МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ №12 (770)

ИЗДАЕТСЯ С 1992 г.

mat.1september.ru

Букингемский дворец

издательский дом 1september.ru

Первое сентября

декабрь 2015

МАТЕМАТИКА Подписка на сайте www.1september.ru или по каталогу «Почта России»: 79073 (бумажная версия); 12717 (CD-версия)

В НОМЕРЕ

К материалам, обозначенным этим символом, есть дополнительные материалы в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru

УВАЖАЕМЫЕ ЧИТАТЕЛИ!

Все подписчики журнала имеют возможность получать электронную версию, которая не только является полной копией бумажной, но и включает дополнительные электронные материалы для практической работы.

Для получения электронной версии:

1. Откройте Личный кабинет на портале «Первое сентября» (www.1september.ru).
2. В разделе «Газеты и журналы/Получение» выберите свой журнал и кликните на кнопку «Я – подписчик бумажной версии».
3. Появится форма, посредством которой вы сможете отправить нам копию подписной квитанции.

После этого в течение одного рабочего дня будет активирована электронная подписка на весь период действия бумажной.

МАТЕМАТИКА. ПЕРВОЕ СЕНТЯБРЯ

Методический журнал для учителей математики

Издается с 1992 г.   Выходит один раз в месяц

РЕДАКЦИЯ:
Главный редактор: Л. Рослова
Отв. секретарь: Т. Черкавская
Редакторы: П. Камаев, О. Макарова, И. Коган
Дизайн макета: И. Лукьянов. Дизайн обложки: Э. Лурье
Корректор: Л. Громова. Верстка: Л. Кукушкина

Распространяется по подписке

Цена свободная
Тираж 22 000 экз.

Тел. редакции: **(499) 249-3460**
E-mail: **mat@1september.ru**
Сайт: **mat.1september.ru**

Иллюстрации: фотобанк Shutterstock

На с. 1, с. 2 и с. 64 — коллажи из иллюстраций, взятых с сайтов: warezed.ru, commons.wikimedia.org, listnerd.com, upload.wikimedia.org, sophiararebooks.com, liveinternet.ru, heidelberg-laureate-forum.org, awards.netdialogue.com, cdn1.spiegel.de, tvc.ru flickr.com (Joseph Nash,Captain Roger Fenton)

УЧРЕДИТЕЛЬ:
ООО «ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ДОМ «ПЕРВОЕ СЕНТЯБРЯ»
Зарегистрировано ПИ №ФС77-58424 от 25.06.14 в Роскомнадзоре
Подписано в печать: по графику 16.09.15, фактически 16.09.15 Заказ №________
Отпечатано в ОАО «Первая Образцовая типография» филиал «Чеховский печатный двор» ул. Полиграфистов, д. 1, Московская область, г. Чехов, 142300; Сайт: www.chpd.ru; E-mail: sales@chpk.ru; факс: 8(496)726-54-10, 8(495)988-63-76

АДРЕС РЕДАКЦИИ И ИЗДАТЕЛЯ:
ул. Киевская, д. 24, Москва, 121165
Телефон/ факс: **(499) 249-3138**
Отдел рекламы: **(499) 249-9870**
Сайт: **1september.ru**
facebook.com/School.of.Digital.Age

ИЗДАТЕЛЬСКАЯ ПОДПИСКА:
Телефон: **(499) 249-4758**

ПОДПИСНЫЕ ИНДЕКСЫ:
Почта России: бумажная версия – **79073**; CD-версия – **12717**

НАДО ПОБОРОТЬ СТРАХ МАТЕМАТИКИ

Л. РОСЛОВА

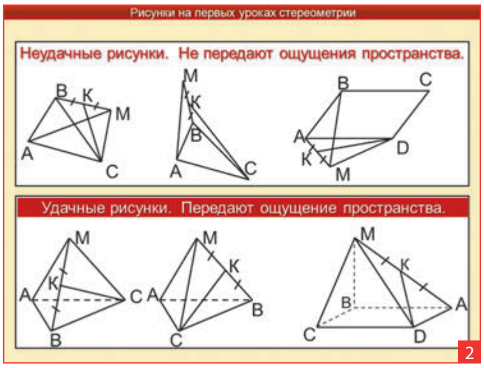
Американские ученые провели исследование и обнаружили, что у 20% населения США имеет место быть такой синдром, как «страх математики». То есть если им предлагают выполнить несложные арифметические вычисления, у них потеют ладони, учащается сердцебиение, возникает неконтролируемый страх, в общем, налицо все признаки стресса.

Не знаю, как в числовом выражении могли бы отличаться от американских результаты этого исследования по нашей стране, однако, по моим нерепрезентативным наблюдениям, явление это и у нас имеет место. Еще моя бабушка рассказывала, какой ужас накатывал на нее в школе на уроках математики. Во время моей учебы в университете она, как правило, плохо спала перед моими экзаменами, у нее поднималось давление. И уже после первой сессии она взмолилась: «Не говори мне, пожалуйста, заранее об экзамене по математике, а то я до диплома не доживу. О других — можно». Других экзаменов почти не было, поэтому я всегда звонила после того, как сдала, чтобы сообщить о результате.

Кстати, те же ученые доказали, что страх по наследству не передается. И мой пример — в их копилку.

При этом в моей «коллекции» есть немало историй, когда у людей, далеких от математики, в памяти сохранились исключительно позитивные эмоции, связанные с решением какой-нибудь задачи. Эти эмоции порождались счастьем открытия и преодоления интеллектуального препятствия. А задачи, как правило, были самыми рядовыми, ничем не примечательными.

Из этого я позволю себе сделать вывод, что не столь важно содержание математического образования, столь важен процесс его освоения. И если бы мне сейчас была предоставлена возможность отредактировать ФГОС, я бы вставила следующее требование: изучение предметной области «Математика и информатика» должно обеспечить позитивное отношение к математике и стрессоустойчивость к решению математических задач. Кстати, для проверки его достижения не нужно придумывать сложных критериев — достаточно проверить, не вспотели ли ладони выпускника. И нужен ли тогда базовый ЕГЭ? Ведь он проверяет умение решать задачи на чтение графика температур и «почем кило клубники», а это некое содержание, на пути освоения которого снова будут потеть ладони.



С. ГАЛКИН,
smgal@bk.ru,
г. Новоуральк, Свердловская обл.

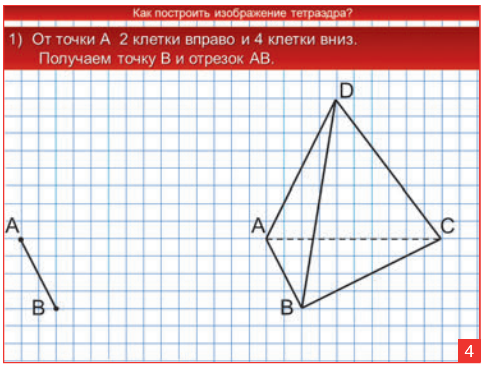
КАК ДЕЛАТЬ НАГЛЯДНЫЕ РИСУНКИ ПО СТЕРЕОМЕТРИИ

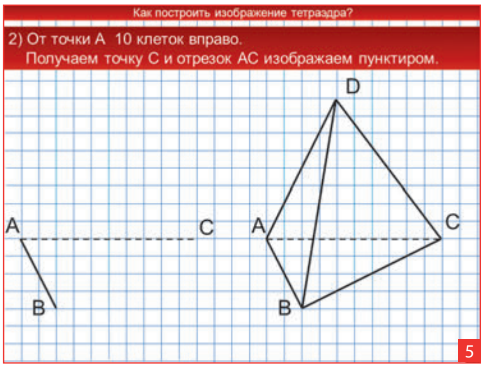
Довольно часто мы, учителя, не уделяем достаточного внимания технике выполнения рисунков по стереометрии, надеясь, что в процессе решения задач у учащихся будет достаточно образцов и они рано или поздно научатся делать хорошие рисунки к задачам. Как правило, рисунки учащихся на первых уроках по стереометрии получаются неудачными, они не всегда передают ощущение пространства. В учебнике «Геометрия, 10–11» под редакцией Л.С. Атанасяна в приложении 1 приведены правила изображения пространственных фигур, основанные на параллельном проектировании (проецировании). Однако с этим материалом учащиеся знакомятся после изучения темы параллельности прямых в пространстве. Но даже после знакомства с правилами параллельного проектирования (проецирования), применяемыми для изображения пространственных фигур, ситуация не становится лучше. Для выхода из создавшейся ситуации я предлагаю ученикам связывать условие задачи с рисунком, на котором изображена пирамида или прямоугольный параллелепипед (к 10-му классу учащиеся имеют достаточный опыт для визуального распознавания этих геометрических тел). Для осознания проблемы учащимися я предлагаю им сделать рисунки к двум задачам.

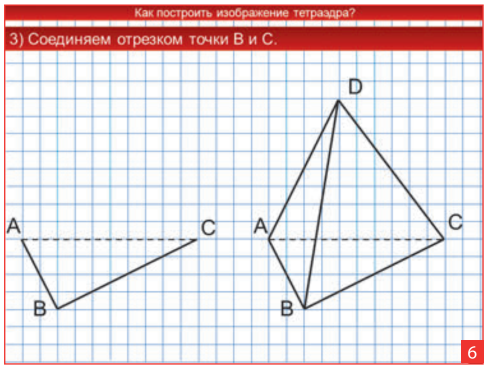
Задача 1. Точка M не лежит в плоскости треугольника ABC, K — середина отрезка MB. Каково взаимное расположение прямых MA и CK?

Задача 2. Точка M не лежит в плоскости параллелограмма $ABCD$, K — середина отрезка MA. Каково взаимное расположение прямых DK и CK?

К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru (Приложения 1–4.)







Условия этих задач демонстрируются учащимся с помощью презентации (приложение 1).

Организовать эту работу можно по-разному. Можно предложить выполнить рисунок к каждой задаче всем ученикам. Во время выполнения рисунков учитель ходит по классу и наблюдает за процессом, чтобы потом сделать комментарии, отметить учащихся, сделавших удачные рисунки. Для экономии времени можно дать эти задачи решить «по вариантам». Можно организовать групповую работу над этими задачами с последующим обзором результатов групп через документ-камеру или через вывешивание работ на листе формата А3 на доске.

После выполнения рисунков учащимися проводится их анализ с позиции наглядности. Учитель демонстрирует (см. дополнительные материалы к номеру в личном кабинете) примеры неудачных рисунков (некое обобщение реальных рисунков учащихся). 1

Учащиеся сравнивают свои работы с рисунками на слайде. Материал слайда подается учителем частями, чтобы можно было организовать проблемный диалог с целью выяснения причин неудачных рисунков. [Не передают ощущения пространства]. Затем ученикам нужно показать примеры удачных рисунков и в диалоге выяснить, за счет чего они получились более наглядными: на рисунках изображены пирамиды, которые передают ощущение пространства, а условие задачи связано с этими фигурами. 2

Таким образом, учащиеся приходят к простому выводу, позволяющему делать рисунки более наглядными: нужно связывать условие задачи с рисунками пирамид или параллелепипедов. 3

Однако рисунки пирамид и параллелепипедов также нужно делать наглядными. Для этого учащимся показываются возможные варианты изображения пирамид и параллелепипедов, которые можно использовать при решении очень многих задач. Особо следует обратить внимание учащихся на взаимное расположение указанных на рисунке точек (вершин многогранников) друг относительно друга по клеточкам.

После этого учащимся демонстрируется последовательность действий при выполнении рисунков. На слайдах 4 – 8 в динамике показано построение тетраэдра и даны рекомендации по построению.

Рекомендации выдерживать размеры фигур по клеточкам имеют под собой определенные основания. Зная, как строить тетраэдр или параллелепипед по клеточкам, ученик быстрее выполняет рисунки, не тратя времени на обдумывание. Размеры фигур (по клеточкам) заранее подобраны таким образом, чтобы они удовлетворяли нескольким требованиям:

- рисунок должен быть не слишком большим и не слишком маленьким (большинство учащихся делают мелкие рисунки, на которых затруднительно выполнять дополнительные построения);
- грани должны хорошо просматриваться;
- длины ребер должны быть такими, чтобы легко, без измерительных инструментов находить их середины (например, используя теорему Фалеса);
- рисунок тетраэдра, после знакомства с правильной пирамидой, должен изображать правильную треугольную пирамиду, ее высота должна изображаться вертикальным отрезком, что должно создавать ощущение перпендикулярности прямой к плоскости основания, а углы между ребрами и плоскостью основания, углы между боковыми гранями и плоскостью основания — хорошо просматриваться (рис. 1)

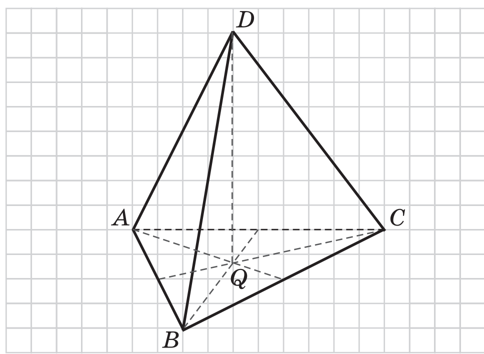
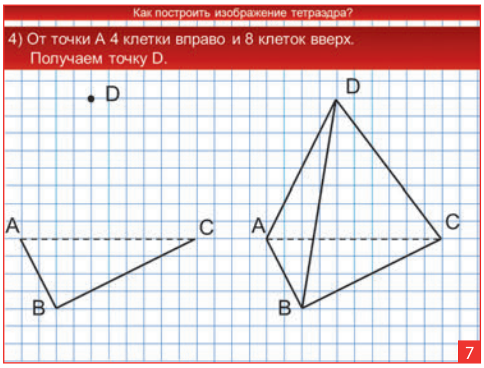
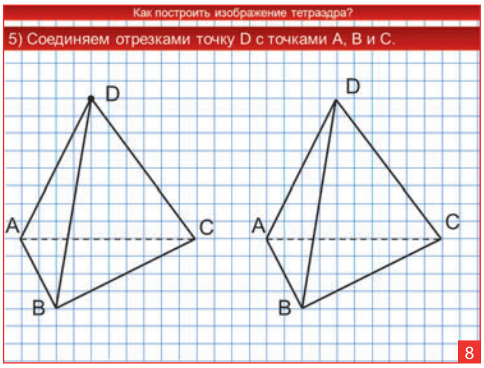
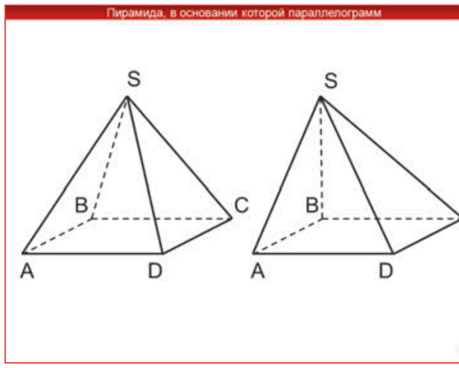


Рис. 1







После обсуждения рекомендаций по построению треугольной пирамиды в таком же ключе даются рекомендации по построению четырехугольной пирамиды, где $ABCD$ — параллелограмм или его частные случаи: прямоугольник, ромб, квадрат. При этом следует обратить внимание учащихся, что прямоугольники, ромбы и квадраты при выполнении рисунков следует изображать параллелограммами общего вида, об этом они узнают после знакомства с правилами параллельного проектирования, используемыми при изображении пространственных фигур на чертеже. [9]

Ясно, что рисунок пирамиды справа можно будет использовать, когда по условию прямая или отрезок (SB) перпендикулярны плоскости параллелограмма ($ABCD$). Рисунок пирамиды слева в дальнейшем будет рисунком правильной четырехугольной пирамиды.

Для осознания важности соблюдения рекомендуемых размеров рисунков (точнее, взаимного расположения вершин изображаемых многогранников) и для активизации мыслительной деятельности учащимся предлагаются рисунки пирамид (удачные и не очень удачные), и они должны выбрать лучший из них, приведя соответствующие обоснования. [10], [11] Мнения учеников можно выявить путем голосования через поднятие рук.

Такая организация деятельности учащихся дает им возможность научиться делать качественные рисунки к задачам уже с первых уроков стереометрии, еще до знакомства с правилами изображения пространственных фигур методом параллельного проектирования. Использование же презентации существенно экономит время урока.

Для скорейшего овладения навыками выполнения хороших рисунков при решении задач можно обеспечить учащихся образцами рисунков пространственных фигур — своеобразными памятками, с которыми нужно связывать условие решаемой задачи. Как отмечалось выше, для этой цели подойдут рисунки пирамид и параллелепипедов (рис. 2).

После знакомства с правильной пирамидой при выполнении рисунков нужно обратить внимание учащихся на некоторые особенности, связанные с правильными пирамидами.

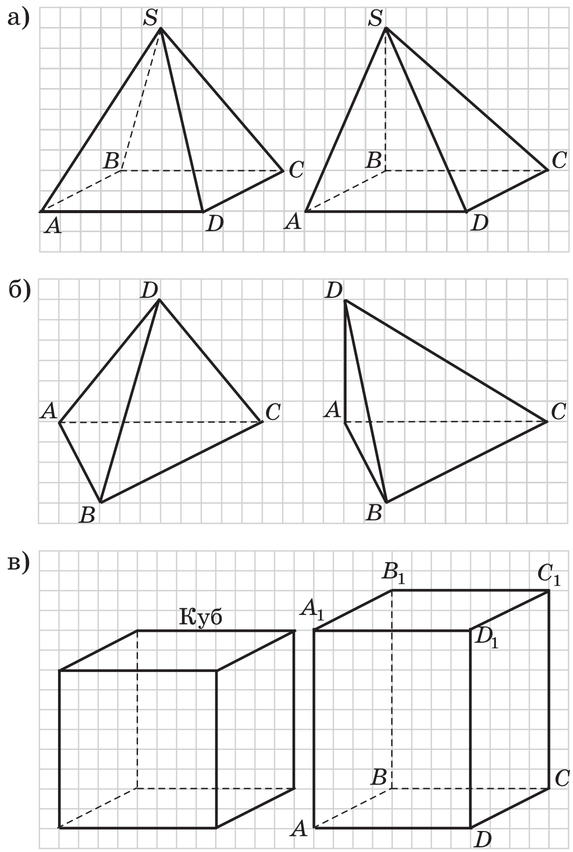
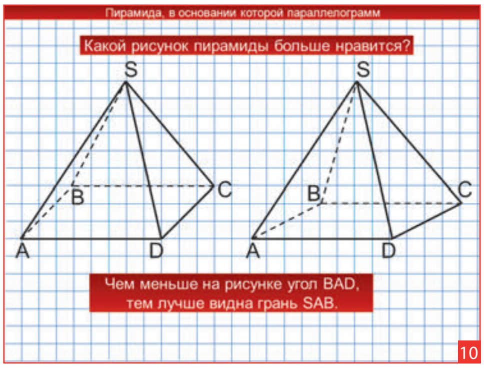
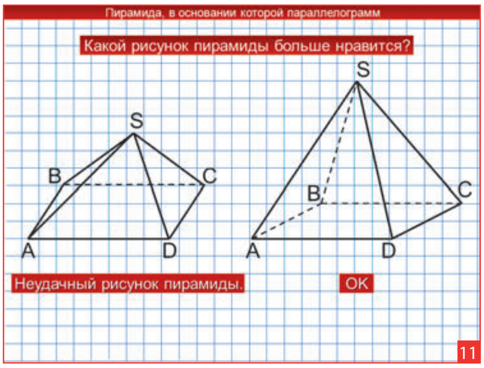
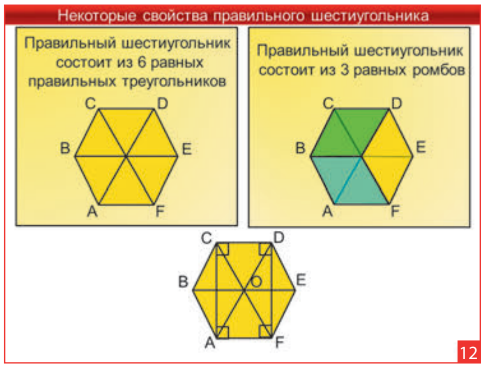


Рис. 2

Во-первых, при выполнении рисунков должны соблюдаться правила параллельного проектирования, которые в сжатой форме могут выглядеть так: при параллельном проектировании не сохраняются размеры и углы, но сохраняются параллельность прямых и пропорциональность отрезков, лежащих на параллельных прямых или на одной прямой. В частности, точка, являющаяся серединой отрезка, на проекции отрезка также должна быть его серединой. Отсюда следует, что проекцию медианы треугольника нельзя







изображать произвольно, как это можно сделать в некоторых случаях для высоты и биссектрисы треугольника.

Во-вторых, необходимо соблюдать определенную последовательность при выполнении рисунка: сначала изображаем основание пирамиды, затем центр основания, высоту пирамиды и потом боковые ребра (рис. 3).

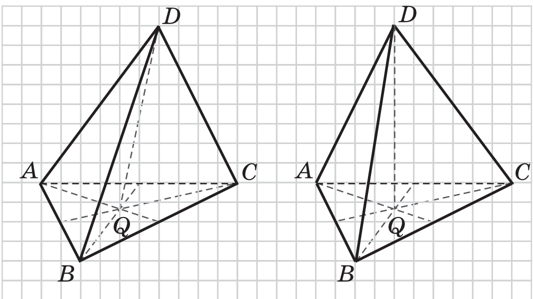


Рис. 3

Нарушение этой последовательности приводит к рисункам, в которых высота пирамиды изображена не в виде вертикального отрезка, что не создает ощущения перпендикулярности отрезка, изображающего высоту, к плоскости основания пирамиды. Конечно, такие рисунки смотрятся хуже, чем рисунки, выполненные в той последовательности, о которой говорилось выше.

Очевидно, что продемонстрировать все шаги при построении правильных пирамид проще всего с помощью презентации. Результатом работы с презентациями могут быть распечатки образцов рисунков правильных пирамид, выполненных в динамике их построения (рис. 4–5).

В дополнительных материалах к статье вы можете ознакомиться с презентациями по изображению правильных пирамид: треугольной и четырехугольной (приложения 2 и 3).

Особая сложность связана с изображением правильной шестиугольной пирамиды. Некоторых фактов, относящихся к правильному шестиугольнику, учащиеся могут не помнить.

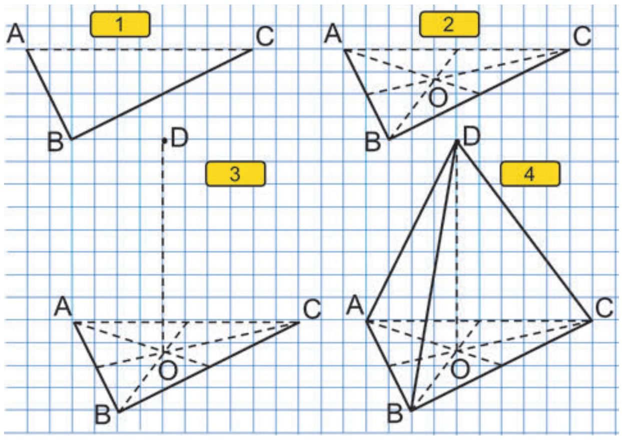


Рис. 4

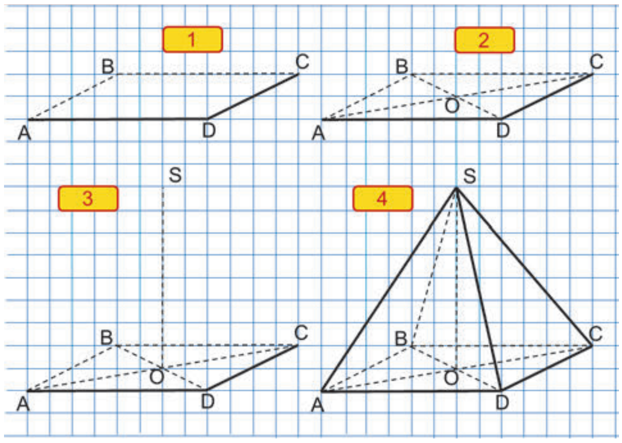
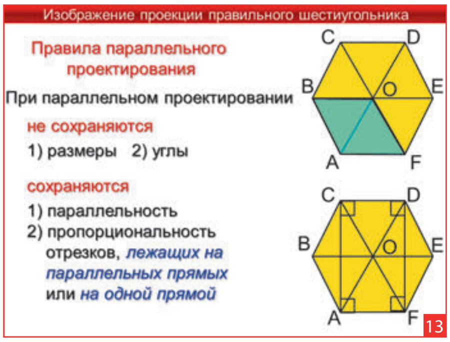
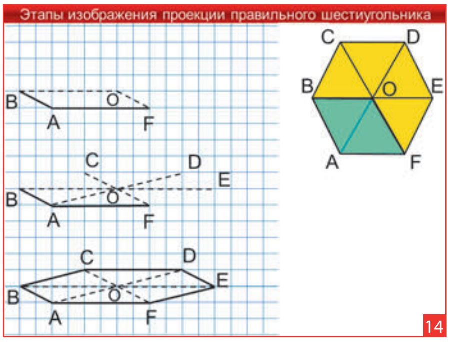


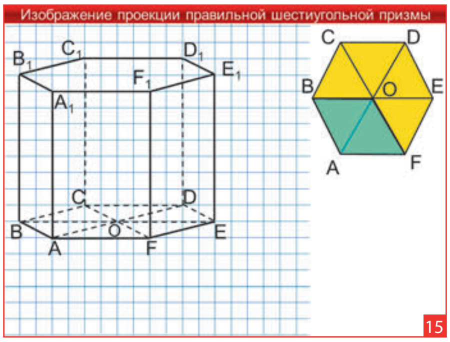
Рис. 5

Поэтому необходимо актуализировать эти знания, используя плакаты или презентации. Последовательность шагов при изображении проекции правильного шестиугольника приобретает особую значимость, поскольку позволяет избежать ошибок, связанных с правилами параллельного проектирования (рис. 6).

Поскольку правильный шестиугольник $ABCDEF$ состоит из трех равных ромбов, $ABOF$, $BCDO$, $DEFO$, то строить проекцию шестиугольника следует с изображения проекции ромба $ABOF$ в виде произвольного параллелограмма и затем, удваивая длины отрезков AO, BO, FO (это







половинки диагоналей AD, BE, CF), получить проекции вершин C, D и E. Осталось провести отрезки BC, CD, DE, EF и получить проекцию правильного шестиугольника $ABCDEF$.

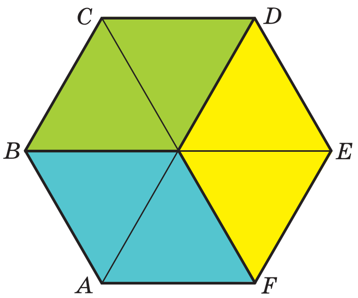


Рис. 6

Чтобы рисунок хорошо смотрелся, очень важно продумать взаимное расположение вершин проекции шестиугольника относительно друг друга по клеточкам. Эту работу должен взять на себя учитель, поскольку учащиеся не имеют опыта выполнения таких рисунков и им потребовалось бы много времени для поиска оптимального расположения вершин шестиугольника относительно друг друга.

При демонстрации приложения 4 (см. дополнительные материалы в личном кабинете) учитель повторяет с учениками основные факты, связанные с правильным шестиугольником. 12 Затем обобщает свойства параллельного проектирования (проецирования) при изображении пространственных фигур, изложенные в учебнике Л.С. Атанасяна «Геометрия, 10–11» в приложении I. 13 Эти свойства необходимы для изображения проекции основания пирамиды — правильного шестиугольника.

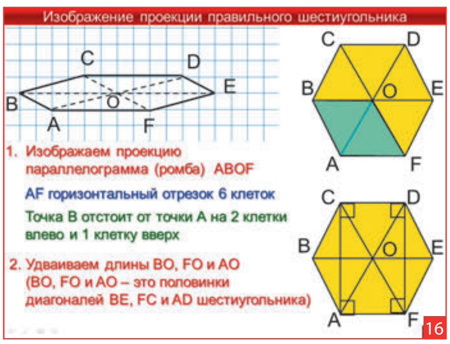
Далее в динамике и с комментариями демонстрирует этапы построения проекции правильного шестиугольника 14 и примеры использования изображения проекции. 15

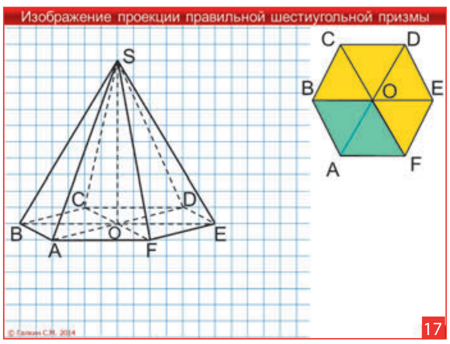
Таким образом, организация деятельности учащихся, направленная на осознание ими ключевых моментов при выполнении рисунков пространственных фигур, позволит им изображать эти фигуры правильно и наглядно, что в свою очередь повышает удовлетворенность от выполненной работы, а это ступенька в повышении мотивации к учению — необходимого условия для формирования личностных результатов обучения. Применение же презентаций позволит эффективно использовать время урока, в динамике демонстрировать учащимся основные этапы выполнения наглядных рисунков по стереометрии, а листы-памятки с их образцами позволят учащимся быстро и качественно выполнять аналогичные рисунки при решении задач.

Литература

1. *Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б.* и др. Геометрия. 10–11 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профильный уровни. — 22-е изд. — М.: Просвещение, 2013.

2. *Рабинович Е.М.* Задачи и упражнения на готовых чертежах. 10–11 классы. Геометрия. — М.: Илекса, 2004.





Е. ПОТОСКУЕВ,
potoskuev39@gmail.com,
г. Тольятти, Самарская обл.

