Всероссийская олимпиада школьников по математике,

муниципальный этап, 2015 г

10 класс, решения

1. Алёша и Боря поочерёдно берут конфеты из одного пакета. Алёша берёт одну конфету, Боря две, затем Алёша берёт три конфеты, Боря четыре, и т.д. Когда количество оставшихся в пакете конфет станет меньше либо равно количеству, которое взяли предыдущим ходом, тот мальчик, чья очередь наступила, берёт все оставшиеся конфеты. Сколько конфет было в пакете первоначально, если у Бори в итоге оказалось 2015 конфет?

Ответ: 4040.

Решение. Найдём, сколько всего ходов мог сделать Боря. Пусть перед последним ходом он сделал n ходов. Тогда за n ходов он взял всего $2+4+6+\ldots+2n=n(n+1)$ конфет, причём это количество не больше 2015. Имеем неравенство $n(n+1)\leq 2015$, решая которое получаем, что $n\leq\frac{\sqrt{8061}-1}{2}\approx 44{,}4$. Следовательно, $n\leq 44$. Если $n\leq 43$, то за n ходов Боря возьмёт не более, чем $43\cdot 44=1892$ конфеты, тогда последним ходом ему придётся взять не менее, чем 123 конфеты. Это невозможно, так как перед этим ходом было взято не более 87 конфет. Следовательно, $n=44$. Когда у Бори набирается следующая сумма конфет:

$$2+4+6+\ldots+88=(2+88)\times 22=1980,$$

то на следующем ходу он берёт оставшиеся 35, поскольку 35 < 90. Поэтому Алёша за все предыдущие ходы накопил

$$1+3+5+\ldots+89=45\times 45=2025.$$

Следовательно, всего в пакете было 4040 конфет.

Критерии.

Получено верное решение – 7 баллов.

Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

2. Две машины ехали по трассе со скоростью 90 км/ч на расстоянии 1 км друг от друга. Затем дорога пошла в гору и их скорость снизилась до 70 км/ч. После этого начался спуск и их скорость увеличилась до 100 км/ч, после спуска началась грунтовая дорога и их скорость упала до 45 км/ч. Каким стало расстояние между ними?

Ответ: 500 м.

Решение. Когда первая машина подъехала к основанию горы, вторая отставала от неё на 1 км. За время, которое потребовалось второй машине на этот 1 км, первая проехала $1 \cdot \frac{70}{90} = \frac{7}{9}$ км, т.е. начальное расстояние умножилось на отношение скоростей, и это расстояние сохранялось между ними до того момента, как первая машина подъехала к спуску. Рассуждая аналогично, получаем, что когда обе машины находились на спуске, расстояние между ними было $\frac{7}{9} \cdot \frac{100}{70} = \frac{10}{9}$ км, а когда обе машины находились на грунтовой дороге, расстояние между ними было $\frac{10}{9} \cdot \frac{45}{100} = \frac{1}{2} = 0{,}5$ км.

Критерии.

Обоснованно получен верный ответ – 7 баллов.

Правильный ответ без обоснования или с неверным обоснованием – 0 баллов.

3. Найдите все простые числа p и q такие, что $p^q - pq$ тоже простое число.

Ответ: $p = 2, q = 3$ и $p = 3, q = 2$.

Решение. Так как $p^q - pq = p(p^{q-1} - q)$, то простым это число может быть только в случае равенства второго множителя единице, т.е. $p^{q-1} - q = 1$ или $p^{q-1} = q + 1$. В этом равенстве p и q одновременно нечётными быть не могут, так как в этом случае правая часть равенства чётна, а левая нечётна. Значит, одно из чисел p и q чётно, а так как они простые, то чётное число – это 2. Если $q = 2$, то $p^1 = 2 + 1$, т.е. $p = 3$. Если $p = 2$, то $2^{q-1} = q + 1$. При $q \geq 4$ имеет место неравенство $2^{q-1} > q + 1$ (это неравенство доказывается методом математической индукции). При $q = 3$ имеем равенство $2^{3-1} = 3 + 1$.

Критерии.

Получены оба решения с полным обоснованием – 7 баллов.

Обоснованно получено только одно из решений – 2 балла.

Решение верное, но не доказано неравенство $2^{q-1} > q + 1$ при $q \geq 4$ – 5 баллов.

Правильный ответ без обоснования – 0 баллов.

4. Петя написал в тетради многочлен $x^2 + px + q$ (p и q – некоторые числа) и нашёл его корни. Затем он уменьшил коэффициенты p и q на одно и то же число и снова нашёл корни. Оказалось, что корни увеличились на 1. Затем он увеличил исходные коэффициенты p и q на другое число и снова нашёл корни. Оказалось, что корни исходного многочлена увеличились в 2 раза. Найдите p и q.

Ответ: 3 и 1.

