменой p на $\frac{b}{a}$ и q на $\frac{c}{a}$. Ввиду сложности формулы некоторые авторы рекомендуют перед ее применением проверять знак дискриминанта. При желании и при наличии времени учитель может ввести формулу решения неприведенных уравнений с четным вторым коэффициентом и рекомендовать перед ее применением исследовать знак $\frac{D}{4}=k^2-ac$.

Сказанное в последних двух абзацах занимает примерно половину времени, отводимого на изучение темы «Квадратные уравнения» в 8-м классе. Оставшееся время учитель посвящает алгоритму А и требует, чтобы каждое уравнение решалось по этому алгоритму. Например, можно ставить полноценный плюс за решение уравнения рациональным методом и плюс-минус за верное, но нерациональное его решение.

КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ С «КВАДРАТНЫМ» ДИСКРИМИНАНТОМ

В. ДРОЗДОВ,
г. Рязань

При решении квадратного уравнения с целыми коэффициентами, обычно задаешься вопросом: будет ли его дискриминант квадратом целого числа? Ведь при утвердительном ответе на него вычисления значительно упрощаются. Покажем, как составлять уравнения, обладающие указанным свойством.

Для того, чтобы дискриминант уравнения

$$x^2 + px + q = 0 \qquad (1)$$

с рациональными коэффициентами был квадратом рационального числа, необходимо и достаточно, чтобы его корни были рациональными (*докажите это самостоятельно*).

По теореме Виета имеем:

$$p=-\left(\frac{m_1}{n_1}+\frac{m_2}{n_2}\right)=-\frac{m_1n_2+m_2n_1}{n_1n_2} \text{ и } q=\frac{m_1m_2}{n_1n_2},$$

где $\frac{m_1}{n_1}$ и $\frac{m_2}{n_2}$ — рациональные корни уравнения (1) (m_1, n_1, m_2, n_2 — любые целые числа, причем $n_1n_2\neq 0$). Значит, дискриминант уравнения

$$x^2-\frac{m_1n_2+m_2n_1}{n_1n_2}x+\frac{m_1m_2}{n_1n_2}=0$$

есть квадрат рационального числа.

Соответственно, дискриминант равносильного ему уравнения

$$n_1n_2x^2 - (m_1n_2 + m_2n_1)x + m_1m_2 = 0$$

с целыми коэффициентами есть квадрат целого числа.

Таким образом, для того, чтобы дискриминант уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ с целыми коэффициентами был квадратом целого числа, необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{cases} a=n_1n_2, \\ b=-(m_1n_2+m_2n_1), \\ c=m_1m_2. \end{cases} \qquad (2)$$

При этом дискриминант

$$D = b^2 - 4ac = (m_1n_2 - m_2n_1)^2.$$

Формулы (2) исчерпывают все множество коэффициентов квадратных уравнений с «квадратным» дискриминантом, так как различные перестановки чисел m_1, n_1, m_2, n_2 несущественны.

Пусть, например, $m_1 = -1$, $n_1 = 3$, $m_2 = 2$, $n_2 = 5$. Тогда имеем уравнение

$$15x^2 - x - 2 = 0$$

с дискриминантом $D = 121$ и корнями

$$x_1=-\frac{1}{3} \text{ и } x_2=\frac{2}{5}.$$

ЗАДАЧИ ПРО ТУРНИРЫ

А. ШЕВКИН,
avshevkin@mail.ru,
г. Москва

После изучения квадратных и рациональных уравнений, разбора стандартных школьных текстовых задач на применение этих уравнений встает задача обновления как тематики, так и математического содержания методов решения этих задач. Рассматриваемые ниже задачи позволяют расширить круг идей, применяемых для решения задач, — от комбинаторики до делимости многочленов. Особо отметим плодотворную идею рассмотрения «турнира в турнире».

1. Восемь друзей решили провести турнир по шашкам так, чтобы каждый сыграл с каждым одну партию. Сколько партий будет сыграно?

Решение. Участники сыграли $\frac{8\cdot 7}{2}=28$ партий.

Ответ: 28 партий.

2. В турнире по шахматам каждый участник сыграл с остальными по две партии. За выигрыш в партии присуждали 1 очко, за ничью — 0,5 очка, за проигрыш — 0 очков. Три лучших игрока набрали вместе 24 очка, что составило половину от числа очков остальных участников, вместе взятых. Сколько было участников турнира?

Решение. Пусть участников турнира x человек (x — натуральное число), они сыграли

$$\frac{x\cdot(x-1)\cdot 2}{2}=x^2-x$$

партий и набрали $x^2 - x$ очков. Всего очков было $24 + 24\cdot 2 = 72$. Решив уравнение $x^2 - x = 72$, получим два корня, $x_1 = 9$ и $x_2 = -8$. Так как x — натуральное число, то $x_1 = 9$.

Ответ: 9 участников.

3. Шесть мальчиков и четыре девочки организовали турнир по шашкам. Каждый участник турнира сыграл с остальными по одной партии. За выигрыш присуждали 2 очка, за ничью — 1 очко, за проигрыш — 0 очков. Девочки вместе набрали 40 очков. Кто выиграл больше очков: мальчики у девочек или девочки у мальчиков, и на сколько?

Решение. Участников турнира было $6 + 4 = 10$. Они сыграли $\frac{10\cdot 9}{2}=45$ партий и набрали $45\cdot 2 = 90$ очков независимо от исходов отдельных партий. По условию задачи, девочки набрали 40 очков, тогда мальчики набрали $90 - 40 = 50$ очков. Чтобы ответить на вопрос задачи, рассмотрим «турнир в турнире» — игры девочек между собой. В них сыграно $\frac{4\cdot 3}{2}=6$ партий и набрано $6\cdot 2 = 12$ очков. Остальные $40 - 12 = 28$ очков девочки выиграли у мальчиков. Аналогично, мальчики в играх между собой набрали 30 очков, значит, мальчики выиграли у девочек $50 - 30 = 20$ очков. Итак, девочки выиграли у мальчиков на $28 - 20 = 8$ очков больше, чем мальчики у девочек.

Ответ: девочки у мальчиков, на 8 очков больше.

4. В шахматном турнире участвовали учащиеся 10-го класса и два ученика 9-го класса. Каждый участник турнира сыграл с остальными по одной партии. За выигрыш в партии присуждали 2 очка, за ничью — 1 очко, за проигрыш — 0 очков. Два девятиклассника набрали вместе 7 очков, а все десятиклассники набрали очков поровну. Сколько десятиклассников участвовало в турнире?

Решение. Пусть из 10-го класса в турнире участвовало x человек (x — натуральное число), тогда всех участников было $(x + 2)$ человека и они набрали вместе $(x + 2)(x + 1) = x^2 + 3x + 2$ (очков). Тогда десятиклассники набрали на 7 очков меньше: $(x^2 + 3x - 5)$ очков. Так как они набрали очков поровну, то многочлен $(x^2 + 3x - 5)$ делится на x, то есть количество очков, набранных каждым учащимся 10-го класса, равно $x+3-\frac{5}{x}$ и является натуральным числом. Это возможно лишь при $x = 1$ или при $x = 5$. В первом случае число очков каждого десятиклассника отрицательное, что не отвечает условию задачи. Следовательно, в турнире участвовало 5 десятиклассников.

Ответ: 5 десятиклассников.

5. Несколько учащихся 9 «А» и 9 «Б» классов организовали турнир по шашкам. Каждый участник турнира сыграл с остальными по одной партии. За выигрыш в партии присуждали 2 очка, за ничью — 1 очко, за проигрыш — 0 очков. Учащиеся 9 «А» класса набрали вместе 26 очков, а учащиеся 9 «Б» класса, которых было на 3 больше, набрали очков поровну. Сколько было участников турнира?

Решение. Пусть в турнире участвовало: из 9 «А» класса x человек, из 9 «Б» класса $(x + 3)$ человек (x — натуральное число), тогда всех участников было $(2x + 3)$ человек и они набрали вместе $(2x + 3)(2x + 2) = 4x^2 + 10x + 6$ (очков). Учащиеся 9 «А» класса набрали 26 очков, учащиеся 9 «Б» класса набрали $(4x^2 + 10x - 20)$ очков. Так как они набрали очков поровну, то многочлен $4x^2 + 10x - 20$ делится на $x + 3$, то есть количество очков, набранных каждым учащимся 9 «Б» класса, равно $4x-2-\frac{14}{x+3}$ и является натуральным числом. Это возможно лишь при $x = 4$ или $x = 11$. Второй случай не удовлетворяет условию задачи, так как только в играх друг с другом 11 учащихся 9 «А» класса наберут 110 очков, что больше 26. Следовательно, участников турнира было $2 \cdot 4 + 3 = 11$.

Ответ: 11 участников.

В качестве заключения заметим, что задача про турниры встретилась во Всероссийской олимпиаде (II этап, 7.12.2014). Это была первая задача для 9-го класса.

6. В круговом шахматном турнире участвовало шесть человек: два мальчика и четыре девочки. Могли ли мальчики по итогам турнира набрать в два раза больше очков, чем девочки? (В круговом шахматном турнире каждый играет с каждым по одной партии. За победу дается 1 очко, за ничью — 0,5, за поражение — 0 очков.)

Решение. Так как всего в турнире сыграли $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ партий и набрали 15 очков, а девочки сыграли между собой $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ партий и набрали 6 очков, то чтобы мальчики набрали в два раза больше очков, чем девочки, они должны были набрать не менее 12 очков, что невозможно, так как в противном случае общая сумма очков превысит 15.

Ответ: нет.

ДЕНЬ ЗНАНИЙ

Много разных званий
У серьезных дней,
Только мне День знаний
Всех других милей!

Сколько в нём загадок!
Сколько волшебства!
Он на тайны падок
Сердца и ума.

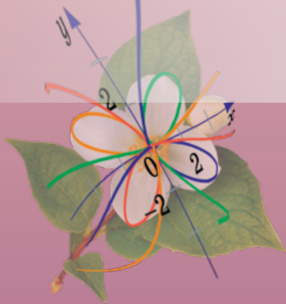
Будит мысли чистым,
Радостным звонком.
Каждый день учиться
Призывает он.

В мире фобий, маний,
Страхов, лжи и бед
Нас спасет День знаний,
Проливая свет.

С мудростью суровой
Нам поможет жить,
Но для знаний новых
Надо пот пролить.

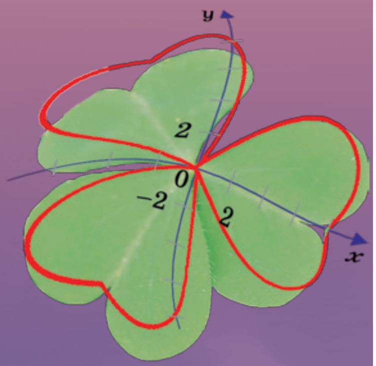
Олег Дмитриев

А. АЗЕВИЧ,
asv44dfg@mail.ru,
г. Москва



ПОЗНАТЬ ФОРМУЛУ ЦВЕТКА

Не раз, бродя по лесу, собирая полевые цветы или плавая в пруду, с восхищением отмечаешь растения, формы листьев которых напоминают математические кривые. Природа, будто художник, прекрасно владеющий не только кистью, но и законами геометрии, создает неповторимые и совершенные формы.



Координаты, графики и множества

Для того чтобы определить положение точки на плоскости, без системы координат не обойтись. В декартовой системе координат каждая точка имеет две координаты: абсциссу и ординату. Если нужно определить множество точек плоскости, обладающих некоторыми свойствами, вводится формула $y = f(x)$. Она задает правило, по которому каждому значению x ставится в соответствие единственное значение y. Так определяется функция. График — ее наглядное воплощение. Формулы, с помощью которых на плоскости задаются линии, могут быть самыми разными.

Помимо декартовой, существуют и другие системы координат. Например, полярная. В ней положение точки на плоскости характеризуется двумя величинами: длиной и углом поворота радиус-вектора. Например, если мы хотим отметить на плоскости точку M с координатами 2 и 60°, для этого надо выполнить следующие операции. Провести луч Ox. Отложить от него угол yOx, равный 60°, в верхнюю полуплоскость относительно прямой Ox. Затем на луче Oy от его начала отложить отрезок OM, равный 2 (рис. 1). Таким образом, каждая точка полярной системы имеет две координаты: R — длина радиус-вектора и α — угол его поворота.

Можно установить связь между декартовыми и полярными координатами. Для этого надо взять декартову систему координат так, чтобы положительное направление оси абсцисс совпадало с начальным лучом (полярной осью), а положительное направление оси Oy состояло из всех тех точек, полярный угол которых равен 90° (рис. 2).

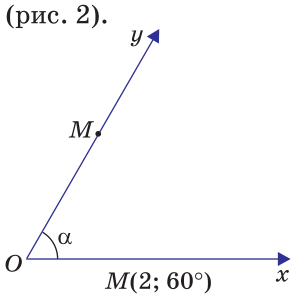


Рис. 1

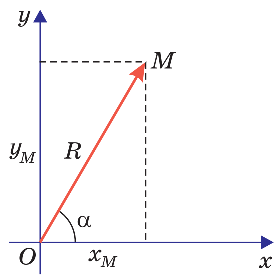


Рис. 2

Если точка M имеет декартовы координаты x_M и y_M, а полярные координаты R и α, то по рисунку видно, что $x_M = R\cos\alpha$, $y_M = R\sin\alpha$. Возведем в квадрат обе части каждого равенства и сложим почленно.

В результате получим равенство: $R^2 = x^2_M + y^2_M$. Интересно, что последняя формула фактически задает все точки $(x; y)$ декартовой координатной плоскости. Чтобы в этом убедиться, надо придать радиусу R все возможные значения. Если, например, $R = 0$, мы получаем точку $O(0; 0)$ — начало координат. При всех остальных значениях R от центра O расходится бесконечное множество концентрических окружностей, которые покрывают всю плоскость (рис. 3).

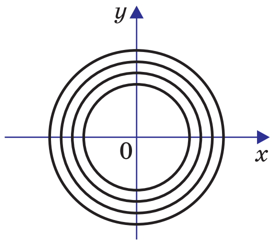


Рис. 3

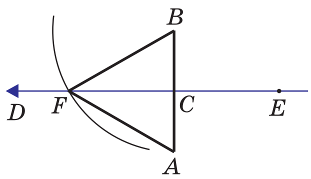


Рис. 4

Известно, что окружность — одно из простейших геометрических мест точек (ГМТ). Каждая точка окружности равноудалена от центра на одно и то же расстояние. Найдем другое геометрическое место точек. Например, множество точек плоскости, из которых отрезок AB виден под углом 60°. Для решения этой задачи начертим отрезок AB и определим хотя бы одну точку, обладающую нужным свойством. Для этого из середины C отрезка AB восставим перпендикуляр CD, а из точки B проведем окружность радиуса AB. Она пересечет луч CD в точке F. Нетрудно установить, что $\angle BFC = 30°$, а треугольник AFB равносторонний. Значит, отрезок AB виден из точки F под углом 60°. Если теперь продолжить луч CD за точку C и отложить от нее отрезок $CE = CF$, то получим еще одну точку искомого геометрического места E (рис. 4).

