Решения задач 11 класса

1. Придя со школы домой, Вася обнаружил, что его квартиру затопили соседи сверху и вода продолжает литься с потолка с постоянной скоростью. Вася берёт ведро и тряпку и начинает собирать с пола воду. Если бы Вася пришёл на час раньше, то он бы собрал всю воду с пола за 1 час, а если бы пришёл на час позже, то за 3 часа. За сколько часов соберёт всю воду Вася, если он собирает её с постоянной скоростью?

Ответ: за 2 часа.

Решение. Пусть A литров в час – скорость, с которой льётся вода с потолка, C литров воды в час собирает Вася и D литров воды на полу было к моменту его прихода. Тогда скорость уменьшения воды на полу во время Васиной уборки равна (C – A) литров в час. Если бы Вася пришёл на час раньше, то к моменту его прихода на полу было бы (D – A) литров воды, а поскольку он справился бы в этом случае за 1 час, то

$$D - A = C - A\ . \qquad (1)$$

Если бы Вася пришёл на час позже, то к моменту его прихода на полу было бы (D + A) литров воды, а поскольку он справился бы в этом случае за 3 часа, то

$$D + A = 3(C - A). \qquad (2)$$

Сложив равенства (1) и (2) и поделив обе части на 2, получим $D = 2(C - A)$. Пусть t – время в часах, которое понадобится Васе на то, чтобы собрать всю воду. Тогда $t = \frac{D}{C-A} = 2$.

Критерии.

Обоснованно получен верный ответ – **7 баллов.**
Задача решена для конкретных значений A, C и D – **1 балл.**

2. Вычислите без использования калькулятора $\sin\frac{\pi}{8}\sin\frac{3\pi}{16}\sin\frac{5\pi}{16}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{8}$.

Решение. Обозначим $\varphi = \frac{\pi}{16}$. Используя формулы $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$ и $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, получаем

$$\sin\frac{\pi}{8}\sin\frac{3\pi}{16}\sin\frac{5\pi}{16} = \sin 2\varphi\,(\sin 3\varphi\sin 5\varphi) = \frac{1}{2}\sin 2\varphi\,(\cos 2\varphi - \cos 8\varphi) =$$

$$= \frac{1}{2}\sin 2\varphi\left(\cos 2\varphi - \cos\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\sin 2\varphi\cos 2\varphi = \frac{1}{4}\sin 4\varphi = \frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{8}.$$

Критерии.

Обоснованно получен верный ответ – **7 баллов.**

Решение в целом верное, но получен неверный ответ в результате ошибки в нахождении табличного значения тригонометрической функции, например, обоснованно получено значение выражения $\frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{4}$, которое неверно посчитано – **1 балл.**

3. Петя написал на доске 4 различных квадратных трёхчлена вида $x^2 + px + q$. Оказалось, что каждый из них имеет два различных корня и что корень каждого трёхчлена является корнем ещё ровно одного из этих трёхчленов. Затем Петя сложил все эти трёхчлены и получил новый квадратный трёхчлен. Докажите, что этот квадратный трёхчлен имеет хотя бы один корень.

Решение. Пусть x_1 и x_2 – корни одного из трёхчленов, обозначим его $f_1(x)$. По теореме Виета $f_1(x) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2$. Число x_2 является корнем ещё одного трёхчлена, обозначим его $f_2(x)$. Пусть x_3 – второй корень этого трёхчлена, причём $x_3 \neq x_1$. Тогда $f_2(x) = x^2 - (x_2 + x_3)x + x_2x_3$. Число x_3 является корнем ещё одного трёхчлена, обозначим его $f_3(x)$. Если вторым его корнем является x_1, то тогда у четвёртого трёхчлена не будет общих корней с предыдущими тремя трёхчленами, что противоречит условию. Следовательно, вторым корнем трёхчлена $f_3(x)$ является некоторое число x_4, не совпадающее с числами x_1, x_2, x_3, и тогда $f_3(x) = x^2 - (x_3 + x_4)x + x_3x_4$. Получаем, что x_4 является также корнем четвёртого трёхчлена $f_4(x)$, а его вторым корнем является x_1, т.е. $f_4(x) = x^2 - (x_4 + x_1)x + x_4x_1$. Пусть $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + f_4(x)$. Тогда

$$f(x) = 4x^2 - 2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)x + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1) =$$
$$= 4x^2 - 2\big((x_1 + x_3) + (x_2 + x_4)\big)x + (x_1 + x_3)(x_2 + x_4) = 4\left(x - \tfrac{x_1+x_3}{2}\right)\left(x - \tfrac{x_2+x_4}{2}\right),$$

