**Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике 2012-2013**

**Задачи для 10-11-х классов**

**Задача 1.** Две точки пересечения графиков функций $y=x^{2}+px-q$ и $y=-x^{2}+qx+p$ лежат на биссектрисе первого и третьего координатных углов. Найдите $p$ и $q$.

**Ответ:** $p=q=1$.

**Решение.** Поскольку уравнение биссектрисы первого и третьего координатных углов имеет вид $y=x$, то системы уравнений $\left\{\begin{matrix}y=x^{2}+px-q,\\y=x\end{matrix}\right.$ и $\left\{\begin{matrix}y=-x^{2}+qx+p,\\y=x\end{matrix}\right.$ имеют одинаковые решения. Следовательно, уравнения $x^{2}+px-q=x$ и $-x^{2}+qx+p=x$ имеют одинаковые решения. Последние уравнения равносильны уравнениям $x^{2}+(p-1)x-q=0$ и $x^{2}+\left(1-q\right)x-p=0$. Поскольку это приведённые квадратные уравнения, то они имеют одинаковые наборы из двух корней только в случае равенства их соответствующих коэффициентов (это следует из теоремы Виета), т.е. $p-1=1-q$ и $-q=-p$. Отсюда получаем, что $p=q=1$. Проверим, что в указанном случае у графиков действительно есть точки пересечения. Решив систему, находим, что эти точки (1;1) и (-1;-1).

**Критерии.** Угаданы коэффициенты $p$ и $q$ (приведены без обоснования того, что это единственно возможные коэффициенты) и проведена проверка того, что точки пересечения графиков лежат на прямой $y=x$, – оценка 1 балл. Верно найдены $p$ и $q$, но не проведена проверка – 6 баллов.

**Задача 2.** Даны четыре целых числа. Известно, что сумма любых трёх из них делится на 2012. Докажите, что каждое число делится на 2012.

**Решение.** Обозначим эти числа $a$, $b$, $c$ и $d$, их сумму обозначим через $S$. Тогда найдутся такие целые числа $k$, $l$, $m$ и $n$, что $a+b+c=2012k$, $a+b+d=2012l$, $a+c+d=2012m$ и $b+c+d=2012n$. Сложив эти равенства, получим $3\left(a+b+c+d\right)=2012(k+l+m+n)$, т.е. $3S=2012(k+l+m+n)$. Следовательно, $3S$ делится на $2012$, а так как $НОД(3, 2012)=1$, то $S$ делится на 2012. Поскольку $a=S-\left(b+c+d\right)$, то $a$ делится на 2012. Аналогично получаем для других чисел.

**Критерии.** Верно получено, что утроенное число делится на 2012, откуда делается вывод о том, что само число делится на 2012, без ссылки на взаимную простоту 3 и 2012 – минус 2 балла.

**Задача 3.** В окружность с центром в точке $O$ вписан треугольник $ABC$. Биссектриса угла $A$ пересекает окружность в точке $D$. Докажите, что угол $ADO$ равен полуразности углов $B$ и $C$ треугольника $ABC$.

**Решение.** Если $∠ABC=∠ACB$, то дуги $AC$ и $AB$ равны, поскольку на них опираются равные углы $B$ и $C$; дуги $CD$ и $BD$ также равны, поскольку на них опираются равные углы $BAD$ и $CAD$. Следовательно, $AD$ – диаметр окружности и угол $ADO$ равен нулю. Предположим, что $∠ABC>∠ACB $. Обозначим углы $A$, $B$ и $C$ треугольника $ABC$ через $α$, $β$ и $γ$ соответственно. Пусть $E$ – ещё одна точка пересечения прямой $DO$ и окружности. Точка $A$ лежит на дуге $EBD$ (действительно, так как $∠ABC>∠ACB$, то меньшая дуга $AC$ больше меньшей дуги $AB$, а поскольку точка $E$ делит дугу $BEC$ пополам, то $A$ принадлежит меньшей дуге $EB$). Градусные меры дуг $BD$ и $CD$ равны $α$, поскольку на них опираются углы $BAD$ и $CAD$, равные $\frac{α}{2}$ . Градусная мера дуги $AB$ равна $2γ$, следовательно, $∠AED=\frac{\breve{AB}+\breve{BD}}{2}=γ+\frac{α}{2}$ . Угол $DAE$ прямой, поскольку опирается на диаметр $DE$, следовательно, $∠ADO+∠AED=90°$. Поэтому $∠ADO=90°-∠AED=90°-\left(γ+\frac{α}{2}\right)=90°-\left(γ+\frac{180°-β-γ}{2}\right)=\frac{β-γ}{2}$.

