**Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике 2012-2013**

**Задачи для 10-11-х классов**

**Задача 1.** Две точки пересечения графиков функций и лежат на биссектрисе первого и третьего координатных углов. Найдите и .

**Ответ:** .

**Решение.** Поскольку уравнение биссектрисы первого и третьего координатных углов имеет вид , то системы уравнений и имеют одинаковые решения. Следовательно, уравнения и имеют одинаковые решения. Последние уравнения равносильны уравнениям и . Поскольку это приведённые квадратные уравнения, то они имеют одинаковые наборы из двух корней только в случае равенства их соответствующих коэффициентов (это следует из теоремы Виета), т.е. и . Отсюда получаем, что . Проверим, что в указанном случае у графиков действительно есть точки пересечения. Решив систему, находим, что эти точки (1;1) и (-1;-1).

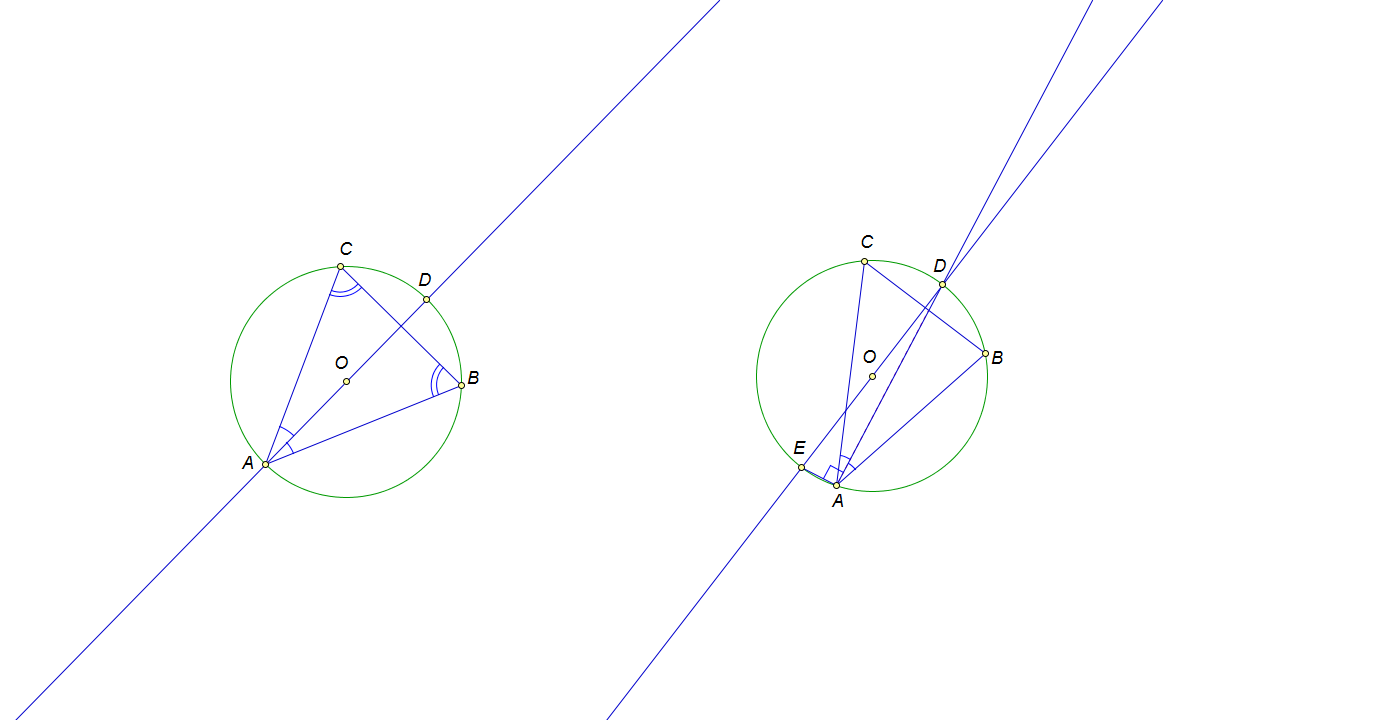