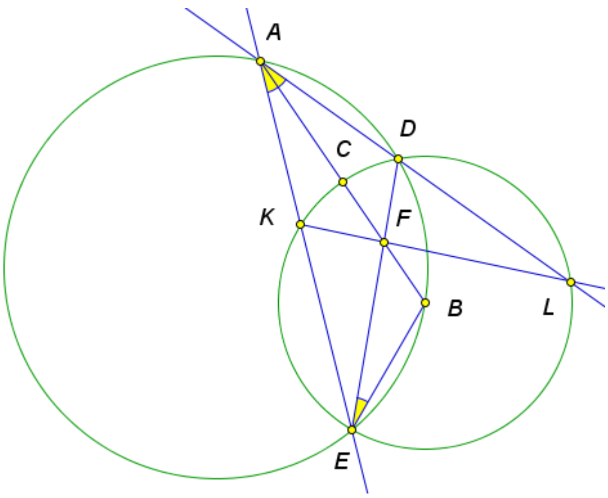
Следовательно, трёхчлен $f(x)$ имеет корни $\frac{x_1+x_3}{2}$ и $\frac{x_2+x_4}{2}$ (возможно, совпадающие).

Критерии.

Верное, обоснованное решение – **7 баллов.**

Решение верное, но пропущено обоснование того, что 4 пары корней квадратных трёхчленов – это пары (x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_4), (x_4, x_1), – **6 баллов.**

4. На хорде *AB* окружности *S* отмечена её середина – точка *C*, и через эту точку проведена окружность S_1 с центром в точке *B*, пересекающая первую окружность в точках *D* и *E*. Прямые *AE* и *AD* вторично пересекают окружность S_1 в точках *K* и *L*. Докажите, что прямая *KL* делит отрезок *BC* пополам.



Решение. Пусть *F* – точка пересечения прямых *AB* и *KL*. Проведём прямую *DE*. Поскольку $BE = BD$, то $\angle BAE = \angle BAD$ (равные хорды стягивают равные дуги, а на равные дуги опираются равные вписанные углы), следовательно, *AB* – биссектриса угла $\angle DAE$. Рассмотрим осевую симметрию относительно прямой *AB*. При этой симметрии окружность S_1 перейдёт в себя (так как её центр лежит на *AB*), прямая *AD* перейдёт в *AE*, поэтому точки пересечения *D* и *L* этих прямых с окружностью S_1 перейдут в точки *K* и *E* соответственно, а прямая *DE* перейдёт в *KL*. Точка пересечения этих прямых перейдёт сама в себя, следовательно, она лежит на прямой *AB*, и поэтому она совпадает с точкой *F*. Итак, мы показали, что прямые *AB*, *ED* и *KL* пересекаются в одной точке *F*. Треугольник *ABE* подобен треугольнику *EBF* по двум углам ($\angle BAE = \angle BED$ как вписанные углы, опирающиеся на равные дуги, $\angle EBA$ – общий), поэтому $BE : BA = BF : BE$. Но $AB = 2BC = 2BE$, следовательно, $BF = \frac{BE}{2} = \frac{BC}{2}$, что и требовалось доказать.

Критерии.

Полное, обоснованное решение – **7 баллов.**

Решение в целом верное, но в нём без обоснования используется тот факт, что прямые AB, DE и KL пересекаются в одной точке (при отсутствии других пробелов в доказательстве) **– 3 балла.**

Задача не решена, но доказано равенство углов $\angle BAE$ и $\angle BED$ – **1 балл.**

5. Существует ли натуральное нечётное число, представимое в виде суммы своих различных натуральных делителей (возможно, не всех, а лишь некоторых)?

Ответ: да, существует.

Решение. Можно привести несколько примеров таких чисел, например, $15015 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$. Сумма всех его делителей, кроме него самого, 1, 3, 77 и $3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13$, равна

$$4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 14 - 1 - 3 - 77 - 2145 - 15015 = 15015.$$

Ещё один пример – $1575 = 9 \cdot 25 \cdot 7$. Сумма всех его делителей, кроме него самого, 63, 7, 3 и 1, равна $(1 + 3 + 9)(1 + 5 + 25)(1 + 7) - 1575 - 63 - 7 - 3 - 1 = 1575$.

Также подходит $945 = 27 \cdot 5 \cdot 7$. Это наименьшее из чисел, удовлетворяющих условию задачи. Сумма всех его делителей, кроме него самого, 27 и 3, равна

$$(1 + 3 + 9 + 27)(1 + 5)(1 + 7) - 945 - 27 - 3 = 945.$$

Также могут быть найдены и другие числа, удовлетворяющие условию задачи.

Критерии.

Верно найдено хотя бы одно число, удовлетворяющее условию задачи, и указано, сумме каких своих делителей оно равно – **7 баллов** (если число не совпадает с указанным в авторском решении, необходимо аккуратно проверить, удовлетворяет оно условию задачи или нет).

Приведено число, удовлетворяющее условию задачи, с обоснованием его получения, но не показано, какие его делители в сумме дают это число **– 3 балла.**