О НАИМЕНЬШИХ ЗНАЧЕНИЯХ ПЛОЩАДЕЙ В ГЕОМЕТРИИ

Возможно, не существует открытий ни в элементарной, ни в высшей математике, ни даже, пожалуй, в любой другой области, которые могли бы быть сделаны без аналогии.

Дьёрдь Пойа

В статье предлагаются аргументированно обоснованные решения подобранных по принципу «от простого к сложному» стереометрических задач на нахождение наименьшего значения площади треугольника, три вершины которого расположены на двух данных скрещивающихся прямых в правильном тетраэдре, кубе и правильной шестиугольной призме. При этом наряду с синтетическим (геометрическим) предлагаются векторный и координатный методы решения задач.

Вопросы об общем перпендикуляре двух скрещивающихся прямых, о кратчайшем расстоянии между ними относятся к одному из наиболее сложных в изучении взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве. Вместе с тем с вычислением расстояния между двумя скрещивающимися прямыми связаны решения многих задач на нахождение наибольшего и наименьшего значений площади и объема геометрических фигур, поэтому этот вопрос заслуживает самого серьезного изучения на примере решения задач различного уровня сложности.

Учащимся следует понимать и знать, что для нахождения расстояния между двумя скрещивающимися прямыми необязательно строить их общий перпендикуляр (что часто не так просто сделать графически), а можно поступить иначе.

Если a и b — данные скрещивающиеся прямые, то бывает достаточно применить один из трех следующих методов.

а) Провести (или «увидеть» уже построенные) через прямые a и b параллельные плоскости. Тогда расстояние от любой точки одной из этих плоскостей до другой плоскости равно расстоянию между a и b.

б) Провести (или «увидеть» уже проведенную), например, через прямую a плоскость α, параллельную прямой b. Тогда расстояние от любой точки прямой b до плоскости α равно расстоянию между a и b.

в) Провести плоскость α, перпендикулярную прямой a и пересекающую ее в некоторой точке A; затем построить прямую b_1 — ортогональную проекцию прямой b на эту плоскость. Тогда расстояние от точки A до прямой b_1 равно расстоянию между a и b.

Для успешного решения задач учащиеся должны научиться применять все три перечисленных метода. Поэтому целесообразно предлагать учащимся решать одну и ту же задачу различными методами.

Методически верная организация изучения геометрии правильного тетраэдра, куба, правильной шестиугольной призмы позволяет вырабатывать у учащихся графическую, логическую, вычислительную культуру при решении задач на нахождение расстояния между двумя скрещивающимися прямыми и наименьшей площади треугольника с вершинами на двух скрещивающихся прямых.

Предварительно полезно рассмотреть комментарии при решении задачи на нахождение наименьшей площади треугольника, когда этот треугольник является составляющим правильной шестиугольной призмы.

Задача 1. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — правильная шестиугольная призма, все ребра которой равны 12. Какую наименьшую площадь может иметь треугольник, основанием которого является диагональ AD_1 этой призмы, а его третья вершина K расположена на прямой, содержащей диагональ A_1F грани AA_1F_1F?

Комментарий. Прямая A_1F лежит в плоскости A_1AF, а прямая AD_1 пересекает эту плоскость в точке $A \notin A_1F$ (рис. 1), значит, прямые A_1F и AD_1 скрещиваются (признак скрещивающихся прямых).

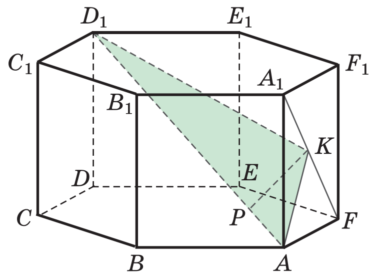


Рис. 1

Треугольник AD_1K ($K \in A_1F$) с основанием AD_1 будет иметь наименьшую площадь при наименьшей высоте KP ($P \in AD_1$, $KP \perp AD_1$), проведенной из вершины $K \in A_1F$. То есть длина высоты KP треугольника AD_1K должна быть равна кратчайшему расстоянию между скрещивающимися прямыми AD_1 и A_1F. Это означает, что отрезок KP должен быть общим перпендикуляром скрещивающихся прямых AD_1 и A_1F.

Таким образом, для решения данной задачи необходимо найти кратчайшее расстояние между скрещивающимися прямыми AD_1 и A_1F или, если возможно, построить их общий перпендикуляр, найти его длину и искомую площадь треугольника AD_1K.

К завершению решения этой задачи мы вернемся после некоторой пропедевтики.

Решение данной задачи и аналогичных ей задач, в условиях которых необходимо вычислять кратчайшее расстояние между двумя скрещивающимися прямыми, обычно вызывает у учащихся определенные затруднения. Эти затруднения могут быть успешно преодолены, если пропедевтически решать аналогичные задачи, первоначально используя многогранники более простого «устройства», например, правильный тетраэдр, куб. Примером может служить решение следующей задачи.

Задача 2. Дан правильный тетраэдр $PABC$ с ребром, равным 12. Какую наименьшую площадь может иметь треугольник, основанием которого служит ребро AB, а его третья вершина принадлежит прямой CP?

Решение. Прямая AB лежит в плоскости ABC, а прямая PC пересекает эту плоскость в точке $C \notin AB$ (рис. 2), значит, прямые PC и AB скрещиваются (признак скрещивающихся прямых).

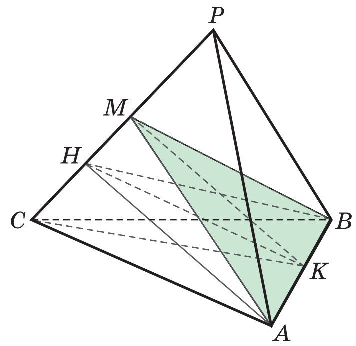


Рис. 2

Замечаем, что треугольник ABH с данным основанием AB и переменной вершиной H на прямой CP будет иметь *наименьшую площадь*, когда будет *наименьшей его высота* HK, проведенная из вершины $H \in CP$, то есть когда *точка* H *прямой* CP *будет ближайшей к прямой* AB. Это возможно, когда *длина отрезка* KH *будет равна кратчайшему расстоянию* $\rho(PC; AB)$ *между скрещивающимися прямыми* CP *и* AB *— длине их общего перпендикуляра.* Таким образом, для решения данной задачи необходимо построить этот перпендикуляр и найти его длину.

Будем, логически рассуждая, строить этот перпендикуляр.

Пусть точки M и K — середины ребер соответственно PC и AB данного тетраэдра $PABC$; $(ABM) = \alpha$.

Так как все грани данного тетраэдра являются равными правильными треугольниками, то $AM = BM$, $AM \perp CP$, $BM \perp CP$ (как медианы и высоты равных правильных треугольников соответственно APC и BPC). Тогда по признаку перпендикулярности прямой и плоскости имеем:

$CP \perp \alpha$, следовательно, $CP \perp MK$ (по определению прямой, перпендикулярной плоскости; $MK \subset \alpha$). А так как точка K — середина основания AB в равнобедренном треугольнике ABM, то $MK \perp AB$. Таким образом, получили:

$$\begin{cases} MK \perp CP, \\ MK \perp AB \end{cases},$$

следовательно, отрезок MK — общий перпендикуляр скрещивающихся прямых PC и AB. Найдем его длину.

В правильном треугольнике ACP со стороной $AC = 12$ имеем:

$$AM = \frac{AC\sqrt{3}}{2} = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}.$$

Тогда в прямоугольном треугольнике AMK:

$$MK = \sqrt{AM^2 - AK^2} = \sqrt{\left(6\sqrt{3}\right)^2 - 6^2} = 6\sqrt{2} = \rho(PC;\ AB).$$

Значит, искомая (наименьшая) площадь треугольника ABM равна:

$$S_{ABM} = \frac{1}{2} AB \cdot MK = 0{,}5 \cdot 12 \cdot 6\sqrt{2} = 36\sqrt{2}.$$

Ответ: $36\sqrt{2}$ кв. ед.

В некоторых случаях для нахождения расстояния между двумя скрещивающимися прямыми a и b удобно использовать ***метод проектирования.***

Построим плоскость α, перпендикулярную прямой a, и ортогонально спроектируем прямую b на эту плоскость (рис. 3).

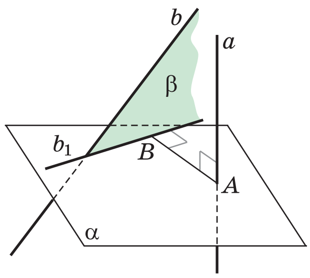


Рис. 3

Пусть β — плоскость, ортогонально проектирующая прямую b на плоскость α, прямая b_1 — проекция прямой b на плоскость α; то есть $\beta \perp \alpha$, $b_1 = \beta \cap \alpha$. Так как $a \perp \alpha$ и $\beta \perp \alpha$, то $a \parallel \beta$. Это означает, что если A — точка пересечения прямой a с плоскостью α, то расстояние от точки A до прямой b_1 равно расстоянию между прямой a и параллельной ей плоскостью β, содержащей прямую b, значит, равно расстоянию между данными скрещивающимися прямыми a и b: $\rho(A;\ b_1) = \rho(a;\ b)$ ([1], с. 101).

Замечание. В решении задачи 2 неявно используется метод проектирования. Действительно, мы имеем: $\alpha \perp CP$; $AB \subset \alpha$, следовательно, ортогональной проекцией прямой AB на α является эта же прямая AB. А так как $\alpha \cap CP = M$, то $\rho(PC;\ AB) = \rho(M;\ AB) = MK$ — высота треугольника ABM.

Используя ***метод проектирования***, рассмотрим решение некоторых аналогичных задач, постепенно повышая уровень их сложности.

Задача 3. Найдите наименьшую площадь треугольника, основанием которого является диагональ A_1C куба $A...D_1$ (рис. 4), а его третья вершина расположена на прямой $BC_1 \subset (BB_1C)$, если ребро куба равно 12.

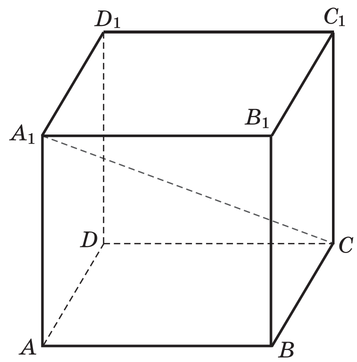


Рис. 4

Решение. Заметим, что прямые A_1C и BC_1 скрещиваются (признак скрещивающихся прямых). Это означает, что наименьшая площадь будет у такого треугольника A_1CM ($M \in BC_1$), высота которого, проведенная из точки M, окажется равной расстоянию $\rho(BC_1;\ A_1C)$, то есть равной длине общего перпендикуляра прямых A_1C и C_1B. Найдем $\rho(BC_1;\ A_1C)$, пользуясь методом проектирования.

Докажем, что $(BC_1D) \perp A_1C$.

В самом деле (рис. 5): $AC \perp BD$ (как диагонали грани куба), AC — ортогональная проекция прямой A_1C на плоскость ABC, следовательно, $A_1C \perp BD$ (теорема о трех перпендикулярах). Аналогично доказывается, что $A_1C \perp C_1B$. Имеем: $A_1C \perp BD$, $A_1C \perp C_1B$, следовательно, $A_1C \perp (BC_1D)$ (признак перпендикулярности прямой и плоскости).

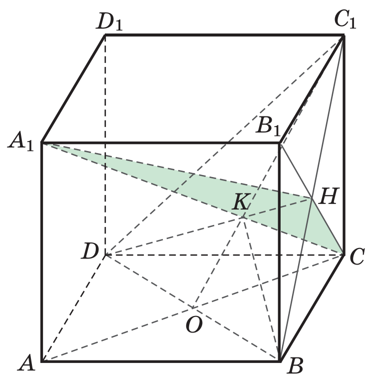


Рис. 5

Далее, прямые A_1C и OC_1 лежат в диагональном сечении AA_1C_1C и пересекаются. Пусть $K = A_1C \cap OC_1 = A_1C \cap (BC_1D)$. Получаем: $KB = KC_1 = KD$ (как проекции равных наклонных — ребер CB, CC_1, CD — на плоскость BC_1D), следовательно, точка K — центр правильного треугольника BC_1D.

Теперь спроектируем прямую BC_1 на плоскость BC_1D.

Так как $BC_1 \subset (BC_1D)$, то ортогональной проекцией прямой BC_1 на плоскость BC_1D является эта же прямая BC_1.

Таким образом, в соответствии с методом проектирования, приходим к выводу:

$$\rho(BC_1;\, A_1C) = \rho(K;\, BC_1).$$

Учитывая, что $DH \perp BC_1$ (DH — медиана правильного треугольника BC_1D), заключаем: $KH = \rho(K;\, BC_1) = \rho(BC_1;\, A_1C)$, следовательно, KH — общий перпендикуляр скрещивающихся прямых BC_1 и A_1C, значит, треугольник A_1CH с основанием A_1C и высотой HK является искомым с наименьшей площадью. Найдем эту площадь.

Имеем: $C_1B = 12\sqrt{2}$ (диагональ квадрата BB_1C_1C со стороной 12), поэтому в правильном треугольнике BC_1D находим:

$$DH = \frac{C_1B \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{12\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{6},$$

тогда

$$KH = \frac{1}{3}DH = \frac{1}{3} \cdot 6\sqrt{6} = 2\sqrt{6}.$$

Следовательно,

$$S_{A_1HC} = \frac{1}{2}A_1C \cdot HK = \frac{1}{2} \cdot 12\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{6} = 36\sqrt{2}\ .$$

Ответ: $36\sqrt{2}$ кв. ед.

Теперь в этом же кубе найдем наименьшую площадь треугольника, стороной которого является диагональ BC_1 грани BB_1C_1C, а его третья вершина расположена на прямой AB_1.

Заметим, что треугольник BC_1K с основанием BC_1 и вершиной $K \in AB_1$ (рис. 6) будет иметь наименьшую площадь при наименьшей высоте KT, проведенной из вершины K.

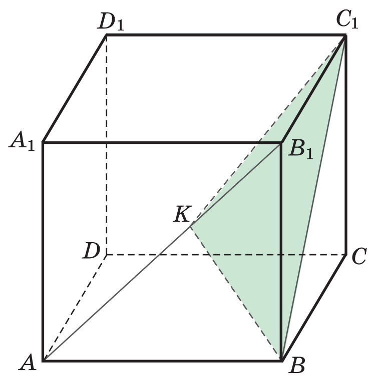


Рис. 6

Прямые AB_1 и BC_1 скрещиваются (*Почему?*), поэтому третьей вершиной искомого треугольника с данной стороной BC_1 является точка прямой AB_1, ***ближайшая*** к прямой BC_1. Это означает, что высота искомого треугольника BC_1K с ***наименьшей*** площадью должна быть равна длине общего перпендикуляра скрещивающихся прямых AB_1 и BC_1.

Найдем длину этого перпендикуляра ***методом проектирования.***

Имеем (рис. 7): $BC_1 \perp B_1C$ (как диагонали квадрата); $BC \perp CD$ (в квадрате $ABCD$), BC — ортогональная проекция B_1C на плоскость ABC, следовательно, $BC_1 \perp CD$ (теорема о трех перпендикулярах). Получили: $BC_1 \perp CD$, $BC_1 \perp B_1C$, следовательно, $BC_1 \perp (B_1CD)$ (признак перпендикулярности прямой и плоскости), при этом $BC_1 \cap (B_1CD) = M$.

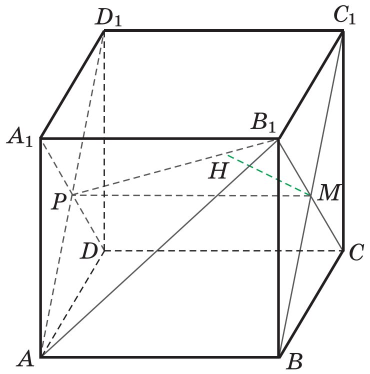


Рис. 7

Далее, $AD_1 \parallel BC_1$, $BC_1 \perp (B_1CD)$, следовательно, $AD_1 \perp (B_1CD)$. Ортогональной проекцией прямой AB_1 на плоскость B_1CD является прямая B_1P, где $P = AD_1 \cap A_1D = AD_1 \cap (B_1CD)$. Поэтому на основании метода проектирования имеем: $\rho(BC_1;\, AB_1) = \rho(M;\, B_1P)$.

Пусть $MH \perp B_1P$, $H \in B_1P$, следовательно, MH — высота прямоугольного треугольника PMB_1 ($\angle B_1MP = 90°$, так как $PM \parallel AB$). Поэтому:

$$MH = \frac{B_1M \cdot MP}{\sqrt{B_1M^2 + MP^2}} = \frac{6\sqrt{2} \cdot 12}{\sqrt{\left(6\sqrt{2}\right)^2 + 12^2}} = 4\sqrt{3} = \rho\left(AB_1;\, BC_1\right).$$

Таким образом, высота искомого треугольника с наименьшей площадью равна $4\sqrt{3}$.

Так как вершина K искомого треугольника BC_1K должна быть расположена на прямой AB_1, ортогональной проекцией которой на плоскость B_1CD в направлении прямой AD_1 является прямая B_1P (рис. 8), то K является точкой пересечения прямой AB_1 и прямой, проходящей через точку H параллельно прямой AD_1.

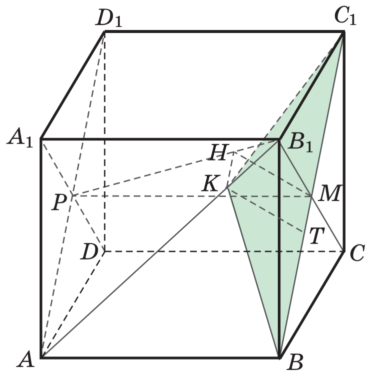


Рис. 8

Находим площадь треугольника BC_1K для чего проведем $KH \parallel AD_1$; $K \in AB_1$, $KT = HM$. Тогда получаем:

$$S_{BC_1K} = \frac{1}{2} BC_1 \cdot KT = \frac{1}{2} \cdot 12\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{3} = 24\sqrt{6}.$$

Ответ: $24\sqrt{6}$ кв. ед.

При решении данной задачи важным является нахождение расстояния между прямыми, содержащими скрещивающиеся диагонали BC_1 и AB_1 смежных граней куба. Практика свидетельствует, что векторный метод решения многих стереометрических задач, в том числе на вычисление расстояния между скрещивающимися прямыми, значительно проще их решения средствами элементарной геометрии («чисто геометрически»). Причиной тому служит тот факт, что решение геометрической задачи векторным методом можно успешно реализовать, не прибегая к дополнительным геометрическим построениям.

Рассмотрим решение данной задачи ***векторным методом.***

Введем векторы: $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{BB_1} = \vec{c}$ (рис. 9). Тройку $(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c})$ некомпланарных векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ примем в качестве базиса и разложим векторы $\overrightarrow{AB_1}$, $\overrightarrow{BC_1}$ по векторам этого базиса. Имеем:

$$\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{BB_1} - \overrightarrow{BA} = \vec{c} - \vec{a}, \quad \overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB_1} = \vec{b} + \vec{c}.$$

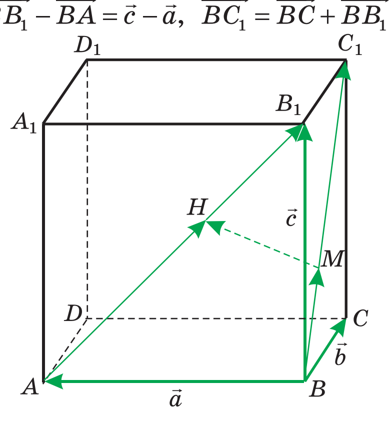


Рис. 9

Пусть отрезок MH — общий перпендикуляр скрещивающихся прямых AB_1 и BC_1 ($H \in AB_1$, $M \in BC_1$). Его длина равна расстоянию между этими прямыми: $\rho(AB_1; BC_1) = |MH|$.

Так как точка H лежит на диагонали AB_1, то векторы $\overrightarrow{AH}$ и $\overrightarrow{AB_1}$ коллинеарны, поэтому существует такое число x, что

$$\overrightarrow{AH} = x \cdot \overrightarrow{AB_1} = x \cdot (\vec{c} - \vec{a}).$$

Аналогично, в силу коллинеарности векторов $\overrightarrow{BM}$ и $\overrightarrow{BC_1}$, существует такое число y, что

$$\overrightarrow{BM} = y \cdot \overrightarrow{BC_1} = y \cdot (\vec{b} + \vec{c}).$$

По правилу ломаной находим:

$$\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AH} = -\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AH} =$$

$$= -y \cdot (\vec{b} + \vec{c}) + \vec{a} + x \cdot (\vec{c} - \vec{a}) = (1-x)\vec{a} - y\vec{b} + (x-y)\vec{c}.$$

Значения x и y найдем из условия:

$$\begin{cases} MH \perp AB_1, \\ MH \perp BC_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MH} \perp \overrightarrow{AB_1}, \\ \overrightarrow{MH} \perp \overrightarrow{BC_1} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{AB_1} = 0, \\ \overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{BC_1} = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Учитывая, что базисные векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ попарно взаимно перпендикулярны и длина каждого из них равна 12, имеем:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} = 0, \quad \vec{a}^2 = \vec{b}^2 = \vec{c}^2 = 144.$$

Получаем:

$$\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{AB_1} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left((1-x)\vec{a} - y\vec{b} + (x-y)\vec{c}\right) \cdot (\vec{c} - \vec{a}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\vec{a}^2 + (x-y)\vec{c}^2 = 0 \Leftrightarrow 2x - y - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x - y = 1,$$

$$\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{BC_1} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left((1-x)\vec{a} - y\vec{b} + (x-y)\vec{c}\right) \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -y\vec{b}^2 + (x-y)\vec{c}^2 = 0 \Leftrightarrow x - 2y = 0.$$

Таким образом, система векторных равенств (1) равносильна системе уравнений: $\begin{cases} 2x - y = 1, \\ x - 2y = 0, \end{cases}$ решением которой является: $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{1}{3}$. Тогда

$$\overrightarrow{MH} = \left(1 - \frac{2}{3}\right)\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right)\vec{c} = \frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}.$$

Значит,

$$\rho(AB_1; BC_1) = |\overrightarrow{MH}| = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{9} \cdot 3 \cdot 144} = 4\sqrt{3}.$$

Замечание. Векторное решение этой задачи вносит определенную ясность в построение высоты искомого треугольника, следовательно, и в построение самого этого треугольника. Действительно:

из $\overrightarrow{AH_1} = x \cdot \overrightarrow{AB_1}$ при $x = \frac{2}{3}$ следует:

$AH = \frac{2}{3} AB_1$; $AH : AB_1 = 2 : 3$, $AH : HB_1 = 2 : 1$;

из $\overrightarrow{BM} = y \cdot \overrightarrow{BC_1}$ при $y = \frac{1}{3}$ следует:

$BM = \frac{1}{3} BC_1$; $BM : BC_1 = 1 : 3$, $BM : MC_1 = 1 : 2$.

Таким образом, концы отрезка HM, являющегося общим перпендикуляром скрещивающихся диагоналей AB_1 и BC_1 смежных граней куба, делят эти диагонали в отношениях

$$AH : HB_1 = 2 : 1 \text{ и } BM : MC_1 = 1 : 2.$$

При этом отрезок HM служит высотой искомого треугольника BC_1H с наименьшей площадью (рис. 10).

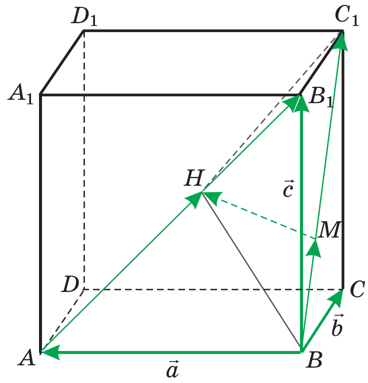


Рис. 10

После такой «пропедевтики» целесообразно рассматривать различные методы решения аналогичных задач, используя многогранники более сложного устройства, например, правильную шестиугольную призму. При этом расстояние между двумя скрещивающимися прямыми можно находить ***методом параллельных плоскостей***, вытекающим из утверждения: *расстояние между двумя скрещивающимися прямыми равно расстоянию между параллельными плоскостями, проходящими через эти прямые* ([1], с. 84). Рассмотрим, например, решение такой задачи.

Задача 4. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ (рис. 11) — правильная шестиугольная призма, все ребра которой равны 12. Найдите наименьшую площадь треугольника AB_1M с основанием AB_1, если вершина M этого треугольника расположена на прямой BC_1.

Решение. Прямые AB_1 и BC_1 скрещиваются (признак скрещивающихся прямых). Замечаем, что основание AB_1 искомого треугольника AB_1M лежит на одной из этих скрещивающихся прямых, а его вершина M — на другой прямой. Так как треугольник AB_1M должен иметь наименьшую площадь, то должна быть наименьшей его высота, проведенная из вершины M на прямую AB_1, то есть точка M должна быть ближайшей к прямой AB_1. Это означает, что длина высоты искомого треугольника, проведенной из вершины M, должна быть равна длине общего перпендикуляра скрещивающихся прямых AB_1 и BC_1. Найдем длину этого перпендикуляра.

Обозначим: $O = AD \cap CF$, $O_1 = A_1D_1 \cap C_1F_1$, $H = AC \cap BO$, $H_1 = A_1C_1 \cap B_1O_1$.

В прямом параллелепипеде $ABCOA_1B_1C_1O_1$, все ребра которого равны 12, а его основанием является ромб $OABC$, имеем: $AO_1 \parallel BC_1$, $AB_1 \parallel OC_1$ (диагонали противоположных граней параллелепипеда), откуда $(AO_1B_1) \parallel (BOC_1)$ (признак параллельности плоскостей). Тогда из $AB_1 \subset (AO_1B_1)$, $BC_1 \subset (BOC_1)$ следует:

$$\rho(AB_1;\, BC_1) = \rho((AO_1B_1);\, (BOC_1)).$$

Найдем это расстояние. Так как боковые грани данного параллелепипеда — равные квадраты, то треугольники AO_1B_1 и BOC_1 равнобедренные и равны (*Почему*?). Поэтому $AH_1 \perp B_1O_1$, $C_1H \perp OB$.

Учитывая перпендикулярность отрезков OB и AC, приходим к выводу: $OB \perp (A_1AC)$ (признак перпендикулярности прямой и плоскости), откуда $(A_1AC) \perp (AO_1B_1)$ (признак перпендикулярности двух плоскостей).

А так как $(AO_1B_1) \parallel (BOC_1)$, то $(A_1AC) \parallel (BOC_1)$. Это означает, что прямая, проведенная через точку A_1 перпендикулярно плоскостям AO_1B_1 и BOC_1, расположена в плоскости A_1AC и пересекает плоскости AO_1B_1 и BOC_1 в точках соответственно K и T, принадлежащих прямым соответственно AH_1 и C_1H. Тогда $\rho(A_1B;\, B_1C) = KT$.

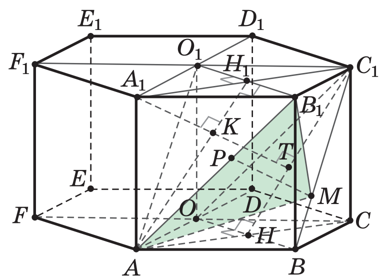


Рис. 11

Так как $AH_1 \parallel HC_1$ и $A_1H_1 = H_1C_1$, то $A_1K = KT$ (теорема Фалеса). Таким образом, $\rho(AB_1;\, BC_1) = A_1K$. Найдем длину A_1K.

В правильном треугольнике AOB со стороной, равной 12, имеем: $AH = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$. Найдем высоту A_1K прямоугольного треугольника AA_1H_1 с катетами $A_1A = 12$ и $A_1H_1 = 6\sqrt{3}$:

$$A_1K = \frac{A_1A \cdot A_1H_1}{\sqrt{A_1A^2 + A_1H_1^2}} = \frac{12 \cdot 6\sqrt{3}}{\sqrt{144+108}} = \frac{12\cdot\sqrt{21}}{7}.$$

Таким образом,

$$\rho\left(AB_1;\, BC_1\right) = \frac{12\sqrt{21}}{7}.$$

Расстояние между скрещивающимися прямыми AB_1 и BC_1 равно длине их общего перпендикуляра, который служит высотой искомого треугольника AB_1M с наименьшей площадью.

Пусть отрезок MP — общий перпендикуляр скрещивающихся прямых AB_1 и BC_1 ($M \in BC_1$,

$P \in AB_1$). Тогда $MP=\dfrac{12\sqrt{21}}{7}$ — высота искомого треугольника AB_1M с наименьшей площадью, которая равна:

$$S_{AB_1M}=0,5\cdot AB_1\cdot MP=0,5\cdot 12\sqrt{2}\cdot\frac{12\sqrt{21}}{7}=\frac{72\sqrt{42}}{7}.$$

Ответ: $\dfrac{72\sqrt{42}}{7}$ кв. ед.

Полезно решать стереометрические задачи и координатным методом, который наряду с векторным методом является мощным аппаратом изучения пространственной геометрии, а его использование при решении стереометрических задач не требует дополнительных геометрических построений, в результате чего процесс решения упрощается.

Рассмотрим решение данной задачи ***координатным методом.***

Введем систему координат $Oxyz$ так, чтобы вершины A, B, C, A_1, B_1 данной призмы имели координаты (рис. 12): $A\left(6\sqrt{3};\,-6;\,0\right)$, $B\left(6\sqrt{3};\,6;\,0\right)$, $C(0;\,12;\,0)$, $a_1\left(6\sqrt{3};\,-6;\,12\right)$, $B_1\left(6\sqrt{3};\,6;\,12\right)$.

Используем следующий факт: *расстояние между двумя скрещивающимися прямыми равно расстоянию от любой точки одной прямой до плоскости, проходящей через вторую прямую параллельно первой прямой* ([1], с. 102).