Как же найти все остальные точки этого геометрического места? Центр окружности, описанной около треугольника AFB, — это точка O_1 пересечения срединных перпендикуляров, проведенных к его сторонам. И тогда любой вписанный в эту окружность угол (например, угол AMB, опирающийся на дугу, стягивающую хорду AB) равен углу AFB. Следовательно, из любой точки дуги AFB построенной окружности отрезок AB виден под углом 60°. Вторая половина искомого множества получается, если полученную дугу отобразить симметрично относительно прямой AB. Итак, множество точек плоскости, из которых отрезок AB виден под углом 60°, представляет собой фигуру, состоящую из двух дуг равных окружностей без точек A и B (рис. 5). Получилась совокупность частей окружностей, напоминающая две вытянутые симметричные дольки фасоли.

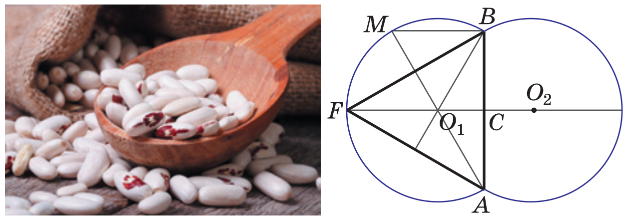


Рис. 5

Геометрическая флористика

Попробуем построить новые кривые и множества точек на плоскости, похожие своими очертаниями на представителей некоторых растений. Начнем с листьев желтой кувшинки, которую можно наблюдать на водной глади летнего водоема. Это многолетнее растение произрастает в медленно текущих водах: в речках, прудах или озерах. Стебель кубышки желтой (таково точное научное название растения) тянется от самого дна. А листья растения крупные и похожи по форме на сердце. Каждый лист, точнее, его очертание, представляет собой некоторое геометрическое место точек. Это обстоятельство было замечено еще немецким математиком Мюнгером, который изобрел кривую, напоминающую лист желтой кубышки. В честь видного ученого она получила название овала Мюнгера.

Построим упомянутую кривую как некоторое геометрическое место точек. Для этого в декартовой системе координат начертим произвольную окружность так, чтобы ее центр O_1 был правее начала координат (рис. 6).

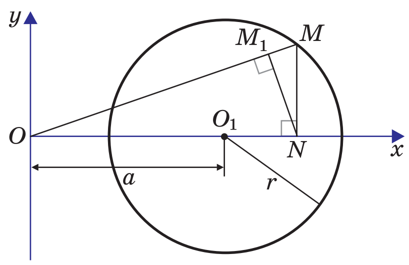


Рис. 6

А дальше построим одну из точек овала Мюнгера. Для начала возьмем произвольную точку M окружности и опустим из нее перпендикуляр MN на ось OX. Соединим точки O и M отрезком, а затем из точки N опустим перпендикуляр на прямую OM. Основание перпендикуляра — точка M_1. Она принадлежит овалу Мюнгера. Если взять все точки окружности и для каждой из них по точно такому же алгоритму построить соответствующие точки, то образуется кривая, очертание которой похоже на лист кувшинки. Процесс построения этого геометрического места точек кропотливый и длительный. Легче и быстрее овал Мюнгера можно нарисовать на компьютере, воспользовавшись одной из графопостроительных программ. Например, простой и удобной *Advanced Grapher* (ее автор — М. Серпик).

Известно, что кривые на плоскости задаются уравнениями с двумя переменными. Самая знакомая из них — окружность. Ее уравнение

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2,$$

где $(a;\ b)$ — координаты центра, R — радиус. А вот овалу Мюнгера в декартовой системе координат соответствует довольно сложное уравнение

$$(x^2+y^2)^3-2ax^3(x^2+y^2)+(a^2-r^2)x^4=0.$$

Помимо переменных, в уравнение входят два параметра, a и r. Они характеризуют расстояние от центра окружности до начала координат (a) и радиус (r) окружности, с помощью которой строится кривая, напоминающая лист кувшинки. Изменяя значения параметров a и r, мы будем получать различные положения и размеры овала Мюнгера в системе координат. Лист желтой кубышки под воздействием математических параметров то увеличивает, то уменьшает свои размеры. Остается неизменной только форма. На рисунках 7 и 8 показаны изображение настоящей кувшинки и компьютерная модель ее листа.

Рис. 7

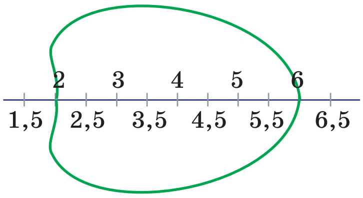


Рис. 8

Кто не знает заячью капусту? Ботаники называют ее кислицей обыкновенной. Это многолетнее травянистое растение, листья которого мягким ковром покрывают подножия деревьев в тенистом лесу. Но нас интересует схожесть формы листа кислицы с математической кривой. Если опять в окне программы *Advanced Grapher* записать уравнение

$$R=4(1+\cos 3\alpha+\sin^2 3\alpha)$$

в полярных координатах, то получится кривая, напоминающая лист заячьей капусты (рис. 9).

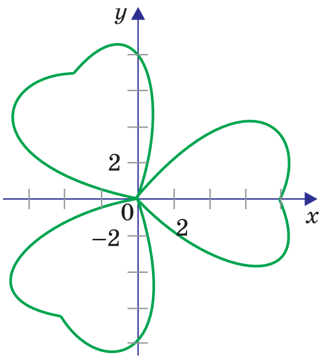


Рис. 9

Рис. 10

Интерес к изучению «растительных» кривых, утраченный во времена Средневековья, возродился позже, с открытием координатного метода. Его основы были заложены французским математиком Р. Декартом в 1637 г. в книге «Геометрия». С помощью нового метода появилась возможность изображать на плоскости точки, линии, множества. Сам Декарт, применяя метод координат, исследовал кривую, получившую название «цветок жасмина» (рис. 11).

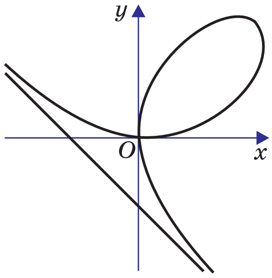


Рис. 11

Построим кривую, часть которой действительно похожа на лепесток жасмина. Математики называют ее *Декартовым листом*. Из центра координат проведем окружность радиуса $OA = l$ (рис. 12).

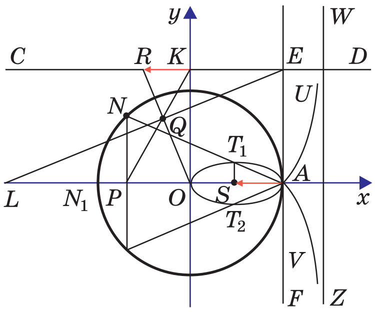


Рис. 12

Затем возьмем точку K на оси Oy так, чтобы $OK > OA$. Через точку K проведем прямую CD, параллельную Ox. Далее строим касательную AF к окружности, которая пересекает прямую CD в точке E. На луче AO от его начала отложим отрезок $AL = 3OA$. Соединим отрезком точки L и E. Отметим на окружности произвольную точку N и проведем отрезок AN. Опустим из точки N перпендикуляр NP на ось Ox. Точку P соединим с точкой K. Отрезки PK и LE пересекаются в точке Q. Далее проведем прямую OQ, которая пересечет прямую CD в точке R. На луче AO от его начала отложим отрезок $AS = KR$ (векторы AS и KR одинаково направлены). Через точку S проведем прямую, параллельную оси OY. Эта прямая пересечет отрезок NA в точке T_1, которая и является точкой *Декартова листа*. Точка T_2, симметричная точке T_1 относительно оси Ox, также лежит на искомой кривой. Если теперь представить, что некоторая точка N описывает данную окружность, выходя из точки A и возвращаясь в нее (движение происходит против часовой стрелке), то точка T_1 описывает линию VAT_1OT_2AU. Прямая ZW является вертикальной асимптотой *Декартова листа*.

Как видим, процесс построения «листа жасмина» довольно сложный. Кстати, первоначально эту линию рисовали так, что лепестков было четыре. Причем каждый из них располагался в четырех координатных четвертях. *Лист жасмина* можно построить с помощью *Abvanced Grapger*, используя уравнение

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0.$$

Для этого надо подобрать четыре значения параметра a так, чтобы Декартов лист несколько раз симметрично отобразился относительно осей координат и занял первоначальное положение (рис. 13). Если изобразить все четыре лепестка, то получится цветок, напоминающий цветок жасмина (с неизбежно стремящимся к своим асимптотам *Декартовым листьям*). На компьютере мы видим тот самый жасмин, прекрасным запахом которого наслаждаемся ранним летом.

Рис. 13

Летом цветет не только жасмин, но и розы — самые яркие и нежные цветы. Восхищаясь ими, мы вряд ли задумываемся о математических кривых. И напрасно: в аналитической геометрии есть свои розы, не хуже настоящих. Это кривые, заданные в полярной системе координат уравнением

$$R = a\sin k\varphi .$$

Если k — четное число, то у розы $2k$ лепестков; если k — нечетное, то роза k-лепестковая. Параметр a, входящий в уравнение, выражает максимальную длину лепестка (если измерять ее от основания до кончика). Выбирая значения a и k, можно построить целый розарий (рис. 14, *а–в*). Первым математическим «садовником», который вывел уравнения розообразных кривых, был итальянский ученый *Гвидо Гранди* (1671–1742).

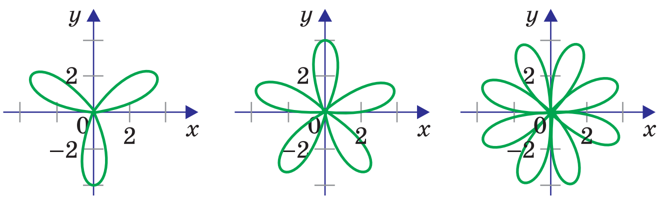


Рис. 14

«Растительную» тему в математике продолжил немец *Бодо Хабенихт*. Он еще более удивил научный мир. Его книги «Аналитические формы листьев» (1895) и «Вклад в математическое обоснование морфологии листьев» (1905) содержали большое количество уравнений, с помощью которых можно было строить очертания листьев растений. Листая страницы книги, мы встречаем кривую, напоминающую лист щавеля:

$$R = (1 + \cos^2 a)(1 + \cos^3 a);$$

линию, весьма похожую на лист плюща

$$R = 3\left(1 + \cos^2 a\right) + 2\cos a + \sin^2 a - 2\sin^2 3a \cdot \cos^4 \frac{a}{2}.$$

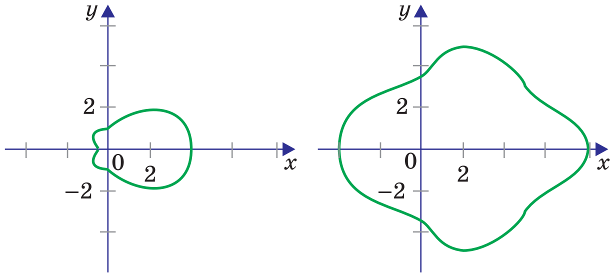


Рис. 15

А вот еще несколько уравнений кривых-листьев, которыми так богата удивительная книга Б. Хабенихта:

$$R = 4(1 + \cos 3a - \sin^2 3a);$$

$$R = 10\cos^7 a + 4\cos 9a \cdot \cos^{10} a;$$

$$R = 5\cos^{10} 3a \cdot \cos^2 \frac{a}{2}.$$

Постройте их на компьютере и вспомните, где они вам встречались. Очертания каких листьев они напоминают? Увидев однажды разнообразные цветы и листья, ученый скрупулезно и долго их изучал, а потом вручную строил сложные «растительные» формы. Читая книгу Б. Хабенихта, не только чувствуешь удивительную логику автора, но и его любовь к природе родного края. И это не случайно: ученый происходил из семьи лесника и много лет прожил в лесу. Острый ум, наблюдательность, необыкновенное трудолюбие и блестящее знание математики помогли ему в дальнейшем открыть многие тайны морфологии растений.

Конечно, приведенные формулы весьма приближенно описывают формы листьев растений. Разве можно с помощью геометрических построений и алгебраических уравнений передать все многообразие флоры? Наверное, нет. Но если использовать компьютер, то многое можно передать. Стремительно развиваются математика, информатика, прикладные науки. Благодаря открытиям современных ученых, инженеров, программистов мы можем моделировать самые причудливые и невероятные объекты и формы, о которых математики XVII–XX вв. могли только мечтать.

КОНКУРС «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ»

Математика владеет не только истиной, но и высшей красотой — красотой отточенной и строгой, возвышенно чистой и стремящейся к подлинному совершенству, которое свойственно лишь величайшим образцам искусства.

Бертран Рассел

Организация конкурса. В сентябре – декабре 2015 года проходит второй тур конкурса «Математический потенциал». В туре четыре этапа, на каждом этапе — одно задание.

Участники конкурса. В конкурсе могут принять участие, начиная с любого этапа, коллективы учащихся (класс, кружок), группы учащихся разного возраста или отдельные ученики 5–10-х классов. Все участники, как коллективные, так и индивидуальные, должны иметь руководителя из числа учителей математики или преподавателей кружка. Задача руководителя: оказывать участнику организационную помощь в работе, в оформлении и отправке ее результатов.

Лауреаты и победитель конкурса. Участник, выполнивший хотя бы одно задание, будет объявлен лауреатом конкурса, а участник, выполнивший наибольшее число заданий, — победителем.

Тематика тура. В этом туре предлагается выполнение проекта под названием «Оформляем кабинет математики». Как можно узнать, что ты входишь в кабинет математики? По таблицам с математическими формулами на стене, по моделям многогранников в шкафу, по чертежным инструментам у доски. Но со временем все это требует обновления и нового взгляда. Это и есть цель проекта.

Куда отправлять работы. Почтовое отправление с пометкой на конверте «Математический потенциал» следует выслать по адресу: редакция журнала «Математика», Издательский дом «Первое сентября», ул. Киевская, д. 24, Москва, 121165.

Электронное письмо направляйте на электронный адрес: mat@1september.ru, написав «Математический потенциал. Задание: Модели многогранников» в поле «Тема».

Сроки. Продолжительность тура: с 1 сентября по 31 декабря 2015 года.

Последний срок отправки работ любого этапа — до 1 февраля 2016 года (по почтовому штемпелю).

Заявка участника конкурса

Форма участия: индивидуальная / коллективная (*нужное подчеркнуть*) Название команды (*если есть*)	
Фамилия, имя (каждого участника)	
Школа, класс	
ФИО руководителя	
Контакты (адрес и телефон руководителя)	

К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru (Заявка участника.)