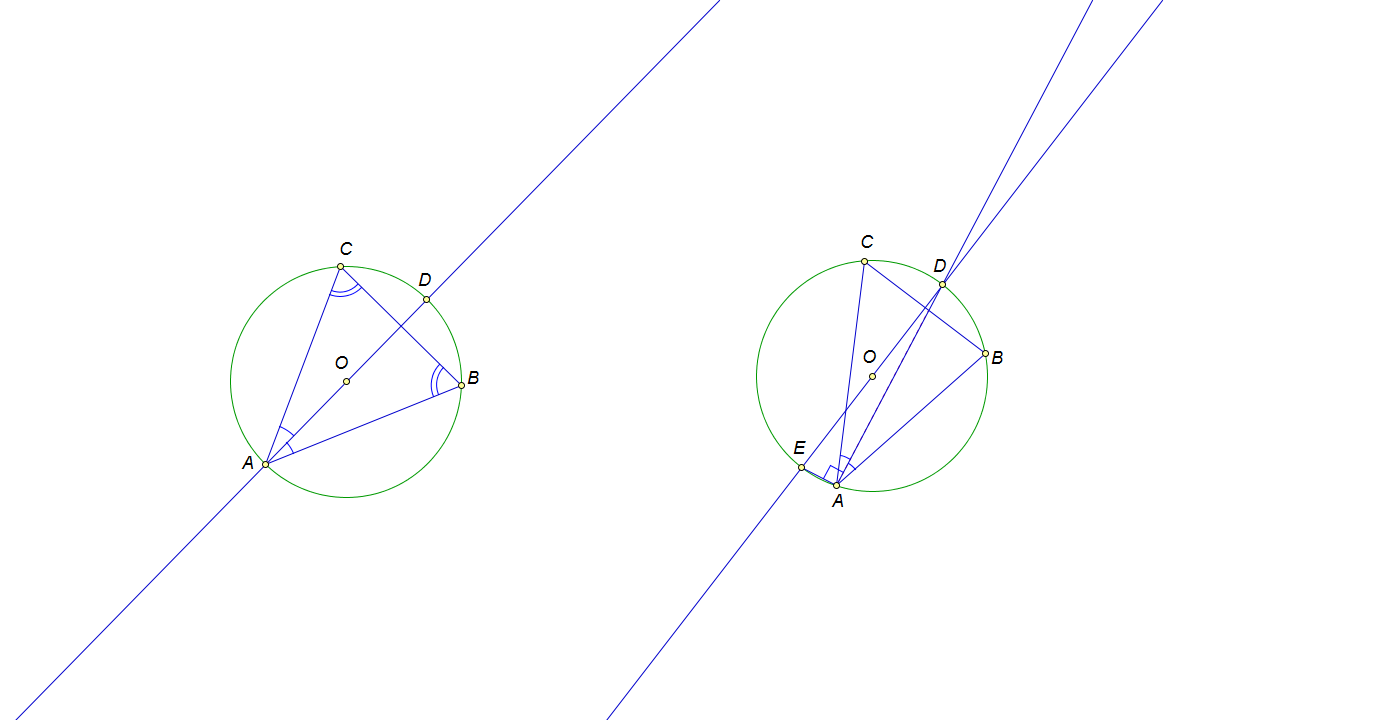
**Критерии.** Угаданы коэффициенты и (приведены без обоснования того, что это единственно возможные коэффициенты) и проведена проверка того, что точки пересечения графиков лежат на прямой , – оценка 1 балл. Верно найдены и , но не проведена проверка – 6 баллов.

**Задача 2.** Даны четыре целых числа. Известно, что сумма любых трёх из них делится на 2012. Докажите, что каждое число делится на 2012.

**Решение.** Обозначим эти числа , , и , их сумму обозначим через . Тогда найдутся такие целые числа , , и , что , , и . Сложив эти равенства, получим , т.е. . Следовательно, делится на , а так как , то делится на 2012. Поскольку , то делится на 2012. Аналогично получаем для других чисел.