Для нахождения искомого расстояния между прямыми B_1C и A_1B составим уравнение плоскости (обозначим ее α), проходящей через прямую A_1B параллельно прямой B_1C.

В качестве вектора нормали плоскости α примем вектор $\vec{n}\left(a;\,b;\,c\right)$, перпендикулярный направляющим векторам $\overrightarrow{CB_1}\left(6\sqrt{3};\,-6;\,12\right)$ и $\overrightarrow{A_1B}\left(0;\,12;\,-12\right)$ скрещивающихся прямых A_1B и B_1C. Найдем координаты этого вектора, пользуясь условием перпендикулярности двух векторов в координатной форме. Имеем:

$$\begin{cases}\vec{n}\perp\overrightarrow{CB_1},\\ \vec{n}\perp\overrightarrow{A_1B}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{CB_1}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1B}=0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}6\sqrt{3}a-6b+12c=0,\\ 12b-12c=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=-\sqrt{3}a,\\ b=c.\end{cases}$$

Полагая $a=-\sqrt{3}$, получаем: $b=c=3$. Таким образом, $\vec{n}\left(-\sqrt{3};\,3;\,3\right)$. Тогда плоскость α ($B\in\alpha$) имеет уравнение:

$$-\sqrt{3}\left(x-6\sqrt{3}\right)+3(y-6)+3(z-0)=0,$$

$$-\sqrt{3}x+3y+3z=0.$$

Теперь находим:

$$\rho\left(A_1B;\,B_1C\right)=\rho(C;\,\alpha)=\frac{\left|\sqrt{3}\cdot 0+3\cdot 12+3\cdot 0\right|}{\sqrt{3+9+9}}=$$

$$=\frac{36}{\sqrt{21}}=\frac{12\sqrt{21}}{7}.$$

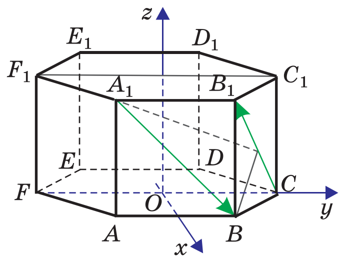


Рис. 12

Учитывая, что длина отрезка A_1B равна длине вектора $\overrightarrow{A_1B}$, находим:

$$\left|\,\overrightarrow{A_1B}\,\right|=\sqrt{0^2+12^2+(-12)^2}=12\sqrt{2}.$$

Получаем искомую (наименьшую) площадь треугольника A_1BM:

$$S_{A_1BM}=\frac{1}{2}A_1B\cdot\rho\left(A_1B;\,B_1C\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{12\sqrt{21}}{7}\cdot 12\sqrt{2}=\frac{72\sqrt{42}}{7}.$$

Ответ: $\dfrac{72\sqrt{42}}{7}$ кв. ед.

После такой пропедевтики вернемся к задаче 1 (см. рис. 1) и рассмотрим ее решение сначала ***методом проектирования.***

Найдем расстояние между прямыми AD_1 и A_1F. Пусть $K = A_1F \cap AF_1$; $(AF_1C) = \alpha$. Имеем: $A_1F \perp AF_1$ (как диагонали квадрата) (рис. 13); $AF \perp AC$ (основание призмы — правильный шестиугольник), откуда $A_1F \perp AC$ (теорема о трех перпендикулярах). Получаем: $A_1F \perp AF_1$, $A_1F \perp AC$, следовательно, $A_1F \perp \alpha$ (признак перпендикулярности прямой и плоскости).

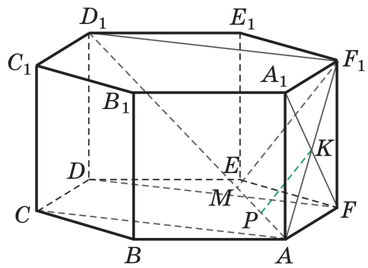


Рис. 13

Таким образом, в качестве плоскости, перпендикулярной прямой A_1F, выберем плоскость α, которая пересекает эту прямую в точке K.

Прямая AD_1 лежит в плоскости α, поэтому ее проекцией на α является эта же прямая AD_1. Значит, $\rho(AD_1;\,A_1F) = \rho(K;\,AD_1)$.

Пусть $KP\perp AD_1$, $P\in AD_1$, тогда $\rho(K;AD_1)=KP$. Найдем длину KP.

Если F_1M — высота прямоугольного треугольника AF_1D_1 ($AF_1 \perp D_1F_1$), то $F_1M \parallel KP$, откуда KP — средняя линия треугольника AMF_1. Значит, $KP=\dfrac{1}{2}F_1M$. В прямоугольном треугольнике AF_1D_1 с катетами $F_1D_1=12\sqrt{3}$, и $AF_1=12\sqrt{2}$ находим:

$$F_1M = \frac{D_1F_1 \cdot AF_1}{\sqrt{D_1F_1^2 + AF_1^2}} = \frac{12\sqrt{3}\cdot 12\sqrt{2}}{\sqrt{\left(12\sqrt{3}\right)^2 + \left(12\sqrt{2}\right)^2}} = \frac{12\sqrt{30}}{5}.$$

Тогда $KP = \dfrac{6\sqrt{30}}{5}$.

Таким образом,

$$\rho\left(AD_1;\ A_1F\right) = KP = \frac{6\sqrt{30}}{5}.$$

Поэтому наименьшая площадь треугольника с основанием AD_1 и вершиной K на прямой A_1F равна площади треугольника AD_1K (рис. 14), то есть равна:

$$S_{AD_1K} = \frac{1}{2}AD_1 \cdot KP = \frac{1}{2}\cdot 12\sqrt{5}\cdot\frac{6\sqrt{30}}{5} = 36\sqrt{6}.$$

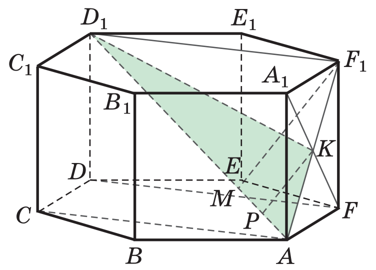


Рис. 14

Ответ: $36\sqrt{6}$ кв. ед.

Теперь рассмотрим решение этой задачи ***координатным методом.***

Введем систему координат $Oxyz$ так, чтобы вершины A, B, F, A_1, D_1 данной призмы имели координаты: $A\left(6\sqrt{3};\ 6;\ 0\right)$, $B\left(6\sqrt{3};\ -6;\ 0,\right)$ $F(0;\ 12;\ 0)$, $A_1\left(6\sqrt{3};\ 6;\ 12\right)$, $D\left(-6\sqrt{3};\ -6;\ 0\right)$ (рис. 15).

Для нахождения расстояния $\rho(A_1F;\ AD_1)$ составим уравнение плоскости β, проходящей через прямую A_1F параллельно прямой AD_1.

Во введенной системе координат точка D_1 и вектор $\overrightarrow{D_1A}$ имеют соответственно координаты:

$$D_1\left(-6\sqrt{3};\ -6;\ 12\right) \text{ и } \overrightarrow{D_1A}\left(12\sqrt{3};\ 12;\ -12\right).$$

В качестве вектора нормали плоскости β примем вектор $\vec{n}\left(a;\ b;\ c\right)$, перпендикулярный направляющим векторам $\overrightarrow{FA_1}\left(6\sqrt{3};\ -6;\ 12\right)$ и $\overrightarrow{D_1A}\left(12\sqrt{3};\ 12;\ -12\right)$ прямых A_1F и D_1A. Найдем координаты вектора $\vec{n}$. Имеем:

$$\begin{cases}\vec{n}\perp\overrightarrow{FA_1},\\ \vec{n}\perp\overrightarrow{D_1A}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{FA_1}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{D_1A}=0\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}6\sqrt{3}a-6b+12c=0,\\ 12\sqrt{3}a+12b-12c=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\sqrt{3}a-b+2c=0,\\ \sqrt{3}a+b-c=0\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\sqrt{3}a-b+2c=0,\\ 2b-3c=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}c=-2\sqrt{3}a,\\ b=\dfrac{3}{2}c\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}c=-2\sqrt{3}a,\\ b=-3\sqrt{3}a.\end{cases}$$

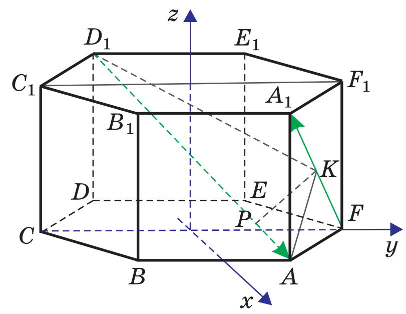


Рис. 15

Полагая $a=\sqrt{3}$, получаем: $b=-9$, $c=-6$. Таким образом, $\vec{n}\left(\sqrt{3};\ -9;\ -6\right)$, поэтому плоскость β, проходящая через точку $F(0;\ 12;\ 0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}\left(\sqrt{3};\ -9;\ -6\right)$, имеет уравнение

$$\sqrt{3}(x-0)-9(y-12)-6(z-0)=0,$$
$$\sqrt{3}x-9y-6z+108=0.$$

Значит,

$$\rho\left(A_1F;\ AD_1\right)=\rho\left(A;\ \beta\right)=$$
$$=\frac{\left|\sqrt{3}\cdot 6\sqrt{3}-9\cdot 6-6\cdot 0+108\right|}{\sqrt{3+81+36}}=\frac{72}{\sqrt{120}}=\frac{6\sqrt{30}}{5}.$$

Находим искомую площадь треугольника AD_1K:

$$S_{AD_1K}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{D_1A}\right|\cdot\rho\left(A_1F;\ AD_1\right)=\frac{1}{2}\cdot 12\sqrt{5}\cdot\frac{6\sqrt{30}}{5}=36\sqrt{6}.$$

Ответ: $36\sqrt{6}$ кв. ед.

Задачи для самостоятельного решения

1. Расстояние между скрещивающимися диагоналями двух смежных граней куба равно m. Найдите ребро этого куба.

2. Расстояние между скрещивающимися диагоналями AB_1 и BC_1 двух смежных граней куба $A\ldots D_1$ равно 8. Какую наименьшую площадь может иметь треугольник AB_1M, где M — точка прямой BC_1?

3. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — правильная шестиугольная призма, все ребра которой равны 7. Какую наименьшую площадь может иметь треугольник AF_1M, где M — точка прямой A_1B?

Ответы: **1.** $m\sqrt{3}$. **2.** $32\sqrt{6}$ кв. ед. **3.** $\dfrac{7\sqrt{42}}{2}$ кв. ед.

Литература

1. *Потоскуев Е.В., Звавич Л.И.* Математика. Алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 10 кл. Углубленный уровень. Учебник. — М.: Дрофа, 2015.

2. *Потоскуев Е.В., Звавич Л.И.* Математика. Алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 11 кл. Углубленный уровень. Учебник. — М.: Дрофа, 2015.

Д. МУХИН,
г. Москва

ОСЕВАЯ СИММЕТРИЯ И ЗАДАЧИ НА МИНИМУМ

Осевая симметрия (зеркальная симметрия, симметрия относительно прямой) — это простое и наглядное движение плоскости, известное с древних времен. Напомним, что осевой симметрией называется такое преобразование плоскости, при котором задана некоторая прямая *l*, любая точка которой переходит в себя и любая точка *A*, не лежащая на прямой *l*, переходит в точку *A′* такую, что *l* является серединным перпендикуляром для отрезка *AA′*. Оказывается, применение симметрии помогает решать различные экстремальные задачи, причем решать просто и изящно. Все задачи этого цикла объединяет общая идея: длина ломаной больше отрезка, соединяющего ее концы.

Начнем с классической задачи.

Задача 1. По одну сторону от дороги (прямой l) расположены две деревни (точки A и B) (рис. 1). Найти точку M на прямой l такую, что сумма расстояний от нее до точек A и B минимальна.

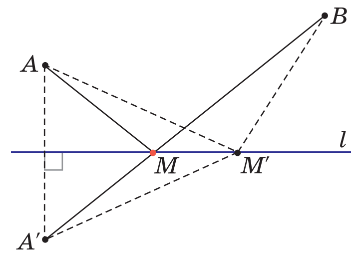


Рис. 1

Решение. Отразим точку A симметрично относительно прямой l. Получится некоторая точка A'; проведем отрезок $A'B$. Пусть он пересекает l в точке M. Точка M — искомая. Действительно, рассмотрим любую другую точку M' на прямой l. Тогда

$$AM' + M'B = A'M' + M'B > A'B = AM + MB.$$

Мы воспользовались неравенством треугольника. Таким образом, точка M дает минимальную сумму расстояний до A и B, и задача решена.

Задача 2. Внутри острого угла дана точка A (рис. 2). Построить треугольник ABC наименьшего периметра, вершины B, C которого принадлежат сторонам угла.

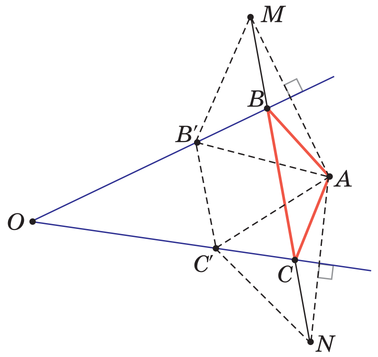


Рис. 2

Решение. Построим точки M и N, симметричные точке A относительно сторон угла. Прямая MN пересекает стороны угла в искомых точках B, C. Действительно, рассмотрим какие-либо другие точки B' и C' на сторонах угла. Тогда

$$AB' + B'C' + C'A =$$
$$= MB' + B'C' + C'N > MN =$$
$$= MB + BC + CN =$$
$$= AB + BC + CA.$$

Задача решена.

Задача 3. Дан острый угол и точки A и B внутри него (рис. 3). Найти на сторонах угла точки M и N такие, что периметр четырехугольника $MABN$ минимален.

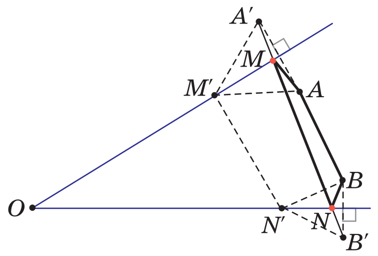


Рис. 3

Решение. Построим точку A', симметричную точке A относительно одной стороны угла, и точку B', симметричную точке B относительно другой стороны угла. Прямая $A'B'$ пересекает стороны угла в искомых точках M, N. Доказательство аналогично предыдущей задаче. Действительно, рассмотрим какие-либо другие точки M' и N' на сторонах угла. Тогда

$$AM' + M'N' + N'B + AB =$$
$$= A'M' + M'N' + N'B' + AB > A'B' + AB =$$
$$= A'M + MN + NB' + AB =$$
$$= AM + MN + NB + AB.$$

Заметим, что попутно мы решили и такую задачу: направить из точки A луч света так, чтобы он, отразившись от двух сторон угла, попал в точку B.

Теперь перейдем к задаче Фаньяно.

Задача 4. Вписать в остроугольный треугольник треугольник наименьшего периметра.

Решение. Рассмотрим треугольник ABC (рис. 4) и точку D на его стороне AC. Попробуем найти на двух других сторонах такие точки E и F, чтобы периметр треугольника DEF был минимален. Для этого применим привычный уже метод: отразим точку D относительно сторон AB и BC. Получатся точки D_1 и D_2. Заметим, что периметр треугольника DEF равен длине ломаной D_1EFD_2, а ломаная имеет минимальную длину, если ее звенья лежат на одной прямой. Таким образом, ясно, как выбирать точки E и F, если точка D зафиксирована. А как же выбирать точку D? Посмотрим еще раз на чертеж. Заметим, что в треугольнике D_1BD_2 угол при вершине B равен удвоенному углу ABC (*докажите!*) , то есть он постоянен. Еще заметим, что $D_1B = DB = D_2B$. Таким образом, основание D_1D_2 равнобедренного треугольника D_1BD_2 будет минимально, если минимальна боковая сторона, то есть минимален отрезок BD. Таким образом, получаем, что D — основание высоты. Кроме того, ясно, что треугольник наименьшего периметра существует и единственен, значит, подобные рассуждения можно повторить, начав с точки E и с точки F. Получается, что решением задачи служит треугольник с вершинами в основаниях высот, или так называемый *ортотреугольник*.

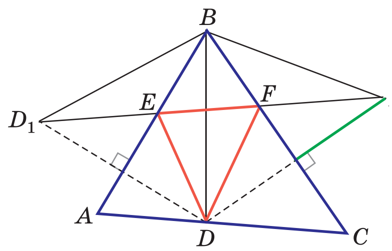
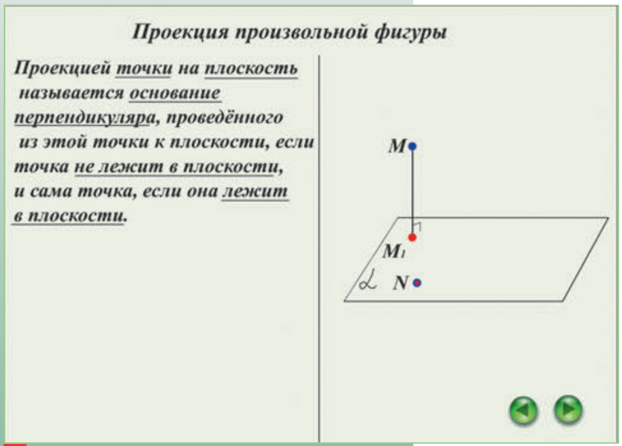
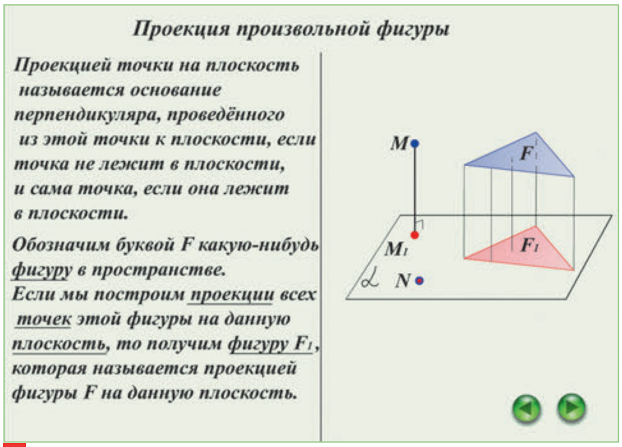


Рис. 4

Замечание. Луч света, пущенный вдоль одной из сторон ортотреугольника, отразится последовательно от всех сторон треугольника ABC и вернется в исходную точку. Таким образом, контур ортотреугольника представляет собой замкнутую траекторию луча света. (Это еще и иллюстрация известного из физики *принципа Ферма*: луч света движется по кратчайшей возможной траектории.)



1



2

10 класс

ТЕМА УРОКА: «УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТЬЮ»

Сегодня мы рассматриваем урок, проведенный во время прохождения педагогической практики студенткой Московского городского педагогического университета Екатериной ВЫГОННОЙ. В обсуждении участвуют ее сокурсники: Екатерина ГУЩИНА, Александр ЖДАНОВ, Виктория ОСИПОВА и Таисия ТЕРЕНТЬЕВА. Ведет обсуждение руководитель практики, профессор Лариса Олеговна ДЕНИЩЕВА.

Учебник: Атанасян Л.С. и др. Геометрия, 10–11 классы.

Цели:

образовательные:

– введение понятия угла между прямой и плоскостью;

– формирование умений построения угла между прямой и плоскостью;

– формирование навыков доказательства, что построенный угол между прямой и плоскостью искомый;

развивающие:

– развитие математической речи (формулирование определения, проведение доказательства);

– развитие логического мышления (обоснование, обобщение, анализ);

– развитие аккуратности в записи решения задачи;

воспитательные:

– воспитание самостоятельности учащихся (практическая работа — запись пунктов построения угла между прямой и плоскостью);

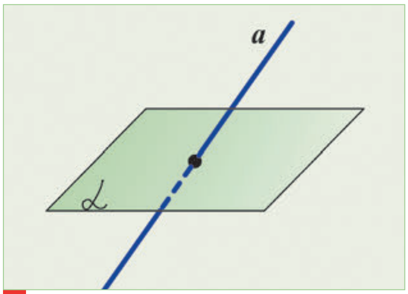
– воспитание умения взаимодействовать в парах;

– воспитание умения взаимодействовать в коллективе (работа в классе в течение урока);

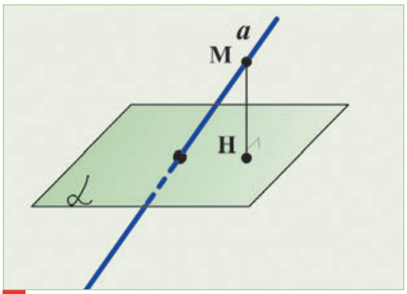
Оборудование: электронная доска, электронные пособия (разработано автором урока); раздаточный материал для первичного закрепления нового материала.

Виды работ на уроке: фронтальный опрос, вызов учащихся к доске, практическая работа, комментирование результатов практической работы, работа в парах.

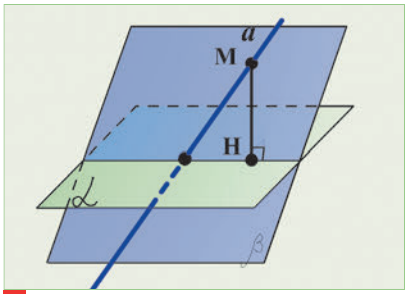
К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru (Авторские электронные пособия.)



3



4



5

Ход урока

Актуализация знаний

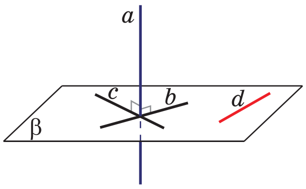
Вспомним некоторые геометрические факты, которые мы проходили на прошлых уроках. Для чего выполним следующее задание.

Задание 1. На чертеже изображена прямая, перпендикулярная двум пересекающимся прямым.

–Перпендикулярна ли прямая a к плоскости β, в которой лежат две пересекающиеся прямые b и c?

– Сформулируйте признак перпендикулярности прямой и плоскости.

– Будет ли прямая a перпендикулярна прямой d этой плоскости? Ответ обоснуйте.



Объяснение нового материала: проекция фигуры

В ходе беседы с помощью электронного пособия учитель демонстрирует построение проекций точки, произвольной фигуры и прямой. (Полезно использовать подсветку в пособии: наведение курсора на подчеркнутые слова определения.)

Вопросы и задания

1. Повторите определение проекции точки на плоскость. (Фронтально опрашивается несколько учеников, которые воспроизводят определение.)

2. Как вы думаете, что будет являться проекцией прямой на плоскость? Верно, прямая. Попробуем доказать это. (Доказательство проводится устно с использованием электронного пособия; обсуждение также идет по слайдам.)

– Какие геометрические объекты нам даны по условию? 3

– Каково их взаимное расположение? 3

– Как построить проекцию произвольной точки, принадлежащей прямой? 4

– Что называется проекцией точки на плоскость? 4

– Сколько плоскостей проходит через данную прямую a и найденную проекцию точки M? 5

– На какой геометрический факт вы опирались, чтобы сделать такой вывод? 5

– Какой геометрической фигурой является пересечение двух плоскостей? 6

3. Докажем, что это прямая, которая является проекцией прямой a на плоскость α. 7

Возьмем произвольную точку M_1, принадлежащую этой прямой, и проведем в плоскости β прямую $M_1H_1 \parallel MH$ $(H_1 \in M_1H_1 \cap \alpha)$.

Докажите, что H_1 является проекцией точки M_1 на плоскость α.

$M_1H_1 \parallel MH$ $(H_1 \in M_1H_1 \cap \alpha)$ и $MH \perp \alpha$, следовательно, $M_1H_1 \perp \alpha$ (по теореме: *если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к плоскости, то и другая прямая перпендикулярна к этой плоскости*).

Аналогично доказывается, что любая точка прямой a_1 является проекцией некоторой точки прямой a.

– Какой вывод можно сделать из нашего обсуждения?

[Прямая a_1 — проекция прямой a на плоскость α.]

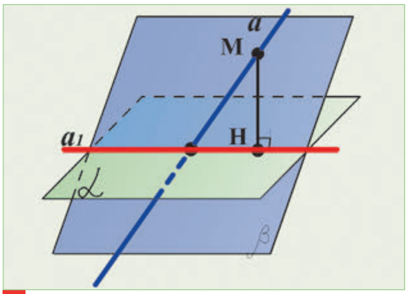
Объяснение нового материала: определение понятия «Угла между прямой и плоскостью»

Запишите тему урока: «Угол между прямой и плоскостью», прочитайте определение, данное в учебнике. (Зачитываем определение из учебника и при необходимости разъясняем смысл каждого понятия, используемого в определении.)

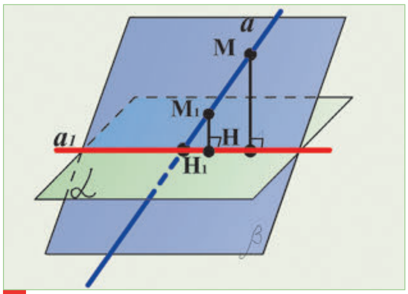
Практическая работа «Построение угла между прямой и плоскостью»

Запишите в тетрадях «Практическая работа». Постройте угол между прямой и плоскостью и запишите это построение по пунктам. Через некоторое время сверим результаты.

(Открыта «страничка» электронного пособия «Построение угла между прямой и плоскостью». Ученики в парах обсуждают и записывают пункты построения угла между прямой и плоскостью и строят угол на чертеже.)

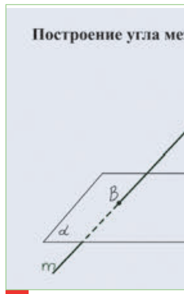


6



7

8



9

Вопросы к учащимся

– Какого геометрического объекта нам не хватает для построения угла между прямой и плоскостью?

– Как построить проекцию прямой на плоскость?

– Опишите шаги построения этой прямой.

Ученики предлагают записать свой вариант построения по шагам. После обсуждения каждого шага открывается построение в пособии.

1. Возьмем точку $A \in m$. 8
2. Опустим $l \perp \alpha$, $A \in l$. 9
3. $C \in l \cap \alpha$. 10
4. BC. 11
5. $\angle ABC = \varphi$ — искомый угол между прямой m и плоскостью α. 12

Первичное закрепление

Прямое применение определения

Учащиеся получают лист с чертежами (задание 3 внизу страницы), отмечают дугой необходимый угол и устно обосновывают свое решение. Важно каждый раз при обосновании проговаривать определение и теорему о перпендикулярности прямой и плоскости.

Применение определения для решения задач

Задача № 164 из учебника.

Задание 4. Под углом φ к плоскости α проведена наклонная. Найдите φ, если известно, что проекция наклонной вдвое меньше самой наклонной.

Фронтально проводится обсуждение:

1) анализ условия (один ученик записывает на доске «Дано» и выполняет чертеж);

2) план решения задачи по наводящим вопросам учителя.

После обсуждения плана второй ученик выходит к доске и записывает решение.

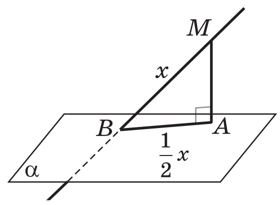
Вопросы к учащимся

– Какие геометрические объекты нам даны по условию?

Дано: α — плоскость; BM — наклонная; $\angle(BM; \alpha) = \varphi$; $AB = \text{пр}_\alpha BM$; $AB = \frac{1}{2}BM$.

Найти: φ.

Чертеж:



Вопросы к учащимся

– Как построить угол φ?

– Какой вид имеет треугольник, состоящий из отрезка наклонной, ее проекции и перпендикуляра, опущенного из точки прямой на плоскость? Откуда это следует?

– Что известно о сторонах треугольника по условию?

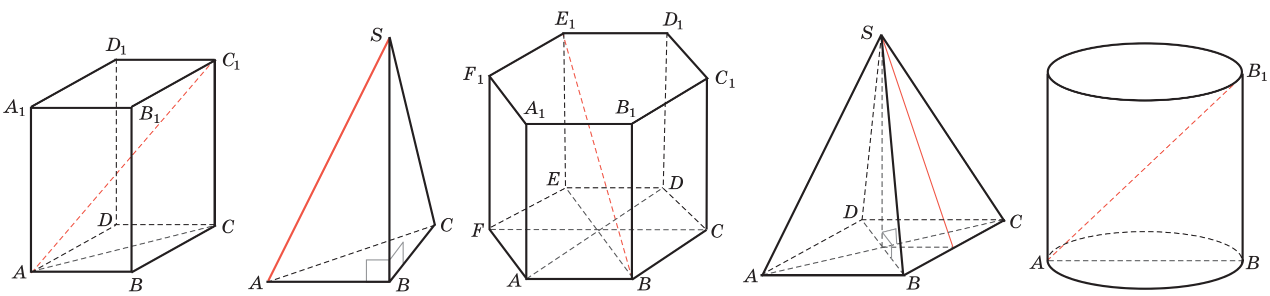
– Какой функцией в прямоугольном треугольнике обозначается такое отношение?

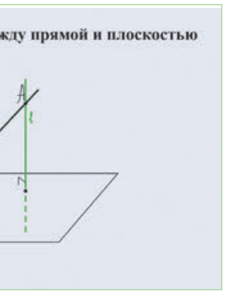
– Чему будет равен угол φ после подстановки известных значений?

– Записываем ответ: $\varphi = 60°$.

Задание 3.

Назовите углы между выделенной прямой и плоскостью основания фигуры. Ответ обоснуйте.





10

11

12

Решение.

Стереометрическая составляющая:

1) $AM \perp \alpha$, $A \in AM \cap \alpha$;

2) $AB = \text{пр}_{\alpha} BM$ (по построению);

3) $\angle MBA = \angle (BM; \alpha)$ (по определению).