Задание 1. Модели многогранников

Самая известная книга о том, как мастерить многогранники, создана американским учителем математики М. Венниджером. Сейчас ее можно найти в Интернете, например, здесь: http://wenninger.narod.ru. Эта книга может стать для вас помощником в изготовлении самых различных многогранников — от простейших до необыкновенно сложных. С точки зрения дидактики учащимся 5–6-х классов полезно склеить куб, параллелепипед, тетраэдр, а старшеклассникам — модели к задачам, решаемым в курсе стереометрии, для приобщения к истории математики — правильные многогранники, ну а для того, чтобы удивиться, восхититься и просто получить удовольствие — великолепные звездчатые многогранники.

Мы ждем от вас фотографии моделей многогранников, сделанных вашими руками. Можно вместе с их авторами. Модели могут быть изготовлены из бумаги, проволоки или других материалов. Их можно расположить на специальных полках или в шкафу и обязательно сделать соответствующие подписи, дополнить фотографиями, демонстрирующими примеры использования этих многогранников, а также предложить свой вариант использования.

Для вдохновения предлагаем «послушать» самого Венниндждера:

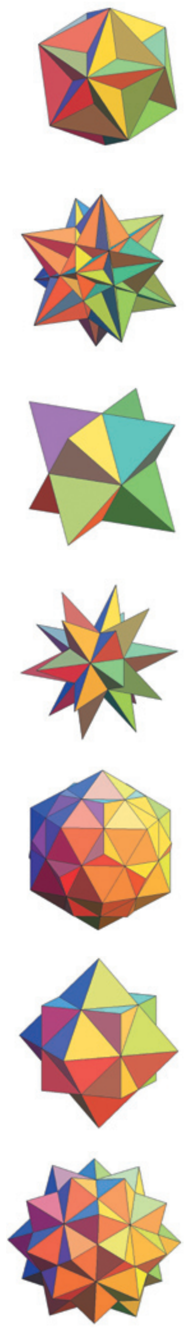
«Создавая эту книгу, я стремился дать читателю простые, удобные и не слишком умозрительные указания, достаточные для построения моделей многогранников. Приходится лишь удивляться, сколь поучительно это занятие и как много оно дает. Раз начав, вы и не заметите, как вас затягивает все глубже. Вы почувствуете красоту различных форм, и она будет сродни той красоте, которую находит математик в мире дорогих его сердцу абстракций...

Возможно, при виде наших моделей кто-нибудь спросит: «Какая от них польза?» На это позволительно ответить так: «А разве все красивое полезно?» Впрочем, нетрудно усмотреть известную пользу, которую приносят модели в качестве декоративных украшений. Ими хорошо украсить комнату или праздничный стол. А как красивы блестящие звезды на елке! На страницах этой книги вас ждёт изобилие декоративных форм — возможность выбора обеспечена.

Рассматривая многогранные формы, характерные для космических устройств, вы обнаружите приложения, имеющие более серьезное прикладное значение. Наконец, в книге можно найти множество примеров, позволяющих судить о применении многогранников в архитектуре и строительстве, особенно если обратить внимание на конструкции сложных «геодезических» куполов и перекрытий. Впрочем, многие из представленных здесь многогранников ранее никогда не использовались. Видимо, это объясняется тем, что они почти никому не известны.

Все модели, описанные в книге и показанные на фотографиях, мною изготовлены. Быть может, вам интересно знать, как давно я этим занимаюсь? Впервые я обратился к этой теме в 1958 году. На следующий год я уже смастерил первые модели — их вы можете увидеть в первой части книги. Основным источником информации для меня служила книга «Математические развлечения» Кокстера и Болла. В 1959—1961 годах я воспроизвел все модели, описанные в книге Канди и Роллетта «Математические модели», после чего взялся за «Пятьдесят девять икосаэдров» Кокстера, Дюваля, Флэзера и Петри. При этом мне удалось разработать весьма удобную технологию изготовления моделей. Те из них, что украшают ныне заднюю стену класса, где я преподаю математику, сделаны в 1961—1963 годах. В среднем каждая модель отнимала у меня около восьми часов; ещё три-четыре часа я тратил на подготовку исходного материала.

Время, которое я затратил на изготовление моделей невыпуклых однородных многогранников, в существенной степени зависело от характера модели. Так, на простейшие из них требовалось не более трех-четырех часов, в среднем же приходилось затрачивать восемь-десять часов, а некоторые сложные модели занимали двадцать-тридцать часов. Две модели отняли у меня свыше сотни часов каждая. Теперь, когда работа завершена, я, пожалуй, соглашусь с тем, что ее объем поразил и меня. Но китайская пословица гласит: «Если ты собираешься пройти тысячу ли, начни с того, что сделай первый шаг». За первым шагом последует другой, и вскоре красота открывшихся взору путника видов заставит его забыть о трудностях пути».



Рисунки взяты из статьи В.А. Смирнова «Использование компьютерной системы «maple» для изображения многогранников» (№18/2010), в которой автор рассказывает, как получить такие изображения с помощью компьютерной программы.

С. РАМОДАНОВ,
г. Москва

XXIV МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ И КРИПТОГРАФИИ

XXIV Межрегиональная олимпиада школьников по математике и криптографии проводилась в два тура. Первый тур проходил с 1 по 25 ноября 2014 года в дистанционной форме на интернет-сайте www.cryptolymp.ru.

Второй тур проводился в очной форме 30 ноября 2014 года в 40 городах: Москва — ИКСИ Академии ФСБ России, Барнаул — АлтГТУ, Белгород — БГТУ, Бийск — БТИА и АлтГТУ, Владивосток — ДВФУ, Владимир — ВлГУ, Волгоград — ВолГУ, Воронеж — ВГТУ, Екатеринбург — УрФУ, Ижевск — УдГУ, Иркутск — ИГУ, Йошкар-Ола — ПГТУ, Казань — КНИТУ и КАИ, Калининград — БФУ, Краснодар — КубГТУ, Красноярск — СибГАУ и СФУ, Курск — ЮЗГУ, Нефтекамск — НФБашГУ, Нижний Новгород — ННГУ, Новосибирск — НГУЭУ, Озерск — ОТИ НИЯУ МИФИ, Омск — ОмГУ, Орел — Академия ФСО России, Оренбург — ОГУ, Пенза — ПГУ, Пермь — ПНИПУ, Пятигорск — ПГЛУ, Ростов-на-Дону — ДГТУ, Рязань — РГРТУ, Самара — СамГУ, Саратов — СГТУ, Санкт-Петербург — ГУАП и СПбПУ, Сыктывкар — СыктГУ, Таганрог — ЮФУ, Тамбов — ТГТУ, Томск — ТГУ и ТУСУР, Тюмень — ТюмГУ, Хабаровск — ДВГУПС, Челябинск — ЧелГУ, Ярославль — ЯрГУ.

Всего во втором туре приняли участие более 1200 человек, из них более 200 награждены дипломами I, II, III степени. Проверка работ проводилась централизованно и по единым критериям для каждого класса. Задания олимпиады были подготовлены для каждой возрастной категории (8–9-е, 10-й и 11-й классы) в нескольких равноценных вариантах. В статье приводятся условия и решения одной из задач каждого типа.

Межрегиональная олимпиада школьников по математике и криптографии включена в перечень олимпиад школьников на 2014/2015 учебный год (1-й уровень), что дает право предоставлять льготы победителям и призерам при поступлении в государственные и муниципальные учреждения высшего образования (приказ Минобрнауки России от 04.04.2014 № 267).

Условия, решения задач и комментарии

Задача 1 (*8–9-е, 10-й, 11-й классы*) Линия связи состоит из 4 каналов, пронумерованных числами 1, 2, 3, 4. Для передачи по линии сигнала на каждый канал подается свой импульс, величина которого может быть 7, 9, 11, 13 или 15 единиц. В каждом канале есть усилитель, который увеличивает поданный импульс в 5^{i-1} раз, где i — номер канала. На выходе линии формируется сигнал, который равен остатку от деления на 625 суммы полученных по каналам импульсов. Какие импульсы необходимо подать на каналы, чтобы получить сигнал величиной 57 единиц?

Решение. Заметим, что числа 7, 9, 11, 13, 15, равные импульсам, которые передаются по каналам, дают разные и в точности все возможные остатки при делении на 5.

Пусть $a \in \boldsymbol{Z}$ — значение, равное сумме импульсов, переданных по четырем каналам. Тогда, по условию задачи, $r_{625}(a) = 57$, где $r_{625}(a)$ — остаток от деления a на 625, то есть $a = 57 + 625q$, $q \in \boldsymbol{Z}$. С другой стороны,

$$a = a_1 + 5a_2 + 25a_3 + 125a_4,$$

где $a_i \in \{7; 9; 11; 13; 15\}$, $i \in \{1; 2; 3; 4\}$, поэтому

$$a_1 + 5a_2 + 25a_3 + 125a_4 = 57 + 625q. \qquad (1)$$

Получаем, что

$$r_5(a_1) = r_5(57 + 625q) = r_5(57) = 2,$$

откуда следует, что число a_1 может равняться только 7, поскольку только оно дает остаток 2 при делении на число 5.

Тогда равенство (1) примет вид:

$$a_2 + 5a_3 + 25a_4 = 10 + 125q. \qquad (2)$$

Получаем:

$$r_5(a_2) = r_5(10 + 125q) = r_5(10) = 0, \ \ a_2 = 15.$$

Тогда равенство (2) примет вид:

$$a_3 + 5a_4 = -1 + 25q, \qquad (3)$$

откуда

$$r_5(a_3) = r_5(-1 + 25q) = 4, \ \ a_3 = 9.$$

Из равенства (3) вычислим:

$$a_4 = -2 + 5q, \ a_4 = 13.$$

Таким образом, искомый набор импульсов есть 7, 15, 9, 13.

Ответ: 7, 15, 9, 13.

Комментарий

Напомним, любое целое число $a \in \{0; 1; ...; p^n - 1\}$ (p — простое, $n \in \boldsymbol{N}$) может быть единственным образом представлено в так называемом p-ичном разложении:

$$a = a_0 + a_1 \cdot p + ... + a_{n-1} \cdot p^{n-1},$$

где $a_i \in \{0; 1; ...; p-1\}$, $i = 0; 1; ...; n-1$. Нетрудно заметить, что решение предложенной задачи основано на использовании определенного аналога p-ичного разложения целых чисел. Этот факт не случаен. На самом деле, справедливо следующее. Пусть множество $\boldsymbol{B} = \{b_0; ...; b_{p-1}\}$ состоит из таких чисел $b_i \in \{0; 1; ...; p^n - 1\}$, что $r_p(b_i) = i$. Другими словами, $\boldsymbol{B}$ состоит из чисел множества $\{0; 1; ...; p^n - 1\}$, которые в совокупности дают все возможные и различные остатки при делении на число p (такие множества называют разрядными). Тогда для любого целого числа $a \in \{0; 1; ...; p^n - 1\}$ существует единственный набор чисел $a_i \in \boldsymbol{B}$, $i = 0; 1; ...; n-1$. такой, что:

$$a = r_{p^n}\left(a_0 + a_1 \cdot p + \ldots + a_{n-1} \cdot p^{n-1}\right).$$

Данное представление называется *разложением* числа a в разрядном множестве $\boldsymbol{B}$. Если $\boldsymbol{B} = \{0; 1; ...; p-1\}$, то $\boldsymbol{B}$ называют p-ичным разрядным множеством. В математике отдельный интерес представляет еще один вид разрядного множества: $\boldsymbol{B} = \left\{a\colon r_{p^n}\left(a^p\right) = a\right\}$, которое называют p-адическим, или разрядным множеством Тейхмюллера.

В представленной задаче были выбраны следующие параметры: $p = 5$, $n = 4$ и $\boldsymbol{B} = \{7; 9; 11; 13; 15\}$.

Задача 2. (*8–9-е, 10-й, 11-й классы*) Докажите, что *нельзя обойти* все клетки изображенной на рисунке 1 фигуры, побывав в каждой ровно один раз. Начинать движение можно из любой клетки. Разрешается двигаться на *одну клетку* только вправо, влево, вверх или вниз. Движение по диагонали запрещено.

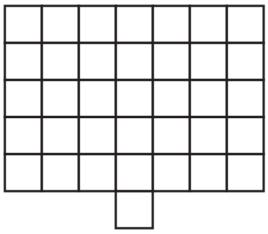


Рис. 1

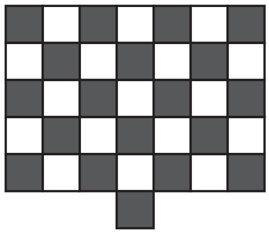


Рис. 2

Решение. Раскрасим клетки как на рисунке 2. Тогда, делая один шаг, из черной клетки можно попасть только в белую и наоборот. Значит, если бы искомый обход был возможен, то клеток одного цвета было бы столько же, сколько другого или на единицу больше. Но черных клеток на две больше, чем белых, поэтому обход невозможен.

Комментарий

В основе предложенной задачи лежит несколько математических понятий. *Графом* называется множество, состоящее из точек (*вершин*) V и отрезков E (*ребер*), их соединяющих. Последовательность вершин графа, в которой каждые две идущие друг за другом вершины соединены ребром, называется *путем* в графе. Путь графа, проходящий через все его вершины в точности по одному разу, называется *гамильтоновым* (например, рис. 3). Не во всяком графе такой путь существует.

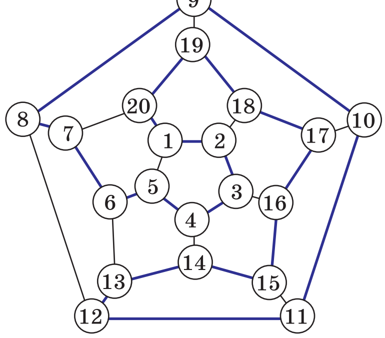


Рис. 3

Более того, известно, что задача нахождения такого пути в произвольном графе является достаточно сложной. Однако бывают графы, для которых эта задача легко разрешима. Одним из таких примеров являются *двудольные графы*. Граф называется двудольным, если множество его вершин V можно разбить на два множества X и Y так, что все ребра графа соединяют вершины из X с вершинами из Y. Другими словами, множество вершин графа распадается на две «доли», а ребра графа соединяют эти доли (рис. 4). Нетрудно понять, что если в двудольном графе есть гамильтонов путь, то число вершин в обеих «долях» любо одинаково, либо в одной из них на одну больше, чем в другой.

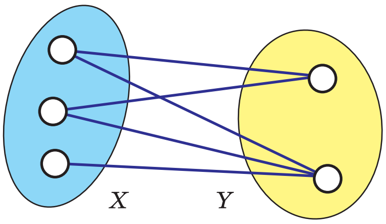


Рис. 4

Если в каждую клетку фигуры из задачи поставить по точке (вершине) и соединить отрезками (ребрами) точки, лежащие в соседних клетках, то получим граф. Раскрасив клетки, как показано на рисунке 2, получим разбиение множества вершин графа на те, которые стоят в белых клетках, и на те, которые находятся в черных. Ясно, что ребра соединяют только вершины, лежащие в клетках разного цвета. А значит, построенный нами граф — двудольный.

