## Решения задач 10 класса

**1. Вася хочет купить в магазине несколько одинаковых шоколадок и планирует потратить на них некоторую сумму денег. Придя в магазин, Вася увидел, что эти шоколадки продаются со скидкой в 40% и потратил на них на 40% больше денег, чем планировал. Какое количество шоколадок он купил, если известно, что оно меньше 10? Ответ обоснуйте.**

**Ответ:** 7.

**Решение.** Пусть шоколадка стоила 10 у.е. (условных единиц) и пусть Вася планировал купить $n$ таких шоколадок. Тогда он собирался потратить $10n$ у.е. Шоколадка со скидкой стоит 6 у.е., пусть Вася купил $k$ шоколадок. Тогда он потратил на них $6k$ у.е. Число, которое на 40% больше, чем $10n$, равно $14n$. Получаем уравнение $6k = 14n$, т.е. $3k = 7n$. Тогда $3k$ кратно 7, т.е. $k$ кратно 7, а поскольку $k$ меньше 10, то $k = 7$.

**Критерии.**

Обоснованно получен верный ответ – **7 баллов.**
Верный ответ $k = 7$ получен перебором всех возможных вариантов $k = 1, 2, \dots, 9$, – **7 баллов.**
Обоснованно получен верный ответ для конкретного числового значения цены шоколадки (10 рублей, 100 рублей и т.п.) **– 6 баллов.**
В решении приведён пример того, что Вася мог купить 7 шоколадок, т.е. написано, сколько стоила шоколадка, сколько она стала стоить, сколько Вася планировал купить и сколько купил в итоге, но не доказано, что он не мог купить другое количество шоколадок – **2 балла.**
Записан только верный ответ без обоснования – **1 балл.**

**2. Докажите, что если $a^2 + 4ab + b^2$ кратно трём, где $a$ и $b$ – целые числа, то $a^3 - b^3$ кратно девяти.**

**Решение.**

**1-й способ.** Та как числа $a^2 + 4ab + b^2$ и $3ab$ кратны трём, то $a^2 + ab + b^2 = (a^2 + 4ab + b^2) - 3ab$ кратно трём и $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 = a^2 + 4ab + b^2 - 6ab$ кратно трём. Отсюда следует, что $a - b$ кратно трём, тогда $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ кратно 9.

**2-й способ.** Пусть $a = 3k + x,\ b = 3n + y$, где $k, n, x, y$ – целые числа, $x$ и $y$ – остатки от деления чисел $a$ и $b$ на 3, которые могут принимать значения 0, 1 или 2. Тогда

$$a^2 + 4ab + b^2 = (3k + x)^2 + 4(3k + x)(3n + y) + (3n + y)^2 =$$

$$= 3(3k^2 + 2kx + 12kn + 4nx + 4ky + xy + 3n^2 + 2ny) + x^2 + xy + y^2.$$

Поскольку $a^2 + 4ab + b^2$ кратно трём, то и $x^2 + xy + y^2$ кратно трём. Возможны 3 случая.
1) Если $x = 0$, то $y^2$ кратно трём, следовательно, $y = 0$.
2) Если $x = 1$, то $y^2 + y + 1$ кратно трём, следовательно, $y = 1$.
3) Если $x = 2$, то $y^2 + 2y + 4$ кратно трём, следовательно, $y = 2$.
Мы получили, что в любом случае $x = y$. Тогда

$$a^3 - b^3 = (3k + x)^3 - (3n + x)^3 = (27k^3 + 27k^2x + 9kx^2 + x^3) - (27n^3 + 27n^2x + 9nx^2 + x^3) =$$

$$= 9(3k^3 - 3n^3 + 3(k^2 - n^2)x + (k - n)x^2).$$

**Критерии.**

Приведено полное доказательство – **7 баллов.**
Доказательство отсутствует, вместо этого выбраны конкретные значения $a$ и $b$, удовлетворяющие условию задачи, и для них проверено утверждение задачи – **0 баллов.**

**3. На координатной плоскости нарисованы две пересекающиеся параболы, являющиеся графиками двух квадратичных функций. $A$ и $C$ – точки их пересечения, $B$ и $D$ – их вершины. Оказалось, что $ABCD$ – параллелограмм, центр которого находится в начале координат. Найдите уравнение второй параболы, если уравнение первой $y = ax^2 + bx + c$.**