Планиметрическая составляющая:

1) $\angle A = 90°$, так как $MA \perp \alpha$, $AB \subset \alpha$, поэтому $MA \perp AB$;

2) $\cos\alpha = \dfrac{AB}{BM} = \dfrac{1}{2}$, так как $0 < \varphi \le 90°$, то $\varphi = 60°$.

Ответ: $\varphi = 60°$.

Дополнительные вопросы к учащимся

– Имеет ли данная задача второе решение?

– Чем является наклонная в треугольнике ABC?

– Чем является проекция наклонной в треугольнике ABC?

– Какое отношение проекции и наклонной дано по условию?

– Какая теорема в планиметрии связывает такое отношение в прямоугольном треугольнике?

– Как вычисляется неизвестный острый угол в прямоугольном треугольнике?

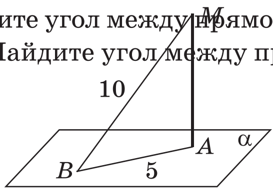
Домашнее задание

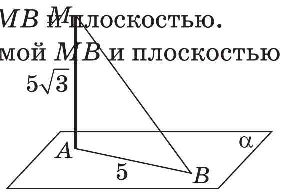
1. Выучить определение понятия угла между прямой и плоскостью, научиться строить угол между прямой и плоскостью и обосновывать выполненные построения.

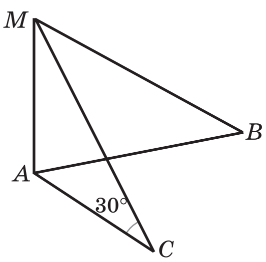
2. Решите задачи по готовым чертежам:

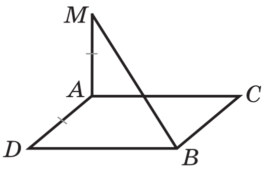
а) Прямая MA перпендикулярна плоскости α. Найдите угол между прямой MB и плоскостью.

б) Прямая MA перпендикулярна плоскости ABC. Найдите угол между прямой MB и плоскостью ABC.

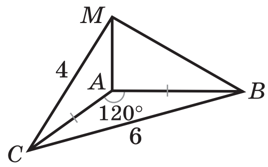


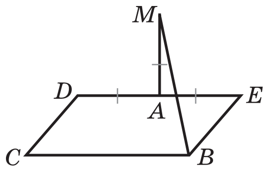






Дано: $ABCD$ — квадрат.





Дано: $BCDE$ — квадрат.

Обсуждение урока

Л.Д. Думаю, что вы согласитесь со мной, что уроки геометрии в старшей школе являются наиболее трудными как для подготовки учителем, так и для восприятия учениками. В основной школе нашим активным помощником выступает чертеж рассматриваемой геометрической конфигурации, в котором фактически сохраняются и взаимное расположение объектов, и соотношение между геометрическими величинами. В стереометрии чертеж, конечно, помогает восприятию условия задачи, но уже не слишком кардинально, так как на нем фигурируют не сами геометрические объекты, а их изображение на плоскости. Конечно, опытные учителя напомнят нам с вами, что при обучении стереометрии продуктивным средством обучения являются готовые модели геометрических фигур, а также их конструирование с помощью «стереометрического ящика». Вспоминая об известных средствах обучения, хочу обратить ваше внимание и на ИКТ. В частности, показать пример применения широко известных программ, которые помогают выстроить обучение с учетом подготовленности учащихся, дозируя долю помощи в организации восприятия учебного материала. Действительно, одному ученику достаточно прослушать объяснение учителя и посмотреть презентацию, показанную на уроке, только один раз, а другому для осознания рассматриваемой конфигурации потребуется вернуться к началу и пройти по всей цепочке рассуждений два, а может быть, и несколько раз. Организации подобной работы и помогают электронные ресурсы.

Замечу для наших читателей, что представленное на уроке дидактическое электронное пособие разработано самим учителем специально к данному уроку.

Перед тем как приступить к обсуждению урока, предоставим слово его автору.

Е.В. На этом уроке я хотела показать возможности использования электронного пособия на уроке геометрии в 10-м классе. Надеюсь, мне удалось показать, что его применение на уроке целесообразно и дает хорошие результаты.

Т.Т. На уроках геометрии ученики часто не могут не то что изобразить, а даже представить объемную конструкцию. Отсюда непонимание и неприязнь к предмету. Я считаю, что предложенное пособие помогает увидеть изучаемые объекты и преодолеть трудности восприятия материала.

А.Ж. Согласен, что электронные пособия способствуют продуктивному проведению урока, но в данном случае *весь* урок прошел с применением пособия. Даже учебник ушел на второй план. Учащиеся весь урок «не отрывались» от электронной доски.

Е.Г. Я не согласна. Урок и пособие не могут существовать отдельно. Пособие дополняет урок, расширяет возможности понимания темы. А вопросы, которые задавал учитель учащимся, активизировали и направляли их деятельность. Благодаря чему и были достигнуты цели урока.

Т.Т. А будет ли пособие доступно ученикам во время выполнения домашнего задания, или дома они могут пользоваться только учебником?

Е.В. Пособие будет в свободном доступе. Наибольшую помощь оно сможет оказать учащимся, пропустившим урок. Подсветка выделенных понятий, динамика объектов и оформление пособия позволят им легче воспринять изучаемую тему. Но специально давать домашнюю работу по электронному пособию я не планирую. Ученик сам, если ему необходимо, может использовать его дома для выполнения домашнего задания (например, при работе с определением нового понятия, введенного на уроке).

Л.Д. Поговорим о содержании урока. Начнем с этапа актуализации.

Е.Г. Урок начинается так, как мы привыкли. Чертеж на доске привлекает внимание и настраивает на работу на уроке. Теорема и определение, используемые для решения задания, будут встречаться в доказательствах при первичном закреплении темы. Нет ничего лишнего, выделено только то, что непосредственно «работает» на новую тему.

В.О. Урок начинается сразу с актуализации. Она достаточно сжата и лаконична (не содержит материала, который не используется в объяснении). Но отсутствует постановка целей и задач урока, их должны поставить сами учащиеся, как прописано в требованиях обучения.

Е.В. Я не согласна с последним замечанием. Озвучивание темы урока происходит после актуализации знаний. Цель и задачу урока раньше установить невозможно. Я использую исследовательский метод обучения, а не метод проблемного изложения. На уроке мы с учащимися проверяем выдвинутую гипотезу, что проекцией прямой, не перпендикулярной к плоскости, на эту плоскость является прямая. Проводится исследование — доказательство. Учащиеся сами пробуют построить угол между прямой и плоскостью, зная только определение, — это практическая работа, «открытие» новых знаний. Хочу отметить, что и без представления целей и задач урока рассматриваемую тему считаю раскрытой.

А.Ж. На уроке отсутствует системно-деятельностный подход при объяснении нового материала: учитель предлагает ученикам зачитать определение из учебника и при необходимости разъясняет смысл понятия. Думаю, что лучше было бы организовать работу, направленную на «открытие» новых знаний самими учениками, и предложить им самостоятельно сформулировать определение угла между прямой и плоскостью.

В.О. Я не согласна с Александром. Новый материал учитель вводит сам (определение проекции точки). Затем учащиеся по наводящим вопросам учителя доказывают выдвинутую гипотезу: проекцией прямой на плоскость является прямая. Определение прочитано по учебнику, но практическая работа на построение угла между прямой и плоскостью проводится учащимися самостоятельно, здесь они и открывают новые знания.

Л.Д. Чтобы поставить проблему изучения нового материала на данном уроке, я бы предложила учащимся (еще до формулирования определения угла между прямой и плоскостью) попробовать «сконструировать» угол между прямой и плоскостью. Для этого можно использовать стереометрический ящик. Классу можно задать один их вопросов: «Чему равен угол между прямой и плоскостью?» или «Что можно принять за угол между прямой и плоскостью?» Учащиеся затруднятся ответить, тогда и отошлем их к определению, которое дается в учебнике. А в ходе практической работы они выполняют уже три задания: построение угла на модели, построение угла в тетрадях и запись шагов построения.

В.О. На уроке не рассмотрены частные случаи расположения наклонной и плоскости, о них стоит упомянуть. Например, если наклонная перпендикулярна плоскости, то ее проекцией на эту плоскость будет точка. Такой вывод можно попросить учащихся сформулировать самостоятельно.

Л.Д. Мы выслушали мнения по объяснению нового материала, теперь поговорим об этапе первичного закрепления. Было ли обеспечено понимание изученного материала? Как проведена работа с усвоением определения понятия? Было ли организовано применение понятия для решения геометрических задач (стандартные случаи «прямого» применения)?

А.Ж. Как мы видели на уроке, в классе есть различные категории учащихся по уровню математической подготовки. На этапе первичного закрепления при подготовке раздаточного материала можно было реализовать дифференцированный подход в обучении, например, для базового и среднего уровней оставить предложенный вариант, а мотивированных учащихся попросить найти угол между боковой гранью и диагональю многогранника.

В.О. Мне кажется, что не стоит разделять класс по уровням на этапе первичного закрепления, так как новая тема еще не освоена и не отработана. А применить дифференцируемый подход можно в домашнем задании. Здесь у ученика будет время продумать относительно новую или измененную ситуацию и самостоятельно отыскать решение поставленной проблемы (не в режиме цейтнота).

А.Ж. Плюсом работы по первичному закреплению, я считаю, является использование различных геометрических тел, которые создают опору на наглядные образы. А требование учителя обосновать ответ работает на закрепление изученных определений: проекция точки, проекция прямой, угол между прямой и плоскостью. Все это в целом обеспечивает усвоение материала.

Е.Г. Мне бы хотелось отметить, что Катя большое внимание уделяет математической речи учащихся, что прописано и в целях урока. Развитие речи вообще и математической речи в частности способствует формированию коммуникативных универсальных учебных действий, что работает на реализацию требований стандарта.

А.Ж. Мне тоже понравились диалоги учителя и учащихся по поиску плана решения и доказательства задач, это своего рода Сократовские беседы. Думаю, каждый ученик сможет ответить на наводящие вопросы учителя и таким образом придет к истине.

В.О. В домашнем задании, на мой взгляд, не следует давать задачи только по готовым чертежам, ведь в них мы не закрепляем умения «построить угол между прямой и плоскостью». Возможно, задачи по готовым чертежам можно предложить тем ученикам, которые ориентированы на изучение математики на базовом уровне. Таким образом, лучше бы дифференцировать домашнее задание, как это уже отмечалось.

А.Ж. Задания по готовым чертежам проще, чем задания, при решении которых нужно самостоятельно сделать чертеж по условию, но в любом случае они нуждаются в комментариях. И еще одно замечание — задачи однообразны.

Т.Т. Меня удивило окончание урока: не была проведена рефлексия и подведены итоги. Урок прошел, а выводы не сделаны.

Л.Д. Заканчивая обсуждение, хотелось бы отметить сильные стороны урока. Во-первых, мы наблюдали организацию различных видов деятельности учащихся. Во-вторых, наблюдали деятельность, направленную на «открытие» новых знаний под руководством учителя. В-третьих, сильной стороной урока являются диалоги. В-четвертых, учителем была проделана огромная подготовительная работа к уроку по созданию электронного пособия. Все это позволяет утверждать, что урок ориентирован на новые образовательные стандарты. Учитель постарался соблюсти основные требования к подготовке и проведению урока, соответствующего новым требованиям. Кроме того, на уроке используются современные ИКТ-технологии, что способствует развитию у учащихся интереса к предмету.

О. ГРИГОРОВА,
А. ЕВСЕЕВА,
М. ЗОТОВА,
drakosha976@yandex.ru,
г. Москва

Фото авторов

КОНСТАТИРУЮЩЕЕ ОЦЕНИВАНИЕ

В предыдущей статье (№11/2015) мы рассказали о том, как мы пришли к необходимости критериального оценивания, и отметили важность проблемы понимания учащимися системы оценивания контрольных работ, ОГЭ и ЕГЭ. Оценивание бывает формирующим и констатирующим. Основная цель формирующего оценивания — выявление текущего уровня усвоения знаний и формирование компетенций в учебном процессе. Но это мы рассмотрим в следующей статье. А сейчас поговорим о констатирующем виде оценивания, потому что именно с него мы и начали.

Цель констатирующего оценивания — выявить уровень знаний и предметных компетенций. То есть сейчас речь пойдет о том, как оценивать контрольную работу.

Все начинается с создания каталога умений по теме, то есть тема разбивается на контролирующие элементы содержания (КЭС). Продемонстрируем это на примере темы **«Линейные уравнения»** из курса алгебры 7-го класса.

№	Умение	Пример	Балл
Блок № 1. Линейные уравнения			
1	Применение свойства линейного уравнения: нахождение неизвестного множителя	$2x = 8$, $-\frac{1}{2}x = 5$	1
2	Применение свойства линейного уравнения: перенос слагаемых	$2x - 5 = x + 6$, $2x - x = 6 + 5$	1
3	Приведение подобных слагаемых	$2x - x = 6 + 5$, $x = 11$	1
4	Раскрытие скобок, перед которыми стоят знаки «+» или «–»	$-(2x+4) =$ $= 7 + (x - 3)$	1
5	Раскрытие скобок при помощи распределительного закона умножения	$4(x - 1) = -2(x + 3)$	1
Блок № 2. Решение задач с помощью линейных уравнений			
6	Выбор величины для введения переменной	Туристический маршрут длиной 125 км разбит на три части. Первая часть на 15 км длиннее, чем третья. А вторая — в два раза больше, чем первая. Какова длина каждой части маршрута?	1
7	Перевод задачи на математический язык (таблица, схема, краткая запись)		1
8	Составление математической модели (уравнения)		1
9	Решение математической модели (уравнения)		1–5
10	Нахождение ответа на поставленный вопрос к задаче		1-3
11	Выбор и запись ответа		1

На подготовительном этапе учитель составляет контрольную работу с увеличением уровня сложности от задания к заданию либо пользуется уже готовой контрольной работой. Приведем пример такой работы.

Контрольная работа

1. Решите уравнение:

а) $\frac{1}{3}x = 12$; б) $5x - 4,5 = 3x + 2,5$;

в) $2x - (6x - 5) = 45$.

2. Таня в школу сначала едет на автобусе, а потом идет пешком. Вся дорога у нее занимает 26 минут. Идет она в 3 раза дольше, чем едет на автобусе. Сколько минут она едет на автобусе?

3. В двух сараях сложено сено, причем в первом сарае сена в 3 раза больше, чем во втором. После того, как из первого сарая увезли 20 т, а во второй привезли 10 т сена, в обоих сараях сена стало поровну. Сколько всего тонн сена было в двух сараях первоначально?

4. Решите уравнение

$$7x - (x + 3) = 3(2x - 1).$$

5. Ленту длиной 48 м разрезали на три части. Первая часть на 6 м длиннее, чем вторая, а третья в 2 раза длиннее первой. Какова длина каждой части ленты?

6*. По контракту рабочим причитается по 48 франков за каждый отработанный день, а за каждый неотработанный с них взыскивается по 12 франков. Через 30 дней работы выяснилось, что работникам ничего не причитается. Сколько дней они отработали за это время?

Как мы уже писали, каждое задание разбивается по этапам выполнения и за каждый этап начисляется 1 балл. После этого составляется сводная таблица с описанием всех этапов решения по каждому заданию, подготавливаются эталоны решений для самопроверки для учеников 5–6-х классов и таблица самоанализа с ответами для учащихся 7–11-х классов.

Лист самоанализа контрольной работы

№	Умения по каталогу											Сумма баллов за задание	Задания	Ответы
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11			
1а	1											1	$\frac{1}{3}x = 12$	36
1б	1	1	1									3	$5x - 4,5 = 3x + 2,5$	3,5
1в	1	1	1	1								4	$2x - (6x - 5) = 45$	–10
2						1	1	1	2		1	6	Таня в школу сначала едет на автобусе, а потом идет пешком. Вся дорога у нее занимает 26 минут. Идет она в 3 раза дольше, чем едет на автобусе. Сколько минут она едет на автобусе?	6,5
3						1	1	1	3	1	1	8	В двух сараях сложено сено, причем в первом сарае сена в 3 раза больше, чем во втором. После того, как из первого сарая увезли 20 т, а во второй привезли 10 т сена, в обоих сараях сена стало поровну. Сколько тонн сена было в двух сараях первоначально?	60
4	1	1	1	1	1							5	Решите уравнение $7x - (x + 3) = 3(2x - 1)$	Любое число
5						1	1	1	5	2	1	11	Ленту длиной 48 м разрезали на три части. Первая часть на 6 м длиннее, чем вторая, а третья в 2 раза длиннее первой. Какова длина каждой части ленты?	7,5; 13,5; 27
6	Нестандартное задание, оценивается учителем											20	По контракту рабочим причитается по 48 франков за каждый отработанный день, а за каждый неотработанный с них взыскивается по 12 франков. Через 30 дней работы выяснилось, что работникам ничего не причитается. Сколько дней они отработали за это время?	6
	Общая сумма баллов												**Отметка**	
	Сумма баллов заданий с правильным ответом без учета № 6												**Оценка**	

На этом же этапе учитель готовит сводную таблицу со списком класса (по вертикали) и списком номеров заданий (по горизонтали), в которую входят и колонки с итоговым количеством баллов, оценкой и отметкой.

Таблица оценивания контрольной работы

	Фамилия	1			2	3	4	5	6	Сумма баллов с правильным ответом	Оценка	Сумма баллов подряд + № 6	Отметка
		а	б	в									
	Максимальный балл	1	3	4	6	8	5	11	20	38		58	
1	Иванов Б.												
2	Петрова В.												
3	Сидорова К.												

Завершая подготовительный этап, учитель готовит лист самоанализа, заполняемый учеником при самопроверке контрольной работы (см. с. 27).

На втором этапе проводится урок подготовки к контрольной работе, на котором учитель разбирает демоверсию работы и показывает таблицу с этапами начисления баллов.

Таблица подготовки к контрольной работе (демоверсия)

№	Умения по каталогу											Сумма баллов за задание	Задание
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11		
1а	1											1	$\frac{1}{5}x=10$
1б	1	1	1									3	$2x-5{,}5=7x+4{,}5$
1в	1	1	1	1								4	$3x-(5x+1)=18$
2						1	1	1	2		1	6	Таня едет на автобусе, а потом идет пешком. Вся дорога занимает 24 минуты. Идет пешком Таня в 2 раза дольше, чем едет на автобусе. Сколько минут Таня едет на автобусе?
3						1	1	1	3	1	1	8	На верхней полке книг в 5 раз больше, чем на нижней. Если с верхней полки взять 20 книг, а на нижнюю поставить 8, то на обеих полках книг станет поровну. Сколько книг было первоначально на каждой полке?
4	1	1	1	1	1							5	$10x-(4x+8)=2(8-3x)$
5						1	1	1	5	2	1	11	Туристический маршрут длиной 125 км разбит на три части. Первая часть на 15 км длиннее, чем третья. А вторая в два раза больше, чем первая. Какова длина каждой части маршрута?
6	Нестандартное задание, оценивается учителем											20	Говорят, что на вопрос о том, сколько у него учеников, древнегреческий математик Пифагор ответил так: «Половина моих учеников изучает математику, четверть изучает природу, седьмая часть проводит время в молчаливом размышлении, остальную часть составляют три девы». Сколько учеников было у Пифагора?
	Общая сумма баллов											58	

Критерии оценивания контрольной работы

***Количественная характеристика* — оценка** (считается сумма баллов только в тех заданиях, которые доведены до правильного ответа; без учета № 6)		***Качественная характеристика* — отметка** (считается сумма всех баллов вне зависимости от того, получен ли правильный ответ; № 6 учитывается)	
14–24 балла	3	14–29 баллов	Нормально
25–35 баллов	4	30–35 баллов	Почти хорошо
36–38 баллов	5	35–36 баллов	Хорошо
Оценка № 6	Ставит учитель	36–48 баллов	Почти отлично
		49–58 баллов	Отлично

В последней колонке помещена демоверсия контрольной работы, в процессе решения которой повторяется разбивка на КЭС каждого задания для того, чтобы подсчитать сумму баллов за контрольную работу. За первое задание мы получаем 1, 3 и 4 балла, за второе — 6, за третье — 8 и так далее. В контрольную работу также включено задание, которое мы назвали «заданием для продвинутых пользователей», потому что весь процесс набора баллов и прохождения уровней чем-то напоминает компьютерную игру. В демоверсии это задание не показывается, так как оно предполагает, помимо применения всех умений из каталога, нестандартный подход к решению. На уроке подготовки к контрольной работе мы только озвучиваем количество баллов, которое можно получить за решение этого задания. Критерии могут выдаваться учителем или разрабатываться совместно с детьми на этом уроке.

Урок подготовки к контрольной работе может быть проведен как фронтально, так и в групповой форме. Если выбрана групповая форма, то учитель до урока готовит консультантов в группы, и уже они прорабатывают в группах демоверсию. Учитель на таком уроке выполняет роли координатора и консультанта. Конспект такого урока мы прилагаем к статье (с. 31).

На уроке подготовки к контрольной работе, как вы, наверное, помните, учащиеся могут предложить изменения количества баллов по заданиям. Тогда учитель корректирует итоговую таблицу. Далее проводится контрольная работа в привычном для всех режиме, учитель проверяет ее и заполняет таблицу анализа контрольной работы.

Таблица анализа контрольной работы

№	Фамилия	1а	1б	1в	2	3	4	5	6	1-я сумма баллов	Оценка	2-я сумма баллов	Отметка
		1	3	4	6	8	5	11	20	38		58	
1	Иванов Б.	1	3	4	6	0	3	0	20	14	3	37	п/о
2	Петрова В.	1	3	4	2	7	2	10	–	25	4	29	н
3	Сидорова С.	1	3	4	6	8	5	11	–	38	5	38	п/п

Критерии оценивания контрольной работы

Количественная характеристика — оценка Считается 1-я сумма, баллы берутся только в тех заданиях, которые доведены до правильного ответа; без учета № 6		***Качественная характеристика — отметка*** Считается 2-я сумма, баллы берутся вне зависимости от того, получен ли правильный ответ; № 6 учитывается	
14–24 балла	3	14–29 баллов	Нормально
25–35 баллов	4	30–35 баллов	Почти хорошо
36–38 баллов	5	35–36 баллов	Хорошо
Оценка № 6	Ставит учитель	36–48 баллов	Почти отлично
		49–58 баллов	Отлично

Мы все прекрасно понимаем, что для оценки контрольной работы важно не просто набирать баллы, но и довести решение до правильного ответа. Поэтому при подведении итогов контрольной работы считается сумма баллов только в тех заданиях, которые решены правильно. Шестое задание при выставлении оценки не учитывается, что продиктовано правилами оценивания контрольной работы. Возникает вопрос: зачем тогда считать баллы за мелкие умения в номерах, если учитываются только те задания, которые решены правильно?

Мы пришли к необходимости введения второго типа оценки, которую назвали качественной характеристикой контрольной работы. Она нужна ученику в первую очередь для самооценки, потому что, только подсчитывая все баллы подряд, он может видеть, сколько умений реально смог применить. Также в качественную характеристику входят баллы за «продвинутое» задание. Появляется вторая колонка в таблице критериев, которая называется «Качественная характеристика». Чтобы их различать при проведении целеполагания, планирования и рефлексии на уроке, первую мы называем «Оценка», а вторую — «Отметка».

Отметка выставляется словами: «нормально», «почти хорошо», «хорошо», «почти отлично», «отлично». Чем полезна отметка? Например, ребенок получает за контрольную работу «2». Но при этом отметка «почти хорошо» или даже «хорошо». Это значит, что скорее всего он имеет проблемы вычислительного характера. Соответственно, он понимает, что при выполнении контрольной работы надо перепроверять свои вычисления. И наоборот, при оценке «5» можно получить отметку «хорошо», а не «отлично», что означает, что оформление решения далеко не идеально и в дальнейшем может понизить результат.

ВАЖНО! В процессе проверки ученических работ учитель не оставляет никаких пометок в их тетрадях, а ставит только итоговое количество баллов и оценку. Вся проверка работы фиксируется в таблице, потому что самым главным моментом этого этапа является урок самоанализа контрольной работы, на котором ученик проверяет свою работу по эталону и заполняет лист самоанализа, самостоятельно выставляя баллы за каждое задание и сверяя свои результаты с таблицей анализа контрольной работы, предложенной учителем. Возможно выставление оценки за проведенный самоанализ. После заполнения таблицы самоанализа ребенок подсчитывает баллы и ставит себе количественную оценку и качественную отметку. В случае несоответствия полученных баллов учительской оценке он может обратиться к педагогу с вопросом. Ученик может апеллировать свою оценку, и только после этого оценка за контрольную работу ставится в журнал.

Дальнейшая работа может происходить в разных формах. Если при проверке контрольной работы выявилась глобальная проблема по классу с тем или иным заданием, его можно разобрать на этом уроке. Или провести точечную работу в группах.

На заключительном этапе работы над темой ученик заполняет лист рефлексии.

Лист рефлексии к контрольной работе

№	Набранные баллы за умение		Качественный анализ (поставь галочку в нужной калонке)				Темы для повторной отработки (поставь галочки в нужной строке)
	максимум	реально	это просто	были затруднения, но правильный ответ получен	были затруднения, правильный ответ получен не везде	не сделал и не знаю как	
1	4	4	✓				
2	3	3	✓				
3	3	3		✓			✓
4	2	1			✓		✓
5	1	1			✓		✓
6	3	2			✓		✓
7	3	0				✓	✓
8	3	2			✓		✓
9	10	5		✓			✓
10	3	2	✓				
11	3	2	✓				

По итогам рефлексии ученик берет себе домашнее задание, чтобы по имеющимся эталонам отработать номера, в которых он допустил ошибку.

Мы не удивимся, если у читателя возник вопрос: «Ради чего требуется столько усилий для проведения одной контрольной работы?»

В соответствии с требованиями ФГОС во главу угла современного образования ставится формирование личностных компетенций учащихся. При подходе, который мы предлагаем, каждый ребенок пропускает через себя все этапы, относящиеся к контрольной работе: подготовки, проведения и анализа результатов, а значит, формируются все три вида компетенций: предметные, метапредметные и личностные.

Мы увидели, что учащимся нравятся уроки самоанализа контрольной работы. Почему это происходит? Давая ребенку роль проверяющего, мы повышаем его статус и самооценку в собственных глазах. И ребенок не отказывается от выполнения домашней работы, даже если она получилась достаточно объемной, поскольку он сам выявил и решил ликвидировать свои пробелы.

В течение учебного года уровень написания контрольных работ повышался. Мы связываем это с тем, что на этапе подготовки к контрольной работе ребенок становится соучастником процесса, четко видит структуру работы, это заставляет его ставить для себя цель набрать максимальное для своего уровня количество баллов. Получая не только количественную, но и качественную оценку работы, ребенок имеет возможность повысить свою мотивацию к учению. Слабоуспевающий ученик, даже получив «3» на пересдаче работы, четко видит повышение качества своего труда, выраженное в баллах, а это стимулирует его стремление повысить баллы до следующего уровня. Ученик с высокой мотивацией видит перспективу повышения качественной оценки до максимально возможного уровня, что заставляет его выполнять творческие задания и решать нестандартные задачи.

УРОК-ТРЕНИНГ: «СВОЙСТВО ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА С УГЛОМ 30°»

А. ЕВСЕЕВА,
г. Москва

Цель урока: каждый ученик с помощью консультантов должен научиться решать задачи второго или третьего уровня сложности.

Подготовка к уроку. Для проведения урока-тренинга необходимо заранее подготовить консультантов в группах, которые и будут работать в проектной технологии. Консультантам необходимо научиться идеально решать задачи всех трех уровней. Для этого материал им выдается заранее, решения задач разбираются под контролем учителя за день или два до проведения урока-тренинга. В группе консультантов проводится целеполагание.

Примерный результат целеполагания и планирования выглядит так.

Лист планирования

Дата работы: 27.02.2015
Тема работы: «Тренинг по теме
«Свойство катета и гипотенузы прямоугольного треугольника с углом 30°»
Цель проекта: построить лестницу успеха класса.
Распределение ролей:
руководитель — Алсу Османова,
докладчик — Алина Цусевич,
техник — Петр Акимов,
оформитель — Иван Барзенков.
Задачи работы:

1) Провести целеполагание в группе (предполагаемая цель: решить много задач по теме, выйдя на 2–3-ю ступени лестницы успеха).
2) Повторить теоремы о прямоугольном треугольнике с углом 30°.
3) Каждый должен решить все задачи первого уровня.
4) Каждый должен решить минимум одну задачу второго или третьего уровня на выбор.
5) Подвести итоги в группе, обсудить и выставить оценки.
6) Представить итог работы класса в форме плаката и презентации.
7) Подготовить и сделать доклад.
8) Заполнить карточку рефлексии.

Итоги работы класса:
2-я ступень — ________ человек — ______%;
3-я ступень — ________ человек — ______%.

Ход урока

Этап 1. Учащиеся делятся на группы по 3–4 человека.

Этап 2. В ходе беседы подвожу учащихся к формулированию темы и цели урока, представляю консультантов.

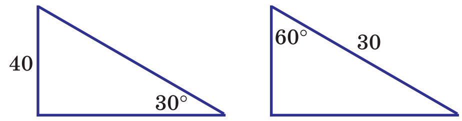
Этап 3. Консультанты собираются в отдельную группу, окончательно распределяют роли, уточняют цель и план работы, начинают готовить презентацию проекта.

Этап 4. Пока консультанты готовятся, в классе идет повторение необходимой для решения задач теории. Учащиеся отвечают на *вопросы*:

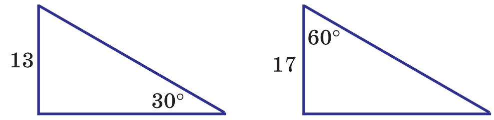
- Какой треугольник называется прямоугольным?
- Как называются стороны прямоугольного треугольника?
- Как формулируется теорема о сумме углов прямоугольного треугольника?