Для решения задачи осталось воспользоваться полученным ранее свойством, из которого следует, что гамильтонова пути в графе нет.

Интересно отметить, что с данной задачей связано еще одно понятие: *t-раскраска графов*. Говорят, что граф можно раскрасить в t цветов, если множество его вершин можно так покрасить, используя t цветов, что любые две его вершины, соединенные ребром, будут иметь разные цвета. При этом минимальное число цветов, которым можно раскрасить граф, называется его *хроматическим числом*. Двудольные графы, как нетрудно видеть, являются 2-раскрашиваемыми.

С раскраской графов связано несколько математических проблем, самая известная из которых — *гипотеза о четырех красках* (решена).

Задача 3 (*11-й класс*) Для проведения расследования оперативным работникам необходимо попасть в игровой зал подпольного казино, который открывается с помощью электронных устройств A и B, расположенных в разных помещениях. Один из оперативников в промежуток времени с 6.00 до 7.15 может получить доступ к устройству A, а другой, в то же самое время, — к устройству B. До начала операции известно следующее.

1. На лицевой панели каждого устройства имеется 5 тумблеров, принимающих положения «0» или «1», а также трехразрядное десятичное табло (рис. 5).

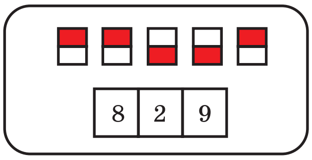


Рис. 5

2. Каждому положению тумблеров соответствует свое *уникальное для данного устройства* трехзначное число на табло. Соответствие положений тумблеров числам и сами числа неизвестны.

3. Тумблеры можно установить в такие положения, что числа на табло обоих устройств совпадут. *В этом и только в этом случае дверь в игровой зал откроется.*

4. Находясь в помещениях, оперативники смогут общаться, *только* пересылая друг другу по пневмопочте имеющийся в их распоряжении специальный блокнот со 1001 страницей.

5. Страница блокнота (рис. 6) позволяет вписывать в отведенные 5 позиций цифры 0 или 1. Никакие другие манипуляции со страницами технически невозможны.

Рис. 6

6. Известно, что между переключением тумблеров и появлением соответствующего трехзначного числа на табло проходит ровно 1 минута. В этот промежуток времени оперативник сможет отыскать в блокноте страницу по ее номеру, произвести на ней запись или прочитать ее содержимое. Провести манипуляции с большим числом страниц за одну минуту технически невозможно.

7. Время пересылки блокнота по пневмопочте — 3 минуты. Как в отведенное время открыть дверь?

Примечание. Рисунки лишь поясняют условие задачи. Не следует думать, что страницу 23 надо заполнять именно так и что такому положению тумблеров соответствует число 829.

Решение. Пусть, для определенности, блокнот сначала находится у оперативника, работающего с устройством А. За 33 минуты он перебирает все комбинации выключателей и записывает эти комбинации на страницах блокнота. Каждую комбинацию он пишет на странице с тем номером, который высветился на трехразрядном табло. То есть если при положении тумблеров, скажем, 11010 высветилось на табло 755, то на странице 0755 блокнота он и пишет 11010. Затем заполненный блокнот оперативник А отправляет оперативнику В.

В итоге, в 6.36 оперативник В получает блокнот и начинает перебирать все 32 комбинации тумблеров у себя, при этом сверяясь с блокнотом, а именно: сначала выставляет комбинацию 00000; через минуту на табло загорается, скажем, 120. Затем он выставляет 00001 и проверяет, заполнена ли страница 120 в блокноте, и т.д. Как только заполненная страница с некоторым номером n найдется (а, по условию, она найдется обязательно), он вписывает ее содержимое на страницу с номером 1001, а тумблеры выставляет так, чтобы на табло было n. На это у оперативника В уйдет не более 34 минут.

Самое позднее в 7.13 оперативник А получает блокнот обратно. На странице 1001 записано положение тумблеров, при котором уже на табло его устройства загорится n. Ему остается открыть блокнот на странице 1001, прочитать ее содержимое и выставить тумблеры. Не позднее 7.15 на его табло тоже высветится n, и дверь откроется.

В заключении отметим, что общее время можно еще уменьшить, исходя из следующих замечаний:

– когда оперативники попали в помещения, тумблеры уже находились в каком-то положении;

– оперативнику А достаточно вписать в блокнот лишь 31 комбинацию, так как если ни по одной из них оперативник В совпадений не найдет, то оставшаяся, 32-я комбинация будет искомой (страницу 1001 он оставит пустой).

Комментарий

Идея построения и решения данной задачи основывается на посылках теории вычислительных алгоритмов. Количество элементарных операций, необходимых для реализации алгоритма, называют его *временной* сложностью, а размер необходимой памяти — сложностью *емкостной*.

Согласно общей теории существует взаимосвязь между двумя указанными типами сложности алгоритмов решения задачи, которая в данном контексте может быть сформулирована следующим образом: чтобы уменьшить время решения задачи в классе алгоритмов, реализуемых с помощью вычислительной машины, следует выбирать алгоритм, обладающий возможно большей емкостной сложностью. Экономия времени, если говорить кратко, обусловлена способностью вычислительной машины мгновенно обращаться к любой ячейке оперативной памяти по ее адресу.

В рамках задачи роль процессора вычислительной машины выполняют сами оперативники, а роль ячеек памяти — страницы специального блокнота (номер страницы считается ее адресом). Само решение фактически описывает метод «встречи посередине» (MITM, meet-in-the-middle), при котором элементарными операциями являются:

– запись информации в ячейку памяти с заданным адресом (поиск страницы по номеру и запись нулей и единиц в отведенные поля);

– считывание информации из ячейки памяти с заданным адресом (поиск страницы по номеру и считывание ее содержимого);

– пересылка информационного массива (передача блокнота по пневмопочте).

Манипуляции с тумблерами и табло можно считать составными частями элементарных операций.

Решение поставленной перед оперативниками задачи за отведенное время становится возможным именно за счет привлечения большого объема памяти (по числу страниц в блокноте, это 1001 ячейка). Объем большой в том смысле, что число страниц блокнота превышает число 1000 возможных состояний табло и существенно превышает число 32 возможных положений тумблеров.

Задача 4 (*8–9-й, 10-е, 11-е классы*) Женя решила поделиться забавным *палиндромом* с Ксюшей (палиндром — текст, читающийся одинаково в обоих направлениях, например: «А роза упала на лапу Азора»). Но чтобы никто о нем больше не узнал, Женя зашифровала его следующим образом: каждую букву палиндрома она заменила числом согласно таблице (*внизу страницы*) и в результате получила последовательность чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{29}$.

А	Б	В	Г	Д	Е	Ё	Ж	З	И	Й	К	Л	М	Н	О	П	Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Я
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33

Затем она взяла последовательность целых чисел $y_1, y_2, ..., y_{29}$, полученных по правилу $y_i = i \cdot d$, где d — некоторое целое число, и вычислила новую последовательность $r_1, r_2, ..., r_{29}$, где r_i равно остатку от деления на 33 суммы $x_i + y_i$. В результате у нее получилось вот что:

11 30 1 11 7 15 31 5 13 23 21 5 31 12 3
26 26 14 11 27 31 4 11 9 15 0 4 14 9

Помогите Ксюше прочитать палиндром.

Решение. Поскольку по условию текст — палиндром, то $x_1 = x_n$, $x_2 = x_{n-1}$, ... Обозначим через $r_{33}(a)$ — остаток от деления числа a на 33. Вне зависимости от длины палиндрома нетрудно установить (см. приложение «Свойства остатков»):

$$r_{33}(r_n - r_1) = r_{33}(x_n + y_n - x_1 - y_1) = r_{33}((n-1)d),$$
$$r_{33}(r_{n-1} - r_2) = r_{33}(y_{n-1} - y_2) = r_{33}((n-3)d),$$
$$...$$

В рассматриваемом случае длина палиндрома нечетная, поэтому можно найти значение $r_{33}(2d)$ из равенства:

$$r_{33}(r_{16} - r_{14}) = r_{33}(26 - 12) = 14 = r_{33}(2d).$$

Подбором найдем $d = 7$, после чего вычислим искомое сообщение, используя формулу:

$$x_n = r_{33}(r_n - n \cdot d),\ n \in \{1; ...; 15\}.$$

Например, при $n = 1$ $x_1 = r_{33}(11 - 7) = 4$. Следовательно, первая и последняя буквы сообщения — это буква «Г». Аналогичным образом находим $x_2, x_{28}; x_3, x_{27}$ и т.д.

Ответ: «Голоден носитель лет и сон не долог».

Комментарий

В данной задаче в качестве способа преобразования открытого сообщения использовался *шифр модульного гаммирования*. Данный вид шифра рассматривался во многих задачах олимпиады на протяжении всего времени ее существования. Напомним, что шифр модульного гаммирования описывается следующим образом. Пусть открытое сообщение $x_1, ..., x_t$ состоит из символов алфавита $X = \{0; ...; n-1\}$. Выберем некоторую последовательность (*гамму*) $\{\gamma_1, ..., \gamma_t\}$, где $\gamma_i \in X$, $i = 1, ..., t$. и применим к каждому символу x_i преобразование по правилу:

$$y_i = r_n(x_i + \gamma_i),\ i = 1, ..., t,$$

где $r_n(a)$ — остаток от деления a на n. Сформированная последовательность $y_1, ..., y_t$ является шифртекстом, полученным на гамме $\gamma_1, ..., \gamma_t$.

Чтобы такой шифр был стойким, необходимо, чтобы последовательность $\gamma_1, ..., \gamma_t$ была «хорошей», то есть неотличимой от *случайной*. В настоящей задаче гамма не являлась таковой и формировалась по арифметической прогрессии. Данный факт в совокупности со знанием особенностей открытого сообщения позволил решить задачу.

Задача 5 (*8–9-е, 10-й, 11-й классы*) Из последовательности $x_1, x_2, ..., x_n$, $x_i \in \{0; 1\}$, получена последовательность $y_1, y_2, ..., y_{n-1}$ по правилу: $y_i = x_i \cdot x_{i+1}$, $i = 1, ..., n-1$. Определите, какие из четырех приведенных ниже последовательностей $y_1, y_2, ..., y_{10}$ могли быть получены указанным способом, а какие нет.

(I): 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0;

(II): 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1;

(III): 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0;

(IV): 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0.

Сколько последовательностей $y_1, y_2, ..., y_6$ может быть получено (при выборе всех возможных $x_1, x_2, ..., x_7$, $x_i \in \{0; 1\}$? Ответ обоснуйте.

Комментарий

Одной из важных задач, решаемых криптографией, является задача построения последовательностей, которые очень сложно отличить от истинно случайной последовательности. Такие последовательности вырабатываются, например, генератором случайных чисел, входящим в состав любого современного компилятора для языка программирования. Кроме непосредственного их использования для получения наборов «случайных» значений, эти последовательности применяются и для шифрования информации. Если генератор «не очень хороший», то получаемые последовательности не могут считаться случайными, более того, некоторые отрезки знаков никогда не могут в ней появиться. Такие фрагменты знаков называются *запретами*.

Решение. Для каждой из возможных последовательностей из четырех символов x_1, x_2, x_3, x_4 найдем соответствующую последовательность y_1, y_2, y_3. Результаты приведены в таблице 1 (а). Заметим, что выходной набор символов y_1, y_2, y_3 из 0 и 1 может быть любым за исключением 1, 0, 1 — это запрет.

Покажем, что любая выходная последовательность $y_1, y_2, ..., y_{n-1}$, не содержащая фрагмент последовательно идущих символов 1, 0, 1, может быть получена из некоторой входной последовательности $x_1, x_2, ..., x_n$. Предположим, что последовательность $y_1, ..., y_k$ уже получена с помощью некоторой последовательности $x_1, ..., x_{k+1}$, $k \geq 3$. Тогда можно получить как последовательность $y_1, ..., y_k, 0$, так и $y_1, ..., y_k, 1$ при условии, что она не содержит фрагмент 1, 0, 1. Первая последовательность получается из $x_1, ..., x_{k+1}, 0$, а вторая последовательность может иметь вид либо $y_1, ..., y_{k-2}, 0, 0, 1$, либо $y_1, ..., y_{k-1}, 1, 1$. В первом случае выходная последовательность получается из $x_1, ..., x_{k-1}, 0, 1, 1$, а во втором — из $x_1, ..., x_{k-1}, 1, 1, 1$.

Таблица 1

а)		б)			
x_1, x_2, x_3, x_4	y_1, y_2, y_3	*запреты* $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6$			
0, 0, 0, 0	0, 0, 0	1	0, 0, 0, 1, 0, 1	17	1, 0, 1, 1, 0, 0
0, 0, 0, 1	0, 0, 0	2	0, 0, 1, 0, 1, 0	18	1, 0, 1, 1, 0, 1
0, 0, 1, 0	0, 0, 0	3	0, 0, 1, 0, 1, 1	19	1, 0, 1, 1, 1, 0
0, 0, 1, 1	0, 0, 1	4	0, 0, 1, 1, 0, 1	20	1, 0, 1, 1, 1, 1
0, 1, 0, 0	0, 0, 0	5	0, 1, 0, 1, 0, 0	21	1, 1, 0, 1, 0, 0
0, 1, 0, 1	0, 0, 0	6	0, 1, 0, 1, 0, 1	22	1, 1, 0, 1, 0, 1
0, 1, 1, 0	0, 1, 0	7	0, 1, 0, 1, 1, 0	23	1, 1, 0, 1, 1, 0
0, 1, 1, 1	0, 1, 1	8	0, 1, 0, 1, 1, 1	24	1, 1, 0, 1, 1, 1
1, 0, 0, 0	0, 0, 0	9	0, 1, 1, 0, 1, 0	25	1, 1, 1, 0, 1, 0
1, 0, 0, 1	0, 0, 0	10	0, 1, 1, 0, 1, 1	26	1, 1, 1, 0, 1, 1
1, 0, 1, 0	0, 0, 0	11	0, 1, 1, 1, 0, 1	27	1, 1, 1, 1, 0, 1
1, 0, 1, 1	0, 0, 1	12	1, 0, 0, 1, 0, 1		
1, 1, 0, 0	1, 0, 0	13	1, 0, 1, 0, 0, 0		
1, 1, 0, 1	1, 0, 0	14	1, 0, 1, 0, 0, 1		
1, 1, 1, 0	1, 1, 0	15	1, 0, 1, 0, 1, 0		
1, 1, 1, 1	1, 1, 1	16	1, 0, 1, 0, 1, 1		

Подсчитаем число последовательностей длины 6, не содержащих отрезок 1, 0, 1. Для этого из общего числа последовательностей (их 64) необходимо вычесть те, которые содержат 1, 0, 1 (из проведенных рассуждений только они будут запретами, всего их будет 27, все перечислены в табл. 1 (б)).