**Критерии.** Верно получено, что утроенное число делится на 2012, откуда делается вывод о том, что само число делится на 2012, без ссылки на взаимную простоту 3 и 2012 – минус 2 балла.

**Задача 3.** В окружность с центром в точке вписан треугольник . Биссектриса угла пересекает окружность в точке . Докажите, что угол равен полуразности углов и треугольника .

**Решение.** Если , то дуги и равны, поскольку на них опираются равные углы и ; дуги и также равны, поскольку на них опираются равные углы и . Следовательно, – диаметр окружности и угол равен нулю. Предположим, что . Обозначим углы , и треугольника через , и соответственно. Пусть – ещё одна точка пересечения прямой и окружности. Точка лежит на дуге (действительно, так как , то меньшая дуга больше меньшей дуги , а поскольку точка делит дугу пополам, то принадлежит меньшей дуге ). Градусные меры дуг и равны , поскольку на них опираются углы и , равные . Градусная мера дуги равна , следовательно, . Угол прямой, поскольку опирается на диаметр , следовательно, . Поэтому .

**Критерии.** Не разобран случай равных углов – минус 2 балла. Разобран только случай равных углов – оценка 1 балл.

**Задача 4.** Докажите неравенство для всех .

**Решение.** 1-й способ. Из условия следует, что все знаменатели положительны. Умножим обе части неравенства на произведение этих знаменателей, получим равносильное неравенство

,

т.е. , а это равносильно неравенству . Последнее неравенство можно переписать в виде

.

Оно верно, поскольку каждое слагаемое в левой части неотрицательно.

2-й способ. Из известного неравенства , которое верно для всех положительных и , следует, что . Теперь осталось доказать, что , а это неравенство равносильно .

**Критерии.** Не указано, что все знаменатели положительные – минус 1 балл. Не указано, что все переходы равносильны – минус 1 балл.

**Задача 5.** Два игрока поочерёдно вписывают натуральные числа в таблицу 2 ×2 до тех пор, пока таблица не будет заполнена полностью. После этого они вычисляют число *x*, равное разности между произведением двух чисел первой строки и произведением двух чисел второй строки. Второй игрок побеждает, если *x* — ненулевое число, модуль которого не превышает наименьшего из чисел, записанных в таблице; в противном случае побеждает первый игрок. Кто из игроков выиграет при правильной игре?

**Ответ:** первый игрок.

**Решение.** Своим начальным ходом первый игрок может вписать число 2 в любую клетку первой строки. Рассмотрим все возможные варианты продолжения игры.

1) Пусть второй игрок вписал в одну из свободных клеток число *n* > 2. Тогда первый игрок вписывает число *n* в клетку другой строки. Если *m* — это четвёртое вписанное в таблицу число, то *x* = 2*n* – *mn*, т.е. число *x* делится на *n*. Следовательно, либо *x* = 0, либо |*x*| не меньше, чем *n*, а значит, строго больше наименьшего из чисел таблицы.

2) Пусть второй игрок вписал в одну из свободных клеток число 1. Тогда своим ходом первый игрок вписывает в пустую клетку второй строки число 2. Ясно, что в этом случае *x* заведомо окажется чётным числом. Итак, либо выполнено *x* = 0, либо |*x*| не меньше 2, т.е. строго больше наименьшего из чисел таблицы.

3) Пусть второй игрок вписал в одну из клеток второй строки число 2. Тогда первый игрок вписывает в одну из свободных клеток число 1, что фактически сводит игру к уже рассмотренному случаю 2).

4) Нам остаётся разобрать случай, когда второй игрок вписал число 2 в единственную остававшуюся свободной клетку первой строки. Тогда первый игрок вписывает в клетку второй строки число 4. В этом случае число *x* обязательно будет делиться на 4. Поэтому либо *x* = 0, либо |*x*| не меньше 4, т.е. строго больше наименьшего из чисел таблицы.