Уровень 1. ***Вариант 1***

1. Длину какого катета можно вычислить в треугольнике? Покажите его. Чему равна эта длина?



2. Вычислите длину гипотенузы.



Уровень 2. ***Вариант 1***

1. Один из углов прямоугольного треугольника равен 30°, а меньший катет на 9 см меньше гипотенузы. Вычислите длину гипотенузы.

2. Один из углов прямоугольного треугольника 60°, а сумма длин гипотенузы и меньшего катета равна 21 см. Вычислите длину гипотенузы.

Уровень 3. ***Вариант 1***

1. Угол, противолежащий основанию равнобедренного треугольника, равен 120°. Высота, проведенная к боковой стороне, равна 7 см. Найдите основание треугольника.

2. Из середины D стороны BC равностороннего треугольника ABC проведен перпендикуляр DM к прямой AC. Найдите AM, если $AB = 18$ см.

• Как формулируется свойство сторон прямоугольного треугольника с углом в 30°?

• Как формулируется обратная теорема?

Этап 5. Консультанты идут работать с участниками своей группы.

Обязанности консультанта в группе:

1) Проводит целеполагание.

2) Повторяет формулировку теоремы, выдает задание на построение доказательства теоремы (доказательство теоремы разрезано на части, необходимо его восстановить).

3) Озвучивает критерии оценки за решение задач.

4) Проверяет умение решать задачи первого уровня сложности.

5) Помогает, если это необходимо, решать задачи второго и третьего уровней сложности.

6) В процессе работы группы заполняют таблицы подсчета баллов (выполняется на листе формата А3).

7) Озвучивает участникам группы их оценки, выставленные в соответствии с критериями, и расставляет их фамилии и имена на лестнице успеха (выполняется на листе формата А2).

Лестница успеха группы № __

Руководитель ____________________

Ступень № 3

Ступень № 2

Ступень № 1

8) Выдает домашнее задание (это одна из нерешенных на уроке задач).

Этап 6. Консультанты идут работать по подведению итогов проекта, готовить доклад и плакат.

Этап 7. Пока консультанты готовятся, все участники групп заполняют карточки рефлексии.

Этап 8. Выступает докладчик проектной группы и сообщает, сколько учащихся класса достигло при решении задач 2-го уровня, сколько 3-го.

Этап 9. Консультанты заполняют карточку рефлексии.

Таблица подсчета баллов

Группа № ___

Руководитель-консультант __________________

Фамилия ученика	Целеполагание (0–1–2)	Теория (0–1–2)	1-й уровень (1 + 2 + 1 + 2)	2-й уровень (2 + 4)	3-й уровень (3 + 3)	Общий балл	Оценка
						Всего	

Критерии оценки: 15–16 баллов — «5»; 12–14 — «4»; 8–11 — «3»; менее 8 баллов — «2».

Карточка рефлексии участников группы

Дата урока ________________________________
Тема урока ________________________________
Номер группы ______________________________
Фамилия, имя ______________________________

Оцени свою работу на уроке. Отметь «галочкой» вариант ответа, с которым ты согласен.

1. Участвовал ли ты в постановке цели урока?

☐ Да, участвовал активно.
☐ Участвовал, но неактивно.
☐ Не участвовал.

2. Можешь ли ты доказать теорему о сторонах прямоугольного треугольника с углом 30°?

☐ Да, могу.
☐ Могу, но мне потребуется помощь.
☐ Знаю формулировку теоремы, но доказать не могу.
☐ Не знаю теорему, надо выучить.

3. Легко ли тебе далось решение задач первого уровня?

☐ Да, все получилось хорошо.
☐ Получилось, но потребовалась помощь консультанта.

4. Какой ступени при решении задач ты достиг?

☐ 3-й ступени. ☐ 2-й ступени.

5. Оцени свой вклад в работу на уроке по одному из критериев*. Отметь нужное место на линейке знаком «×».

● Тему освоил слабо, нужны дополнительные занятия.

■ Я сделал очень много, достиг 3-й ступени, уверен в себе.

6. Оцени работу консультанта твоей группы по одному из критериев*. Отметь нужное место на линейке знаком «×»

● Консультант недостаточно владеет материалом, не помогал решать задачи.

■ Консультант отлично владеет материалом, оказывал квалифицированную помощь.

* Степень удовлетворенности работой по критериям «●» и «■» показывается знаком «×»: чем ближе к кружку или квадратику ставится крестик, тем более выделяется данный критерий.

Карточка рефлексии консультанта группы

Дата урока ________________________________
Тема урока ________________________________
Номер группы ______________________________
Фамилия, имя ______________________________

Оцени свою работу на уроке. Отметь «галочкой» вариант ответа, с которым ты согласен.

1. Как проходило целеполагание в группе?

☐ Все участвовали активно.
☐ Не все члены группы были активны.
☐ Цель урока пришлось подсказать.

2. Как составляли доказательство теоремы?

☐ Быстро, сообща.
☐ Самостоятельно, но участвовали не все.
☐ Пришлось оказать помощь.

3. Как проходило решение задач первого уровня?

☐ Все участники группы решили задачи легко и быстро.
☐ Частично помогал в решении задач.
☐ Пришлось всем участникам оказывать помощь.

4. Какой ступени при решении задач достигли участники группы?

☐ Третьей ступени.
☐ Частично второй, частично третьей ступени.
☐ Второй ступени.

5. Кому из твоей группы необходимы дополнительные занятия по теме (напиши фамилии, если такие имеются)? ______________
____
____
____

6. Оцени свою работу по одному из критериев*. Отметь нужное место на линейке знаком «×».

● Я недостаточно владею материалом, не помогал решать задачи.

■ Я отлично владею материалом, оказывал квалифицированную помощь.

* Степень удовлетворенности работой по критериям «●» и «■» показывается знаком «×»: чем ближе к кружку или квадратику ставится крестик, тем более выделяется данный критерий.

О КОНСТАТИРУЮЩЕМ ОЦЕНИВАНИИ

М. ЧИБИСОВА,
г. Москва

Авторы рассказывают о констатирующем оценивании, которое, в отличие от формирующего, имеет итоговый характер. Используется оно прежде всего для подведения рубежных итогов. (Для сравнения: формирующее оценивание — это обратная связь при изучении темы, направленная на отслеживание процесса овладения компетенциями.) В педагогической практике подобное констатирующее оценивание чаще всего осуществляет учитель, а для учащихся итогом освоения темы становится оценка, выставляемая в журнал. Даже если вслед за проведением контроля следует работа над ошибками, она, как правило, просто предполагает решение неверно выполненных заданий. Ошибки исправлены, оценки получены... и каков итог?

В психологии есть известное понятие — «эффект незавершенного действия». Оно описывает хорошо знакомое нам всем явление: пока мы находимся в процессе какого-либо занятия, мы хорошо помним все его детали, этапы выполнения, последовательность шагов, но стоит нам его завершить, как все моментально забывается. Нечто подобное мы часто замечаем и в обучении: пока дети готовятся к проверочной работе или к экзамену, они владеют материалом по предмету, но после того, как все сдано и оценка получена, знаний как не бывало. Описанная в статье схема работы позволяет в некоторой степени справиться с этой проблемой.

Прежде всего, принципиально меняется сам подход к проверочной работе. И на этапе подготовки, и на этапе самоанализа в фокусе внимания авторов статьи не просто задание, а *умение*. То есть дети не столько сконцентрированы на анализе того, правильно ли выполнено задание, сколько получают возможность понять, *чему они научились*. Получается, что хотя тема вроде бы завершена, тем не менее на ее основе ставятся следующие цели: ученик может и выделить свои сильные стороны, и обозначить направления для дальнейшего роста. То есть действие не завершается, а, наоборот, продолжается!

Если же говорить о метапредметных компетенциях, то данная схема способствует развитию рефлексивных компетенций, а также компетенций, связанных с организацией и планированием работы: сначала ставится цель, а в конце происходит сопоставление достигнутых и планируемых результатов. При этом сам учитель как бы самоустраняется: дети ориентируются не на оценку учителя, а на каталог умений. Это ставит учеников в активную позицию субъектов собственного обучения. При этом учитель прекрасно обходится без навязших в зубах комментариев типа «Ты же учишься для себя», но при этом создает такую систему, которая максимально стимулирует самостоятельность.

Конечно, обращает на себя внимание большой объем подготовительной работы. Может возникнуть ощущение, что использование этой схемы излишне затратно по времени. На самом деле, здесь на конкретном примере изучения линейных уравнений изложен алгоритм работы, который при регулярном повторении значительно упростит работу педагога. К тому же форма таблиц и сам принцип оценивания переходят от темы к теме, а значит, потребуется все меньше времени для их заполнения. Так что определенные усилия, потраченные на этапе освоения технологии, с лихвой окупятся на последующих этапах. И кроме того, можно объединить свои усилия с коллегами, как это делают наши авторы. Естественно, для учеников первое время тоже потребуется дополнительное время, чтобы разобраться в критериях и таблицах, однако им это также по силам.

Фото: О. Григорова, А. Евсеева, М. Зотова

Л. ГОРИНА,
г. Михайловск, Свердловская обл.

МАТЕМАТИКА ПО ВОСТОЧНОМУ КАЛЕНДАРЮ

2016 год — год Огненной (красной) обезьяны. Предлагаю материал для проведения занятий в 5–6-х классах накануне Нового года. При проведении занятия представленный материал используется как раздаточный. Если занятие проводить не планируется, то эту информацию можно разместить на стенде и рекомендовать учащимся выполнить задания в каникулы.

Задание 1. «Знаете ли вы…» Закрасьте все четные числа.

67	11	45	87	63	24	64	22	16	34	35	89	95	13	33
15	31	29	33	12	19	23	2	57	22	71	69	71	57	39
41	37	13	51	78	25	81	76	47	62	38	17	19	79	51
55	83	49	45	90	92	53	84	59	93	18	44	91	11	99
75	77	61	15	35	10	58	62	15	21	23	74	86	49	27
93	2	73	4	53	79	33	21	27	25	55	89	12	82	65
43	6	64	8	91	75	19	37	69	47	67	31	47	56	14
18	5	16	3	44	23	55	39	40	28	36	63	37	39	50
20	8	10	6	36	14	26	48	74	60	94	10	83	87	36
41	4	27	2	43	30	38	18	96	48	44	24	76	18	45
17	2	38	4	17	31	42	10	48	46	92	74	16	87	99
45	85	41	55	83	61	68	59	65	81	24	83	97	95	89
47	97	53	85	29	69	74	73	59	75	98	85	43	93	81
49	51	95	57	88	56	34	75	77	68	26	61	91	17	23

Задание 2. «Как тебя зовут, Огненная обезьяна?»

2016 год — год Огненной (красной) обезьяны. Под это описание подходят обезьяны, изображенные на фото слева. Узнайте название вида, к которому они принадлежат, выполнив задание.

Задание. Найдите значение выражения:

5^2; 3^3; 1^7; 2^3; $2 \cdot 3^2$; 8^2; 10^3; $(2 + 4)^2$; $2^2 + 4^2$.

1 С	10 Т	6 А	27 Ш
18 Е	36 К	7 М	9 А
36 Р	16 И	8 О	25 Н
64 Г	20 У	1000 Л	30 Н

Вычеркните получившиеся числа в поле ответов. Из оставшихся букв составьте слово, которое и будет обозначать название вида обезьян, представленных на фото.

Это интересно. Эту обезьяну легко отличить от других обезьян благодаря ее шелковистой шерсти и львиной огненно-медной гриве до плеч. Большие круглые глаза темно-коричневого цвета, яркая шерсть и богатая мимика делают этих животных чрезвычайно привлекательными. Их тела имеют размер до 25 см, это без учета хвоста длиной до 37 см, а вес достигает 800 граммов. Эти обезьянки являются представителями одного из самых редких видов млекопитающих, встречающихся в природе. Только 400 особей осталось в мире, большинство из них обитает на территории заповедника в Рио-де-Жанейро (Бразилия).

К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru (Материалы на стенд и ссылки на иллюстрации.)

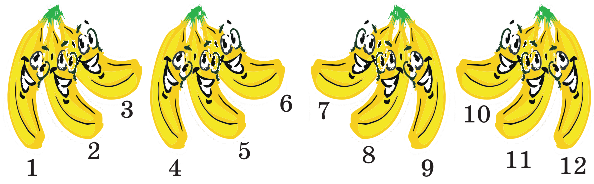
Задание 3. «Заработай бананы — покорми обезьянку!»

Вариант 1

Вычисли устно и запиши ответы.

1. $17 \cdot 3 =$
2. $75 + 85 =$
3. $42 - 22 =$
4. $87 : 3 =$
5. $104 - 86 =$
6. $129 + 71 =$
7. $25 \cdot 4 =$
8. $75 : 25 =$
9. $38 \cdot 2 =$
10. $81 - 49 =$
11. $55 + 59 =$
12. $95 : 5 =$

После сверки ответов посчитай, сколько бананов ты заработал для своей обезьянки. Раскрась те бананы, номера которых совпали с номерами верно решенных примеров, чтобы показать обезьянке, что эти бананы она может съесть.



Задание 4. «Ох, уж эти обезьяны, они…»

...играли в барабаны

Обезьяны ждут гостей и по очереди репетируют на барабанах. Первая обезьяна била в барабаны 1 ч 30 минут, вторая — на 45 минут дольше, чем первая, но на 25 минут меньше, чем третья. Сколько времени продолжалась репетиция?

...сидели на диване

Обезьяны Тото, Мими, Лулу и их хозяин Дэвид сидят на диване. Если Лулу, сидящая справа от всех, сядет между Тото и Мими, то Мими станет крайней слева. В каком порядке они сидят?

...мечтали о бананах

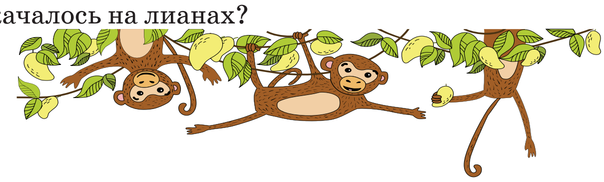
Необычный крокодил
К обезьянкам в гости плыл:
Очень много угощенья
В магазине он купил.
А они его встречали:
Три — навстречу выбегали,
Две — на пальму залезали,
Пять — залезть им не давали,
Шесть — играли вдалеке,
Пять — сидели на песке,
Семь — повисли на лианах...
Все мечтали о бананах...
Помогите крокодилу
Обезьянок сосчитать.
Чтоб бананов всем хватило,
Сколько же их нужно взять?

...собрали чемоданы

Обезьяны хотят выступать в цирке и собрали в чемоданы свои наряды. У каждой из них в комплекте: две шляпки, две кофточки и двое штанишек. Сколько разных нарядов каждая из них сможет составить из данных вещей?

...качались на лианах

Маугли похитила стая обезьян. Всего их в стае было 300. Треть стаи уговаривала Маугли стать их вожаком, 28 обезьян были против этого, 77 обезьян просто ели орехи, а пятая часть оставшихся спокойно качалась на лианах. Сколько обезьян качалось на лианах?



nejumi / Shutterstock.com

...такие хулиганы

Маугли попросил пятерых обезьян угостить его орехами. Обезьяны набрали орехов поровну и понесли Маугли. По дороге они поссорились и каждая обезьяна бросила в каждую по ореху. В результате они принесли орехов вдвое меньше, чем собрали. Сколько орехов получил Маугли?

Задание 5. «Давайте познакомимся!»

Выберите обезьяну, название которой вы хотите узнать.

Решите уравнения, в колонку рядом впишите ответы и соответствующие им буквы, взяв их из таблицы ниже, и вы получите название вида, к которому относится обезьяна, изображенная на фото. Найдите в Интернете интересные факты об этом виде обезьян.

№	«Давайте познакомимся!»	Уравнения	Ответ и соответствующая ему буква	№	«Давайте ознакомимся!»	Уравнения	Ответ и соответствующая ему буква
1		**1.** $42 : x = 21$. **2.** $39 + x = 40$. **3.** $6x = 12$. **4.** $42 - x = 21$. **5.** $27 - x = 17$. **6.** $x : 3 = 5$.		3		**1.** $28 : x = 2$. **2.** $39 - x = 38$. **3.** $5x = 60$. **4.** $x + 9 = 10$. **5.** $28 - x = 16$. **6.** $3 : x = 3$.	
2		**1.** $x + 18 = 22$. **2.** $27 - x = 17$. **3.** $52 : x = 26$. **4.** $4x = 8$. **5.** $x : 2 = 8$. **6.** $x : 5 = 3$.		4		**1.** $170 : x = 10$. **2.** $49 + x = 50$. **3.** $6x = 18$. **4.** $42 - x = 32$. **5.** $27 - x = 26$. **6.** $45 : x = 3$.	

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
А	Б	В	Г	Д	Е	Ё	Ж	З	И	Й	К	Л	М	Н	О	П
18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	
Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Я	

Указания для учителя

Задание 1. «Знаете ли вы…»

В начале занятия спросите у учащихся, знают ли они, какое животное является символом 2016 года. Предложите им получить картинку с изображением этого животного, закрасив в индивидуальных карточках все четные числа. Посоветуйте им брать для раскрашивания красные или ярко-оранжевые карандаши, при переходе к заданию 2 они поймут почему. *Ответ*:

67	11	45	87	63	24	64	22	16	34	35	89	95	13	33
15	31	29	33	12	19	23	2	57	22	71	69	71	57	39
41	37	13	51	78	25	81	76	47	62	38	17	19	79	51
55	83	49	45	90	92	53	84	59	93	18	44	91	11	99
75	77	61	15	35	10	58	62	15	21	23	74	86	49	27
93	2	73	4	53	79	33	21	27	25	55	89	12	82	65
43	6	64	8	91	75	19	37	69	47	67	31	47	56	14
18	5	16	3	44	23	55	39	40	28	36	63	37	39	50
20	8	10	6	36	14	26	48	74	60	94	10	83	87	36
41	4	27	2	43	30	38	18	96	48	44	24	76	18	45
17	2	38	4	17	31	42	10	48	46	92	74	16	87	99
45	85	41	55	83	61	68	59	65	81	24	83	97	95	89
47	97	53	85	29	69	74	73	59	75	98	85	43	93	81
49	51	95	57	88	56	34	75	77	68	26	61	91	17	23

Задание 2. «Как тебя зовут, Огненная обезьяна?»

Учитель диктует (пишет на доске или демонстрирует с помощью проектора) задание.

Учащиеся выполняют задание и вычеркивают ответы в своих карточках.

По окончании работы в карточках останутся те буквы, из которых нужно будет составить название одного из видов Огненной обезьяны. Слово малознакомое, поэтому выслушайте все версии учащихся, если среди них не будет правильного ответа, то пусть они просто прочитают название этого вида обезьян, расположив оставшиеся в таблице буквы по порядку. *Ответ*: ТАМАРИН.

~~1 С~~	10 Т	6 А	~~27 Ш~~
~~18 Е~~	~~36 К~~	7 М	9 А
36 Р	16 И	~~8 О~~	~~25 Н~~
~~64 Г~~	~~20 У~~	~~1000 Л~~	30 Н

Задание 3. «Накорми обезьянку» — устный счет с элементами раскрашивания.

Карточки для устного счета представлены в двух вариантах. Примеры в них разные, а ответы одинаковые. Это сделано для того, чтобы быстро провести сверку ответов. Ответы можно продиктовать или показать с помощью проектора.

Примеры в вариантах разные, но ответы по вариантам полностью совпадают.

1. 51. **2.** 160. **3.** 20. **4.** 29. **5.** 18. **6.** 200. **7.** 100. **8.** 3. **9.** 76. **10.** 32. **11.** 114. **12.** 19.

Задание 4. «Ох, уж эти обьезьяны, они…» — блок занимательных задач, содержание которых посвящено обезьянам.

Задание 5. «Давайте познакомимся!» — математические задания для знакомства с интересными названиями видов обезьян.

Работу с этими заданиями можно организовать и с классом, а можно разместить на стенде. Задания легкие, чтобы не отбить у учащихся желание их решить и получить интересную информацию для расширения кругозора. Предполагается, что каждый ученик выберет одно-два задания и будет с ними работать, а потом можно провести общее обсуждение.

А. СГИБНЕВ,
flexus@mail.ru,
г. Москва

ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ ПРИЕМЫ

Фото: О. Григорова

Учимся записывать условия

Не секрет, что школьники 7–8-х классов невнимательно читают задачи по геометрии и плохо умеют записывать их условия. Для развития этих навыков можно проделать такие упражнения.

Двое за партой получают роли: у одного листок бумаги с условием задачи, у другого чистый лист. Они могут разговаривать, но им нельзя показывать друг другу свои листы. Задание: записать на чистом листе *«Дано»* к задаче и сделать чертеж.

Потом листочки собирают, выдается новая задача, а ученики меняются ролями. После этого обоим ученикам выдают *«Дано»* с чертежом, которое они записали к первой задаче. Им надо ее решить.

В первом задании школьники учатся вычленять важные моменты в условии. Во втором — проверяют, хорошо ли смогли это сделать.

Эту форму работы придумала Н.М. Нетрусова (школа-интернат «Интеллектуал», г. Москва).

Как задавать домашние задания

Домашние задания надо задавать с ясной целью: зачем дается каждое задание (отработка навыка, проверка знаний, текст для обсуждения, проблема, подводящая к новой теме, и т.д.), что именно отрабатывается, проверяется и т.д. в каждом задании.

- Надо оперативно проверять (чтобы не накапливались ошибки), оценивать, обсуждать; дети должны понимать, что проверка нужна для дела, а не «для галочки».
- Должны быть ясные критерии — какая оценка за какой объем работы ставится.
- Надо оценивать время выполнения домашнего задания учеником (обычно оно равно времени выполнения задания учителем, увеличенному в 2 раза для старших классов и в 3 — для средних) и договариваться об общих нормах (2,5 ч в неделю в 5–7-х классах, 3 ч в 8–9-х классах и 3,5 ч в старшей школе!).
- Полезно при получении задания обсудить с учащимися способ его выполнения, чтобы не тратить время на «ложные ходы» и избежать типичных ошибок.
- Хорошо давать даже в рамках одной группы и одного материала разноуровневые домашние задания (каждому по силам).
- Некоторым учителям и ученикам нравятся открытые домашние задания, в которых дано заведомо больше, чем нужно на «отлично». Они увеличивают вариативность. Однако возможно, что открытые домашние задания «давят» на старательного школьника, который стремится сделать все; если это так, то дополнительные задания лучше предлагать индивидуально и не на оценку, а «для удовольствия».

• Задания часто можно оптимизировать по времени выполнения: не переписывать весь текст, а только слова с пропущенными буквами, задавать вопросы перед чтением текста, а не после и т.д.

• Школьникам интересно не получать готовую информацию, а самим находить ее. Чтобы заинтересовать получением ответа, нужно поставить интригующий вопрос.

• При отборе материала полезно помнить о таком подходе: лучше решить одну задачу пятью способами, чем пять задач одним; лучше подробно изучить один роман автора и на его примере хорошо понять приемы и художественные особенности, чем поверхностно изучить все творчество.

• Если материал нового урока зависит от того, справились ли дети с домашним заданием, учителю полезно заранее понять, что он будет делать, если они не справятся.

Это тезисы обсуждений с методического семинара по домашним заданиям в школе-интернате «Интеллектуал».

Самостоятельная «Найди ошибки»

Во многих темах есть ошибки, которые школьники допускают всегда. Полезно заранее о них предупреждать. Но и в конце темы, и при подготовке к контрольной работе полезно собрать примеры с типичными ошибками учеников. Получается своеобразная самостоятельная работа: даны решения задач, надо их проверить и исправить ошибки. Школьники с удовольствием берут красную ручку, перечеркивают, удивляются, какой глупый человек писал, ставят двойки... Потом полезно обсудить, кто какие ошибки нашел.

Рисуем по памяти

Школьники не умеют рисовать и представлять, особенно если фигуры сложные. Поможет этой беде такое упражнение (предложил А.К. Ковальджи).

На закрытой доске учитель рисует сложный объект (куб с вырезанным кубиком, лист Мебиуса, тор, треугольник Пенроуза и т.д.). Потом доска открывается на 30 секунд — можно только смотреть и запоминать, рисовать нельзя. Доска закрывается, школьники пытаются нарисовать в тетрадях предложенный объект, показывают учителю. Те, кто справился, помогают проверять других. Через некоторое время можно еще раз на 30 секунд открыть рисунок и дать вторую попытку.

Увлекает, разнообразит занятие; тренирует зрительную память и развивает умение изображать относительно сложные объекты.

Как быстро проверить домашнюю работу

Чем быстрее будет проверена домашняя работа, тем лучше: ошибки не накапливаются, школьник не привыкает к неправильным действиям, лучше понимает новый материал. Идеально — проверять домашние задания прямо в начале урока.

Как это сделать?

С сознательными старшеклассниками бывает достаточно быстро сравнить ответы к задачам и обсудить возникшие в процессе выполнения вопросы.

Со школьниками помладше можно делать так: в начале урока дается самостоятельная работа на 5–15 минут, домашние тетради в раскрытом виде лежат при этом на столах, а учитель проходит и быстро смотрит. Сразу же выявляются те, кто не выполнил домашнего задания. Про выявленные ошибки можно сразу сказать ученику. Если у многих одна и та же ошибка — можно после самостоятельной работы обсудить ее коллективно. Это хороший способ проверки небольшого по объему домашнего задания. Тетради со сложными ошибками можно отложить и проверить после урока.

Тетради с самостоятельной работой после ее окончания можно собрать, а можно устроить самопроверку, сравнив ответы с ответами того, кто решил быстрее всех и успел написать их на доске.

Складываем углы

Как быстро научить школьников складывать величины углов в градусах, минутах и секундах? Обычная ошибка: по привычке думают, что в одном градусе сто минут, как в десятичной системе. Можно дать сначала несколько примеров на сложение отрезков времени, а потом на сложение величин углов, желательно, чтобы они были аналогичными:

5 ч 3 мин. 15 с + 2 ч 22 мин. 48 с = 7 ч 26 мин. 3 с;
$5^\circ\ 3'\ 15'' + 2^\circ\ 22'\ 48'' = ?$

Решение по цепочке

Как добиться, чтобы школьники следили за решением разбираемой задачи? Ведь если рассказывает решение один, то остальные часто отвлекаются.

Можно делать разбор по цепочке: один начинает решение, потом учитель просит продолжить другого и так далее. Чтобы продолжить, надо следить за происходящим. Особенно удобно это делать при разборе задач, где есть естественное деление на шаги. Например, в задачах на алгоритм: «Так, а если вторая монетка оказалась тяжелее, что мы делаем? Петя!» Или в задачах на построение сечений (или построение циркулем и линейкой): каждый новый ученик выходит к доске и проводит очередную линию.

И. ВЫСОЦКИЙ,
i_r_vysotsky@hotmail.com,
г. Москва

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

В апреле 2015 года через информационную систему Статград школам впервые предлагалась контрольная работа по теории вероятностей для 10-х классов. Работа содержала 7 заданий (всего 10 пунктов) и была рассчитана на один урок.

Демонстрационный вариант работы был доступен на сайте Статграда и на сайте Лаборатории теории вероятностей на протяжении месяца перед работой. Верное выполнение каждого пункта оценивалось в 1 балл. Была рекомендована схема перевода первичного балла в отметку по пятибалльной шкале:

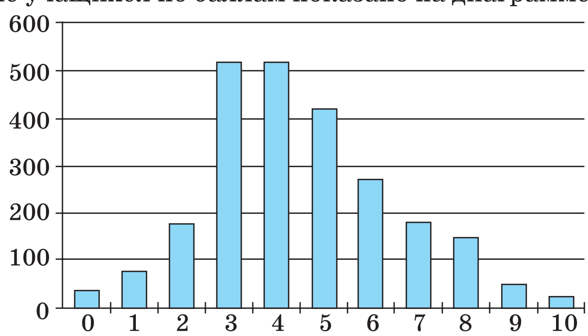
0–2 балла — «неудовлетворительно»;
3–4 балла — «удовлетворительно»;
5–7 баллов — «хорошо»;
8–10 баллов — «отлично».

Работа предлагалась на одном уровне требований. Охват материала был значительным — от простейших задач на поиск вероятностей в классическом эксперименте с монетой до заданий на условную вероятность и свойства распределений случайных величин. Все задачи были типовыми и не должны были вызвать проблем у учащихся, изучавших соответствующие темы. Однако во многих школах преподавание теории вероятностей в старших классах сводится к решению узкого набора однообразных задач ЕГЭ. По этой причине работу в целом можно было охарактеризовать как сложную.

Работу писали 2412 учащихся из 97 школ в 5 регионах России.

Анализ работы показал, что десятиклассники плохо справляются с первым заданием, хотя, казалось бы, оно не должно вызвать никаких трудностей. Вероятно, это связано с тем, что многие учителя натаскивают школьников на вероятностные задачи ЕГЭ и при этом мало внимания обращают на простейшие классические эксперименты с монетами или кубиками.

Только три образовательных учреждения отметили темы, связанные со случайными величинами и условной вероятностью как неизученные. На самом деле таких школ, конечно, больше. Распределение учащихся по баллам показано на диаграмме.



Средний балл: 4,51 (из 10). Медиана: 4. Стандартное отклонение: 1,92

К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru (Вариант 2.)

Хорошо заметен «скачок» на границе 2–3 балла, то есть при переходе к школьной тройке. Менее выражен скачок на границе 7–8 баллов и почти не наблюдается тенденции к завышению отметки на границе «тройка–четверка» (4–5 баллов). Для устранения искажений, связанных с «натягиванием», была проведена коррекция распределения. Оценка доли завышенных отметок на границе 2–3 балла — около 5,8%, на границе 7–8 баллов — около 2,8%. При этом средний первичный балл 4,51 практически не изменился, поэтому его можно считать надежным показателем выполнения работы в целом.