Ответ: последовательности (I) и (III); количество 37.

Задача 6 (*10-й, 11-й классы*) Для доступа на сайт Алиса вводит в строке браузера его имя. Затем это имя по сети отправляется на специальный DNS-сервер, который по имени сайта определяет его IP-адрес — набор из четырех целых чисел x_1, x_2, x_3, x_4, причем $0 < x_i < 255$, $i = 1, 2, 3, 4$. Этот IP-адрес сервер отправляет Алисе. Чтобы защитить передаваемый адрес от подделки, сервер вместе с адресом передает число s, которое он вычисляет так: $s = r_{323}((h_4)^d)$, где d — секретное натуральное число, известное только Алисе и серверу, а $r_{323}(x)$ — остаток от деления числа x на 323; число h_4 находится последовательным применением правила $h_i = r_{323}((h_{i-1})^2 \cdot x_i)$, где i принимает значения 1, 2, 3, 4, а $h_0 = 123$. Получив IP-адрес, Алиса также вычисляет s и, если оно совпадает с присланным сервером значением, признает этот IP-адрес подлинным. Злоумышленник узнал, что на запрос Алисы сервер ответил: 192.168.2.5 при $s = 130$. Он хочет от имени сервера отправить Алисе ложный (отличающийся от исходного) адрес вида 192.168.a.b и такое число s', чтобы этот адрес Алиса признала подлинным. Найдите хотя бы одну такую тройку a, b, s' с условием $s' \geq 1$.

Решение. Заметим, что находить значение d нет необходимости — достаточно найти пару x_3', x_4' такую, что $x_3' \neq x_3$, $x_4' \neq x_4$ и описанное преобразование (в основе которого лежит применение функции h) от значений x_1, x_2, x_3', x_4' дает тоже значение h_4. По условию задачи, выполняются равенства

$$\begin{cases} h_1 = r_N\left(\left(h_0\right)^2 \cdot x_1\right), \\ h_2 = r_N\left(\left(h_1\right)^2 \cdot x_2\right), \\ h_3 = r_N\left(\left(h_2\right)^2 \cdot x_3\right), \\ h_4 = r_N\left(\left(h_3\right)^2 \cdot x_4\right), \end{cases}$$

откуда

$$h_4 = r_N((h_2)^4 \cdot (x_3)^2 \cdot x_4). \qquad (4)$$

Будем искать новый IP-адрес при условии сохранения прежних компонент x_1, x_2. Найдем такие x_3', x_4' и параметр h_3', которые удовлетворяют системе

$$\begin{cases} h_3' = r_N\left(\left(h_2\right)^2 \cdot x_3'\right), \\ h_4 = r_N\left(\left(h_3'\right)^2 \cdot x_4'\right). \end{cases}$$

Тогда, с учетом выражения (4), имеем:

$$r_N\left(\left(h_2\right)^4 \cdot \left(x_3\right)^2 \cdot x_4\right) = r_N\left(\left(h_3'\right)^2 \cdot x_4'\right) = r_N\left(\left(h_2\right)^4 \cdot \left(x_3'\right)^2 \cdot x_4'\right),$$

$$\left(x_3'\right)^2 \cdot x_4' = \left(x_3\right)^2 \cdot x_4 + t \cdot N,$$

где t — натуральное. При $t = 1$ имеем:

$$\left(x_3'\right)^2 \cdot x_4' = 20 + 323 = 343 = 7^2 \cdot 7,$$

откуда получаем следующий возможный вариант для пары $\left(x_3'; x_4'\right)$: (7; 7).

Ответ: возможным вариантом будет 192.168.7.7 с исходным значением $s = 130$.

Комментарий

Известно, что каждое устройство в сети имеет свой числовой IP-адрес. Это дает возможность всем таким устройствам отправлять конкретным адресатам и получать от них электронные сообщения. Однако в связи с тем, что числовые адреса трудно запомнить, обычно используются так называемые доменные имена, такие как www.cryptolymp.ru. Естественно, его легче запомнить, чем, например, сочетание чисел 192.168.2.5 (которое становится еще более громоздким при переходе к новой версии адресов IPv6). В связи с этим необходим механизм, позволяющий сопоставлять доменные адреса и IP-адреса, что и осуществляет система DNS (domain name system, рис. 7).

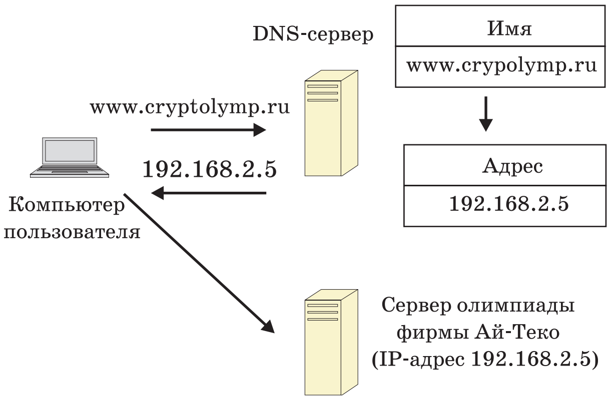


Рис. 7

Данный механизм не защищает IP-адреса от их подмены на ложные (то есть от проведения так называемой spoofing-атаки), что приводит к тому, что пользователь попадает на ложный сервер. Если злоумышленник сможет добиться того, что пользователь не заметит внешних отличий (например, ожидаемая страничка ложного сайта будет такой же, как и для реального, это fishing-атака), то таким образом он будет обмениваться данными (возможно, и конфиденциальными) фактически со злоумышленником. Для решения этой проблемы можно использовать механизм DNSSEC, при котором в ответе сервера наряду с IP-адресом передается величина фиксированной длины, позволяющая проверить, был ли подменен передаваемый адрес или нет. Данная величина является *электронной подписью*, которая представляет собой результат применения некоторой сжимающей математической функции к IP-адресу, зашифрованный с использованием секретного ключа DNS-сервера. Проверить такую подпись, то есть расшифровать ее, получив сжатые данные, самостоятельно сжать переданный адрес и сравнить его с полученными сжатыми данными после их расшифрования может каждый, так как ключ расшифрования (открытый ключ сервера) известен всем (рис. 8).

Если была подмена адреса, то соответствующие значения не совпадут, так как злоумышленник не знает секретного ключа сервера и не может сформировать проходящую проверку электронную подпись от ложного адреса. С другой стороны, если противник сможет найти какой-то другой IP-адрес, для которого значение функции сжатия такое же, что и для истинного адреса (такая пара значений для функции сжатия называется *коллизией*), то злоумышленник может передать этот новый найденный адрес с сохранением значения электронной подписи от предыдущего истинного адреса и пользователь при осуществлении проверки не обнаружит подмены. В связи с этим необходимо, чтобы задача нахождения коллизий для используемой функции сжатия при формировании электронной подписи была сложнорешаемой. Это становится особенно важным в случаях, когда электронная подпись по своей юридической значимости приравнивается к собственноручной. В представленной задаче применяемая функция сжатия как раз и не обладает этим свойством.

Задача 7 (*8–9-е, 10-й классы*) Имеются сломанные электронные часы (они идут точно, но некоторые элементы табло перегорели). Показания часов в некоторый момент времени приведены на рисунке 9,*а*, а спустя ровно 1 час 8 минут — на рисунке 9,*б*.

Отображение цифр на исправном табло показано на рисунке 9,*в*.

Какое время было на часах при первом просмотре?

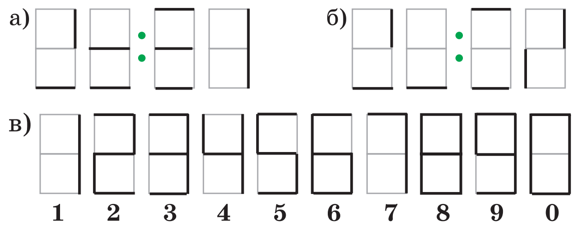
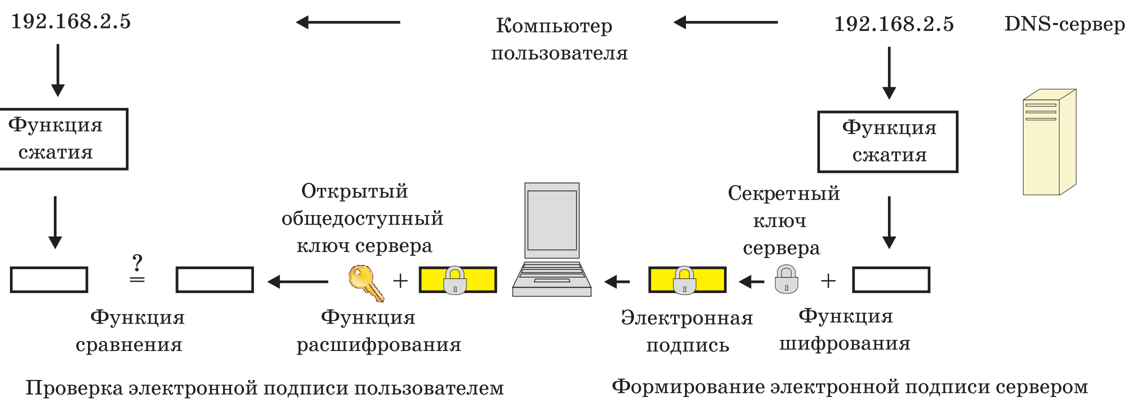


Рис. 9



Решение. Так как табло часов показывает время в формате 24 часа, получаем ограничения на значения цифр в первой и третьей позициях показываемого времени: первая цифра — это 0, 1 или 2, третья цифра — это 0, 1, 2, 3, 4, 5.

На рисунке 10,*а* на третьей позиции могут располагаться цифры 2, 3, 5, а на рисунке 10,*б* — цифры 2, 3, 5, 0. Получаем возможные пары:

(2; 2), (2; 3), (3; 3), (5; 5),(5; 0).

Так как на рисунке 10,*а* горит средний горизонтальный элемент, а на рисунке 10,*б* — не горит, то остается только пара (5; 0).

а) б)

Рис. 10

Теперь рассмотрим вторую позицию на часах. Судя по рисунку 10,*а*, на ней могут располагаться цифры 2, 3, 5, 6, 8, 9, а исходя из рисунка 10,*б* — цифры 2, 3, 5, 6, 8, 9, 0. По условию сказано, что прошло ровно 1 час и 8 минут, то есть вторая позиция слева могла измениться либо на 1, либо на 2. Тогда подходят пары (2; 0), (3; 0), (8; 0), (9; 0). Так как в третьей слева цифре произошел переход через десяток, значит, во второй позиции цифры отличаются на 2. Тогда остаются пары (2; 0) и (8; 0).

Рассмотрим первую позицию на часах, отвечающую за десятки часов. На обоих рисунках возможно расположение цифр 0, 2, поэтому подходящими парами являются (0; 0), (2; 2), (2; 0). Ни под одну эту пару не подходит пара (8,0) из второй слева позиции часов. Таким образом, получаем:

а) б)

Рис. 11

Осталось определить последнюю пару цифр. Судя по рисунку 11,*а*, подходящими цифрами являются 0, 1, 3, 4, 7, 8, 9, а из рисунка 11,*б* — 2, 8, 0. С учетом разницы в 8 минут остаются пары (0; 8) и (4; 2). Пара (0; 8) не подходит, так как должен бы гореть правый нижний элемент на рисунке 11,*б*. Остается только пара (4; 2).

а) б)

Рис. 12

Ответ: 22:54

С задачами прошедших олимпиад по математике и криптографии и их решениями можно ознакомиться:

- в книге «Олимпиады по криптографии и математике для школьников» (М.: МЦНМО, 2013).
- также можно получить доступ к системе дистанционного обучения для подготовки к олимпиаде на сайте: http://www.v-olymp.ru.

ФОТО НА КОНКУРС

Зухра Абдуразаковна Нородинова, директор гимназии № 7, поздравляет Магомеда Джабраилова, победителя конкурса «Математический потенциал».

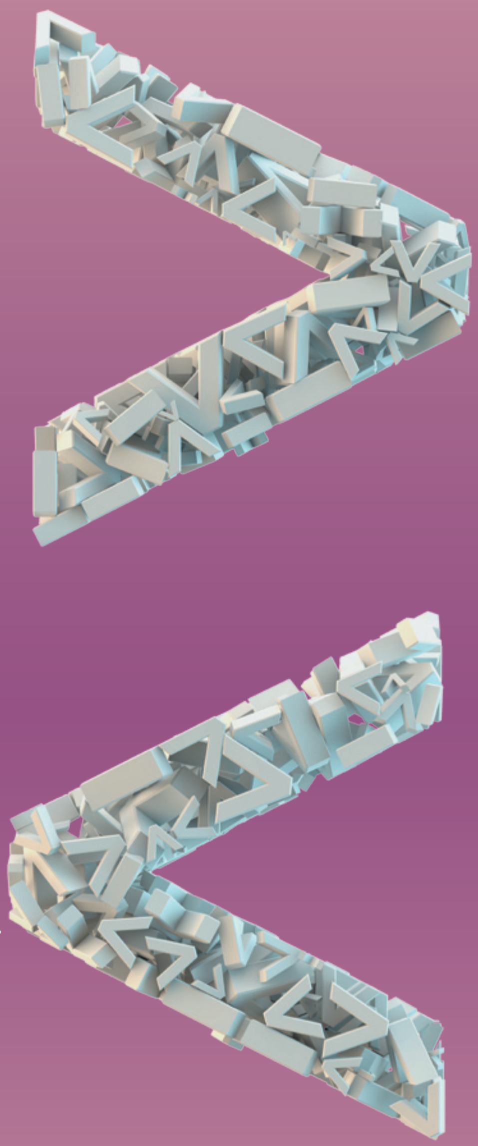
Спасибо редакции журнала «Математика» за интересные подарки.

Автор: Н.В. Шапошникова, учитель гимназии № 7, г. Махачкала, Республика Дагестан.

С. ШЕСТАКОВ,
isser@yandex.ru,
г. Москва

9—11 классы. Начало см. в № 1—8/2015

РЕШАЕМ НЕРАВЕНСТВА



2.2. Дробно-рациональные неравенства и системы неравенств

Дробно-рациональными называют неравенства вида $f(x) \vee 0$ или $f(x) \vee g(x)$, где $f(x)$ и $g(x)$ — алгебраические дроби (то есть отношения двух многочленов) или суммы нескольких алгебраических дробей и многочленов, знаком «$\vee$» обозначен, как обычно, один из четырех возможных знаков неравенств «$>$», «$<$», «$\geq$», «$\leq$». В отличие от целых неравенств, дробно-рациональные неравенства в большинстве случаев имеют смысл уже не при любом значении переменной: знаменатели всех алгебраических дробей в каждой из частей неравенства должны быть отличны от нуля — эти условия и задают ОДЗ дробно-рационального неравенства.