**Ответ:** $y = -ax^2 + bx - c$.

**Решение.**

**1-й способ.** Обозначим уравнение $y = ax^2 + bx + c$ символом (*). Пусть $(x_0, y_0)$ – координаты вершины $B$ первой параболы, тогда координаты вершины $D$ второй параболы равны $(-x_0, -y_0)$. Пусть $(x_1, y_1)$ – координаты точки $A$. Тогда координаты точки $C$ равны $(-x_1, -y_1)$. Покажем, что точки $A$, $C$ и $D$ принадлежат параболе с уравнением

$$y = -ax^2 + bx - c. \quad (**)$$

Так как точка $B(x_0, y_0)$ принадлежит параболе с уравнением (*), то $y_0 = a{x_0}^2 + bx_0 + c$. Тогда $-y_0 = -a{x_0}^2 - bx_0 - c$ и значит точка $D(-x_0, -y_0)$ принадлежит параболе с уравнением (**). Так как точка $A(x_1, y_1)$ принадлежит параболе с уравнением (*), то точка $C(-x_1, -y_1)$ аналогично принадлежит параболе с уравнением (**), а так как точка $C(-x_1, -y_1)$ принадлежит параболе с уравнением (*), то точка $A(x_1, y_1)$ принадлежит параболе с уравнением (**). Известно, что через три точки на координатной плоскости, не лежащие на одной прямой, можно провести только одну параболу, являющуюся графиком квадратичной функции, поэтому уравнение (**) является искомым.

**2-й способ.** Пусть $y = a'x^2 + b'x + c'$ – уравнение второй параболы, обозначим его (***). Так как выражения $ax^2 + bx + c$ и $a'x^2 + b'x + c'$ принимают одинаковые значения в точках $x_1$ и $(-x_1)$, то выражение $ax^2 + bx + c - (a'x^2 + b'x + c') = (a - a')x^2 + (b - b')x + (c - c')$ принимает нулевые значения в этих точках. Тогда по теореме Виета имеем $(b' - b) : (a - a') = x_1 + (-x_1) = 0$, т.е. $b' = b$. Записав в виде равенств условие, что точка $A$ принадлежит первой параболе, а точка $C$ – второй, с учётом равенства $b' = b$ имеем

$$y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c, \qquad (1)$$

$$-y_1 = a'x_1^2 - bx_1 + c'. \quad (2)$$

Найдём абсциссы вершин парабол. Для первой параболы имеем $x_0 = -\frac{b}{2a}$, для второй $-x_0 = -\frac{b'}{2a'} = -\frac{b}{2a'}$, т.е. $\frac{b}{2a'} = -\frac{b}{2a}$. Отсюда следует, что либо $b = b' = 0$, либо $a' = -a$.

В первом случае, если $b = 0$, то $x_0 = 0$, $y_0 = c$, $-y_0 = c'$, т.е. $c' = -c$. Тогда складывая равенства (1) и (2), получим $0 = (a + a')x_1^2$, а так как $x_1 \neq 0$, то $a' = -a$.

Во втором случае, если $b \neq 0$, то $a' = -a$. Тогда складывая равенства (1) и (2), получим $0 = c + c'$, т.е. $c' = -c$.

Итак, получаем, что уравнение второй параболы $y = -ax^2 + bx - c$.

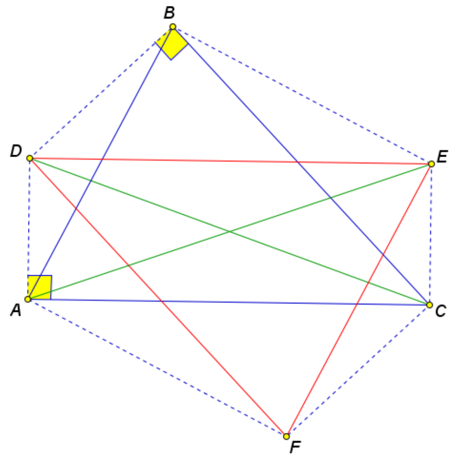
**Критерии.**

Обоснованно получен верный ответ – **7 баллов.**

Проверено, что график функции $y = -ax^2 + bx - c$ содержит точки $A$, $C$ и $D$, но не сказано, что такая функция единственная (доказательство этого факта приводить не обязательно) – **5 баллов.**

**4. В остроугольном треугольнике $ABC$ через каждую вершину проведены перпендикуляры к исходящим из этой вершины сторонам. Получившиеся 6 прямых, пересекаясь, образуют шестиугольник $ADBECF$. Докажите, что треугольники $ABC$ и $EFD$ равны.**

**Решение.** Докажем, что $DE = AC$. Так как $\angle DBC = \angle DAC = 90°$, то четырёхугольник $ADBC$ вписанный, т.е. точки $A, D, B, C$ лежат на одной окружности. Аналогично доказывается, что точки $E$ и $F$ лежат на той же окружности. Следовательно, получившийся шестиугольник – вписанный. Вписанные прямые углы $\angle CAD$ и $\angle ACE$ опираются на диаметр, следовательно, $AE$ и $DC$ – диаметры окружности, описанной около $ADBECF$, поэтому $\angle ADE = \angle DEC = 90°$, т.е. $ADEC$ – прямоугольник и поэтому $AC = DE$. Аналогично доказывается, что $BC = DF$ и $AB = EF$, следовательно, треугольники $ABC$ и $EFD$ равны.