В будущем учебном году планируется провести аналогичную работу на двух уровнях — базовом и углубленном. Аналогичный переход к двум уровням планируется и в московских городских контрольных работах для 7-х и 8-х классов.

Тематическая диагностическая работа по теории вероятностей и статистике

Вариант 1

Для заданий 1–4 запишите только ответ. Для заданий 5–7 запишите полное решение и ответ.

1. Игральную кость подбрасывают дважды. Найдите вероятность того, что оба раза выпало меньше 4 очков.

2. В соревнованиях по толканию ядра участвуют 4 спортсмена из Финляндии, 7 спортсменов из Дании, 9 — из Швеции и 5 — из Норвегии. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсмен, выступающий последним, окажется из Швеции.

3. В люстру ввернули две новые совершенно одинаковые лампочки. Вероятность того, что в течение первого месяца службы лампочка перегорит, для обеих лампочек одна и та же. Перегореть лампочки могут независимо друг от друга. Известно, что вероятность того, что к концу первого месяца обе лампочки будут исправны, равна 0,81. Найдите вероятность того, что в течение первого месяца обе лампочки перегорят.

4. В некотором месте плохая мобильная связь Известно, что, находясь в этом месте, вероятность успешно отправить смс равна 0,9. Какова вероятность того, что из четырех смс три окажутся отправленными, а одну отправить не удастся?

5. На уроке физкультуры школьники тренировались в прыжках в длину. В таблице даны длины прыжков (в см) одного из школьников. Среднее арифметическое результатов равно 151,8 см.

Попытка	Результат (см)	Попытка	Результат (см)
1	51	6	225
2	232	7	49
3	227	8	226
4	227	9	210
5	223		

а) Найдите медиану, а также наибольшее и наименьшее значение результатов.

б) Какая из четырех мер (среднее арифметическое, медиана, наибольшее и наименьшее) лучше подходит для описания наивысшего достижения этого школьника? Какая величина лучше подходит для описания типичного прыжка? Обоснуйте свой ответ.

6. В конце некоторой игры Андрей имеет две попытки, чтобы, бросая монету, выбросить орла. Если оба раза выпадает решка, то Андрей проигрывает. Известно, что Андрей выиграл. Найдите вероятность того, что Андрею пришлось подбрасывать монету дважды.

7. Случайные величины X и Y независимы и имеют следующие распределения:

$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0,5 & p & 0,3 \end{pmatrix}, \quad Y \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}.$$

а) Найдите неизвестную вероятность p.

б) Чему равно математическое ожидание случайной величины X?

в) Найдите распределение случайной величины $Z = X + Y$.

Ответы, решения, критерии оценивания

Ответы к заданиям 1–4

№ задания	Ответ
1	0,25
2	0,36
3	0,01
4	0,2916

Решения и ответы к заданиям 5–7

5. а) Расположим значения результатов чисел в порядке возрастания:

49, 51, 210, 223, 225, 226, 227, 227, 232.

Медианой является пятое число в этом ряду: 225.

б) Чем дальше прыгнул спортсмен, тем лучше. Поэтому лучший результат — это наибольший результат. Наибольшее и наименьшее показывают наилучший и наихудший результаты. Из-за двух неудачных прыжков (49 см и 51 см) среднее арифметическое оказалось намного меньше, чем большая часть результатов. Медиана 225 см находится в наиболее многочисленной группе результатов, поэтому она и показывает типичный результат.

Ответ: а) 225 см.

Содержание критерия	Баллы
Найдена медиана и имеется разумное рассуждение в пункте «б»	2
Найдена медиана, рассуждение в пункте «б» неверно, отсутствует или не имеет отношения к вопросу	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

6. Введем обозначения событий: A — «Андрей бросал два раза» и B — «Андрей выиграл». Нужно найти условную вероятность $P(A|B)$:

$$P(A\,|\,B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}.$$

Событие B «Андрей выиграл» является объединением двух событий: B_1 — «Андрей выбросил орла в первый раз» и B_2 — «Андрей в первый раз выбросил решку, а во второй раз — орла». Эти события несовместны, а их вероятности равны:

$$P(B_1)=0{,}5 \text{ и } P(B_2)=0{,}25,$$

поэтому $P(B)=0{,}75$. Событие $A\cap B$ состоит в том, что Андрей в первый раз выбросил решку, а во второй — орла, поэтому совпадает с событием B_2:

$$P(A\cap B)=P(B_2)=0{,}25.$$

Подставим найденные значения:

$$P(A\,|\,B)=\frac{0{,}25}{0{,}75}=\frac{1}{3}.$$

Ответ: $\frac{1}{3}$.

Примечание. Задачу можно решить с помощью графа или перечисления благоприятствующих равновозможных исходов эксперимента.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	1

7. а) Сумма вероятностей в распределении равна 1. Следовательно,

$$p=1-0{,}5-0{,}3=0{,}2.$$

б) Математическое ожидание $E[X]$ можно найти по формуле, зная распределение:

$$E[X]=-1\cdot 0{,}5+0\cdot 0{,}2+3\cdot 0{,}3=0{,}4.$$

в) По условию величины X и Y независимы. Поэтому значение одной не влияет на вероятность появления любого значения другой величины, а вероятность каждой пары $X=a$, $Y=b$ равна произведению соответствующих вероятностей. Получаем:

$$Z\sim\begin{pmatrix} -1+1 & -1+2 & 0+1 & 0+2 & 3+1 & 3+2 \\ 0{,}5\cdot 0{,}4 & 0{,}5\cdot 0{,}6 & 0{,}2\cdot 0{,}4 & 0{,}2\cdot 0{,}6 & 0{,}3\cdot 0{,}4 & 0{,}3\cdot 0{,}6 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}08 & 0{,}12 & 0{,}12 & 0{,}18 \end{pmatrix}.$$

Значение 1 в получившейся таблице записано дважды. Запишем его один раз, сложив соответствующие вероятности:

$$Z\sim\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0{,}2 & 0{,}38 & 0{,}12 & 0{,}12 & 0{,}18 \end{pmatrix}.$$

Для самопроверки полезно убедиться, что сумма всех найденных вероятностей равна 1.

Ответ: а) $p=0{,}2$; б) $E[X]=0{,}4$; в) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0{,}2 & 0{,}38 & 0{,}12 & 0{,}12 & 0{,}18 \end{pmatrix}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы во всех трех пунктах «а»–«в»	3
Верно решены два из трех пунктов «а»–«в»	2
Верно решен только один из пунктов «а», «б» или «в»	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

ФОТО НА КОНКУРС

Поздравляем победителя фотоконкурса «Лето – осень-2015»!

Им стала Егорова Лариса Геннадьевна, учитель математики и физики Еметкинской СОШ Козловского района Чувашской Республики за фото «Навеки с математикой» (№ 7–8).

О. БАГИШОВА,
bagishova1032@yandex.ru
г. Москва

БАНКОВСКИЕ ПЛАТЕЖИ

Начиная с этого года во второй части ЕГЭ появился новый тип задач — задачи с экономическим содержанием. Одним из возможных сюжетов является задача о возврате кредита при помощи дифференцированных платежей. В этом случае заемщик возвращает некоторую постоянную часть долга и уплачивает проценты на оставшуюся часть долга. Поскольку вторая составляющая платежа зависит от остатка, а он все время уменьшается, то и величина вносимого платежа со временем уменьшается.

Альтернативой этой схеме погашения кредита является схема с равными платежами. Значит, первое, чему мы должны научить школьников, — это разобраться в условии задачи: какой сюжет нам попался. А затем научиться решать задачу с тем или иным сюжетом.

На ЕГЭ-2015 был предложен вариант с дифференцированными платежами. Разберемся, как решается такая задача.

Задача. 15 мая планируется взять кредит в банке в размере 8 млн рублей. Условия его возврата таковы:

– 1 января на имеющуюся сумму задолженности начисляется 10%;

– с февраля по апрель необходимо выплатить часть долга;

– выплаты подбираются таким образом, чтобы основная часть долга уменьшалась на одну и ту же сумму.

Найдите общую сумму выплат банку, если известно, что самый большой платеж составил 2,4 млн рублей.

Ответ: 10,4 млн руб.

Решение.

Способ I. Поскольку проценты начисляются на оставшуюся часть основного долга, то они постепенно уменьшаются, а погашение основного долга идет равными суммами. Значит, самый большой платеж — это первый платеж. И он равен 2,4 млн рублей.

Найдем, на сколько ежегодно уменьшается основной долг.

1-й год:

$8 \cdot 1{,}1 = 8{,}8$ — долг после первого начисления процентов;

$8{,}8 - 2{,}4 = 6{,}4$ — долг после первого погашения;

$8 - 6{,}4 = 1{,}6$ — сумма, на которую ежегодно будет уменьшаться долг.

2-й год:

$6{,}4 - 1{,}6 = 4{,}8$ — долг после 2-го погашения;

$6{,}4 \cdot 0{,}1 = 0{,}64$ — размер процентов, начисленных на остаток 6,4;

$1{,}6 + 1{,}44 = 2{,}24$ — размер 2-й выплаты.

3-й год:

$4{,}8 - 1{,}6 = 3{,}2$ — долг после 3-го погашения;

$4{,}8 \cdot 0{,}1 = 0{,}48$ — размер процентов, начисленных на остаток 4,8;

$1{,}6 + 0{,}48 = 2{,}08$ — размер 3-й выплаты.

К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru (Задачи для самостоятельного решения.)

4-й год:

$3{,}2 - 1{,}6 = 1{,}6$ — долг после 4-го погашения;

$3{,}2 \cdot 0{,}1 = 0{,}32$ — размер процентов, начисленных на остаток 3,2;

$1{,}6 + 0{,}32 = 1{,}92$ — размер 4-й выплаты.

5-й год:

$1{,}6 - 1{,}6 = 0$ — долг после 5-го погашения. Это означает, что кредит был погашен за 5 лет;

$1{,}6 \cdot 0{,}1 = 0{,}16$ — размер процентов, начисленных на остаток 1,6;

$1{,}6 + 0{,}16 = 1{,}76$ — размер 5-й выплаты.

Общая сумма выплат составила:

$2{,}4 + 2{,}24 + 2{,}08 + 1{,}92 + 1{,}76 = 10{,}4$ млн рублей.

Способ II. Так как долг уменьшается на одну и ту же величину — назовем ее const $= c$. По условию, каждый год нужно погашать начисленный процент и выплачивать c.

Максимальный годовой платеж был в первый год, так как в первый год сумма, начисленная за счет процентов, была максимальной. То есть:

$8 \cdot 0{,}1 + c = 2{,}4$; $0{,}8 + c = 2{,}4$; $c = 1{,}6$.

Значит, долг должен быть выплачен за $8 : c = 8 : 1{,}6 = 5$ лет.

1-й год: $8 \cdot 0{,}1 + c$;

2-й год: $(8 - c) \cdot 0{,}1 + c$;

3-й год: $(8 - 2c) \cdot 0{,}1 + c$;

4-й год: $(8 - 3c) \cdot 0{,}1 + c$;

5-й год: $(8 - 4c) \cdot 0{,}1 + c$.

Сумма выплат составит:

$$5 \cdot 8 \cdot 0{,}1 - 0{,}1(c + 2c + 3c + 4c) + 5c = 4 - 0{,}1 \cdot 10c + 5c = 4 + 4c = 4 + 4 \cdot 1{,}6 = 4 + 6{,}4 = 10{,}4 \text{ млн рублей.}$$

Способ III. Пусть выплаты продолжались n лет.

Долг уменьшался на одну и ту же величину, то есть на $\frac{8}{n}$ млн руб. в год.

Составим таблицу выплат, остатков долга и начислений процентов на оставшуюся сумму.

Год	Выплата основного долга	Остаток	Проценты, начисленные на остаток
0	0	$8-\frac{8\cdot 0}{n}$	$\left(8-\frac{8\cdot 0}{n}\right)\cdot 0{,}1$
1-й	$\frac{8}{n}$	$8-\frac{8\cdot 1}{n}$	$\left(8-\frac{8\cdot 1}{n}\right)\cdot 0{,}1$
…	…	…	…
$(n-1)$-й	$\frac{8}{n}$	$8-\frac{8\cdot(n-1)}{n}$	$\left(8-\frac{8\cdot(n-1)}{n}\right)\cdot 0{,}1$
n-й	$\frac{8}{n}$	$8-\frac{8\cdot n}{n}$	0

Если сложить все числа, стоящие в правом столбце, то мы получим величину переплаты:

$$\left(8-\frac{8\cdot 0}{n}\right)\cdot 0{,}1+\left(8-\frac{8\cdot 1}{n}\right)\cdot 0{,}1+\left(8-\frac{8\cdot 2}{n}\right)\cdot 0{,}1+\ldots+$$

$$+\left(8-\frac{8\cdot(n-1)}{n}\right)\cdot 0{,}1=0{,}8\cdot\left(n-\frac{1}{n}\cdot\frac{0+(n-1)}{2}\cdot n\right)=$$

$$=0{,}8\cdot\left(n-\frac{n-1}{2}\right)=0{,}8\cdot\frac{n+1}{2}=0{,}4(n+1).$$

А общая сумма выплат состоит из возврата долга (то есть 8 млн руб.) и оплаты процентов размером $0{,}4(n + 1)$ млн руб. Итого:

$8 + 0{,}4(n + 1) = 8{,}4 + 0{,}4n$ млн рублей.

Если вспомнить, что наибольшая выплата была 2,4 млн рублей и это была самая первая выплата, то можно получить, что $n = 5$.

Тогда сумма выплат составит:

$8{,}4 + 0{,}4 \cdot 5 = 10{,}4$ млн рублей.

Полезные выводы. Если сумма, взятая в банке, равна S млн рублей, а проценты обозначить r, то переплата за n лет составит $\frac{Sr(n+1)}{2}$ млн рублей.

Общая сумма выплат составит $S+\frac{Sr(n+1)}{2}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Для покупки садового домика был взят кредит в размере 600 000 руб. под 14% годовых. Ежегодно на оставшуюся для погашения сумму начисляется банковский процент, после чего заемщик вносит некоторую сумму. Размер ежегодного платежа подбирается таким образом, чтобы долг банку уменьшался на одну и ту же сумму. Известно, что первый платеж составил 184 000 рублей.

а) Определите, в течение скольких лет кредит был полностью выплачен.

б) Найдите сумму переплаты за весь срок кредитования.

в) Найдите общую сумму выплат банку.

2. Для покупки туристической путевки семья взяла в банке кредит на полгода в размере 120 000 руб. Каждый месяц оставшаяся для погашения сумма возрастает на r%, после чего семья вносит свой платеж. Размер ежемесячного платежа подбирается таким образом, чтобы долг банку уменьшался на одну и ту же сумму. Определите, под какой процент был взят кредит, если известно, что первый платеж составил 41 600 рублей.

3. Семья Петровых взяла в банке ипотечный кредит на сумму 8400 тыс. рублей под 12% годовых на 21 год. Каждый год оставшаяся для погашения сумма возрастает на 12%, после чего семья вносит свой платеж. Размер ежемесячного платежа подбирается таким образом, чтобы долг банку уменьшался на одну и ту же сумму. Какую сумму переплатит семья за квартиру, когда полностью выплатит банку кредит.

ФЕЛЬДФЕБЕЛИ В ВОЛЬТЕРАХ

А. ЗЕЛИЧЁНОК,
г. Казань

В наш лицей должна прийти проверка. Пугают, что из Рособрнадзора. Всех уже предупредили: работать будут с бумагами — так чтобы комар носа... Никого из гостей не интересует уровень нашей работы, глубина, на которой преподается предмет — проверять будут лишь соответствие рабочих программ так называемому локальному акту (принятому на уровне школы документу, в котором описаны требования к оформлению рабочей программы), а также, вероятно, соответствие записей в электронном журнале рабочим программам. Иначе говоря, комиссию интересует исключительно внешний вид оных программ. И в случае несоответствия локальному акту обещан штраф в 30 тысяч. То есть конкретно предупреждают: если у вас не то расстояние между строчками, или слова на титульном листе не в том порядке, или документ набран не в том формате — заплатите 30 000. Штраф просто драконовский, для многих — две зарплаты.

А ведь выполнить формальные требования не так уж легко (особенно с учетом того, что локальный акт составляется единый, на все предметы сразу, и специфики каждого не может учитывать). Вот, к примеру, графа «Домашнее задание» заполняется сразу на весь год. В случае гуманитарных предметов беда небольшая — достаточно указать номер параграфа, соответствующего изучаемой на уроке теме. Но вот с математикой (физикой, химией) все намного сложнее. Программа едина для параллели, а уровни классов разные, и задание на дом должно учитывать это. Кроме того, учителя используют один учебник, но различные задачники (по крайней мере, так делают в хорошей школе, в частности, в физико-математических лицеях). Что делать с этим? Унифицировать? Но дело лишь проиграет от того, что преподаватель без нужды и без пользы будет ограничен в выборе подходящего инструментария. «Естественная» же идея заполнить нужную графу чисто формально тоже, увы, не годится: в электронный журнал придется вносить или реальные задания (и тогда тот же Рособрнадзор оштрафует за несоответствие электронного журнала рабочей программе), или «правильное» задание (но тогда другие комиссии накажут за то, что в журнале — одно, а в тетрадях школьников — совсем другое).

Наш лицей исключил из локального акта графу «Домашнее задание». На свой страх и риск. В ряде других школ сделали то же. Посмотрим, что выйдет...

Если сформулировать вывод коротко, то он прост. Рабочие программы, в которых расписываются изучаемые темы на год вперед, — изобретение более чем странное, а графа «Домашнее задание» — злостная глупость, измышление чиновных мечтателей, оторванных от реального учебного процесса. На деле эти программы используют лишь как ориентир (рискуя при каждой проверке нарваться на чиновного самодура). Как говаривал один мой коллега: «Я могу расписать уроки на год вперед. Но если еще и соблюдать это буду, то работать стану, конечно, намного хуже».

Учебные часы должны быть распределены по темам, но не по урокам. Удобное для проверяющих и карающих, но бессмысленное (значит — вредное) сверхточное планирование отнимает массу времени у тех, кто составляет рабочие программы (и ведь все равно распределяем уроки «на глазок»), а на практике лишь мешает учителям работать.

И хотя ситуация с рабочими программами важна, но это частная проблема. Главный вопрос — в другом. Почему учителя связывают по рукам и ногам, лишают свободы творчества, угрожают штрафами, вообще ведут себя с ним как унтер Пришибеев? Почему педагогов стремятся запугать и сломать? Некий генерал сулил нам фельдфебелей в Вольтеры. Свершилось. Но кого может воспитать трясущийся от страха человек? Необходимую для развития страны свободную, критически мыслящую личность, способную анализировать действительность и принимать самостоятельные решения? Вряд ли.

Фото снежинок на рекламном плакате российского фотохудожника А.А. Сигсона, рубеж XIX—XX вв.

Первым из российских фотографов стал снимать снежинки фотохудожник из Рыбинска А.А. Сигсон; всего им сфотографировано около 200 их форм. Для получения снимка снежинка ловилась на редкую сетку из шелковинок, затем помещалась под микроскоп при увеличении от 15 до 24 раз. Микрофотографии Сигсона имели большой успех на IV Фотографической выставке в Санкт-Петербурге в 1894 г., Всероссийской выставке в Нижнем Новгороде в 1896 г., Парижской всемирной выставке 1900 г. (золотая медаль). Сигсон получал заказы из университетов Германии, Франции, Англии, Италии и Испании, его фотографии снежинок имели Киевский, Санкт-Петербургский и Московский университеты. В 2012 г. в Рыбинске планировали создать аллею Сигсона: установить шесть бронзовых снежинок диаметром около метра на набережной Волги. Интересно, реализован ли этот план? Ждем информацию от коллег из Рыбинска.

КОНКУРС «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ»

Организация конкурса. В сентябре – декабре 2015 года проходит второй тур конкурса «Математический потенциал». В туре четыре этапа, на каждом этапе — одно задание.

Участники конкурса. В конкурсе могут принять участие, начиная с любого этапа, коллективы учащихся (класс, кружок), группы учащихся разного возраста или отдельные ученики 5–10-х классов. Все участники, как коллективные, так и индивидуальные, должны иметь руководителя из числа учителей математики или преподавателей кружка. Задача руководителя: оказывать участнику организационную помощь в работе, в оформлении и отправке ее результатов.

Лауреаты и победитель конкурса. Участник, выполнивший хотя бы одно задание, будет объявлен лауреатом конкурса, а участник, выполнивший наибольшее число заданий, — победителем.

Тематика тура. В этом туре предлагается выполнение проекта под названием «Оформляем кабинет математики». Как можно узнать, что ты входишь в кабинет математики? По таблицам с математическими формулами на стене, по моделям многогранников в шкафу, по чертежным инструментам у доски. Но со временем все это требует обновления и нового взгляда. Это и есть цель проекта.

Куда отправлять работы. Почтовое отправление с пометкой на конверте «Математический потенциал» следует выслать по адресу: редакция журнала «Математика», Издательский дом «Первое сентября», ул. Киевская, д. 24, Москва, 121165.

Электронное письмо направляйте на электронный адрес: mat@1september.ru, написав «Математический потенциал. Задание: Снежинки» в поле «Тема».

Сроки. Продолжительность тура: с 1 сентября по 31 декабря 2015 года.

Последний срок отправки работ любого этапа — до 1 февраля 2016 года (по почтовому штемпелю).

Задание 4. «Снежинки». Прошло уже более 400 лет с того чудесного зимнего дня, когда великий Иоганн Кеплер обратил внимание на форму падавших с неба снежинок. Именно он заметил, что они имеют форму правильного шестиугольника. Дело кончилось трактатом. И хотя ученый придал ему шуточную нотку, исследование имело различные продолжения, так как автору удалось сформулировать целый ряд интересных гипотез. С тех пор многие ученые, как физики, так и математики, среди которых упомянем лишь Рене Декарта, уже всерьез обращали свои взоры на столь необычный объект исследования. Снежинки зарисовывали, фотографировали, описывали их структуру, классифицировали, выращивали искусственным пу-

К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru (Заявка участника.)

тем. Совсем недавно установили, что центром кристаллизации являются не частички водяного пара, как полагали ранее, а микроорганизмы. Но началось все с математики, с изучения симметрии.

Сейчас к снежинке часто обращаются дизайнеры. Чем не объект для украшения кабинета математики к Новому году. Предлагаем вам создать свою коллекцию снежинок. Из чего их можно сделать? Интернет подсказывает, что не только вырезать из бумаги, но и связать крючком или сплести из бисера. Это занятия для девочек. А что для мальчиков? Традиционное выпиливание лобзиком? Не только, — можно, например, попытаться составить свою коллекцию фотоснимков (занятие это не столь простое, как может показаться на первый взгляд), сделать свои зарисовки. Возможно, вы сумеете найти тему для своего исследования. Утверждается, что двух одинаковых снежинок не бывает! Однако обратимся к кеплеровскому трактату, с которого и началось изучение этого уникального природного объекта.

«...Снова пошел снег, причем еще пуще прежнего. Я прилежно принялся разглядывать снежинки. Все они были с прямыми лучами, но двух родов. Одни снежинки были очень маленькими, с различным числом торчащих кругом лучей, голых, лишенных опушки и полосочек и очень тонких. В центре лучи сходились к шарику несколько большей величины. Таких снежинок было больше всего. Среди них были разбросаны гораздо более редкие снежинки второго рода — шестиугольные звездочки, ни одна из них, ни пока она падала, ни после того, как опускалась на землю, не напоминала по форме другую. Пушинки у звездочек располагались в одной плоскости с лучами. Седьмой, более короткий луч торчал вниз, как корень, на который могли опускаться падающие снежинки, и, опустившись, держались на нем некоторое время...

Что касается снежинок второго рода, имеющих форму звездочек, то в них нельзя усмотреть ни куба или октаэдра, ни соприкосновения капель, поскольку эти звездочки падают плоскими, а не в виду пересекающихся диаметров, как я предполагал выше.

Но почему возникает именно правильный шестиугольник? Не потому ли, что из всех правильных фигур шестиугольник является первой, из которой нельзя собрать объемное тело? Ведь и равносторонний треугольник, и квадрат, и правильный пятиугольник тела образуют. Может быть, потому, что правильными шестиугольниками можно покрыть плоскость без единого зазора? Но тем же свойством обладают и равносторонний треугольник и квадрат. Может быть, потому, что из всех правильных плоских фигур, способных сплошь, без единого зазора покрывать плоскость, правильный шестиугольник ближе всего подходит к кругу?..

Во второй и в третьей причинах формообразующие силы принимают во внимание необходимость, диктуемую свойствами вещества. Ведь первая причина учитывает своеобразие правильного шестиугольника, отмечая, что именно эта фигура особенно подходит для столкновения пара и холода. При столкновении на плоскости и действовать должны плоские фигуры, но отнюдь не обязательно, чтобы это были фигуры, из которых можно было бы составить объемное тело. Следовательно, фигура должна быть лишь такой, чтобы соответствовала как фигурам физических тел, заключающих в себе часть пространства, так и фигурам на плоскости, не ограничивающих никакого объема. Здесь учитывается лишь формальное свойство, а не необходимость, обусловленная свойствами материала.

Относительно второй и третьей причин надлежало бы сказать следующее. Формообразующая сила избирает правильный шестиугольник и по необходимости, вызываемой свойствами вещества, чтобы не оставалось зазоров и чтобы пару было удобнее сгущаться до консистенции снега.

Для этого удобнее всего было бы воспользоваться кругами, но поскольку между маленькими кружками остаются промежутки, то формообразующая сила избрала ближайшую к кругу фигуру. Правда, этой причине противоречит упоминавшаяся выше неодинаковость звездочек, часть которых очень мала, с необычайно тонкими и гладкими лучами, без пушка. Это свидетельствует о том, что пар не превращается в снег одновременно на больших поверхностях, а выделяется постепенно на маленьких, неодинаковых по форме участках поверхности. Не относится к делу и соображение о том, что не должно быть зазоров, поскольку оно подразумевает лишь разбиение всей поверхности на равные правильные шестиугольники. Таким образом, вторая и третья причины отпадают, если только их нельзя свести к первой в такой степени, чтобы формообразующее начало избирало правильный шестиугольник не в силу необходимости, обусловленной свойствами вещества и пространства, а лишь из-за присущего ему свойства сплошь, без единого зазора покрывать плоскость и быть наиболее близкой к кругу из всех фигур, обладающих тем же свойством».

Иоганн Кеплер. «Новогодний подарок, или О шестиугольных снежинках» (фрагмент)

Г. ФИЛИППОВСКИЙ,
g.filippovsky@yandex.ua
Ф. БОБЫЛЕВ,
г. Киев

СТАРЫЕ И НОВЫЕ ВСТРЕЧИ С ТЕОРЕМОЙ ЛЕЙБНИЦА

Круг интересов замечательного немецкого ученого Г.В. Лейбница (1646–1716) был необычайно широк: юриспруденция и историография, философия и библиотечное дело, алхимия и астрология, астрономия и математика. Не случайно Норберт Винер написал о нем: «После Лейбница, быть может, уже не было человека, который бы полностью охватил всю интеллектуальную жизнь своего времени».

Математикой Лейбниц стал заниматься довольно поздно, в 26 лет. Как он сам шутливо говорил, «зашел в математику с черного хода». Тем не менее заслуги Лейбница в этой области знаний чрезвычайно велики. Это и создание (одновременно с Ньютоном и независимо от него) интегрального и дифференциального исчисления. Это ряд Лейбница для числа π и арифмометр Лейбница. Элементы двоичной системы счисления и «Рассуждения о комбинаторном искусстве». Работа с комплексными числами и многое другое. Лейбниц ввел в математику термины «функция», «дифференциал», «бесконечно малые», «абсцисса», «ордината», «координаты»…

Что касается вклада Лейбница в геометрию, то тут следует сказать о теореме, которая носит его имя. Теорема Лейбница — важная, полезная, красивая теорема. О ее применении мы и поведем разговор. Некоторые из представленных ниже задач имеют солидный возраст, высокий рейтинг участия в математических олимпиадах и турнирах. Другие задачи — совсем юные, новые. Впрочем, они стараются не уступать своим старым собратьям ни по уровню сложности, ни по эмоциям. Отсюда и название статьи: «Старые и новые встречи с теоремой Лейбница».

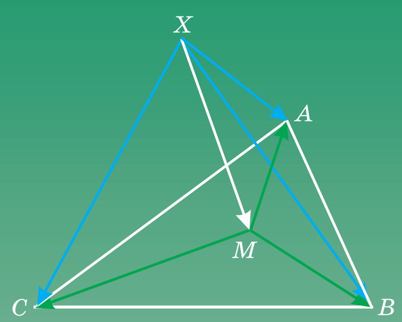


Рис. 1

Теорема Лейбница. Расстояния от любой точки X плоскости (а вообще говоря, и пространства) до вершин треугольника ABC и до его центроида M связаны соотношением:

$$XA^2 + XB^2 + XC^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 + 3XM^2.$$

Среди доказательств теоремы Лейбница наиболее простым и изящным представляется векторное. Приведем его.

Доказательство. Согласно «правилу треугольника» сложения векторов имеем (рис. 1):

$$\overline{XA} = \overline{XM} + \overline{MA},$$
$$\overline{XB} = \overline{XM} + \overline{MB},$$
$$\overline{XC} = \overline{XM} + \overline{MC}.$$

Возведем обе части каждого равенства в квадрат и сложим их:

$$XA^2 + XB^2 + XC^2 =$$
$$= MA^2 + MB^2 + MC^2 + 3XM^2 +$$
$$+ 2\,\overline{XM}\left(\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC}\right).$$

С учетом известного векторного соотношения

$$\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = 0$$

получим требуемое:

$$XA^2 + XB^2 + XC^2 =$$
$$= MA^2 + MB^2 + MC^2 + 3XM^2.$$

Следствия из теоремы Лейбница

1. Геометрическим местом точек плоскости, сумма квадратов расстояний от которых до всех вершин треугольника постоянна, есть окружность с центром в центроиде M треугольника ABC.