Простейшие дробно-рациональные неравенства

Под простейшими дробно-рациональными неравенствами будем понимать неравенства вида $\frac{a}{f(x)} \vee 0$, где a — отличное от нуля действительное число, $f(x)$ — многочлен первой или второй степени. Кроме того, к простейшим будем относить и неравенства вида $\frac{f(x)}{g(x)} \vee 0$, где один из многочленов $f(x)$ или $g(x)$ является многочленом первой или второй степени, а другой при любых значениях переменной принимает значения одного знака (как правило, положительные). Тем самым, знак либо числителя, либо знаменателя алгебраической дроби в левой части простейшего дробно-рационального неравенства не зависит от значений переменной. Поэтому знак этой дроби будет определяться знаком только одного алгебраического выражения (многочлена первой или второй степени). Таким образом, простейшие дробно-рациональные неравенства решаются приведением их к линейным или квадратным неравенствам.

Пример 1. Решить неравенство

$$\frac{37}{8x^2-41x+5} \leq 0.$$

Решение. Числитель дроби положителен. Поэтому данное неравенство выполняется в том и только том случае, если $8x^2 - 41x + 5 < 0$.

Корнями квадратного трехчлена в левой части последнего неравенства являются числа $\frac{1}{8}$ и 5, старший коэффициент трехчлена положителен. Следовательно, решением неравенства является интервал $\left(\frac{1}{8}; 5\right)$.

Ответ: $\left(\frac{1}{8}; 5\right)$.

К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru (Упражнения к 2.2, диагностические работы 3, 4.)

Пример 2. Решить неравенство

$$\frac{\left(x^2\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}\right)\left(5+8x-4x^2\right)}{8x^2-5x+4}\le 0.$$

Решение. Поскольку $x^2 \ge 0$, получим, что при любом значении переменной $x^2\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}>0$. Дискриминант квадратного трехчлена $8x^2 - 5x + 4$ отрицателен, старший коэффициент положителен, следовательно, этот трехчлен принимает только положительные значения. Поэтому данное неравенство выполняется в том и только том случае, если $5 + 8x - 4x^2 \le 0$. Приведем последнее неравенство к базовому виду, умножив обе его части на -1 и изменив знак неравенства на противоположный: $4x^2 - 8x - 5 \ge 0$. Корнями квадратного трехчлена в левой части последнего неравенства являются числа $-0{,}5$ и $2{,}5$, старший коэффициент трехчлена положителен. Следовательно, множество решений неравенства: $(-\infty; -0{,}5] \cup [2{,}5; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -0{,}5] \cup [2{,}5; +\infty)$.

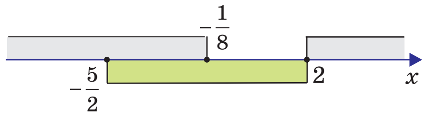
Пример 3. Решить систему неравенств

$$\begin{cases}\dfrac{8x^2-15x-2}{15x^2-2x+8}\ge 0,\\[2mm] \dfrac{2x^2+x-10}{2x^2+x+10}\le 0.\end{cases}$$

Решение. Решим первое неравенство данной системы. Дискриминант квадратного трехчлена $15x^2 - 2x + 8$ отрицателен, старший коэффициент положителен, следовательно, этот трехчлен принимает только положительные значения. Поэтому первое неравенство данной системы выполняется в том и только том случае, если

$$8x^2 - 15x - 2 \ge 0.$$

Корнями квадратного трехчлена в левой части полученного неравенства являются числа $-\frac{1}{8}$ и 2, старший коэффициент трехчлена положителен. Следовательно, множество решений неравенства: $\left(-\infty; -\frac{1}{8}\right] \cup [2; +\infty)$. Решим второе неравенство данной системы. Дискриминант квадратного трехчлена $2x^2 + x + 10$ отрицателен, старший коэффициент положителен, следовательно, этот трехчлен принимает только положительные значения. Поэтому второе неравенство данной системы выполняется в том и только том случае, если $2x^2 + x - 10 \le 0$. Корнями квадратного трехчлена в левой части последнего неравенства являются числа $-\frac{5}{2}$ и 2, старший коэффициент трехчлена положителен. Следовательно, множество решений неравенства: $\left[-\frac{5}{2}; 2\right]$. Найдем множество решений данной системы неравенств как пересечение числовых множеств $\left(-\infty; -\frac{1}{8}\right] \cup [2; +\infty)$ и $\left[-\frac{5}{2}; 2\right]$:



Множество решений данной системы неравенств: $\left[-\frac{5}{2}; -\frac{1}{8}\right] \cup \{2\}$.

Ответ: $\left[-\frac{5}{2}; -\frac{1}{8}\right] \cup \{2\}$.

Более сложные дробно-рациональные неравенства

Рассмотрим более сложные дробно-рациональные неравенства, начав с тех, которые сводятся к простейшим с помощью очевидных алгебраических преобразований.

Неравенства, непосредственно сводимые к простейшим

Следующими по уровню сложности после простейших являются дробно-рациональные неравенства, сводимые к простейшим после нескольких (обычно, двух-трех) несложных преобразований. Как правило, такими преобразованиями являются:

- перенос всех алгебраических выражений в одну из частей неравенства,
- приведение алгебраических дробей к общему знаменателю,
- вынесение общего множителя.

Пример 1. Решить неравенство

$$\frac{2x^2-3x-4}{3x^2-x-14}\ge\frac{7+3x-2x^2}{14+x-3x^2}.$$

Решение. Знаменатели дробей в левой и правой частях неравенства отличаются только знаком. Умножим числитель и знаменатель правой части на -1 и перенесем полученную дробь $\frac{2x^2-3x-7}{3x^2-x-14}$ в левую часть неравенства:

$$\frac{2x^2-3x-4}{3x^2-x-14}-\frac{2x^2-3x-7}{3x^2-x-14}\ge 0.$$

После приведения разности дробей к общему знаменателю и очевидных упрощений получим неравенство

$$\frac{3}{3x^2-x-14}\ge 0,$$

которое выполняется в том и только том случае, если $3x^2 - x - 14 > 0$. Корнями квадратного трехчлена в левой части последнего неравенства являются числа -2 и $\frac{7}{3}$, старший коэффициент трехчлена положителен. Следовательно, множество решений неравенства: $(-\infty;\,-2)\cup\left(\frac{7}{3};\,+\infty\right)$.

Ответ: $(-\infty;\,-2)\cup\left(\frac{7}{3};\,+\infty\right)$.

Пример 2. Решить систему неравенств

$$\begin{cases}\dfrac{7x+6}{7x^2+6}\ge\dfrac{7x+5}{7x^2+5},\\[2mm]\dfrac{2}{3x^2-300}>\dfrac{3}{2x^2-200}.\end{cases}$$

Решение. Решим первое неравенство системы. Стандартный путь: перенести дробь из правой части в левую и привести полученную разность дробей к общему знаменателю, после чего выполнить алгебраические преобразования в числителе полученной дроби. Решение можно несколько оптимизировать, учитывая то, что при любом значении переменной знаменатели дробей положительны. То есть это тот довольно редкий случай, когда обе части неравенства можно умножить на выражение, зависящее от переменной, и избавиться от дробей. Выполнив умножение обеих частей неравенства на $(7x^2+5)(7x^2+6)$, получим:

$$(7x+6)(7x^2+5)\ge(7x+5)(7x^2+6).$$

После раскрытия скобок, переноса всех слагаемых из правой части неравенства в левую и приведения подобных придем к неравенству

$$7x^2-7x\ge 0,\ \ 7x(x-1)\ge 0.$$

Множество решений неравенства: $(-\infty;\,0]\cup[1;\,+\infty)$. Решим второе неравенство данной системы. Вынесем общие множители в знаменателях дробей:

$$\frac{2}{3\left(x^2-100\right)}>\frac{3}{2\left(x^2-100\right)}.$$

Поскольку

$$\frac{3}{2a}-\frac{2}{3a}=\frac{5}{6a},$$

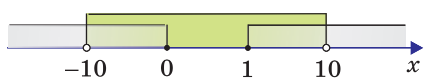
последнее неравенство приводится к виду

$$\frac{5}{6\left(x^2-100\right)}<0,$$

откуда

$$x^2-100<0,\ \ (x-10)(x+10)<0.$$

Множество решений второго неравенства системы: $(-10;\,10)$. Решение данной системы можно найти устно либо использовать числовую прямую:



Множество решений данной системы неравенств: $(-10;\,0]\cup[1;\,10)$.

Ответ: $(-10;\,0]\cup[1;\,10)$.

Метод интервалов

Наиболее простые дробно-рациональные неравенства, которые целесообразно решать методом интервалов, имеют вид $\frac{f(x)}{g(x)}\vee 0$, где $f(x)$ и $g(x)$ — многочлены первой или второй степени. Строгие неравенства указанного вида можно сводить к равносильным им целым неравенствам $f(x)\cdot g(x)\vee 0$ (знаком «$\vee$» обозначен один из знаков «>», «<»). Впрочем, это будет просто еще одним дополнительным шагом решения, никаких особых преимуществ этот шаг не дает. Самый громоздкий путь — сведение неравенства $\frac{f(x)}{g(x)}\vee 0$ к двум системам, определяющим знак дроби $\frac{f(x)}{g(x)}$ по знакам ее числителя и знаменателя. Тем самым, прямое применение метода интервалов представляется наиболее естественным и наименее трудоемким. Область определения алгебраической дроби $\frac{f(x)}{g(x)}$ задается условием $g(x)\ne 0$. Нули числителя и знаменателя (последние на числовой оси изображаются, как обычно, «пустыми» кружочками, то есть «выкалываются») разбивают числовую ось на несколько интервалов. Найдя эти нули (нули числителя в случае нестрогого неравенства должны быть обязательно включены в ответ; в этом случае они изображаются на чертеже «жирными» точками) и определив знак алгебраической дроби в каждом из интервалов, получим решение неравенства. Если числитель и знаменатель оба обращаются в нуль в какой-то точке x_0, то после их разложения на множители полученную алгебраическую дробь можно сократить на $x-x_0$, добавив условие $x\ne x_0$ и записав это и данное неравенства в виде системы неравенств.

Пример 3. Решить неравенство

$$\frac{5x^2-13x-6}{3x^2-8x-3}\ge 0.$$

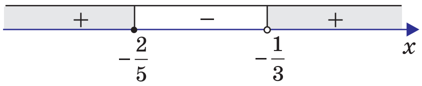
Решение. Корнями квадратного трехчлена $5x^2-13x-6$ являются числа $-\frac{2}{5}$ и 3. Корнями квадратного трехчлена $3x^2-8x-3$ являются числа $-\frac{1}{3}$ и 3. Применив формулу разложения квадратного трехчлена на линейные множители, получим неравенство

$$\frac{5\left(x+\frac{2}{5}\right)(x-3)}{3\left(x+\frac{1}{3}\right)(x-3)}\ge 0.$$

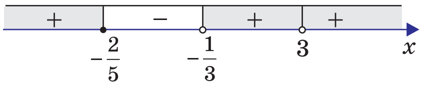
Разделив обе части неравенства на $\frac{5}{3}$ и сократив дробь при условии $x \neq 3$, получим равносильную данному неравенству систему

$$\begin{cases} \dfrac{x+\frac{2}{5}}{x+\frac{1}{3}} \geq 0, \\ x \neq 3. \end{cases}$$

Применим метод интервалов для решения первого неравенства системы:



Значит, множество решений системы и данного неравенства: $\left(-\infty; -\frac{2}{5}\right] \cup \left(-\frac{1}{3}; 3\right) \cup (3; +\infty)$.



Ответ: $\left(-\infty; -\frac{2}{5}\right] \cup \left(-\frac{1}{3}; 3\right) \cup (3; +\infty)$.

В более сложных случаях в неравенствах вида $\frac{f(x)}{g(x)} \vee 0$, алгебраические выражения $f(x)$ и $g(x)$ (либо одно из них) могут оказаться многочленами степени выше второй, в частности, быть равными произведению нескольких многочленов. Алгоритм решения неравенства методом интервалов при этом останется тем же.

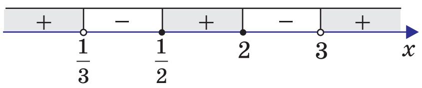
Пример 4. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{2x^2-5x+2}{3x^2-10x+3} \geq 0, \\ \dfrac{x^4-3x^3+2x^2}{2x-1} \geq 0. \end{cases}$$

Решение. Решим первое неравенство данной системы. Корнями квадратного трехчлена $2x^2 - 5x + 2$ являются числа $\frac{1}{2}$ и 2. Корнями квадратного трехчлена $3x^2 - 10x + 3$ являются числа $\frac{1}{3}$ и 3. Следовательно, первое неравенство можно записать в виде

$$\frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2)}{3\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-3)} \geq 0.$$

Применим метод интервалов:



Множество решений первого неравенства данной системы: $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup \left[\frac{1}{2}; 2\right] \cup (3; +\infty)$.

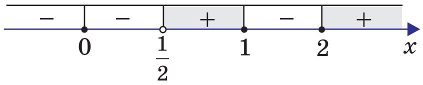
Решим второе неравенство данной системы. Вынесем общий множитель в числителе дроби:

$$\frac{x^2\left(x^2-3x+2\right)}{2x-1} \geq 0.$$

Корнями квадратного трехчлена $x^2 - 3x + 2$ являются числа 1 и 2. Поэтому последнее неравенство можно переписать в виде

$$\frac{x^2(x-1)(x-2)}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)} \geq 0.$$

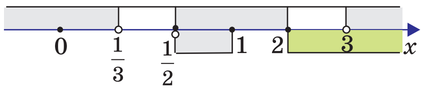
Применим метод интервалов:



Множество решений неравенства:

$$\{0\} \cup \left(\frac{1}{2}; 1\right] \cup [2; +\infty).$$

Для того чтобы решить данную систему, найдем пересечение полученных множеств:



Множество решений данной системы неравенств: $\{0\} \cup \left(\frac{1}{2}; 1\right] \cup \{2\} \cup (3; +\infty)$.

Ответ: $\{0\} \cup \left(\frac{1}{2}; 1\right] \cup \{2\} \cup (3; +\infty)$.

Равносильные преобразования

Во многих случаях для того, чтобы получить дробно-рациональное неравенство вида

$$\frac{f(x)}{g(x)} \vee 0$$

или

$$\frac{a_1(x) \cdot a_2(x) \cdot \ldots \cdot a_n(x)}{a_{n+1}(x) \cdot a_{n+2}(x) \cdot \ldots \cdot a_{n+m}(x)} \vee 0,$$

требуется сделать определенные преобразования, прежде всего привести алгебраические дроби к общему знаменателю. Список остальных преобразований остается (с поправкой на ОДЗ) тем же, что и для целых неравенств: раскрытие скобок и приведение подобных, вынесение общего множителя, разложение на множители (в том числе и с помощью формул сокращенного умножения).