**Критерии.**

Приведено полное доказательство – **7 баллов.**

В решении без обоснования утверждается, что четырёхугольники *ADEC*, *BDFC* и *ABEF* являются прямоугольниками и отсюда выводится равенство треугольников – **0 баллов.**

**5. На столе лежат 10 карточек: на первой написано «1», на второй «2», и т.д., на десятой «10». Петя и Вася играют в следующую игру. Они по очереди в открытую берут себе карточки с числами. У каждого есть две возможности: либо взять карточку со стола с самым маленьким номером из всех оставшихся, либо взять карточку у своего соперника. Петя может взять у Васи только карточку с чётным числом, а Вася может взять у Пети только карточку с нечётным числом. Игра заканчивается в тот момент, когда со стола взята последняя карточка. После этого каждый игрок подсчитывает сумму чисел на своих карточках. У кого сумма больше, тот и выиграл. Кто выиграет при правильной игре, если первым ходит Петя?**

**Ответ:** Петя.

**Решение.**

Чтобы выиграть, Пете нужно придерживаться следующей стратегии: если у Васи есть карточка с чётным номером, Петя должен её забрать, а если нет, то взять карточку со стола. Покажем, что играя таким образом, Петя выиграет.

Каждую игровую позицию мы можем записать в виде трёх наборов чисел: $(a_1, \dots, a_n)$, $(b_1,\dots, b_k)$, $(c_1,.., c_m)$, где первый набор чисел – это числа на Петиных карточках, второй набор чисел – это числа на Васиных карточках, третий – это числа на карточках, лежащих на столе. Если в каком-то наборе нет чисел, то будем его обозначать скобками без чисел. После первого хода Пети имеем: (1), (), (2,3,4,5,6,7,8,9,10). Если Петя каждым следующим ходом будет забирать у Васи все появляющиеся у него карточки с чётными числами, то после каждого Петиного хода у Васи могут оставаться карточки только с нечётными номерами. Обозначим через $S_1$ и $S_2$ суммы чисел на карточках у Пети и у Васи соответственно после окончания игры. Если последний ход сделал Петя, то он забрал со стола карточку «10» и у него теперь есть все карточки с чётными номерами (и, быть может, ещё какие-то), а у Васи только карточки с нечётными номерами, поэтому $S_1 \geq 2+4+6+8+10 = 30 > 25 = 1 + 3+5+7+9 \geq S_2$ и Петя выиграл. Если последний ход сделал Вася, то он забрал со стола карточку «10», и это единственная имеющаяся у него «чётная» карточка. Покажем, что тогда карточка «9» осталась у Пети.

Предположим, что это не так. Тогда перед последним ходом Васи игровая позиция была такой: (*,2,4,6,8), (*,9), (10) (символ * означает возможно присутствующие в наборе другие числа). Следовательно, Петя своим последним ходом взял карточку с числом, меньшим, чем 9. Со стола он не мог её взять, так как на столе не может лежать карточка с числом, меньшим, чем число на карточке у одного из игроков. Кроме того, «чётные» карточки у Пети появляются в порядке

возрастания, поэтому последним своим ходом Петя взял у Васи карточку «8», а перед последним ходом Пети игровая позиция была такой: (*,2,4,6), (*,8,9), (10). Далее, возможны 2 варианта:
1) предпоследним ходом Вася взял «9» со стола;
2) предпоследним ходом Вася взял «нечётную» карточку у Пети.
В любом из случаев после предпоследнего хода Пети у Васи была «чётная» карточка «8», а такого быть не могло, так как Петя своими ходами не оставляет у Васи «чётных» карточек.

Мы показали, что если последним ходом Вася забрал карточку «10», то карточка «9» досталась Пете. Тогда $S_1 \geq 2+4+6+8+9=29>1+3+5+7+10=26 \geq S_2$, и выиграл Петя.

**Критерии.**

Приведено полное решение с описанием стратегии для Пети и доказательством того, что она выигрышная **– 7 баллов.**
Описана стратегия для Пети, совпадающая с авторской, и показано, что Петя выиграет в случае, если ему принадлежит последний ход в игре, но не рассмотрен или не полностью разобран случай, когда последний ход в игре принадлежит Васе **– 4 балла.**
Имеется только описание стратегии для Пети, совпадающее с авторским, без доказательства того, что эта стратегия выигрышная **– 2 балла.**
Если в решении приведена стратегия для Пети, отличающаяся от авторской, без доказательства того, что она выигрышная, то проверяющему необходимо самостоятельно выяснить, будет ли она выигрышной. Если да **– 2 балла.**
Дан только ответ «Петя» без указания стратегии **– 0 баллов.**