Решение. Пусть x_1 и x_2 – корни исходного многочлена. Тогда по теореме Виета $x_1 + x_2 = -p$, $x_1x_2 = q$. Пусть Петя уменьшил коэффициенты на a, получился многочлен $x^2 + (p-a)x + q - a$. Его корни равны $x_1 + 1$ и $x_2 + 1$. Тогда по теореме Виета

$$(x_1+1)+(x_2+1) = -p+a, \quad (x_1+1)(x_2+1) = q-a, \quad \text{т.е.}$$
$$x_1+x_2+2 = -p+a,\ x_1x_2+(x_1+x_2)+1 = q-a.$$

Подставив в эти формулы $(-p)$ вместо $x_1 + x_2$ и q вместо x_1x_2, получим $a = 2$ и $-p + 1 = -a$, отсюда $p = 3$.

Пусть после этого Петя увеличил коэффициенты на b, получился многочлен $x^2 + (p+b)x + q + b$. Его корни равны $2x_1$ и $2x_2$. Тогда по теореме Виета имеем

$$2x_1 + 2x_2 = -p - b, \quad 2x_1 \cdot 2x_2 = q + b, \text{ т.е.}$$
$$2(x_1+x_2) = -p-b,\ 4x_1x_2 = q+b.$$

Подставив в эти формулы $(-p)$ вместо $x_1 + x_2$ и q вместо x_1x_2, получим

$$-2p = -p - b, 4q = q + b,$$

Отсюда $b = p = 3$, $q = \frac{b}{3} = 1$.

Критерии.

Получено верное решение – 7 баллов.

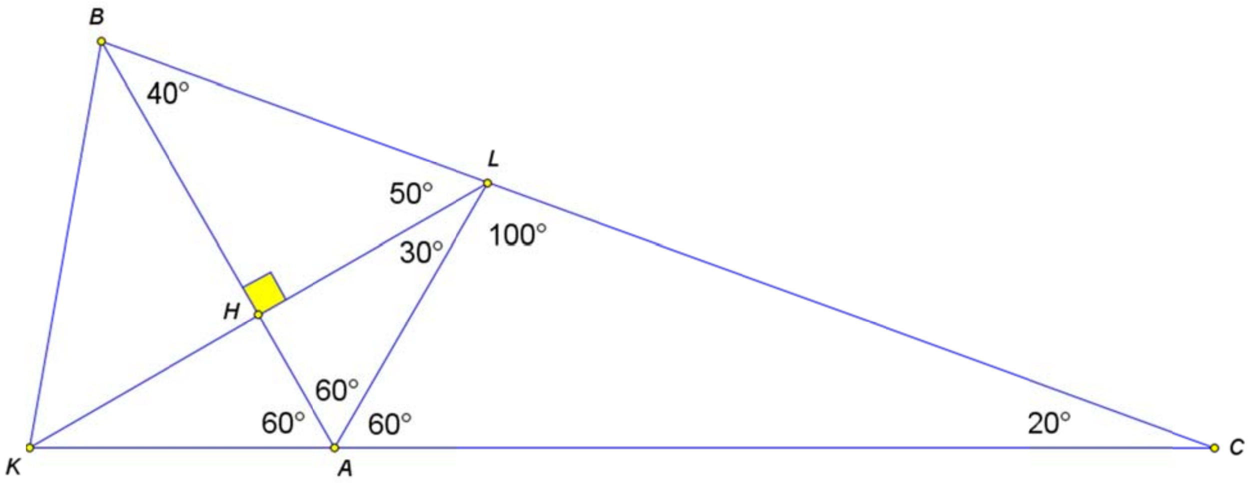
5. В треугольнике ABC с углами B и C, равными $40°$ и $20°$ соответственно, проведена биссектриса AL. Докажите, что $AL + AC = BC$.

Решение.

Отложим на прямой AC за точку A отрезок $KA = AL$. Тогда $KC = KA + AC = AL + AC$. Соединим точку K с точками B и L. Пересечение KL и AB обозначим через H. Докажем, что треугольник BCK – равнобедренный. Углы KAB, BAL, LAC равны по $60°$. Значит, AB – биссектриса угла KAL в равнобедренном треугольнике KAL, следовательно, AB – серединный перпендикуляр отрезка KL. Углы LKA и KLA равны по $30°$. Значит, угол BLK равен $180° - 100° - 30° = 50°$. Треугольники BHL и BHK симметричны относительно AB, следовательно, $\angle KBC = \angle KBA + \angle ABC = 40° + 40° = 80°$; $\angle BKC = 180° - \angle KCB - \angle KBC = 180° - 20° - 80° = 80°$. Получаем, что треугольник BCK – равнобедренный, $BC = KC = KA + AC = AL + AC$.

Критерии.

Получено верное решение – 7 баллов.


B
40°
L
50°
30°
100°
H
60°
60°
60°
20°
K
A
C