Еще раз подчеркнем, что умножение обеих частей неравенства на выражение, содержащее переменную (например, переход от неравенства $\frac{a}{f(x)} > b$ к неравенству $a > b \cdot f(x)$), является в подавляющем случае грубой ошибкой и приводит к неверному ответу (обычно, потере решений). Это связано с тем, что указанный переход справедлив, только если $f(x) > 0$, и приводит к неверному неравенству в случае, когда $f(x) < 0$. Рецепт здесь только один: перенос всех алгебраических выражений в одну из частей неравенства с последующим приведением полученной суммы (разности) к общему знаменателю. Так, для неравенства $\frac{a}{f(x)} > b$ получаем:

$$\frac{a}{f(x)} - b > 0, \quad \frac{a - b\cdot f(x)}{f(x)} > 0.$$

Последнее неравенство, как правило, решается методом интервалов.

Отметим и то, что предварительный анализ условия и поиск возможного алгоритма решения в случае дробно-рациональных неравенств играет очень важную роль, позволяя не только оптимизировать вычисления, но и понять, каким образом неравенство можно свести к более простому.

Пример 5. Решить неравенство

$$\frac{x^2-2x-1}{x-2} + \frac{x^3-3x^2+2}{x-3} \le x + x^2.$$

Решение. Если просто привести все слагаемые к общему знаменателю, то в числителе получившейся дроби с большой вероятностью будет многочлен степени выше второй, поиск корней которого может оказаться затруднительным. Заметим, что если из первой дроби в левой части неравенства вычесть x, а из второй дроби вычесть x^2, после чего привести полученные разности каждую к общему знаменателю, то степени числителей полученных после этого дробей понизятся:

$$\frac{x^2-2x-1}{x-2} + \frac{x^3-3x^2+2}{x-3} \le x + x^2 \Leftrightarrow$$

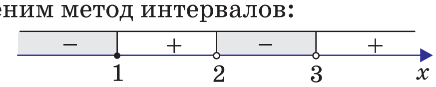
$$\Leftrightarrow \left(\frac{x^2-2x-1}{x-2} - x\right) + \left(\frac{x^3-3x^2+2}{x-3} - x^2\right) \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{-1}{x-2} + \frac{2}{x-3} \le 0.$$

Последнее неравенство является вполне стандартным. Приведем дроби к общему знаменателю и выполним алгебраические преобразования в числителе. Получим неравенство

$$\frac{x-1}{(x-2)(x-3)} \le 0.$$

Применим метод интервалов:



Множество решений данного неравенства: $(-\infty; 1] \cup (2; 3)$.

Ответ: $(-\infty; 1] \cup (2; 3)$.

Замечание. Вместо сделанного на первом шаге вычитания можно преобразовать левую часть, выполнив деление с остатком для каждой дроби либо аналогичное такому делению преобразование:

$$\frac{x^2-2x-1}{x-2} + \frac{x^3-3x^2+2}{x-3} =$$

$$= \frac{x^2-2x}{x-2} - \frac{1}{x-2} + \frac{x^3-3x^2}{x-3} + \frac{2}{x-3} =$$

$$= \frac{x(x-2)}{x-2} - \frac{1}{x-2} + \frac{x^2(x-3)}{x-3} + \frac{2}{x-3} =$$

$$= x - \frac{1}{x-2} + x^2 + \frac{2}{x-3}.$$

После приведения подобных получим уже знакомое неравенство

$$-\frac{1}{x-2} + \frac{2}{x-3} \le 0.$$

Пример 6. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{3(x+2)^2}{7-2x} \ge (x+2)^2, \\ \dfrac{x^2-4x+1}{x^2-4x+3} + \dfrac{7x-26}{x-4} \le \dfrac{8x-7}{x-1}. \end{cases}$$

Решение. Решим первое неравенство системы, приведя его к виду

$$\frac{3(x+2)^2}{7-2x} - (x+2)^2 \ge 0.$$

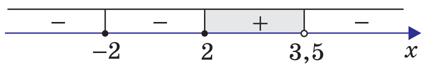
Приведем полученную разность к общему знаменателю и вынесем за скобку общий множитель:

$$\frac{(x+2)^2(3-7+2x)}{7-2x} \ge 0,$$

откуда

$$\frac{(x+2)^2(2x-4)}{7-2x} \ge 0, \quad \frac{2(x+2)^2(x-2)}{2(3,5-x)} \ge 0.$$

Применим метод интервалов:



Множество решений неравенства: $\{-2\} \cup [2; 3{,}5)$.

Решим второе неравенство системы. Если из первой дроби в левой части неравенства вычесть 1, из второй дроби вычесть 7, а из дроби в правой части неравенства вычесть 8 и привести полученные разности каждую к общему знаменателю, придем к более простым дробям:

$$\frac{x^2-4x+1}{x^2-4x+3} - 1 + \frac{7x-26}{x-4} - 7 \le \frac{8x-7}{x-1} - 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2}{x^2-4x+3} + \frac{2}{x-4} \le \frac{1}{x-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2}{(x-1)(x-3)} + \frac{2}{x-4} - \frac{1}{x-1} \le 0.$$

Приведя дроби в левой части последнего неравенства к общему знаменателю и выполнив преобразования в числителе, получим неравенство

$$\frac{x^2-3x+2}{(x-1)(x-3)(x-4)}\le 0,$$

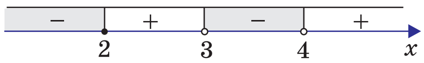
откуда

$$\frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-3)(x-4)}\le 0.$$

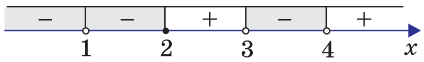
Сократив дробь, придем к системе неравенств

$$\begin{cases}\dfrac{x-2}{(x-3)(x-4)}\le 0,\\ x\ne 1.\end{cases}$$

Решим неравенство последней системы, применив метод интервалов:



Поскольку $x\ne 1$, из найденного решения нужно исключить число 1:



Следовательно, множеством решений второго неравенства данной системы (*) является множество $(-\infty;\ 1)\cup(1;\ 2]\cup(3;\ 4)$. Пересечением этого множества и множества решений $\{-2\}\cup[2;\ 3{,}5)$ будет множество $\{-2;\ 2\}\cup(3;\ 3{,}5)$.

Ответ: $\{-2;\ 2\}\cup(3;\ 3{,}5)$.

Метод введения новой переменной

Наиболее распространенным типом дробно-рациональных неравенств, решаемых с помощью метода введения новой переменной, является неравенство вида

$$\frac{a}{f^2(x)}+\frac{b}{f(x)}+c\vee 0$$

($f(x)$ обычно многочлен первой или второй степени, знаком «$\vee$» по-прежнему обозначен один из четырех возможных знаков неравенства «>», «<», «≥», «≤»). Один из способов решения такого неравенства состоит в введении новой переменной уже на первом шаге: обозначив $\dfrac{1}{f(x)}$ через t, получим квадратное неравенство $at^2 + bt + c \vee 0$. Решив это неравенство и выполнив обратную замену, получаем, как правило, систему или совокупность двух неравенств

$$\frac{1}{f(x)}\vee t_1 \text{ и } \frac{1}{f(x)}\vee t_2,$$

где t_1 и t_2 — корни квадратного трехчлена $at^2 + bt + c$. Эти неравенства приводятся к виду

$$\frac{1-t_1\cdot f(x)}{f(x)}\vee 0 \text{ или } \frac{1-t_2\cdot f(x)}{f(x)}\vee 0$$

соответственно и решаются методом интервалов.

Второй способ требует некоторых предварительных преобразований, но сводится к решению только целых неравенств. Этот способ предполагает следующую последовательность действий. ОДЗ неравенства

$$\frac{a}{f^2(x)}+\frac{b}{f(x)}+c\vee 0$$

определяется условием $f(x)\ne 0$. При этом условии $f^2(x) > 0$. Поэтому можно обе части данного неравенства умножить на $f^2(x)$. Приходим к системе неравенств

$$\begin{cases}c\cdot f^2(x)+b\cdot f(x)+a\vee 0,\\ f(x)\ne 0.\end{cases}$$

Первое неравенство системы является квадратным относительно $f(x)$ и решается стандартным образом. Этот способ представляется более коротким и рациональным; именно он будет использоваться далее. Ту же систему можно получить и без умножения обеих частей неравенства на $f^2(x)$, если привести левую часть данного неравенства к общему знаменателю:

$$\frac{a+b\cdot f(x)+c\cdot f^2(x)}{f^2(x)}\vee 0,$$

и воспользоваться положительностью $f^2(x)$ при условии $f(x)\ne 0$.

Пример 7. Решить неравенство

$$\frac{45}{\left(x^2+2x-8\right)^2}+\frac{14}{x^2+2x-8}+1\ge 0.$$

Решение. Умножим обе части неравенства на $(x^2 + 2x - 8)^2$ при условии $x^2 + 2x - 8 \ne 0$. Получим систему неравенств

$$\begin{cases}\left(x^2+2x-8\right)^2+14\left(x^2+2x-8\right)+45\ge 0,\\ x^2+2x-8\ne 0.\end{cases}$$

Решим первое неравенство системы, введя новую переменную $t = x^2 + 2x - 8$. Получим неравенство

$$t^2 + 14t + 45 \ge 0.$$

Корнями квадратного трехчлена $t^2 + 14t + 45$ являются числа -9 и -5, поэтому неравенство можно переписать в виде

$$(t + 9)(t + 5) \ge 0.$$

Сделав обратную замену, придем к неравенству

$$(x^2 + 2x + 1)(x^2 + 2x - 3) \ge 0$$

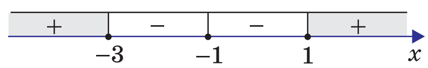
или

$$(x + 1)^2(x^2 + 2x - 3) \ge 0.$$

Корнями квадратного трехчлена $x^2 + 2x - 3$ являются числа -3 и 1, поэтому неравенство можно переписать в виде

$$(x + 1)^2(x - 1)(x + 3) \ge 0.$$

Применим метод интервалов:



Множество решений неравенства: $(-\infty;\ -3] \cup \{-1\} \cup [1;\ +\infty)$. Второе неравенство системы выполняется при всех значениях переменной, за исключением $x = -4$ и $x = 2$ (именно эти числа являются корнями квадратного трехчлена $x^2 + 2x - 8$ и именно их надо исключить из множества решений первого неравенства системы). Значит, множеством решений системы (а следовательно и данного неравенства) является множество $(-\infty;\ -4) \cup (-4;\ -3] \cup \{-1\} \cup [1;\ 2) \cup (2;\ +\infty)$.

Ответ: $(-\infty;\ -4) \cup (-4;\ -3] \cup \{-1\} \cup [1;\ 2) \cup (2;\ +\infty)$.

Пример 8. а) Решить неравенство

$$\frac{10}{x^2}-\frac{1}{x}-3\ge 0. \qquad (1)$$

б) Решить неравенство

$$\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^2+14\cdot\frac{x^2-9}{x^2-1}-15\left(\frac{x-3}{x+1}\right)^2\le 0. \qquad (2)$$

в) Найти все решения неравенства (1), не являющиеся решениями неравенства (2).

Решение. а) Решим неравенство (1). Умножив обе части неравенства на x^2 при условии $x \ne 0$, придем к системе

$$\begin{cases}10-x-3x^2\ge 0,\\ x\ne 0,\end{cases} \quad \begin{cases}3x^2+x-10\le 0,\\ x\ne 0.\end{cases}$$

Корнями квадратного трехчлена $3x^2 + x - 10$ являются числа -2 и $\frac{5}{3}$, старший член трехчлена положителен. Поэтому решение первого неравенства системы — отрезок $\left[-2;\ \frac{5}{3}\right]$. Следовательно, множеством решений всей системы (а значит, и неравенства (1)) является множество $[-2;\ 0)\cup\left(0;\ \frac{5}{3}\right]$.

б) Решим неравенство (2). Пусть

$$\frac{x+3}{x-1}=a,\quad \frac{x-3}{x+1}=b.$$

Неравенство примет вид

$$a^2 + 14ab - 15b^2 \le 0.$$

Разложим левую часть последнего неравенства на множители, рассмотрев ее как квадратный трехчлен относительно a. Корнями трехчлена будут $-15b$ и b (чтобы их найти, нужно использовать формулы Виета или формулу корней квадратного уравнения). Теперь неравенство можно переписать в виде

$$(a - b)(a + 15b) \le 0.$$

Сделав обратную замену, придем к неравенству

$$\left(\frac{x+3}{x-1}-\frac{x-3}{x+1}\right)\left(\frac{x+3}{x-1}+15\cdot\frac{x-3}{x+1}\right)\le 0.$$

Приведя дроби в скобках к общим знаменателям, получим после упрощений:

$$\frac{8x}{(x-1)(x+1)}\cdot\frac{16x^2-56x+48}{(x-1)(x+1)}\le 0,$$

откуда

$$\frac{x\left(2x^2-7x+6\right)}{(x-1)^2(x+1)^2}\le 0.$$

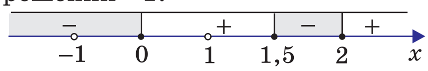
Разложив на множители квадратный трехчлен $2x^2 - 7x + 6$, корнями которого являются числа 1,5 и 2, придем к неравенству

$$\frac{2x(x-1{,}5)(x-2)}{(x-1)^2(x+1)^2}\le 0.$$

Если $x \ne \pm 1$, то знаменатель дроби положителен. Поэтому можно перейти к системе

$$\begin{cases}x(x-1{,}5)(x-2)\le 0,\\ x\ne\pm 1.\end{cases}$$

Осталось решить первое неравенство этой системы методом интервалов и исключить из множества решений ± 1:



Множество решений неравенства: $(-\infty;\ -1) \cup (-1;\ 0] \cup [1{,}5;\ 2]$.

в) Найдем все числа из множества $[-2;\ 0)\cup\left(0;\ \frac{5}{3}\right]$, не принадлежащие множеству $(-\infty;\ -1) \cup (-1;\ 0] \cup [1{,}5;\ 2]$. Только одно число из промежутка $[-2;\ 0)$ не принадлежит множеству решений неравенства (2): этим числом является -1. Искомыми решениями из промежутка $\left(0;\ \frac{5}{3}\right]$ являются все числа множества $(0;\ 1{,}5)$.

Ответ: а) $[-2;\ 0)\cup\left(0;\ \frac{5}{3}\right]$; б) $(-\infty;\ -1) \cup (-1;\ 0] \cup [1{,}5;\ 2]$; в) $\{-1\} \cup (0;\ 1{,}5)$.

Метод знакотождественных множителей

Решение дробно-рациональных неравенств методом знакотождественных множителей имеет ограниченное применение, поскольку пары этих множителей остаются теми же, что и для целых неравенств: разность (сумму) одинаковых нечетных степеней двух выражений можно заменять разностью (суммой) этих выражений; разность одинаковых четных степеней двух выражений можно заменять разностью квадратов этих выражений.