**Критерии.** Не разобран случай равных углов – минус 2 балла. Разобран только случай равных углов – оценка 1 балл.

**Задача 4.** Докажите неравенство $\frac{1}{2+x-2y}+\frac{1}{2+y-2x}\geq \frac{2}{3-x-y}$ для всех $x,y\in (0;1]$.

**Решение.** 1-й способ. Из условия следует, что все знаменатели положительны. Умножим обе части неравенства на произведение этих знаменателей, получим равносильное неравенство

$(\left(2+y-2x\right)+\left(2+x-2y\right))(3-x-y)\geq 2\left(2+x-2y\right)\left(2+y-2x\right)$,

т.е. $(4-x-y)(3-x-y)\geq 2(4-2x^{2}-2y^{2}+5xy-2x-2y)$, а это равносильно неравенству $5x^{2}+5y^{2}-8xy-3x-3y+4\geq 0$. Последнее неравенство можно переписать в виде

$4\left(x-y\right)^{2}+\left(1-x\right)^{2}+\left(1-y\right)^{2}+(2-x-y)\geq 0$.

Оно верно, поскольку каждое слагаемое в левой части неотрицательно.

2-й способ. Из известного неравенства $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq \frac{4}{a+b} $, которое верно для всех положительных $a$ и $b$, следует, что $\frac{1}{2+x-2y}+\frac{1}{2+y-2x}\geq \frac{4}{4-x-y} $. Теперь осталось доказать, что $\frac{4}{4-x-y}\geq \frac{2}{3-x-y} $, а это неравенство равносильно $2-x-y\geq 0$.

**Критерии.** Не указано, что все знаменатели положительные – минус 1 балл. Не указано, что все переходы равносильны – минус 1 балл.

**Задача 5.** Два игрока поочерёдно вписывают натуральные числа в таблицу 2 ×2 до тех пор, пока таблица не будет заполнена полностью. После этого они вычисляют число *x*, равное разности между произведением двух чисел первой строки и произведением двух чисел второй строки. Второй игрок побеждает, если *x* — ненулевое число, модуль которого не превышает наименьшего из чисел, записанных в таблице; в противном случае побеждает первый игрок. Кто из игроков выиграет при правильной игре?

**Ответ:** первый игрок.

**Решение.** Своим начальным ходом первый игрок может вписать число 2 в любую клетку первой строки. Рассмотрим все возможные варианты продолжения игры.

1) Пусть второй игрок вписал в одну из свободных клеток число *n* > 2. Тогда первый игрок вписывает число *n* в клетку другой строки. Если *m* — это четвёртое вписанное в таблицу число, то *x* = 2*n* – *mn*, т.е. число *x* делится на *n*. Следовательно, либо *x* = 0, либо |*x*| не меньше, чем *n*, а значит, строго больше наименьшего из чисел таблицы.

2) Пусть второй игрок вписал в одну из свободных клеток число 1. Тогда своим ходом первый игрок вписывает в пустую клетку второй строки число 2. Ясно, что в этом случае *x* заведомо окажется чётным числом. Итак, либо выполнено *x* = 0, либо |*x*| не меньше 2, т.е. строго больше наименьшего из чисел таблицы.

3) Пусть второй игрок вписал в одну из клеток второй строки число 2. Тогда первый игрок вписывает в одну из свободных клеток число 1, что фактически сводит игру к уже рассмотренному случаю 2).

4) Нам остаётся разобрать случай, когда второй игрок вписал число 2 в единственную остававшуюся свободной клетку первой строки. Тогда первый игрок вписывает в клетку второй строки число 4. В этом случае число *x* обязательно будет делиться на 4. Поэтому либо *x* = 0, либо |*x*| не меньше 4, т.е. строго больше наименьшего из чисел таблицы.