2. Сумма квадратов расстояний от точки X до вершин треугольника будет наименьшей, когда $X \equiv M$ (действительно, в этом случае слагаемое $3XM^2 = 0$).

Задача 1. Определите вид треугольника ABC, если для любой точки описанной около него окружности

$$XA^2 + XB^2 + XC^2 = \text{const}.$$

Решение. Согласно теореме Лейбница

$$XA^2 + XB^2 + XC^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 + 3XM^2.$$

Поскольку отрезки MA, MB и MC составляют каждый $\frac{2}{3}$ соответствующей медианы (рис. 2), то

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = \frac{4}{9}\left(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2\right) = \text{const}.$$

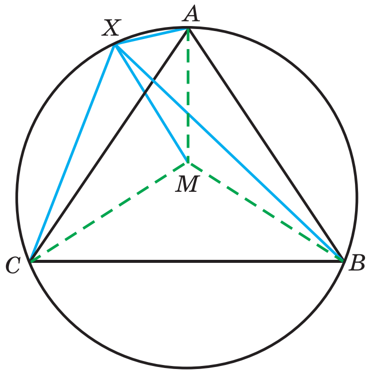


Рис. 2

Тогда должно быть постоянным и расстояние XM от любой точки X описанной окружности треугольника ABC до его центроида. Это возможно, когда $M \equiv O$, где O — центр описанной окружности треугольника ABC. В таком случае треугольник ABC является равносторонним.

Задача 2. Вычислите минимальное значение суммы $XA^2 + XB^2 + XC^2$, если стороны треугольника ABC равны a, b, c.

Решение. Для данного случая $X \equiv M$ (см. следствие 2 из теоремы Лейбница). Таким образом,

$$(XA^2 + XB^2 + XC^2)_{\min} =$$
$$= MA^2 + MB^2 + MC^2 = \frac{4}{9}\left(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2\right).$$

Поскольку сумма квадратов медиан треугольника составляет $\frac{3}{4}$ суммы квадратов всех его сторон (известный факт), то

$$(XA^2 + XB^2 + XC^2)_{\min} =$$
$$= \frac{4}{9}\cdot\frac{3}{4}\left(a^2 + b^2 + c^2\right) = \frac{1}{3}\left(a^2 + b^2 + c^2\right).$$

Задача 3. Найдите углы треугольника ABC, в котором

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3R^2.$$

Решение. Пусть точка X совпадает с точкой O — центром описанной окружности треугольника ABC. Тогда по теореме Лейбница

$$OA^2 + OB^2 + OC^2 =$$
$$= MA^2 + MB^2 + MC^2 + 3OM^2,$$

или

$$3R^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 + 3OM^2.$$

Учитывая условие, получаем: $OM = 0$. Это возможно только в равностороннем треугольнике. Итак, все углы треугольника ABC равны по $60°$.

Задача 4. Около равностороннего треугольника ABC описана окружность радиуса R. Докажите, что для любой точки этой окружности сумма квадратов ее расстояний до вершин треугольника ABC постоянна. Найдите значение этой суммы.

Решение. Пусть X — произвольная точка окружности ω, описанной около равностороннего треугольника ABC (рис. 3).

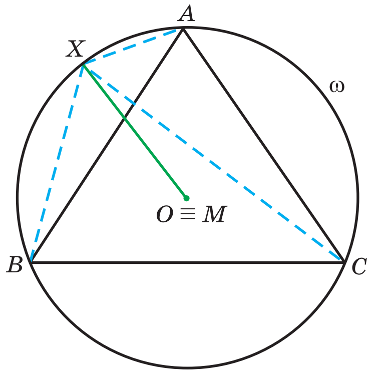


Рис. 3

Поскольку центр окружности ω — точка O — совпадает с центроидом M (треугольник ABC равносторонний), то по теореме Лейбница

$$XA^2 + XB^2 + XC^2 =$$
$$= OA^2 + OB^2 + OC^2 + 3OX^2 =$$
$$= 3R^2 + 3R^2 = 6R^2 = \text{const}.$$

Задача 5. В равносторонний треугольник ABC со стороной a вписана окружность. Найдите сумму квадратов расстояний от произвольной точки этой окружности до вершин треугольника ABC.

Решение. Пусть окружность s с центром I вписана в равносторонний треугольник ABC со стороной a (рис. 4).

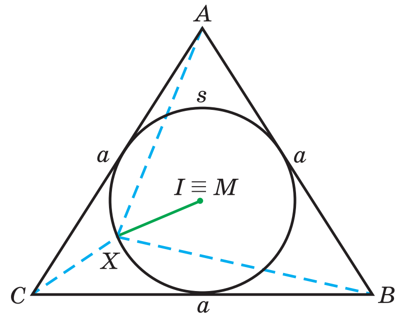


Рис. 4

Очевидно, $I \equiv M$ (M — центроид треугольника ABC). Тогда, согласно теореме Лейбница, для произвольной точки X окружности s имеем:

$$XA^2 + XB^2 + XC^2 =$$
$$= MA^2 + MB^2 + MC^2 + 3XM^2 =$$
$$= \frac{1}{3}\left(a^2 + b^2 + c^2\right) + 3r^2,$$

где r — радиус окружности s. Так как в равностороннем треугольнике $r = \frac{a}{2\sqrt{3}}$ (*покажите!*), то

$$XA^2 + XB^2 + XC^2 = a^2 + 3 \cdot \frac{a^2}{12} = \frac{5a^2}{4}.$$

Задача 6. Окружность делит каждую сторону равностороннего треугольника ABC на три равные части. Докажите, что сумма квадратов расстояний от произвольной точки этой окружности до вершин треугольника есть величина постоянная.

Доказательство. Пусть X — произвольная точка данной окружности. Опишем окружность около треугольника ABC (рис. 5).

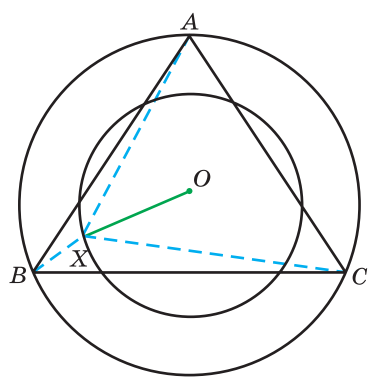


Рис. 5

Обозначим радиусы большей и меньшей окружностей соответственно через R_1 и R_2. Нетрудно показать, что центры окружностей совпадают с центром треугольника. Поскольку $O \equiv M$ (M — центроид треугольника ABC), то по теореме Лейбница

$$XA^2 + XB^2 + XC^2 =$$
$$= OA^2 + OB^2 + OC^2 + 3OX^2 =$$
$$= 3R_1^2 + 3R_2^2 = \text{const}.$$

Задача 7. Дан треугольник ABC с центроидом M. Около него описана окружность ω с центром в точке O. Постройте на окружности точку, сумма квадратов расстояний от которой до вершин треугольника ABC: а) минимальна; б) максимальна.

Решение. Проведем прямую OM, содержащую диаметр окружности ω. Пусть эта прямая пересекает ω в точках K и N (рис. 6).

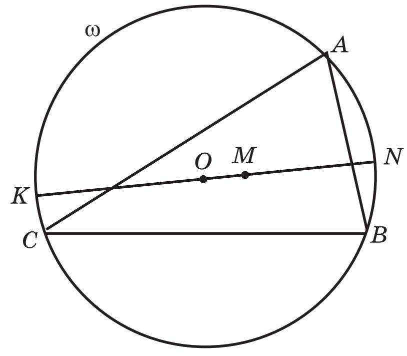


Рис. 6

Тогда MN — наименьшее расстояние от центроида M до ω, а MK — наибольшее (*докажите это, воспользовавшись неравенством треугольника*). Так как

$$NA^2 + NB^2 + NC^2 =$$
$$= MA^2 + MB^2 + MC^2 + 3NM^2,$$

а также

$$KA^2 + KB^2 + KC^2 =$$
$$= MA^2 + MB^2 + MC^2 + 3KM^2,$$

то очевидно, что первая сумма будет минимальной, а вторая — максимальной. Таким образом, N и K — искомые точки.

Задача 8. Найдите точку, сумма квадратов расстояний от которой до вершин данного треугольника ABC минимальна, если эта точка находится: а) на высоте AH_1 треугольника ABC: б) на данной прямой q; в) на стороне BC; г) на контуре треугольника ABC.

Решение. Поскольку во всех случаях сумма $MA^2 + MB^2 + MC^2$ постоянна, то в каждом случае необходимо искать кратчайшее расстояние от центроида M: а) до высоты AH_1; б) прямой q; в) стороны BC; г) сторон треугольника ABC.

На рисунке 7 (*а–г*) искомыми точками соответственно являются точки D, F, K. Заметим, что MK — наименьшее из расстояний от центроида M до сторон треугольника ABC (рис. 7,*г*).

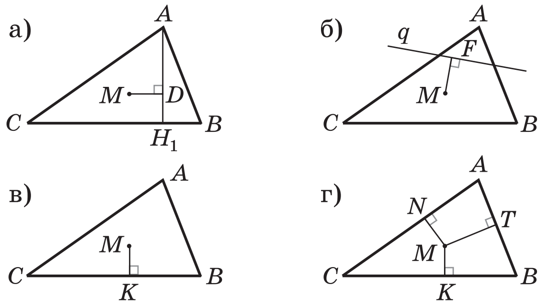


Рис. 7

Задача 9. Два треугольника — правильный треугольник ABC со стороной a и равнобедренный прямоугольный треугольник KNT с катетами b — расположены так, что их центроиды совпадают. Найдите сумму квадратов расстояний от всех вершин одного из треугольников до всех вершин другого.

Решение. Итак, $AB = BC = AC = a$, $KN = KT = b$ и $NT = b\sqrt{2}$ (рис. 8).

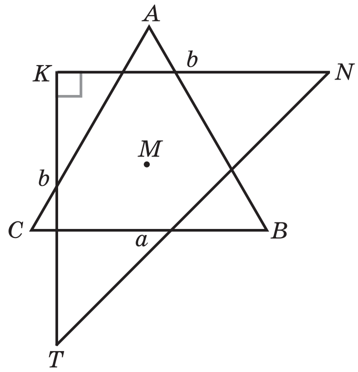


Рис. 8

Найдем сумму квадратов расстояний от точки A до вершин треугольника KNT. Согласно теореме Лейбница

$$AK^2 + AN^2 + AT^2 = MK^2 + MN^2 + MT^2 + 3AM^2,$$

где

$$MK^2 + MN^2 + MT^2 = \frac{1}{3}\left(b^2 + b^2 + 2b^2\right) = \frac{4}{3}b^2$$

(см. задачу 2). $AM = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$ как радиус описанной около треугольника ABC окружности. Тогда

$$AK^2 + AN^2 + AT^2 = \frac{4}{3}b^2 + 3\cdot\frac{a^2}{3} = \frac{4}{3}b^2 + a^2.$$

Аналогично,

$$BK^2 + BN^2 + BT^2 = \frac{4}{3}b^2 + a^2$$

и

$$CK^2 + CN^2 + CT^2 = \frac{4}{3}b^2 + a^2.$$

Следовательно, искомая сумма равна $4b^2 + 3a^2$.

Задача 10. Дана окружность ω с центром C и точки A и B вне окружности. Найдите на окружности точку K такую, чтобы $KA^2 + KB^2 = t^2$, где t — заданный отрезок.

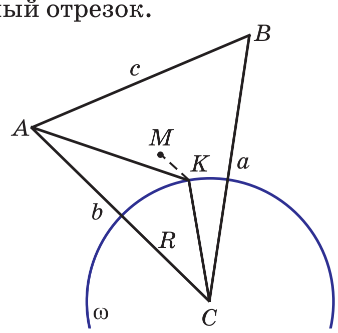


Рис. 9

Решение. Пусть задача решена. Соединим точки A, B и C и пусть $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ — известные отрезки. Нетрудно найти центроид M треугольника ABC (провести в нем две медианы). Воспользуемся теоремой Лейбница:

$$KA^2 + KB^2 + KC^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 + 3KM^2.$$

Но $KA^2 + KB^2 = t^2$ (по условию), $KC^2 = R^2$ и

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = \frac{1}{3}\left(a^2 + b^2 + c^2\right).$$

Следовательно,

$$t^2 + R^2 = \frac{1}{3}\left(a^2 + b^2 + c^2\right) + 3KM^2.$$

Пусть $t^2 + R^2 = n^2$, а $\frac{1}{3}\left(a^2 + b^2 + c^2\right) = q^2$. Тогда

$$KM^2 = \frac{n^2 - q^2}{3},\quad KM = \sqrt{\frac{n^2 - q^2}{3}}.$$

Такой отрезок легко строится. После чего из точки M раствором циркуля, равным MK, делаем засечку на окружности.

Задача 11. Стороны треугольника ABC равны a, b, c. Найдите расстояние OM между центром описанной окружности треугольника ABC и его центроидом.

Решение. Пусть $X \equiv O$. Тогда

$$OA^2 + OB^2 + OC^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 + 3OM^2$$

или

$$3R^2 = \frac{1}{3}\left(a^2 + b^2 + c^2\right) + 3OM^2,$$

откуда

$$OM = \frac{1}{3}\sqrt{9R^2 - \left(a^2 + b^2 + c^2\right)},$$

где $R = \dfrac{abc}{4S}$, а площадь S можно найти по формуле Герона.

Замечание. Поскольку точки O, M и H (ортоцентр треугольника ABC) лежат на одной прямой (прямой Эйлера) и $2OM = MH$, то

$$MH = \frac{2}{3}\sqrt{9R^2 - \left(a^2 + b^2 + c^2\right)}$$

и

$$OH = \sqrt{9R^2 - \left(a^2 + b^2 + c^2\right)}.$$

Задача 12. Из всех треугольников, вписанных в круг, равносторонний имеет наибольшую сумму квадратов сторон. Докажите.

Доказательство. Согласно задаче 11

$$OM=\frac{1}{3}\sqrt{9R^2-\left(a^2+b^2+c^2\right)}.$$

Очевидно,

$$(a^2+b^2+c^2)_{\max}=9R^2,$$

тогда $OM=0$, что достигается в равностороннем треугольнике.

Задача 13. Пусть H — ортоцентр треугольника ABC. Докажите справедливость формулы

$$HA^2+HB^2+HC^2=12R^2-(a^2+b^2+c^2).$$

Доказательство. По теореме Лейбница

$$HA^2+HB^2+HC^2=MA^2+MB^2+MC^2+3HM^2.$$

Так как

$$MH^2=\frac{4}{9}\left(9R^2-\left(a^2+b^2+c^2\right)\right)$$

(см. замечание к задаче 11), то

$$HA^2+HB^2+HC^2=$$

$$=\frac{1}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)+3\cdot\frac{4}{9}\left(9R^2-\left(a^2+b^2+c^2\right)\right),$$

откуда получим требуемое:

$$HA^2+HB^2+HC^2=12R^2-(a^2+b^2+c^2).$$

Следствие. Поскольку

$$OH^2=9R^2-(a^2+b^2+c^2)$$

(см. замечание к задаче 11), то

$$HA^2+HB^2+HC^2=3R^2+OH^2.$$

Задача 14. Докажите, что $a^2+b^2+c^2\le 9R^2$.

Доказательство. Подкоренное выражение в формуле задачи 11

$$OM=\frac{1}{3}\sqrt{9R^2-\left(a^2+b^2+c^2\right)}$$

должно быть неотрицательным, откуда

$$a^2+b^2+c^2\le 9R^2.$$

Задача 15. Докажите справедливость неравенства для углов треугольника ABC:

$$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C\le\frac{9}{4}.$$

Доказательство. По теореме синусов для треугольника ABC:

$$\frac{a}{\sin A}=2R,\quad \sin A=\frac{a}{2R}.$$

Аналогично,

$$\sin B=\frac{b}{2R}\ \text{ и }\ \sin C=\frac{c}{2R}.$$

Тогда

$$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=\frac{a^2+b^2+c^2}{4R^2}.$$

С учетом неравенства $a^2+b^2+c^2\le 9R^2$ (см. задачу 14) получим:

$$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C\le\frac{9}{4}.$$

Задача 16. Докажите, что для медиан треугольника ABC выполняется неравенство

$$m_a^2+m_b^2+m_c^2\le\frac{27R^2}{4}.$$

Доказательство. Известно, что

$$m_a^2+m_b^2+m_c^2=\frac{3}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

(*покажите!*), тогда

$$m_a^2+m_b^2+m_c^2=\frac{3}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right)\le\frac{3}{4}\cdot 9R^2=\frac{27R^2}{4}.$$

Задача 17. Докажите справедливость неравенства для любой точки X в плоскости треугольника ABC:

$$XA^2+XB^2+XC^2\ge\frac{4}{9}p^2,$$

где p — полупериметр треугольника ABC.

Доказательство. Согласно теореме Лейбница

$$XA^2+XB^2+XC^2=MA^2+MB^2+MC^2+3XM^2,$$

или

$$XA^2+XB^2+XC^2=\frac{1}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)+3XM^2,$$

или

$$XA^2+XB^2+XC^2\ge\frac{1}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right).$$

Нетрудно показать, что

$$3(a^2+b^2+c^2)\ge(a+b+c)^2.$$

Действительно, это неравенство сводится к знаменитому «неравенству трех квадратов»:

$$a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ac.$$

Тогда тем более

$$XA^2+XB^2+XC^2\ge\frac{(a+b+c)^2}{9}=\frac{4}{9}p^2.$$

Задача 18. Внутри равностороннего треугольника ABC площади S взята произвольная точка N. Докажите, что площадь треугольника со сторонами NA, NB, NC не превышает $\frac{1}{3}S$.

Доказательство. Пусть $NA=x$, $NB=y$, $NC=z$. Повернем треугольник ACN на $60°$ против часовой стрелки вокруг точки A — получим треугольник ADB (рис. 10).

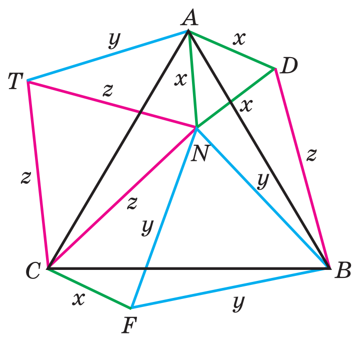


Рис. 10

При этом треугольник ADN — равносторонний со стороной x. А стороны треугольника NDB равны x, y, z. Повернем треугольник BAN вокруг точки B на 60° против часовой стрелки — получим треугольник BCF. И при этом треугольник BNF — равносторонний со стороной y. А у треугольника CFN стороны равны x, y, z.

После поворота треугольника CBN на 60° против часовой стрелки вокруг точки C получим равносторонний треугольник CNT со стороной z и треугольник ANT со сторонами x, y, z. Очевидно, площадь шестиугольника $TADBFC$ равна $2S$ (снаружи треугольника ABC оказались такие же треугольники, что и внутри его). В то же время шестиугольник $TADBFC$ состоит из трех равносторонних треугольников соответственно со сторонами x, y, z и из трех равных треугольников NDB, CFN, NAT. У этих треугольников одинаковы стороны x, y, z. Пусть площадь каждого из них равна S_1. Нам необходимо показать, что $S_1 \le \frac{1}{3}S$. Поскольку сумма площадей всех шести треугольников равна $2S$, или

$$\frac{x^2\sqrt{3}}{4}+\frac{y^2\sqrt{3}}{4}+\frac{z^2\sqrt{3}}{4}+3S_1=2S,$$

то остается показать, что

$$\frac{x^2\sqrt{3}}{4}+\frac{y^2\sqrt{3}}{4}+\frac{z^2\sqrt{3}}{4}\ge S.$$

Тогда очевидно, что

$$3S_1\le S,\quad S_1\le\frac{1}{3}S.$$

Покажем, что

$$\frac{x^2\sqrt{3}}{4}+\frac{y^2\sqrt{3}}{4}+\frac{z^2\sqrt{3}}{4}\ge\frac{a^2\sqrt{3}}{4},$$

где a — сторона треугольника ABC, или (что то же самое) покажем, что

$$x^2+y^2+z^2\ge a^2.$$

По теореме Лейбница для треугольника ABC имеем:

$$NA^2+NB^2+NC^2=MA^2+MB^2+MC^2+3NM^2,$$

где $M\equiv O$ в равностороннем треугольнике ABC. Или

$$x^2+y^2+z^2=\frac{1}{3}\left(a^2+a^2+a^2\right)+3NO^2,$$

$$x^2+y^2+z^2=a^2+3NO^2\ge a^2.$$

Тогда $3S_1$ (сумма площадей треугольников NBD, CFN, NAT) не превышает площади треугольника ABC, или $S_1\le\frac{1}{3}S$.

Задача 19. Докажите, что в условиях предыдущей задачи справедлива формула

$$S_1=\frac{\sqrt{3}}{12}\left(a^2-3d^2\right),$$

где $NO=d$.

Доказательство. В задаче 18 было показано,

$$\frac{x^2\sqrt{3}}{4}+\frac{y^2\sqrt{3}}{4}+\frac{z^2\sqrt{3}}{4}+3S_1=2S,$$

или

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\left(NA^2+NB^2+NC^2\right)+3S_1=2S.$$

Кроме того, по теореме Лейбница получено:

$$NA^2+NB^2+NC^2=a^2+3NO^2=a^2+3d^2.$$

Тогда имеем:

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\left(a^2+3d^2\right)+3S_1=2S.$$

Следовательно,

$$3S_1=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}-\frac{a^2\sqrt{3}}{4}-\frac{3d^2\sqrt{3}}{4},$$

откуда

$$S_1=\frac{\sqrt{3}}{12}\left(a^2-3d^2\right).$$

Замечание. Если только точка N находится в плоскости ABC, но вне его, то полученная формула примет вид:

$$S_1=\frac{\sqrt{3}}{12}\left|\,a^2-3d^2\,\right|.$$

Отметим, что планиметрическая теорема имеет свой аналог в стереометрии.

Задача 20. Пусть медианы тетраэдра $DABC$ (отрезки, соединяющие вершины с центроидами противоположных граней) пересекаются в точке M. Тогда для любой точки X пространства справедливо соотношение:

$$XA^2+XB^2+XC^2+XD^2=$$
$$=MA^2+MB^2+MC^2+MD^2+4XM^2.$$

Указание. Доказательство аналогично доказательству теоремы Лейбница в планиметрии с помощью векторов. С учетом того факта, что медианы тетраэдра также пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 3 : 1, считая от вершины. Например, $DM : MG = 3 : 1$ (рис. 11).

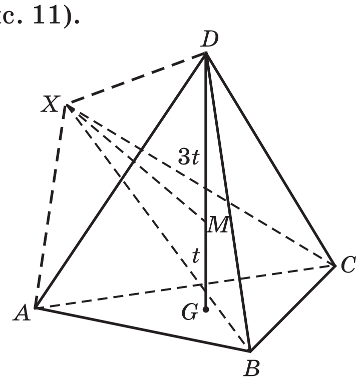


Рис. 11

Задача 21. Найдите точку, сумма квадратов расстояний от которой до всех вершин данной треугольной пирамиды минимальна.

Доказательство. Согласно задаче 20 нетрудно видеть, что $(XA^2+XB^2+XC^2+XD^2)_{\min}$ в случае, когда $X\equiv M$. То есть требуемая сумма приобретает минимум в точке пересечения медиан данной треугольной пирамиды.

Задача 22. Сумма квадратов трех ребер тетраэдра, принадлежащих одной грани, меньше утроенной суммы квадратов трех других его ребер. Докажите.

Доказательство. Пусть в тетраэдре $DABC$ скрещивающиеся ребра равны a и a_1 (BC и DA соответственно), b и b_1 (AC и DB), c и c_1 (AB и DC). Пусть также M — точка пересечения медиан тетраэдра $DABC$, а G — центроид грани ABC (рис. 12).

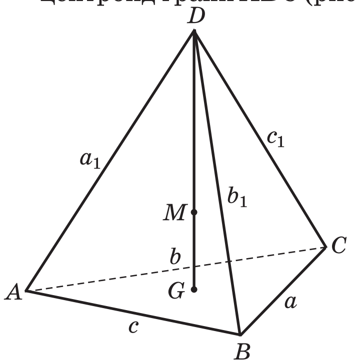


Рис. 12

Нетрудно показать, что

$$\overline{DG}=\frac{1}{3}\left(\overline{DA}+\overline{DB}+\overline{DC}\right),\text{ или } \overline{DG}=\frac{1}{3}\left(\overline{a_1}+\overline{b_1}+\overline{c_1}\right).$$

После возведения последнего векторного равенства в квадрат и применения теоремы косинусов получим:

$$DG^2=\frac{1}{9}\left(3a_1^2+3b_1^2+3c_1^2-a^2-b^2-c^2\right).$$

Так как $DM=\frac{3}{4}DG$, то

$$DM^2=\frac{9}{16}DG^2=\frac{1}{16}\left(3a_1^2+3b_1^2+3c_1^2-a^2-b^2-c^2\right).$$

Применив аналогичные формулы к AM^2, BM^2, CM^2, после сложения всех четырех равенств находим:

$$MA^2+MB^2+MC^2+MD^2=\frac{1}{4}\left(a_1^2+b_1^2+c_1^2+a^2+b^2+c^2\right).$$

Согласно стереометрической теореме Лейбница (см. задачу 20):

$$XA^2+XB^2+XC^2+XD^2\ge$$
$$\ge MA^2+MB^2+MC^2+MD^2.$$

Пусть $X\equiv D$. Тогда имеем:

$$DA^2+DB^2+DC^2\ge MA^2+MB^2+MC^2+MD^2,$$

или

$$a_1^2+b_1^2+c_1^2=\frac{1}{4}\left(a_1^2+b_1^2+c_1^2+a^2+b^2+c^2\right),$$

или

$$\frac{3}{4}\left(a_1^2+b_1^2+c_1^2\right)\ge\frac{1}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right),$$

или

$$a^2+b^2+c^2\le 3\left(a_1^2+b_1^2+c_1^2\right).$$

Поскольку $X\equiv D$ и не совпадает с M, то неравенство является строгим:

$$a^2+b^2+c^2<3\left(a_1^2+b_1^2+c_1^2\right).$$

Перед тем, как перейти к задачам для самостоятельного решения, предложим авторское доказательство теоремы Пифагора.

Задача 23. Докажите справедливость теоремы Пифагора: сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы.

Доказательство. Пусть точка X совпадает с вершиной прямого угла, а точка C — с серединой отрезка AB. В этом случае треугольник ABC вырожденный и его центроид M совпадает с точкой C (рис. 13).

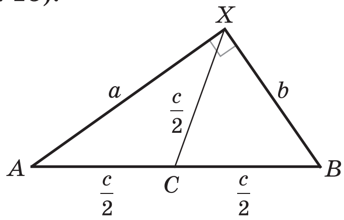


Рис. 13

Пусть также

$XA=a$, $XB=b$, $AB=c$ и $AC=BC=XC=\frac{c}{2}$.

Тогда для данного случая теорема Лейбница запишется следующим образом:

$$XA^2+XB^2+XC^2=CA^2+CB^2+CC^2+3XC^2,$$

или

$$a^2+b^2+\frac{c^2}{4}=\frac{c^2}{4}+\frac{c^2}{4}+0+3\cdot\frac{c^2}{4},\quad a^2+b^2=c^2.$$

Теорема Пифагора доказана.

Задачи для самостоятельного решения

24. Треугольники ABC и KNT имеют общий центроид M. Докажите, что сумма квадратов расстояний всех вершин одного треугольника до всех вершин другого не зависит от расположения этих треугольников на плоскости.

25. Пусть E — центр окружности Эйлера в треугольнике ABC. Докажите, что

$$EA^2+EB^2+EC^2=\frac{1}{4}\left(3R^2+a^2+b^2+c^2\right).$$

26. Докажите, что расстояние MI между центроидом и инцентром треугольника ABC вычисляется по формуле

$$MI=\frac{1}{3}\sqrt{9r^2-3p^2+2\left(a^2+b^2+c^2\right)},$$

где r — радиус вписанной окружности, p — полупериметр треугольника ABC.

27. Дан треугольник ABC площади S, все углы которого меньше 120°. Найдите расстояние от точки T Торричелли треугольника ABC до центроида M этого треугольника.

Ответ: $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{2}-2S\sqrt{3}}$.

28. Докажите, что сумма квадратов расстояний от произвольной точки сферы до вершин вписанного в окружность ее большего круга правильного треугольника есть величина постоянная.

29. Докажите, что сумма квадратов расстояний от произвольной точки внутри тетраэдра (или на его поверхности) до всех вершин тетраэдра не меньше четверти суммы квадратов всех его ребер.

А. БЛИНКОВ,
А. ИВАНИЩУК,
Н. НАКОНЕЧНЫЙ,
П. ЧУЛКОВ,
г. Москва

ТУРНИР АРХИМЕДА

МОСКОВСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ РЕГАТА

Математическая регата 11-х классов была проведена 22 ноября 2014 года. Финансовую поддержку оказал Департамент образования г. Москвы, а организационную и техническую — Московский центр непрерывного математического образования. Место проведения — Московский городской дворец детского (юношеского) творчества.

По традиции каждый участник и руководитель команды по окончании регаты получал небольшую брошюру с условиями и решениями задач только что прошедших соревнований. Эти специальные выпуски регулярно готовятся коллективом редакции «Архимед» под руководством П.В. Чулкова (издание АНО «Институт логики, когнитологии и развития личности»).

В регате 11-х классов участвовало 43 команды из г. Долгопрудного, Москвы и Санкт-Петербурга. Победителями стали команды лицея «Вторая школа» (Москва) и физико-математической школы № 30 (Санкт-Петербург).