Пример 9. Решить неравенство

$$\frac{(2x+1)^{10}+(5x+4)^5}{(4x+1)^8-(3x+4)^8}\le 0.$$

Решение. Числитель равен сумме пятых степеней выражений

$$(2x + 1)^2 \text{ и } 5x + 4.$$

Поэтому его можно заменить суммой этих выражений. Знаменатель равен разности восьмых степеней выражений

$$4x + 1 \text{ и } 3x + 4.$$

Поэтому его можно заменить разностью квадратов этих выражений. Получим неравенство

$$\frac{(2x+1)^2+5x+4}{(4x+1)^2-(3x+4)^2}\le 0,$$

откуда

$$\frac{4x^2+9x+5}{(4x+1-3x-4)(4x+1+3x+4)}\le 0.$$

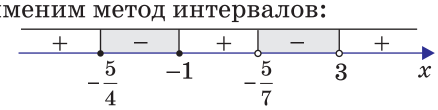
Корнями квадратного трехчлена в числителе левой части последнего неравенства являются числа $-\frac{5}{4}$ и -1. Следовательно, это неравенство можно переписать в виде

$$\frac{4\left(x+\frac{5}{4}\right)(x+1)}{(x-3)(7x+5)}\le 0,$$

или

$$\frac{\left(x+\frac{5}{4}\right)(x+1)}{(x-3)\left(x+\frac{5}{7}\right)}\le 0.$$

Применим метод интервалов:



Множество решений неравенства:

$$\left[-\frac{5}{4};-1\right]\cup\left(-\frac{5}{7};3\right).$$

Ответ: $\left[-\frac{5}{4};-1\right]\cup\left(-\frac{5}{7};3\right)$.

Применение свойств функций

Перейдем теперь к неравенствам, для решения которых стандартные методы оказываются малоэффективным либо приводят к значительным алгебраическим трудностям. Решение таких неравенств обычно основано на применении свойств функций, прежде всего ограниченности и монотонности. Поскольку из всех дробно-рациональных функций в школьном курсе обычно изучается только дробно-линейная функция (да и то, как правило, в самом простом варианте — в виде функции $y=\frac{k}{x}$), большая часть задач здесь оказывается связанной с ограниченностью квадратного трехчлена и монотонностью степенной функции.

Пример 10. Решить неравенство

$$\frac{9x^2-12x+6}{9x^2-12x+5}+\frac{9x^2-12x+8}{9x^2-12x+6}+\frac{9x^2-12x+10}{9x^2-12x+7}\ge 6.$$

Решение. Ясно, что можно сразу ввести новую переменную, положив ее равной, например, знаменателю первой дроби в левой части неравенства. Но, похоже, это будет только паллиативом: после приведения неравенства к виду $\frac{f(x)}{g(x)}\vee 0$ в числителе получим многочлен степени выше второй. Да и преобразования, которые предстоит выполнить, не придают бодрости духу. Попробуем пойти по уже знакомому пути, вычтя из каждой дроби 1 либо выделив целые части:

$$\frac{9x^2-12x+6}{9x^2-12x+5}=1+\frac{1}{9x^2-12x+5},$$

$$\frac{9x^2-12x+8}{9x^2-12x+6}=1+\frac{2}{9x^2-12x+6},$$

$$\frac{9x^2-12x+10}{9x^2-12x+7}=1+\frac{3}{9x^2-12x+7}.$$

В любом случае придем к неравенству

$$\frac{1}{9x^2-12x+5}+\frac{2}{9x^2-12x+6}+\frac{3}{9x^2-12x+7}\ge 3.$$

Выделим в знаменателях дробей полные квадраты:

$$\frac{1}{(3x-2)^2+1}+\frac{2}{(3x-2)^2+2}+\frac{3}{(3x-2)^2+3}\ge 3.$$

Теперь понятно, что знаменатель первой дроби не меньше 1, знаменатель второй дроби не меньше 2, знаменатель третьей дроби не меньше 3. Поэтому каждая из дробей не больше 1, а их сумма не больше 3. Следовательно, неравенство выполняется только в случае, если сумма дробей равна 3, то есть каждая из них равна 1, что возможно лишь при условии

$$3x-2=0,\ x=\frac{2}{3}.$$

Ответ: $\left\{\frac{2}{3}\right\}$.

Пример 11. Решить систему неравенств

$$\begin{cases}\frac{5}{(x+2)^5}+\frac{3}{(x+2)^3}+\frac{1}{x+2}\le\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^6}+\frac{5}{x^{10}},\\ \frac{\left(x^5+x+2\right)\left(x^3+2x-10\right)}{x^3+3x+36}\ge 0.\end{cases}$$

Решение. Решим первое неравенство данной системы. Функция

$$y(t)=5t^5+3t^3+t$$

монотонно возрастает на всей числовой прямой как сумма возрастающих функций. Поэтому неравенство $y(t_1)\le y(t_2)$ выполняется в том и только том случае, если $t_1\le t_2$. В нашем случае

$$t_1=\frac{1}{x+2},\quad t_2=\frac{1}{x^2}.$$

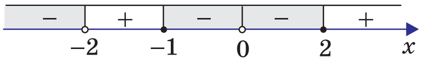
Таким образом, первое неравенство системы равносильно неравенству

$$\frac{1}{x+2}\le\frac{1}{x^2},\quad \frac{1}{x+2}-\frac{1}{x^2}\le 0.$$

Приведя дроби к общему знаменателю, получим: $\frac{x^2-x-2}{x^2(x+2)} \le 0$. Корнями квадратного трехчлена в числителе левой части последнего неравенства являются числа -1 и 2. Поэтому неравенство можно переписать в виде

$$\frac{(x+1)(x-2)}{x^2(x+2)} \le 0.$$

Применим метод интервалов:



Множество решений первого неравенства данной системы: $(-\infty; -2) \cup [-1; 0) \cup (0; 2]$.

Решим второе неравенство данной системы. Функции

$$f(x) = x^5 + x + 2,\ g(x) = x^3 + 2x - 10,$$
$$h(x) = x^3 + 3x + 36$$

монотонно возрастают, каждая на всей числовой прямой (как суммы возрастающих функций). Заметим, что

$$f(-1) = 0,\ g(2) = 0,\ h(-3) = 0.$$

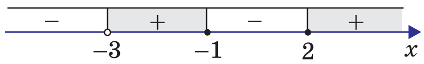
Поэтому выражения

$$x^5 + x + 2 \text{ и } x + 1,\ x^3 + 2x - 10 \text{ и } x - 2,$$
$$x^3 + 3x + 36 \text{ и } x + 3$$

являются знакотождественными (см. утверждение 2, пункт 1.6, № 4 / 2015). Значит, второе неравенство системы равносильно неравенству

$$\frac{(x+1)(x-2)}{x+3} \ge 0.$$

Применим метод интервалов:



Множество решений второго неравенства данной системы: $(-3; -1] \cup [2; +\infty)$. Множество решений данной системы: $(-3; -2) \cup \{-1; 2\}$.

Ответ: $(-3; -2) \cup \{-1; 2\}$.

ТОЧКУ В ПРОСТРАНСТВЕ МОЖНО ЗАКОДИРОВАТЬ ОДНИМ ЧИСЛОМ!

Д. ЗЛАТОПОЛЬСКИЙ,
zlatonew@gmail.com,
г. Москва

В XVII в. французский ученый Рене Декарт предложил определять положение объекта в пространстве с помощью системы координат: одной, двух или трех пересекающихся осей (такую систему координат называют по его имени «декартовой»). Например, на плоскости точку можно представить парой чисел x и y.

Но, оказывается, существует способ для обозначения точки на плоскости одним числом! Его придумал немецкий математик Георг Кантор. В 1877 г. он сделал открытие, которое огорошило его самого: «Я вижу это, но никак не могу этому поверить!» — написал он своему другу. Что же его так взволновало?

Расположим на плоскости не оси координат, а квадрат со стороной в одну единицу. Любую точку этого квадрата можно обозначить так же, как и в случае с координатными осями на плоскости, то есть с помощью двух чисел, в данном случае — десятичных дробей (ведь сторона квадрата — единица), скажем, 0,35142 и 0,72888.

Так почему бы не записать попеременно цифры обеих координат и не закодировать эту точку одним числом: 0,3752184828 (рис. 1)? Выходит, что наша, как и любая другая, точка плоскости будет иметь свое конкретное обозначение, и всякая путаница тут исключается, ведь никакую другую точку тем же числом не обозначить.

Но самое интересное, что тот же принцип может работать и в трехмерном пространстве! Для определения точки в нем даем по очереди цифры десятичных дробей трех координат. Все крайне просто!

В заключение несколько слов об авторе описанной идеи. Георг Кантор родился 3 марта 1845 г. в Петербурге. Когда он был еще ребенком, его семья переехала из России в Германию. Именно там он начал изучать математику. Защитив в 1868 г. диссертацию по теории чисел, он получил степень доктора в Берлинском университете. В 27 лет Кантор опубликовал статью, содержавшую общее решение очень сложной математической проблемы, и идеи, выросшие впоследствии в его знаменитую теорию — теорию множеств.

Задание для самостоятельной работы

Подумайте, как описать положение точки на плоскости, если точка находится вне квадрата со стороной в одну единицу, например, так, как показано на рисунке 2.

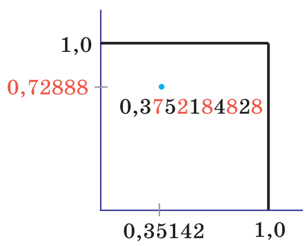


Рис. 1

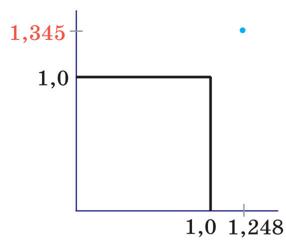


Рис. 2

Н. АВИЛОВ,
avilow@rambler.ru,
ст. Егорлыкская, Ростовская обл.

АРИФМЕТИКА НА КУБИКАХ

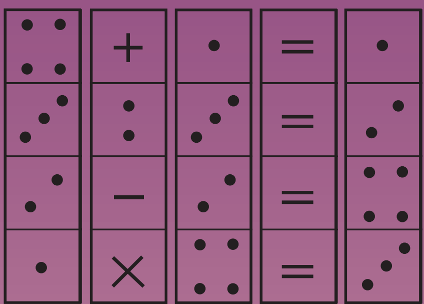
Ведущий рубрики — Николай Иванович Авилов — на фоне своей коллекции головоломок

Перед вами головоломка «Арифметика на кубиках». Фабричный вариант головоломки из красных кубиков выпускался в Советском Союзе в 80-х годах прошлого века. Из белых кубиков представлен самодельный вариант.

Эту простую в изготовлении и вместе с тем интересную комбинаторную головоломку я обнаружил в книге «В мире головоломок», которую издал Владимир Павлович Жуков.

Головоломка состоит из пяти кубиков: три кубика с числами (1, 2, 3 и 4), обозначенными точками; один кубик со знаками действий («+», «−», «×» и «:») и один кубик с четырьмя знаками «=». Две противоположные грани каждого кубика не имеют символов: через центры этих граней просверлены сквозные отверстия. Кубики насажены на общую ось и могут вращаться на ней, кроме того, кубики с числами можно менять местами. Задача играющего: путем вращения и перестановок кубиков сложить параллелепипед $1 \times 1 \times 5$ так, чтобы на каждой его боковой грани получить верное числовое равенство. Нетрудно посчитать, что головоломка имеет $8^3 \cdot 6 = 3072$ состояний и только два из них дают по четыре верных равенства. Кто придумал эту головоломку, мне неизвестно.

Конечно, сейчас не купить такую головоломку, но ее можно сделать самому. Для этого запаситесь пятью кубиками и просверлите в каждом из них сквозное отверстие через центры противоположных граней. Далее кубики можно насадить на проволочную или деревянную ось, а лучше подготовить две короткие оси и насадить на одну из них кубик со знаками действий, на другую — кубик со знаками «=» так, чтобы ось выглядывала из каждого кубика. Тогда проще будет соединять кубики в параллелепипед и манипулировать кубиками, переставляя их с одной позиции на другую, и вместе с тем легко вращать каждый кубик, подбирая нужную комбинацию чисел и знаков. Символы нужно нарисовать согласно предложенной схеме.



Скажу несколько слов об авторе сборника головоломок. Владимир Павлович Жуков живет в подмосковном городе Истра. В его коллекции более тысячи головоломок, которые он не «держит под замком», а непременно предлагает своим гостям познакомиться с этими умными игрушками.

В основу его книги положены фотографии и описание головоломок из его коллекции, а также заметки из газет и журналов советского времени, публиковавших материалы о головоломках. Книга объемом 358 страниц формата А4 была издана в 1993 году сразу после распада СССР и представляет собой фактически энциклопедию головоломок, выпускавшихся в Советском Союзе.

Книга уникальна во многом, в том числе и тиражом. Автор самостоятельно изготовил 99 экземпляров этой удивительной книги. Понятно, что она является библиографической редкостью. Я очень рад, что один экземпляр этой книги подарен мне автором.

К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru

В Лондоне для интеллектуальных и любознательных туристов нет музея более интересного, чем Музей науки. Он был открыт в 1857 году, и его коллекцию составили экспонаты прошедшей технической выставки и излишки из других музеев королевства. Здесь можно увидеть, например, подлинник паровоза, созданного одним из «отцов» железных дорог Стефенсоном. Но любитель математики может сразу устремиться в зал математики, заполненный витринами с артефактами, дорогими его уму и сердцу: моделями поверхностей, необычных тел и звездчатых многогранников; топологическими объектами из проволоки, стекла и бумаги; примерами укладки шаров; природными кристаллами в форме правильных и полуправильных многогранников; палочками Непера из дерева, картона, металла, логарифмическими линейками и одним из первых изданий неперовской «Rabdologia».

Однако и здесь есть свой объект из разряда «самый первый». Это разностная машина Бэббиджа — механический аппарат, предназначенный для автоматизации вычислений путём аппроксимации функций многочленами и вычисления конечных разностей. Первый такой аппарат английский математик Чарльз Бэббидж собрал в 1822 году, в музее же находится работающая копия «Разностной машины № 2» (англ. Difference Engine No. 2). Она представляет собой конструкцию из валиков и шестерней, вращаемых вручную при помощи рычага, и должна была уметь вычислять значения многочленов до шестой степени с точностью до 18-го знака (на деле же точность оказалась еще выше). Кстати, недавно в музее заработал принтер, также придуманный Бэббиджем для своей машины и собранный по его чертежам.

Главным же для развития вычислительной техники стало то, что в ходе работы над разностной машиной у Бэббиджа возникла идея увязать в единую логическую схему три составляющие: арифметическое устройство, регистры памяти и устройство ввода-вывода на перфокартах. Эта машина, названная им аналитической, и стала прообразом современного компьютера. Как писала Ахматова: «Когда б вы знали, из какого сора…», в данном случае – из каких шестеренок. Ну а первым программистом стала ученица Бэббиджа Ада Лавлейс, кстати, дочь великого Байрона.

Л. Рослова