Математической литературой (традиционно предоставляемой МЦНМО) были награждены 16 команд, из которых 11 лучших получили также дипломы I, II или III степени. Полные итоги регаты опубликованы на сервере МЦНМО (http://www.mccme.ru/olympiads).

Как обычно, часть заданий придумывалась авторами специально для этой регаты, а остальные являются математическим фольклором или взяты из популярной математической литературы.

Условия задач

Первый тур

(*10 минут; каждая задача — 6 баллов*)

1.1. Решите систему уравнений $\begin{cases} x - y \geq z, \\ x^2 + 4y^2 + 5 = 4z. \end{cases}$

1.2. Существует ли выпуклый 1000-угольник, у которого все углы выражаются целыми числами градусов?

1.3. Существует ли такая цифра a, что
$$\overline{aaa}(a-1) = (a-1)^{a-2}\ ?$$

Второй тур

(*15 минут; каждая задача — 7 баллов*)

2.1. Числовая функция f такова, что для любых x и y выполняется равенство
$$f(x+y) = f(x) + f(y) + 80xy.$$
Найдите $f(1)$, если $f(0{,}25) = 2$.

2.2. Четырехугольник $ABCD$ вписанный. Лучи AB и DC пересекаются в точке M, а лучи BC и AD — в точке N. Известно, что $BM = DN$. Докажите, что $CM = CN$.

2.3. На доске размером 8×8 в углу расставлены 9 фишек в форме квадрата 3×3. Любая фишка может прыгать через другую фишку на свободную клетку (по горизонтали, вертикали или диагонали). Можно ли за некоторое количество прыжков расставить фишки в форме такого же квадрата в каком-либо другом углу доски?

Третий тур

(*20 минут; каждая задача — 8 баллов*)

3.1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sin y - \sin x = x - y, \\ \sin y - \sin z = z - y, \\ x - y + z = \pi. \end{cases}$$

3.2. Точки D, E и F — середины сторон BC, AC и AB треугольника ABC соответственно. Через центры вписанных окружностей треугольников AEF, BDF и CDE проведена окружность. Докажите, что ее радиус равен радиусу окружности, описанной около треугольника DEF.

3.3. На столе выложены в ряд 64 гирьки, причем масса двух любых соседних гирек отличается на 1 грамм. Требуется разложить гирьки на две кучки с равными массами и равным количеством гирь. Всегда ли это удастся?

Четвертый тур

(*25 минут; каждая задача — 9 баллов*)

4.1. Существуют ли такие две функции с наименьшими положительными периодами 2 и 6, что их сумма имеет наименьший положительный период 3?

4.2. В тетраэдре $ABCD$:

$$AB = 8,\ BC = 10,$$
$$AC = 12,\ BD = 15.$$

Известно, что четыре отрезка, соединяющие вершины тетраэдра с центрами окружностей, вписанных в противолежащие грани, пересекаются в одной точке. Найдите длины ребер DA и DC.

4.3. В равенстве $x^5 + 2x + 3 = p^k$ числа x и k натуральные. Может ли число p быть простым?

Пятый тур

(*15 минут; каждая задача — 7 баллов*)

5.1. Найдите наименьшее значение дроби $\frac{x}{y}$, если

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} = 1.$$

5.2. Правильный треугольник со стороной 1 разрезан произвольным образом на равносторонние треугольники, в каждый из которых вписан круг. Найдите сумму площадей этих кругов.

5.3. Сумма цифр натурального числа n равна сумме цифр числа $2n + 1$. Могут ли быть равными суммы цифр чисел $3n - 3$ и $n - 2$?

Ответы, решения, комментарии

1.1. $(2; -0,5; 2,5)$.

Умножим обе части неравенства на 4 и подставим в него значение $4z$ из уравнения. Получим:

$$x^2 + 4y^2 + 5 \le 4x - 4y \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + 4y^2 + 4y + 1 \le 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (2y+1)^2 \le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = -0,5. \end{cases}$$

Подставляя найденные значения x и y в уравнение, получим, что $z = 2,5$.

1.2. Нет, не существует.

Если внутренние углы многоугольника выражаются целыми числами, то и его внешние углы — целые числа. Но у любого выпуклого многоугольника сумма внешних углов равна 360°, а сумма тысячи любых натуральных чисел больше чем 360.

1.3. Да, существует.

Действительно, при $a = 7$ получим верное равенство $7776 = 6^5$.

Комментарий. Указанное значение a — единственное. Действительно, при $a < 6$ правая часть равенства содержит меньше четырех цифр, а при $a > 7$ — больше четырех цифр. Кроме того, при $a = 6$ правая часть делится на 25, а левая часть на 25 не делится.

2.1. 38.

Из условия задачи следует, что

$$f(0,5) = f(0,25 + 0,25) =$$
$$= f(0,25) + f(0,25) + 80 \cdot 0,25 \cdot 0,25 =$$
$$= 2 + 2 + 5 = 9.$$

Аналогично,

$$f(1) = f(0,5 + 0,5) =$$
$$= f(0,5) + f(0,5) + 80 \cdot 0,5 \cdot 0,5 =$$
$$= 9 + 9 + 20 = 38.$$

2.2. $\angle MBC = \alpha$, тогда

$$\angle CDN = \angle ABC = 180° - \alpha$$

(рис. 1). Далее можно рассуждать различными способами.

Способ I. По теореме синусов в треугольниках BCM и DCN:

$$\frac{CM}{\sin\alpha} = \frac{BM}{\sin\angle BCM}$$

и

$$\frac{CN}{\sin(180° - \alpha)} = \frac{DN}{\sin\angle DCN}.$$

Так как

$$BM = DN,$$

$$\angle BCM = \angle DCN \sin(180° - \alpha) = \sin \alpha,$$

то

$$CM = CN.$$

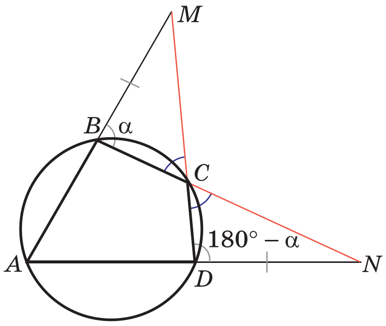


Рис. 1

Комментарий. Отметим, что вместо теоремы синусов можно использовать такой прием: «отрежем» треугольник DCN и «приложим» его к треугольнику BCM, совместив равные отрезки DN и BM (рис. 2). Так как $\angle MBC + \angle CDN = 180°$, то в результате этого образуется новый треугольник, в котором равны углы при вершинах C и C', значит, он равнобедренный. Следовательно, $CM = CN$.

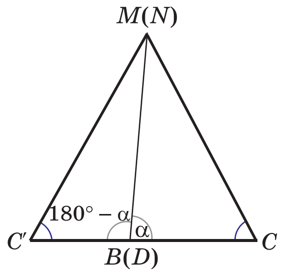


Рис. 2

Способ II. Опишем окружности около треугольников BCM и DCN (рис. 3). Так как $BM = DN$ и $\angle BCM = \angle DCN$, то радиусы этих окружностей равны. Докажем, что вторая точка пересечения этих окружностей лежит на отрезке MN. Действительно, пусть окружность, описанная около треугольника BCM, пересекает MN в точке P. Тогда $\angle NPC = \angle MBC = \alpha$, значит, точка P лежит на окружности, описанной около треугольника DCN.

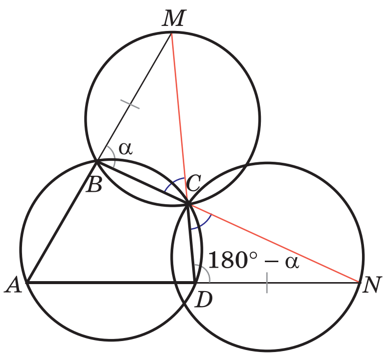


Рис. 3

Вписанные углы CMN и CNM треугольника MCN опираются на равные дуги равных окружностей, поэтому эти углы равны. Следовательно, $CM = CN$.

Комментарий. Точка P, полученная в этом способе решения, называется точкой Микеля для прямых NA, NB, MA и MD. Через эту точку проходят также окружности, описанные около треугольников ANB и AMD.

2.3. Нет, нельзя.

Без ограничения общности можно считать, что фишки стоят в левом нижнем углу доски. Докажем, что в правых углах доски поставить фишки невозможно. Покрасим вертикали доски в черный и белый цвета, чередуя их (иначе говоря, «матрасиком», рис. 4). Заметим, что любой прыжок фишки не изменяет цвета вертикали, в которой она стояла. Изначально 6 фишек стояли в «черных» вертикалях, а 3 фишки — в «белых», а в конечной расстановке должно быть наоборот. Значит, такая расстановка невозможна.

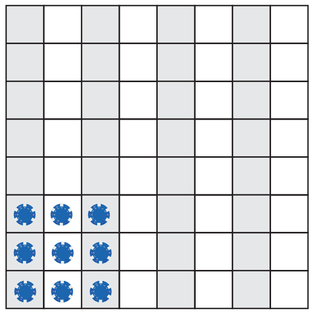


Рис. 4

Для того чтобы доказать, что фишки нельзя расставить в левом верхнем углу доски, надо «матрасиком» раскрасить горизонтали и провести аналогичное рассуждение.

Комментарий. Отметим, что для доказательства невозможности расстановки фишек в соседних углах доски хватает и «шахматной» раскраски.

3.1. $(\pi; \pi; \pi)$.

Исходная система равносильна системе

$$\begin{cases} \sin y + y = \sin x + x, \\ \sin y + y = \sin z + z, \\ x - y + z = \pi. \end{cases}$$

Докажем, что функция $f(t) = \sin t + t$ является возрастающей. Действительно, функция $f(t)$ непрерывна и $f'(t) = \cos t + 1 \geq 0$. Кроме того, производная принимает значение 0 при $t = \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, то есть промежутков, на которых $f'(t) = 0$, не существует. Следовательно, каждое свое значение функция $f(t)$ принимает только при одном значении переменной. Тогда

$$\begin{cases}\sin y + y = \sin x + x,\\ \sin y + y = \sin z + z,\\ x - y + z = \pi\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x,\\ y = z,\\ x - y + z = \pi\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = y = z = \pi.$$

3.2. Заметим, что треугольник DEF подобен треугольнику ABC с коэффициентом $k = 0{,}5$ (рис. 5).Обозначим центры вписанных окружностей треугольников AEF, BDF и CDE через A', B' и C' соответственно, тогда окружность, содержащая эти точки, описана около треугольника $A'B'C'$.

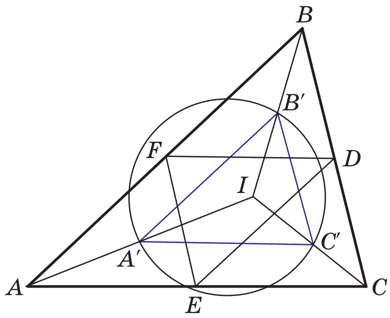


Рис. 5

Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Треугольник AEF является образом треугольника ABC при гомотетии с центром A и коэффициентом $k = 0{,}5$, поэтому точка A' является образом точки I при этой гомотетии, значит, A' — середина отрезка AI. Аналогично, рассмотрев гомотетии с центрами B и C и коэффициентом $k = 0{,}5$, получим, что точки B' и C' — середины отрезков BI и CI соответственно. Следовательно, отрезки $A'B'$, $B'C'$ и $C'A'$ — средние линии треугольников AIB, BIC и CIA соответственно. Таким образом, треугольник $A'B'C'$ также подобен треугольнику ABC с коэффициентом $k = 0{,}5$. Значит, треугольники $A'B'C'$ и DEF равны, поэтому равны и радиусы окружностей, описанных около них.

Комментарий. Для решения можно также использовать следующие факты: 1) окружность, описанная около треугольника DEF, является окружностью девяти точек треугольника ABC; 2) стороны треугольника DEF соответственно параллельны сторонам треугольника ABC, так как равны радиусы вписанных окружностей треугольников AEF, BDF и CDE.

3.3. Всегда.

Разобьем все гири на четверки гирь, стоящих подряд. Рассмотрим любую из этих четверок. Пусть масса первой гири равна m, тогда возможны следующие варианты масс четырех гирь (в граммах):

1) m, $(m + 1)$, $(m + 2)$, $(m + 3)$ или m, $(m - 1)$, $(m - 2)$, $(m - 3)$;

2) m, $(m + 1)$, $(m + 2)$, $(m + 1)$ или m, $(m - 1)$, $(m - 2)$, $(m - 1)$;

3) m, $(m + 1)$, m, $(m + 1)$ или m, $(m - 1)$, m, $(m - 1)$;

4) m, $(m + 1)$, m, $(m - 1)$ или m, $(m - 1)$, m, $(m + 1)$.

В каждом из случаев четверка гирь разбивается на две пары с равной суммой масс. Действительно: 1) и 3): I + IV = II + III; 2) и 4): I + III = = II + IV (римскими цифрами обозначены массы гирь по порядку).

Следовательно, из каждой четверки можно положить две гири в одну кучку, а две другие — в другую кучку. Разбиение, осуществленное таким образом, будет искомым.

Комментарий. Объяснить, что любая четверка гирь, стоящих подряд, разбивается на две пары с равными суммами масс, можно и без разбора различных случаев: положим первые две гири в разные кучки (большую — в первую кучку, а меньшую — во вторую), следующие две гири также положим в разные кучки, но наоборот (меньшую — в первую кучку, а большую — во вторую). Так как модуль разности между массами первой и второй гирь равен модулю разности между массами третьей и четвертой гирь, то такое разбиение будет искомым.

4.1. Да, существуют.

Пусть, например,

$$f(x) = \cos\frac{2}{3}\pi x + \cos\pi x,\ \ g(x) = -\cos\pi x,$$

тогда

$$h(x) = f(x) + g(x) = \cos\frac{2}{3}\pi x.$$

Каждая из этих функций определена на множестве $\boldsymbol{R}$.

Наименьший положительный период функции $g(x)$ равен $\frac{2\pi}{\pi} = 2$, а наименьший положительный период функции $h(x)$ равен $\frac{2\pi}{\frac{2\pi}{3}} = 3$. Докажем, что наименьший положительный период функции $f(x)$ равен 6.

Действительно, число 6 кратно 3 и 2, поэтому является как периодом функции $y = \cos\frac{2}{3}\pi x$, так и периодом функции $y = \cos\pi x$, значит, является и периодом их суммы.

Предположим, что существует такое число T, что $0 < T < 6$, которое также является периодом функции $f(x)$. Тогда для всех действительных значений x должно выполняться равенство

$$\cos\frac{2\pi}{3}(x + T) + \cos\pi(x + T) = \cos\frac{2\pi x}{3} + \cos\pi x.$$

При $x = 0$ получим:

$$\cos\frac{2}{3}\pi T + \cos\pi T = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\frac{2}{3}\pi T = 1, \\ \cos\pi T = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}\pi T = 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}, \\ \pi T = 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} T = 3k,\ k \in \mathbf{Z}, \\ T = 2n,\ n \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Следовательно, $3k = 2n$, то есть k — четное число. Пусть $k = 2m$, где $m \in \mathbf{Z}$, тогда $T = 6m$. Если $m > 0$, то $6m \geq 6$.

Полученное противоречие показывает, что у функции $f(x)$ не может быть периода, меньшего чем 6.

Комментарий. Существуют и другие примеры.

4.2. $DA = 18$, $DC = 22{,}5$.

Докажем, что если отрезки, соединяющие вершины тетраэдра $ABCD$ с центрами вписанных окружностей противолежащих граней пересекаются в одной точке, то равны произведения длин противолежащих ребер тетраэдра, то есть

$$DC \cdot AB = DB \cdot AC = DA \cdot BC.$$

Действительно, пусть отрезки DO_1 и AO_2, где O_1 и O_2 — центры вписанных окружностей треугольников ABC и DBC, пересекаются в точке N (рис. 6). Тогда точки A, D, O_1 и O_2 лежат в одной плоскости, поэтому прямые AO_1 и DO_2 пересекают ребро BC в одной и той же точке L. Так как AL и DL — биссектрисы треугольников ABC и DBC, то по свойству биссектрисы треугольника

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BL}{CL} = \frac{DB}{DC}.$$

Следовательно,

$$DC \cdot AB = DB \cdot AC.$$

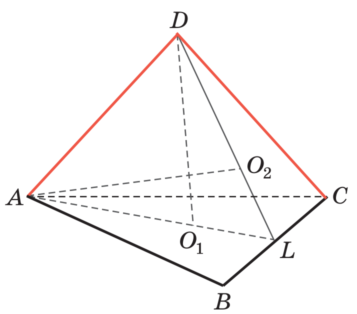


Рис. 6

Заменив, например, AO_2 на BO_3, где O_3 — центр вписанной окружности грани DBC, и проведя аналогичное рассуждение, получим требуемое двойное равенство.

Комментарий. Отметим, что справедливо и утверждение, обратное доказанному.

В нашем случае $DB \cdot AC = 180$, поэтому $DA = 18$, $DC = 22{,}5$.

4.3. Нет, не может.

Предположим, что p — простое число. Заметим, что $x = -1$ — корень многочлена, стоящего в левой части равенства. Тогда этот многочлен можно представить в виде произведения, то есть записать исходное равенство в виде:

$$(x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 3) = p^k.$$

При $x = 1$ это равенство не выполняется ни при каких простых p и натуральных k, значит, $x \geq 2$. Следовательно, каждый множитель в левой части полученного равенства больше 1, причем второй множитель больше первого.

Если число p простое, то

$$x + 1 = p^a,\ x^4 - x^3 + x^2 - x + 3 = p^b,$$

где a и b — натуральные числа и $b > a$. Тогда выражение

$$x^4 - x^3 + x^2 - x + 3$$

при каком-то натуральном значении x делится на $x + 1$ без остатка, значит, остаток от деления многочлена $P(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 3$ на $x + 1$ при таком x должен делиться на $x + 1$. По теореме Безу этот остаток равен $P(-1)$. Следовательно, $P(-1) = 7$ делится на $(x + 1)$, то есть $x = 6$.

Подставив $x = 6$ в исходное равенство, получим: $7791 = p^k$, но это невозможно, так как число 7791 не является простым и не является степенью простого (оно делится на 3, но не делится на 9).

5.1. 0,5.

Из условия задачи следует, что

$$\sqrt{y-1} = 1 - \sqrt{x-1} \geq 0,$$

то есть

$$\sqrt{x-1} \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2.$$

Аналогично, получим, что $1 \leq y \leq 2$. Тогда $0{,}5 \leq \frac{1}{y} \leq 1$, следовательно, $0{,}5 \leq \frac{x}{y} \leq 2$. Значение $\frac{x}{y} = 0{,}5$ достигается при $x = 1$, $y = 2$, удовлетворяющих исходному равенству.

Комментарий. Оценив значения x и y, можно продолжить решение иначе, используя координатную плоскость. Заметим, что график заданного уравнения целиком лежит в квадрате $ABCD$ (рис. 7).

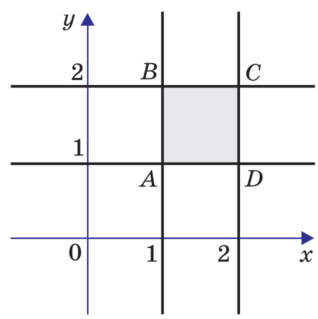


Рис. 7

Так как этот квадрат лежит в первой координатной четверти, то выражение $\frac{x}{y}$ принимает наименьшее значение тогда и только тогда, когда $\frac{y}{x}=k$ принимает наибольшее значение. Таким образом, из всех прямых вида $y = kx$, где $k > 0$, надо выбрать прямую, пересекающую квадрат $ABCD$ и имеющую наибольший угловой коэффициент. Этому условию удовлетворяет прямая OB, где $B(1; 2)$. График заданного уравнения содержит точку B, так как при подстановке ее координат в это уравнение получается верное числовое равенство. Следовательно, искомое наименьшее значение равно 0,5.

5.2. $\frac{\pi}{12}$.

Так как все правильные треугольники подобны, то у них отношение площади вписанного круга к площади треугольника одно и то же

$$\frac{S_1'}{S_1}=\frac{S_2'}{S_2}=\ldots=\frac{S_n'}{S_n}=m,$$

где в знаменателях дробей — площади n треугольников, полученных при разбиении, а в числителях — площади соответствующих вписанных кругов. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} S_k' = m\cdot\sum_{k=1}^{n} S_k = mS = S',$$

где S и S' — площади исходного треугольника и вписанного в него круга. Так как радиус круга, вписанного в данный треугольник, равен $\frac{\sqrt{3}}{6}$, то его площадь равна

$$\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2=\frac{\pi}{12}.$$

5.3. Нет, не могут.

Воспользуемся тем, что любое натуральное число и его сумма цифр имеют одинаковые остатки от деления на 9. Следовательно, если у двух чисел одинаковые суммы цифр, то разность этих чисел делится на 9. Тогда из условия задачи следует, что $(2n + 1) - n = n + 1$ делится на 9.

Предположим, что у чисел $3n - 3$ и $n - 2$ также одинаковые суммы цифр. Тогда

$$(3n - 3) - (n - 2) = 2n - 1$$

делится на 9. В этом случае на 9 должно делиться число

$$(2n - 1) - (n + 1) = n - 2,$$

но тогда и число

$$(n + 1) - (n - 2) = 3$$

также должно делиться на 9, что невозможно.

Комментарий. Вторую часть рассуждений можно провести иначе. Из того, что $n + 1$ делится на 9, следует, что $n = 9k - 1$, где k — натуральное число. Тогда

$$3n - 3 = 27k - 6,\ \text{а}\ n - 2 = 9k - 3.$$

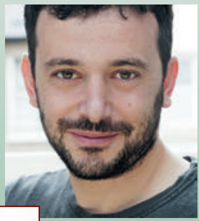
Следовательно, при делении на 9 первое число дает остаток 3, а второе — остаток 6. Поэтому их суммы цифр не могут быть равными.

ФОТО НА КОНКУРС

Каждый год для восьмиклассников проходит городской «Математический КВН». Тема этого года — «Числа вокруг нас». На фото — команда 8 «А» класса, победившая в номинации «Самая артистичная команда».

Команда веселых, находчивых и артистичных!

Автор: Т.В. Соколова, учитель математики средней школы № 18, г. Электросталь, Московская обл.



МАТЕМАТИКА — ЭТО ШУТКА

Беллос А. Красота в квадрате. Как цифры отражают жизнь и жизнь отражает цифры / пер. с англ. Н. Яцюк. — М.: Манн, Иванов и Фербер, 2015.

Мысль автора книги кажется вам парадоксальной?

«Понять математику — это то же самое, что уловить смысл шутки. Мыслительный процесс в обоих случаях один и тот же».

Это было лишь самое первое впечатление, а затем вспомнился один мой ученик, который как бы говорил мне: «Да, это так». На уроках математики он прилагал огромные усилия, чтобы добиться успехов, весьма скромных с точки зрения программы, но чрезвычайно значимых с точки зрения его самоощущения и развития его личности. Он получал удовольствие от решения банальных примеров, да и чувства юмора ему было не занимать. Я ему верю.

«Удовольствие от хорошей шутки и озарение в математике — эмоции одного порядка. Именно поэтому понимание математики может быть настолько приятным и захватывающим».

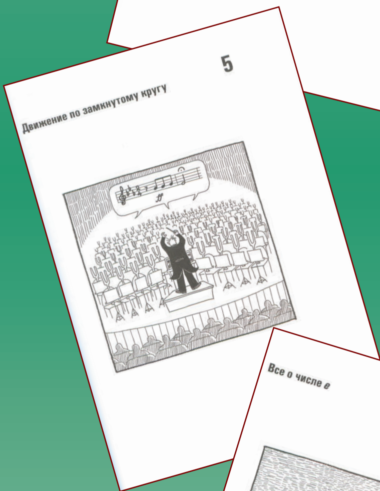
Верю и автору книги, он-то в математике профи, да и изучал не только математику, но и философию, и не где-нибудь, а в Оксфорде, работает куратором научного музея и ведет математическую колонку в «Гардиан». И он умеет писать — научно-популярные бестселлеры, принадлежащие его перу, получили уже не одну литературную премию. На русском языке выходила его книга «Алекс в Стране Чисел. Необычайное путешествие в волшебный мир математики».

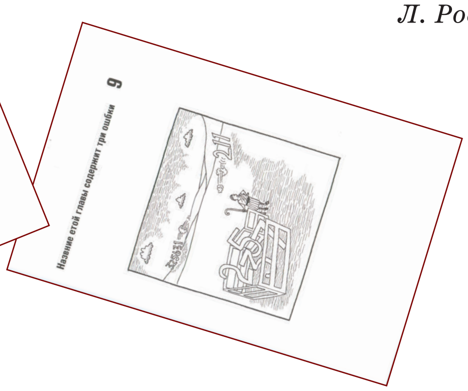
Ему удается рассказать о математике увлекательно и красиво, просто о сложном. Он показывает, что математика окружает нас повсюду, что «числа правят миром»: нет такой области человеческой деятельности, где были бы не нужны математические идеи.

Ради чего читать эту книгу учителю математики, ведь он и так любит свой предмет? Ради эмоций и новых озарений. Чтобы привнести в свои уроки нотку современности, легкости и раскрепощенности. И юмора.

Приятного чтения вам и вашим ученикам!

Л. Рослова





Н. АВИЛОВ,
avilow@rambler.ru,
ст. Егорлыкская, Ростовская обл.

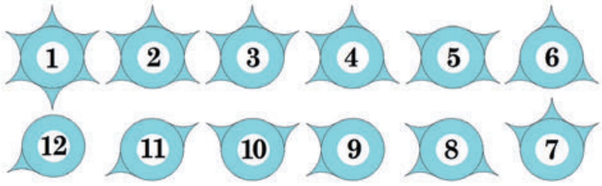
СНЕЖИНКА ИЗ КАПЕЛЕК

Ведущий рубрики — Николай Иванович Авилов — на фоне своей коллекции головоломок

Снежинка — один из символов зимы и Нового года. К новогоднему празднику принято готовиться. Приготовимся и мы, сделав замечательную головоломку, чтобы потом порадовать необычным заданием своих гостей.

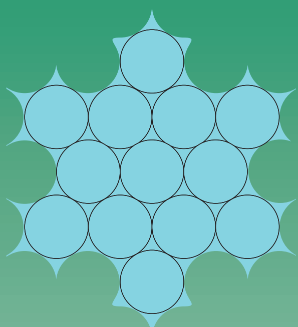
Но сначала познакомимся с головоломкой времен СССР, которую в то время неофициально называли «Капельки». Ее элементы построены на основе плотной упаковки кругов на плоскости.

Каждый элемент головоломки содержит один круг из такой упаковки и несколько примыкающих к нему криволинейных треугольников в различных комбинациях. Всего таких элементов 12, не считая симметричных, все они изображены на рисунке. Некоторые из них действительно похожи на капельки.



Головоломка содержит 13 элементов, элемент № 12 включен дважды. Единственное задание этой головоломки заключается в упаковке всех 13 элементов в фигурную коробку, изображенную на фото. При этом элементы головоломки можно и поворачивать, и переворачивать на другую сторону.

Нарисовав циркулем на картоне или плотной бумаге несколько кругов наиплотнейшей упаковки, можно вырезать игровые элементы, руководствуясь приведенным выше рисунком. Головоломка трудная, хотя имеет, как утверждают ее разработчики, 1641 различное решение. Убедиться в этом можно, если решать головоломку, не подсматривая на приведенное фото с решением. Попробуйте.



В собранном виде головоломка похожа на скопление снежинок. А давайте сложим одну, но большую снежинку, изображенную слева. В преддверии приближающегося Нового года это будет кстати.

Проанализировав количественный состав кругов и криволинейных треугольников снежинки, приходим к выводу, что сложить ее из элементов головоломки «Капельки» можно, если чуть-чуть изменить игровой набор, добавив к 12 основным элементам еще один элемент № 7.

С давних пор снежинки являются объектами математических исследований. Иоганн Кеплер в своем трактате «Новогодний подарок, или о Шестиугольных снежинках» пытался объяснить их шестиугольную природу, но первым обосновал, почему снежинки имеют шестиугольную форму, Рене Декарт.

Наша новогодняя снежинка тоже шестиугольной формы и тоже состоит из капелек. Так что с наступающим Новым годом вас, любители головоломок журнала «Математика»!

К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru (Решение головоломки.)

Букингемский дворец

В мае 2015 года исполнилось 20 лет со дня окончательного доказательства Великой теоремы Ферма. Как известно, эта честь принадлежит англичанину Эндрю Уайлсу.

История иногда совершает интересные повороты. Одна из самых интересных историй в науке связана именно с этой теоремой.

Пьер Ферма, который в 1637 г. сформулировал теорему, названную его именем, родился в 1601 г. во Франции. А в 1603 г. умерла английская королева Елизавета I. Как известно, Ферма не хватило всего лишь полей книги, чтобы записать доказательство, а вот математикам не хватило 350 лет, чтобы доказательство найти. А нашлось оно в годы правления второй Елизаветы на британском престоле.

В Букингемском дворце хранят традиции своего народа и государства, одна из которых – отмечать рыцарством значительные достижения в науке. Так было с сэром Исааком Ньютоном. Так же и с сэром Эндрю Уайлсом. Интересно, где происходит посвящение в рыцари? Наверное, в тронном зале дворца, но это всего лишь моя гипотеза. Надо проверять.

Мы начали наше путешествие в Кембридже, где Уайлс родился, где им была прочитана лекция с доказательством Великой теоремы, и в Оксфорде, где он учился. Конечно, для математического путешествия это не случайно. Британия сильна своими традициями не только государственными, но и математическими. Есть они и у нас. Главное, чтобы мы не забывали о них: не только хранили, но и развивали.

Л. Рослова